

Конечномерные квазипредставления связных групп Ли и гипотеза Мищенко*

А. И. ШТЕРН

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: ashtern@member.ams.org

УДК 512.546+517.986.6+512.815.1

Ключевые слова: квазипредставление, группа Ли, теорема ван дер Вардена об автоматической непрерывности, группа разрывов гомоморфизмов.

Аннотация

В статье дано описание структуры всех конечномерных локально ограниченных квазипредставлений произвольных связных групп Ли и приведено доказательство гипотезы Мищенко для связных локально компактных групп и доказательство аналога теоремы ван дер Вардена (т. е. условия автоматической непрерывности всех локально ограниченных конечномерных представлений) для коммутанта произвольной связной группы Ли.

Abstract

A. I. Shtern, Finite-dimensional quasirepresentations of connected Lie groups and Mishchenko's conjecture, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 7, pp. 85–225.

In this paper, a description of the structure of all finite-dimensional, locally bounded quasirepresentations of arbitrary connected Lie groups is given and the proof of Mishchenko's conjecture for connected, locally compact groups and a proof of an analog of the van der Waerden theorem (i.e., the automatic continuity condition for all locally bounded, finite-dimensional representations) for the commutator subgroup of an arbitrary connected Lie group are presented.

Содержание

Введение	88
1. Обобщения теоремы ван дер Вардена о непрерывности	90
1.1. Предварительные сведения об условиях непрерывности гомоморфизмов топологических групп	96
1.1.1. Группа разрывов относительно компактного гомоморфизма топологических групп	96

*Работа частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 05-01-00923).

1.1.2.	Условия непрерывности некоторых гомоморфизмов топологических групп	102
1.2.	Вариант теоремы Ли для не обязательно непрерывных гомоморфизмов разрешимых групп Ли	104
1.2.1.	Вариант теоремы Ли для конечномерных неприводимых представлений разрешимых групп Ли	104
1.2.2.	Некоторые следствия	107
1.2.3.	Условия непрерывности для конечномерных представлений группы Ли $SL(2, R)$	108
1.3.	Аналоги теоремы ван дер Вардена о непрерывности	109
1.3.1.	Теорема ван дер Вардена о непрерывности для полупростых групп Ли	109
1.3.2.	Теорема ван дер Вардена для коммутанта связной группы Ли	110
1.4.	Свойства группы разрывов гомоморфизмов локально компактных групп	118
1.4.1.	Свойства группы разрывов гомоморфизмов локально компактных групп	118
1.4.2.	Связность группы разрывов конечномерных локально ограниченных представлений связных локально компактных групп	119
1.4.3.	Некоторые примеры и следствия	121
1.5.	Непрерывность представлений в терминах колебания в точке и гипотеза Мищенко	124
1.5.1.	Условия непрерывности представлений в терминах колебания в точке	124
1.5.2.	Гипотеза Мищенко для связных групп Ли	127
1.5.3.	Группа финальных разрывов гомоморфизма локально компактных групп	128
1.5.4.	Гипотеза Мищенко для связных локально компактных групп	134
2.	Отображения, близкие к представлениям банаховых алгебр и топологических групп, и аменабельные банаховы алгебры	135
2.1.	Банаховы бимодули, дуальные бимодули и умножения Аренса . . .	137
2.1.1.	Банаховы бимодули	137
2.1.2.	Проективное тензорное произведение	137
2.2.	Аменабельные банаховы алгебры	138
2.2.1.	Основные определения	138
2.2.2.	Теорема Джонсона об аменабельных локально компактных группах	139
2.2.3.	Теория Джонсона AMNM-пар	139
2.3.	Квазипредставления групп	142
2.3.1.	Определение квазипредставления. Основные свойства . . .	142

2.3.2. Операции над ε -квазипредставлениями	147
2.3.3. Непрерывные почти гомоморфизмы групповых алгебр и ограниченные измеримые ε -квазипредставления локально компактных групп	149
2.4. Псевдопредставления	151
2.4.1. Определение псевдопредставления	151
2.4.2. Чистые псевдопредставления	152
2.5. Структура конечномерных квазипредставлений групп. Квазихарактеры и псевдохарактеры	152
2.5.1. Определения и основные свойства	152
2.5.2. Ограниченность коциклов Гишарде—Вигнера	157
2.5.3. Структура конечномерных квазипредставлений групп	168
3. Конечномерные квазипредставления групп Ли	176
3.1. Коммутаторы в компактных группах Ли	177
3.1.1. Определения	177
3.1.2. Лемма о коммутаторах в банаховых алгебрах	178
3.2. Теорема о квазигомоморфизмах полупростых компактных групп Ли	178
3.2.1. Квазипредставления полупростых компактных групп Ли	178
3.2.2. Квазигомоморфизмы полупростых компактных групп Ли	183
3.3. Структура конечномерных локально ограниченных квазипредставлений групп Ли	184
3.3.1. Автоматическая непрерывность псевдохарактеров	184
3.3.2. Доказательство теоремы 3.3.2	185
3.3.3. Одномерные квазипредставления групп Ли	187
3.3.4. Автоматическая непрерывность и другие свойства квазипредставлений групп Ли	192
3.3.5. Локально ограниченные конечномерные квазипредставления полупростых групп Ли	192
3.3.6. Локально ограниченные конечномерные квазипредставления связных групп Ли	202
3.4. Заключительные замечания	206
3.4.1. Замечания о «теореме тривиальности»	206
3.4.2. Заключительные замечания и нерешённые задачи	207
4. Дополнение. Обзор близких результатов	208
4.1. Аппроксимативные представления C^* -алгебр	208
4.2. Вариант проблемы Серра	211
Литература	213

Учиться можно у железной дороги — что, опоздав на миг, можно упустить всё, у телеграфа — что каждое слово идёт в счёт, и у телефона — что то, что мы говорим здесь, могут услышать там.

Вернер Гейзенберг, Физика и философия

Введение

В статье дано описание структуры всех конечномерных локально ограниченных квазипредставлений произвольных связных групп Ли и приведено доказательство гипотезы Мищенко для связных локально компактных групп и доказательство аналога теоремы ван дер Вардена (т. е. условия автоматической непрерывности всех локально ограниченных конечномерных представлений) для коммутанта произвольной связной группы Ли. Представлены необходимые для этого изложения понятия и факты теории отображений групп, равномерно близких к представлениям и гомоморфизмам (так называемых квазипредставлений), и соответствующих отображений групповых алгебр, для чего потребовалась и некоторая информация об АМNM-отображениях общих банаховых алгебр. Кроме того, изложено доказательство «теоремы тривиальности» для конечномерных унитарных квазипредставлений компактных групп Ли (используемой в доказательстве основного результата и утверждающей, что любое, не обязательно непрерывное, конечномерное унитарное квазипредставление с малым дефектом полупростой компактной группы Ли близко к обычному непрерывному представлению этой группы), что приводит к примерам неаменабельных МАР-групп, все конечномерные унитарные квазипредставления которых (с достаточно малым дефектом) являются возмущениями обычных представлений. Указаны приложения к варианту проблемы Серра о подгруппах конечного индекса во вполне несвязных группах и приведён краткий обзор родственных результатов теории асимптотических представлений C^* -алгебр.

Перейдём к изложению содержания статьи. Раздел 1 посвящён автоматической непрерывности представлений и гомоморфизмов групп Ли. В разделе 1.1, носящем вспомогательный характер, вводится группа разрывов относительно компактного гомоморфизма топологических групп, изучаются её простейшие свойства и некоторые предварительные условия непрерывности гомоморфизмов топологических групп (в частности, напоминаются результаты об автоматической непрерывности представлений с непрерывными подпредставлениями и непрерывными представлениями в подфактор-пространствах). В разделе 1.2 излагается вариант теоремы Ли об одномерности (не обязательно непрерывных) неприводимых представлений разрешимых локально компактных групп, допускающих конечный композиционный ряд с безгранично делимыми факторами, и приводятся следствия этого аналога теоремы Ли, включающие условия непрерывности для конечномерных представлений группы Ли $SL(2, \mathbb{R})$. Аналоги теоремы ван дер Вардена о непрерывности (для полупростых групп Ли

и для коммутанта связной группы Ли) доказываются в разделе 1.3. В разделе 1.4 изучаются общие свойства группы разрывов локально ограниченного гомоморфизма локально компактных групп и устанавливается связность группы разрывов локально ограниченных гомоморфизмов и конечномерных представлений связных локально компактных групп. Вопрос о непрерывности представлений групп Ли в терминах колебаний в точке обсуждается в разделе 1.5, где также доказывается гипотеза Мищенко для связных локально компактных групп.

В разделе 2 приводятся понятия и факты теории отображений групп, равномерно имитирующих представления и гомоморфизмы (так называемых квазипредставлений), и соответствующих отображений групповых алгебр, что потребовало некоторой информации об АМНМ-отображениях общих банаховых алгебр. Подготавливается доказательство «теоремы тривиальности» для конечномерных унитарных квазипредставлений компактных групп Ли с достаточно малым дефектом. С этой целью в первых двух подразделах напоминаются некоторые общие вопросы теории возмущений и когомологий банаховых алгебр и элементы теории аменабельных алгебр по Джонсону и излагаются общие определения и факты о квазипредставлениях. В разделе 2.1 приводится необходимая информация о банаховых бимодулях, дуальных бимодулях и умножении Аренса. В разделе 2.2 вводятся аменабельные банаховы алгебры и строится аппроксимативная диагональ в аменабельной банаховой алгебре, вводятся так называемые АМНМ-алгебры и АМНМ-пары и приводится теорема Джонсона, утверждающая, что для любого аппроксимативно мультипликативного отображения аменабельной банаховой алгебры в банахову алгебру, являющуюся дуальным банаховым пространством, существует близкий гомоморфизм. В разделе 2.3 вводятся квазипредставления групп, в разделе 2.4 — псевдопредставления и чистые псевдопредставления, а в разделе 2.5 обсуждаются квазихарактеры и псевдохарактеры на общих группах и группах Ли (включая свойства псевдохарактеров Радемахера и ограниченность коциклов Гишарде—Вигнера) и приводится общее утверждение о структуре конечномерных квазипредставлений произвольных групп.

В разделе 3 излагается «теорема тривиальности» для конечномерных унитарных квазипредставлений компактных групп Ли с достаточно малым дефектом, а также изучается структура и даётся полное описание конечномерных локально ограниченных квазипредставлений связных групп Ли. В разделе 3.1 приводятся основные свойства коммутаторов в компактных группах Ли и банаховых алгебрах. В разделе 3.2 изучена структура квазигомоморфизмов полупростых компактных групп Ли. Основные результаты статьи собраны в разделе 3.3. Здесь устанавливаются специальные свойства одномерных псевдопредставлений и вещественных псевдохарактеров на группах Ли, включая автоматическую непрерывность этих отображений на связных полупростых группах Ли и другие свойства автоматической непрерывности конечномерных квазипредставлений связных групп Ли, и даётся полное описание всех конечномерных локально ограниченных квазипредставлений связных полупростых групп Ли и связных

групп Ли общего вида (в терминах представлений). Одним из наиболее запоминающихся утверждений этого раздела является утверждение о возможности аппроксимировать любое локально ограниченное конечномерное квазипредставление связной группы Ли некоторым чистым псевдопредставлением этой группы (и ошибка аппроксимации, грубо говоря, мала при малом дефекте). Здесь также сформулирован ряд замечаний и описаны некоторые нерешённые задачи. В дополнении приведены результаты работ В. М. Мануйлова, А. С. Мищенко, К. Томсена и ряда других авторов по аппроксимативным представлениям C^* -алгебр и указано приложение результатов о непрерывности к одному из вариантов (недавно полностью решённой) проблемы Серра о замкнутости подгрупп конечного индекса в некоторых проконечных группах.

Некоторые результаты статьи были приведены в докладах автора на Международном конгрессе математиков в Берлине в 1998 г., на конференции по геометрии на острове Узедом в 1999 г. и на конференции Янджонского математического общества в Майсуре в Индии в 2003 г. Значительная часть результатов автора, отражённых в статье, была анонсирована в [32, 33, 35–43, 214–228] и изложена в ряде докладов на семинаре А. С. Мищенко, В. М. Мануйлова и Е. В. Троицкого в МГУ. Автор признателен руководителям и участникам семинара за доброжелательное внимание. Автор также горячо признателен за разнообразную бесценную помощь в процессе сбора литературы и подготовки материалов статьи, которую ему оказывали М. С. Аверинцева, А. Д. Изаак, Е. А. Смыка и А. Хотцель.

Для ссылок по теории представлений групп мы используем книги [104, 181], по теории групп Ли — [3, 20, 21, 181, 240], а по гармоническому анализу и теории топологических групп — [24] (и иногда [128]). По всем вопросам, касающимся топологических векторных пространств, мы отсылаем читателя к [25], по вопросам теории инвариантных средних — к [4, 153, 188], общей топологии — к [45], теории C^* -алгебр — к [6, 8, 234], теории W^* -алгебр — к [234], геометрической теории групп — к [117], теории гомологий и когомологий групп и алгебр — к [3, 20, 22, 23], теории полупростых групп Ли — к [21, 181, 240] теории нормированных линейных пространств — к [7].

1. Обобщения теоремы ван дер Вардена о непрерывности

Одним из наиболее неожиданных результатов теории представлений полупростых компактных групп Ли остаётся теорема ван дер Вардена об автоматической непрерывности всех локально ограниченных конечномерных представлений таких групп [239]. Это свойство не имеет места для бесконечномерных представлений каких-либо недискретных топологических групп, даже в более узком классе унитарных представлений. Действительно, любая бесконечная топологическая группа G имеет унитарное представление, являющееся регулярным

представлением группы G , рассматриваемой в дискретной топологии, и это представление непрерывно тогда и только тогда, когда сама группа дискретна. С другой стороны, свойство автоматической непрерывности локально ограниченных конечномерных представлений может нарушаться даже в более узком классе конечномерных унитарных представлений полупростой компактной топологической группы, если эта группа не является группой Ли. Действительно, пусть G — прямое произведение счётного числа экземпляров некоторой полупростой компактной группы Ли K , $G = K^{\mathbb{N}}$ (скажем, при $K = \mathrm{SU}(2)$). Группа K линейна, т. е. имеет точное тавтологическое конечномерное унитарное представление, поэтому любой матричный элемент f_{ij} любого элемента группы $f = \{f_{ij}\} \in G$ определяет (ограниченную) функцию $f_{ij}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$. Применяя к каждой такой функции некоторый фиксированный характер χ банаховой алгебры $B(\mathbb{N})$ ограниченных комплекснозначных функций, не определяемый отображением взятия значения функции в какой-либо точке множества $\mathbb{N}$, мы получаем конечномерное унитарное матричное представление $f = \{f_{ij}\} \rightarrow \{\chi(f_{ij})\}$ группы G , и это представление очевидным образом разрывно (подробности приведены в примере 1.4.9). По этой причине кажется естественным изучать свойство автоматической непрерывности (без каких-либо дополнительных условий) только в классе локально ограниченных конечномерных представлений групп Ли и в несколько более общем классе локально ограниченных гомоморфизмов групп Ли, а условия непрерывности представлений и гомоморфизмов более общих локально компактных групп должны включать некоторые дополнительные условия.

Между тем, как мы увидим, феномен автоматической непрерывности локально ограниченных конечномерных представлений группы существен и при изучении явлений устойчивости, связанных с представлениями, т. е. при изучении структуры квазипредставлений данной группы. А именно, в классе групп, допускающих феномен ван дер Вардена, оказывается возможным получить содержательную информацию не только о структуре самих представлений, но и о месте, которое обычные представления занимают в семействе локально ограниченных конечномерных квазипредставлений таких групп (физически содержательном и феноменологически осмысленном, поскольку и локальная ограниченность, и отсутствие заметного в наблюдениях расхождения между образом произведения и произведением образов выглядят разумными условиями наблюдений и измерений).

Напомним, что в [239] ван дер Варден доказал, что любое конечномерное *унитарное* представление произвольной полупростой компактной группы Ли автоматически непрерывно — именно в этой форме результат ван дер Вардена чаще всего цитируется — а затем переформулировал утверждение в приведённом выше виде. Именно в этой «унитарной» форме теорема ван дер Вардена оказала сильное влияние на складывавшуюся в ту пору теорию конечномерных представлений полупростых групп Ли и вызвала к жизни обширную литературу, в том числе содержащую «обратную» теорему (о полупростоте компактных групп Ли, любые конечномерные локально ограниченные представления которых автоматически непрерывны). Напомним, что существует много, а именно

$2^{2^{\aleph_0}}$, разрывных унитарных характеров на числовой прямой $\mathbb{R}$ и одномерном торе $\mathbb{T}$ (в связи с существованием базиса Гамеля, см., например, [24, (25.6)]), и поэтому характеры, представления и гомоморфизмы коммутативных и разрешимых групп Ли не обязаны быть непрерывными. Были установлены связи между теоремой ван дер Вардена и свойствами боровских компактификаций топологических групп, что позволило ввести и изучить классы так называемых групп и алгебр ван дер Вардена (этот термин имеет несколько значений; например, он может означать автоматическую непрерывность морфизмов в компактные объекты или автоматическую непрерывность всех автоморфизмов). И сейчас, спустя более чем 70 лет после публикации статьи [239], теорема ван дер Вардена входит в монографии и обзоры в различных формах (см., например, [121]) и многократно передоказывалась (в частности, её доказательство было существенно упрощено в важном частном случае группы $SO(3)$). В круге результатов о компактных группах теорема ван дер Вардена до сих пор выглядит наилучшей возможной.

Теорема ван дер Вардена — очень тонкий результат. Он заставляет обратить особое внимание на условие локальной ограниченности гомоморфизмов и конечномерных представлений (в более общих ситуациях — условие локальной эквинепрерывности). Начиная с 1933 г., насколько известно автору, это условие появлялось в той или иной, явной или скрытой форме почти во всех работах, посвящённых условиям непрерывности представлений — например, в знаменитой теореме о сильной непрерывности слабо непрерывных представлений локально компактных групп, в распространении этой теоремы на случай бочечных пространств, в теореме Лоуренса Брауна о непрерывности представлений с непрерывным подпредставлением и непрерывным представлением в соответствующем фактор-пространстве [65] и в серии работ автора о финитных условиях непрерывности представлений топологических групп и их приложениях [39—43, 218, 219, 221, 223]. Кроме того, ещё сам ван дер Варден показал [239], что условие локальной ограниченности нельзя просто опустить, по крайней мере для представлений полной линейной группы. Действительно, в [239] ван дер Варден предложил (для группы $SL(n, \mathbb{C})$) следующий способ построения примеров разрывных представлений полной линейной группы над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел (на самом деле этот способ может быть использован для любого конечномерного представления с недискретным образом (в комплексном векторном пространстве) связной локально компактной группы): если θ — разрывный автоморфизм* поля $\mathbb{C}$, то поэлементное применение этого автоморфизма к каждому матричному элементу любой из групп $SL(n, \mathbb{R})$, $SL(n, \mathbb{C})$, $GL(n, \mathbb{R})$, $GL(n, \mathbb{C})$ или $U(n)$ определяет разрывное конечномерное представление соответствующей группы. Нетрудно заметить, что если разрывный автоморфизм специальной линейной группы определён поэлементным применением разрывного автоморфизма поля $\mathbb{C}$, то ограничение этого автоморфизма на любую максимальную

*Существуют $2^{2^{\aleph_0}}$ разрывных автоморфизмов поля $\mathbb{C}$. Соответствующие ссылки можно найти в [44].

компактную подгруппу не может сохранять такую подгруппу. Действительно, в противном случае образ ограниченного интервала или диска в соответствующем поле (множестве значений матричного элемента компактной матричной группы) был бы ограничен, в то время как разрывный автоморфизм поля $\mathbb{C}$ не может быть ограничен как линейный оператор. Так что и с точки зрения условия локальной ограниченности теорема ван дер Вардена является наилучшей возможной.

Один из естественных вопросов, развивающих тему автоматической непрерывности конечномерных представлений топологических групп, связан с вопросом устойчивости теоремы ван дер Вардена. Оказывается, что любое (не обязательно непрерывное) отображение одной ортогональной группы в другую с равномерно малой разностью между образом произведения и произведением образов равномерно близко к обычному (и тем самым непрерывному) гомоморфизму одной группы в другую. Мы кратко излагаем доказательство в разделе 2 (подробности см. в [43, 227]). Для непрерывных отображений задача была положительно решена ещё Грове, Кархером и Ру в 1974 г. [114]; они доказали, что непрерывное отображение T компактной топологической группы G в пространство $\mathcal{L}(E)$ ограниченных операторов в банаховом пространстве E , удовлетворяющее условию

$$\|T(gh) - T(g)T(h)\| \leq \varepsilon \text{ для всех } g, h \in G,$$

является малым возмущением обычного непрерывного представления группы G и величина возмущения зависит от ε (интересное приложение результата Грове, Кархера и Ру к строению компактных групп автоморфизмов n -мерных комплексных многообразий указано в [163]). В 1977 г. де ла Гарпа и Каруби [118] получили этот результат другим способом с более точной количественной оценкой. В 1982 г. появилась статья Каждана [149], в которой был приведён вопрос, который Каждан приписал В. Мильману: верно ли, что для любого (не обязательно непрерывного) отображения одной ортогональной группы в другую с равномерно малой разностью между образом произведения и произведением образов существует равномерно близкий обычный гомоморфизм? Автор рассматривал только случай непрерывных отображений и повторил результат Грове, Кархера и Ру [114]; в статье рассматривался также соответствующий вопрос для аменабельных групп, но, как было отмечено уже в заметке Файзиева [18], Каждан полагал, что применение инвариантного среднего к непрерывной функции двух переменных по одному из переменных даёт непрерывную функцию одного переменного, что не так даже для почти периодических функций. (Как отмечено в [209], эта операция взятия среднего даже не всегда переводит непрерывную функцию в борелевскую.) Кроме того, метод де ла Гарпа и Каруби не допускал непосредственного распространения на аменабельный случай (за пределы праворавномерно непрерывных отображений), и задача о структуре квазипредставлений общих аменабельных локально компактных групп казалась очень трудной.

Исключительно важную роль сыграла возможность перехода к языку групповых алгебр. Ещё в 1972 г. Б. Е. Джонсон [137] ввёл аменабельные банаховы алгебры (банахова алгебра A называется *аменабельной*, если любое дифференцирование D из A в дуальный банахов A -модуль X^* имеет вид $D(a) = ax - xa$ для некоторого x из X^*) и доказал, что локально компактная группа аменабельна тогда и только тогда, когда её групповая алгебра $L^1(G)$ аменабельна [137]. В 1986—1987 гг. Б. Е. Джонсон ввёл «аппроксимативно мультипликативные» функционалы и отображения банаховых алгебр и, в частности, доказал, что для любого аппроксимативно мультипликативного отображения аменабельной банаховой алгебры в банахову алгебру, являющуюся дуальным банаховым пространством, существует близкий гомоморфизм [139, 141] (см. также [138, 142]). В частности, отсюда следует утверждение о существовании близких представлений к данному квазипредставлению аменабельной локально компактной группы в сопряжённом банаховом пространстве. Условия существования гомоморфизмов, близких к данному квазигомоморфизму, изучались также с 1940-х годов с различных точек зрения в [17, 26—28, 30, 32, 33, 50, 58, 102, 109—111, 114, 118, 125—127, 129—142, 149, 165—171, 204, 205, 210—214, 230]. Родственным задачам, в том числе разделяющим отображениям, посвящены статьи [47, 67, 68, 132].

В настоящем разделе мы обсуждаем и другой естественный вопрос, связанный с теоремой ван дер Вардена. Он относится к условиям непрерывности локально ограниченных конечномерных представлений топологических групп (в частности, локально компактных групп), которые не являются компактными группами Ли, и возникает, например, при изучении условий непрерывности (вообще говоря, бесконечномерных) представлений, аппроксимирующих данное слабо непрерывное квазипредставление аменабельной топологической группы [33, 43]. В связи с этим представляет интерес изучение условий непрерывности на основе оценки величины (сильного или слабого) колебания представления в точке, начатое в [35, 218], где постановка задачи мотивируется и подробно обсуждается (см. также [39, 41, 219, 221, 223]). В 2004 г. (при обсуждении одного из докладов автора на семинаре А. С. Мищенко, В. М. Мануйлова и Е. В. Троицкого в МГУ) А. С. Мищенко высказал неожиданную гипотезу, что для «хороших» топологических групп и их конечномерных представлений ρ единственными возможными значениями колебания ρ в единице группы являются величины 0, 2 и ∞ (при правильном подборе нормы в пространстве представления ρ).

Автору неизвестны попытки изучить условия автоматической непрерывности конечномерных представлений групп более общего вида (возможно, потому, что подход самого ван дер Вардена и его последователей, передоказывавших теорему о непрерывности, не мог быть непосредственно применён уже к некомпактным полупростым группам Ли), и поэтому поразительно, что именно условие локальной ограниченности, которое в явном виде было введено ван дер Варденом, является критерием непрерывности конечномерных представлений для широкого класса групп Ли. Грубо говоря, лозунг «ограниченный морфизм непрерывен», продуктивный в классе линейных операторов в нормированных пространствах, но неприменимый к коммутативным локально компактным группам, оказывает

ся продуктивным, в частности, для гомоморфизмов совершенных связных групп Ли.

Автору удалось доказать аналог теоремы ван дер Вардена для всех некомпактных полупростых групп Ли [224], а затем распространить это утверждение на некоторые группы Ли с нетривиальным радикалом [226]. Исчерпывающий результат в классе групп Ли приведён в [225] (он также изложен в [44]). Перед тем как формулировать утверждение, напомним два определения.

Определение 1.1. Пусть G — топологическая группа, и пусть π — (не обязательно непрерывное) представление группы G в нормированном пространстве E . Представление π называется *локально равномерно ограниченным* (или просто *локально ограниченным*), если существуют окрестность V единичного элемента e в G и такая постоянная C , что $\|\pi(g)\| \leq C$ для любого $g \in V$, где $\|\cdot\|$ — операторная норма в E .

Заметим, что класс локально равномерно ограниченных представлений топологической группы в данном конечномерном пространстве не зависит от выбора нормы в пространстве, поскольку пространства, получаемые введением различных норм в данном конечномерном векторном пространстве, изоморфны. Заметим также, что непрерывность представления группы Ли зависит только от поведения ограничения представления на связную компоненту единичного элемента. По этой причине при изучении вопросов непрерывности конечномерных представлений групп Ли можно ограничиться связными группами Ли.

Определение 1.2. Группа G называется *совершенной*, если она совпадает со своим *коммутантом*, т. е. с подгруппой, порождённой всевозможными коммутаторами $aba^{-1}b^{-1}$, $a, b \in G$.

Основной результат статьи [225] состоит в установлении критерия справедливости аналога теоремы ван дер Вардена в классе всех связных групп Ли в терминах локальной ограниченности. А именно, оказалось, что любое локально ограниченное конечномерное представление связной группы Ли непрерывно тогда и только тогда, когда эта группа совершенна. Оказалось также, что любое локально ограниченное конечномерное представление данной связной группы Ли автоматически непрерывно на коммутанте этой группы (в топологии, индуцированной исходной топологией группы).

В этом разделе мы воспроизводим доказательство аналога теоремы ван дер Вардена (т. е. условия автоматической непрерывности всех локально ограниченных конечномерных представлений) для коммутанта произвольной связной группы Ли и доказываем гипотезу Мищенко для связных локально компактных групп. Эти факты используются в разделе 3 при описании структуры всех конечномерных локально ограниченных квазипредставлений произвольных связных групп Ли и в доказательстве «теоремы тривиальности» для конечномерных квазипредставлений компактных групп Ли (используемой в доказательстве основного результата и утверждающей, что любое, не обязательно непрерывное, конечномерное унитарное квазипредставление с малым дефектом полупростой компактной группы Ли близко к обычному непрерывному представлению этой

группы) и приводят к примерам неаменабельных МАР-групп, все конечномерные унитарные квазипредставления которых (с достаточно малым дефектом) являются возмущениями обычных представлений.

Условия автоматической непрерывности представлений и гомоморфизмов групп Ли можно распространить на случай отображений более общих топологических групп и, в частности, почти связных локально компактных групп. Как мы уже видели, непосредственного распространения быть не может даже в случае локально ограниченных конечномерных представлений связных локально компактных групп, и это обобщение требует введения новых числовых и геометрических характеристик представлений и гомоморфизмов, позволяющих получить простые необходимые и достаточные условия непрерывности локально ограниченных конечномерных представлений проективно-лиевых локально компактных групп и дать классификацию их разрывных представлений, а также доказать справедливость гипотезы Мищенко для всех связных локально компактных групп [44].

1.1. Предварительные сведения об условиях непрерывности гомоморфизмов топологических групп

1.1.1. Группа разрывов относительно компактного гомоморфизма топологических групп

Сначала напомним определения относительной компактности и локальной ограниченности гомоморфизмов топологических групп.

Определение 1.1.1. Пусть G — топологическая группа, π — её (не обязательно непрерывный) гомоморфизм в топологическую группу H . Мы будем говорить, что π *локально относительно компактен*, или просто *относительно компактен*, если существует такая окрестность V единичного элемента e в G , что замыкание множества $\pi(V)$ является компактным подмножеством топологической группы H . Мы будем говорить, что π *локально вполне ограничен*, или просто *локально ограничен*, если существует такая окрестность V единичного элемента e в G , что множество $\pi(V)$ является вполне ограниченным подмножеством топологической группы H , т. е. для любой окрестности W единичного элемента e_H в H существует конечное число сдвигов окрестности W , объединение которых покрывает множество $\pi(V)$.

Пусть $\mathcal{U} = \mathcal{U}_G$ — фильтр окрестностей единицы в топологической группе G . Для любого локально относительно компактного (не обязательно непрерывного) гомоморфизма π группы G в топологическую группу H введём обозначение

$$\mathrm{DG}(\pi) = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} \overline{\pi(U)}.$$

Здесь и далее черта означает замыкание в соответствующей топологии (в данном случае — в топологии группы H).

Если π — конечномерное представление топологической группы, то определения 1.1 и 1.1.1, очевидно, согласованы. Более общим образом, если группа H локально компактна, то любой локально ограниченный гомоморфизм в группу H автоматически является локально относительно компактным.

Теорема 1.1.2. Пусть G — топологическая группа, а π — относительно компактный гомоморфизм группы G в топологическую группу H . Пусть $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_G$ — фильтр окрестностей единицы в G . Множество $\text{DG}(\pi)$ является компактной подгруппой топологической группы H и компактным нормальным делителем в замкнутой подгруппе $\overline{\pi(G)}$ группы H . Кроме того, базис фильтра $\{\overline{\pi(U)} \mid U \in \mathfrak{U}\}$ сходится к $\text{DG}(\pi)$, и гомоморфизм π непрерывен тогда и только тогда, когда $\text{DG}(\pi) = \{e_H\}$.

Доказательство. Фильтр $\mathfrak{U}$ содержит базис симметричных окрестностей V единичного элемента ($V = V^{-1}$), и любая симметричная окрестность V содержит такую симметричную окрестность W , что $WW \subset V$. По предположению существует такая окрестность $U \in \mathfrak{U}$, что замыкание $\overline{\pi(U)}$ компактно. Отсюда следует, что введённое в теореме множество $\text{DG}(\pi)$ компактно и содержит обратные к своим элементам и произведения своих элементов и поэтому является компактной подгруппой группы H . Так как множество gVg^{-1} , $g \in G$, является симметричной окрестностью единицы вместе с V , то пересечение $\text{DG}(\pi)$ всех множеств $\overline{\pi(U)}$, $U \in \mathfrak{U}$, инвариантно относительно сопряжения с любым элементом вида $\pi(g)$, $g \in G$, так что $\text{DG}(\pi)$ — нормальный делитель в замкнутой подгруппе $\overline{\pi(G)}$ группы H .

Так как базис фильтра $\{\overline{\pi(U)} \mid U \in \mathfrak{U}\}$ содержит компактный элемент и пересечение всех элементов фильтра равно $\text{DG}(\pi)$, то фильтр сходится к $\text{DG}(\pi)$.

Из определения непрерывности следует, что $\text{DG}(\pi) = \{e_H\}$, если π непрерывен. Обратно, если $\text{DG}(\pi) = \{e_H\}$, то базис фильтра $\{\overline{\pi(U)} \mid U \in \mathfrak{U}\}$ сходится к $\{e_H\}$, и поэтому гомоморфизм π непрерывен. $\square$

Определение 1.1.3. Пусть G — топологическая группа, а π — локально относительно компактный гомоморфизм группы G в топологическую группу H . Компактный нормальный делитель $\text{DG}(\pi)$ замыкания образа группы G при гомоморфизме π называется *группой разрывов* гомоморфизма π .

В частности, группа разрывов определена для любого локально ограниченного гомоморфизма в локально компактную группу и тем самым и для любого конечномерного представления топологической группы (в этом частном случае понятие группы разрывов было введено ранее в [225]).

Введём важное для дальнейшего определение.

Определение 1.1.4. Пусть G — группа, X — подмножество в G . Множество X называется *безгранично делимым*, если для любого элемента $x \in X$ и любого натурального числа p существует такой элемент $y \in X$, что $y^p = x$. Группа G называется *локально безгранично делимой*, если операция возведения в любую натуральную степень p открыта в единице группы, т. е. множество p -х

степеней элементов, пробегающих любую окрестность единицы в G , содержит некоторую окрестность единицы в G .

Очевидно, любая группа Ли локально безгранично делима. Следующее фольклорное утверждение показывает, что в любой топологической группе замыкания безгранично делимых относительно компактных подгрупп безгранично делимы.

Лемма 1.1.5. Пусть G — топологическая группа, а X — подмножество группы G с компактным замыканием в G . Если X безгранично делимо, то и его замыкание в G безгранично делимо.

Доказательство. Если $\overline{X}$ — замыкание множества X в G и если $x \in \overline{X}$, то для любого $p \in \mathbb{N}$ существует сеть элементов вида y^p , $y \in X$, сходящаяся к x . Так как замыкание множества X компактно, то сеть элементов y имеет сходящуюся подсеть. Если z — предел этой подсети, то $z^p = x$ ввиду непрерывности операции возведения в степень. $\square$

Следующее утверждение — локальный вариант предыдущего.

Лемма 1.1.6. Пусть G — локально безгранично делимая группа, а π — локально относительно компактный гомоморфизм группы G в топологическую группу H . Тогда группа разрывов $\text{DG}(\pi)$ является компактной связной подгруппой группы H . В частности, если π — локально относительно компактный гомоморфизм локально безгранично делимой группы G в топологическую группу H , то $\text{DG}(\pi)$ — связная компактная линейная группа.

Доказательство. Если гомоморфизм π непрерывен, то $\text{DG}(\pi) = \{e_H\}$, и поэтому остаётся рассмотреть случай разрывного гомоморфизма π .

Так как π локально относительно компактен по условию, то группа разрывов $\text{DG}(\pi)$ компактна по теореме 1.1.2. Пусть $\overline{V_0} \subset G$ — окрестность единицы в G , замыкание образа которой (множество $\pi(\overline{V_0})$) компактно в H . По условию локальной безграничной делимости группы G любой элемент U фильтра $\mathfrak{U}$ образован такими окрестностями единицы в G , которые для любого натурального p содержат окрестность $V = V_U \subset U$, любой элемент которой есть p -я степень некоторого элемента окрестности U . Эти окрестности V образуют базис фильтра $\mathfrak{U}$. Следовательно, для любого элемента $d \in \text{DG}(\pi)$ существует сеть $\{q_{V_U}\}$, $q_{V_U} \in \pi(V_U)$, $V_U \subset U \in \mathfrak{U}$, сходящаяся к d . Можно считать, что $q_{V_U} \in \pi(V_U)$. По построению окрестности V_U существует такой элемент $\delta_{p,U} \in U$, что $\delta_{p,U}^p = q_{V_U}$. Тогда сеть $\pi(\delta_{p,U}^p) = (\pi(\delta_{p,U}))^p = \pi(q_{V_U})$, $U \in \mathfrak{U}$, сходится к d , причём все элементы $\pi(\delta_{p,U})$ лежат в компактном множестве $\pi(\overline{V_U})$. Поэтому сеть $\{\pi(\delta_{p,U})\}$, $U \in \mathfrak{U}$, имеет предельные точки. С другой стороны, все предельные точки такой сети должны принадлежать $\text{DG}(\pi)$. В силу непрерывности операции возведения в степень эти предельные точки являются корнями степени p из элемента d . Следовательно, группа $\text{DG}(\pi)$ безгранично делима. Поэтому она связна [121, теорема 9.35]. $\square$

Нам понадобится следующее факторизационное свойство групп разрывов.

Лемма 1.1.7. Пусть G — связная локально компактная группа, N — её замкнутый нормальный делитель, а π — локально относительно компактный гомоморфизм группы G в некоторую топологическую группу H (например, локально ограниченный гомоморфизм в локально компактную группу). Пусть M — группа разрывов ограничения $DG(\pi|_N)$. Тогда M является замкнутым нормальным делителем в компактной группе разрывов $DG(\pi)$ и соответствующая фактор-группа $DG(\pi)/M$ изоморфна группе разрывов $DG(\psi)$ гомоморфизма ψ группы $\overline{G}$, получаемого композицией гомоморфизма π и канонического гомоморфизма $\overline{\pi(G)} \rightarrow \overline{\pi(G)}/M$.

Доказательство. Так как гомоморфизм π локально относительно компактен по условию, то группа разрывов $DG(\pi)$ компактна по теореме 1.1.2. Поскольку N — замкнутый нормальный делитель в G (и поэтому семейство окрестностей единицы в группе N инвариантно относительно автоморфизмов, определяемых ограничением на N внутренних автоморфизмов группы G), то из определения группы $DG(\pi|_N)$ как пересечения замыканий образов всевозможных окрестностей следует, что компактная подгруппа $DG(\pi|_N)$ группы $\overline{\pi(G)}$ является $\pi(G)$ -инвариантной, а потому и $\overline{\pi(G)}$ -инвариантной, т. е. компактным нормальным делителем в $\overline{\pi(G)}$. Рассмотрим гомоморфизм ψ группы G в $\overline{\pi(G)}/M$, получаемый композицией гомоморфизма π и канонического гомоморфизма

$$\theta: \overline{\pi(G)} \rightarrow \overline{\pi(G)}/M.$$

Гомоморфизм ψ локально относительно компактен, поскольку образы компактных множеств при непрерывном отображении компактны. Поскольку замыкание π -образа любой окрестности единицы в группе G содержит и нормальный делитель $DG(\pi)$ в $\overline{\pi(G)}$, и тем более нормальный делитель M , то замыкание ψ -образа любой окрестности единицы в группе G содержит фактор-группу $DG(\pi)/M$,

$$DG(\psi) \supseteq DG(\pi)/M.$$

Из компактности группы $\overline{\pi(G)}$ следует, что π -образ сети $g_U \in U$, $U \in \mathfrak{U}$, ψ -образ которой сходится к данному элементу x группы $DG(\pi)/M$, имеет предельную точку y в $\overline{\pi(G)}$, $\theta(y) = x$ ввиду непрерывности отображения θ , так что

$$DG(\psi) \subseteq DG(\pi)/M,$$

что завершает доказательство леммы. $\square$

Приведём следствие леммы 1.1.7.

Следствие 1.1.8. Пусть G — коммутативная связная локально компактная группа, разрешимая связная локально компактная группа или компактная связная группа, а π — локально ограниченный гомоморфизм группы G в топологическую группу H . Тогда группа разрывов $DG(\pi)$ является компактной связной подгруппой группы H .

Доказательство. Если G — связная локально компактная коммутативная группа, то её можно представить в виде прямого произведения некоторой векторной группы и некоторой связной компактной абелевой группы (см., например, [121, теорема 7.57 (iii)]). Но векторная группа локально безгранично делима как группа Ли, а связная компактная абелева группа делима [121, следствие 8.5], и её локальная безграничная делимость следует из теоремы об открытом отображении, применённом к гомоморфизму, определяемому возведением в данную натуральную степень (см., например, [24, теорема 5.29]). Таким образом, любая коммутативная связная локально компактная группа локально безгранично делима, и остаётся применить лемму 1.1.6.

Если G — связная локально компактная разрешимая группа, то группа разрывов $DG(\pi)$ является одновременно компактной и связной разрешимой, что сразу следует по индукции из леммы 1.1.7, применённой к последовательным факторам композиционного ряда.

Если G — связная компактная группа, то топология в группе G содержит фундаментальную систему окрестностей единицы e , инвариантных относительно внутренних автоморфизмов [121, следствие 1.12]. Кроме того, в группе G существуют максимальные связные компактные коммутативные подгруппы $T \subset G$, все они сопряжены в G . Пересечение данной окрестности O элемента e , инвариантной относительно внутренних автоморфизмов, с подгруппой T есть окрестность U элемента e в T . Тем самым в группе G существует фундаментальная система окрестностей единицы, имеющих вид множеств

$$\bigcup_{g \in G} gUg^{-1},$$

где U пробегает семейство окрестностей единицы в T . На такой окрестности в группе G операция возведения в натуральную степень сводится к возведению в степень только на окрестности единицы U в коммутативной связной компактной группе T . Поскольку, как мы видели выше, группа T локально безгранично делима, то и вся группа G локально безгранично делима. Остаётся применить лемму 1.1.6. $\square$

Следующее свойство связывает группы разрывов гомоморфизма и определяемого им гомоморфизма коммутанта.

Лемма 1.1.9. Пусть G — топологическая группа, G' — коммутант группы G (в алгебраическом смысле и в топологии, индуцированной топологией группы), а π — локально относительно компактный гомоморфизм группы G в некоторую топологическую группу H . Коммутант группы разрывов гомоморфизма π является подгруппой группы разрывов ограничения $\pi|_{G'}$ гомоморфизма π на коммутант G' группы G :

$$DG(\pi)' \subset DG(\pi|_{G'}).$$

Если отображение $[\cdot, \cdot]: G \times G \rightarrow G' \subset G$, определённое формулой

$$\{p, q\} \mapsto [p, q] (= pqr^{-1}q^{-1}), \quad p, q \in G,$$

открыто в единице группы $G \times G$ (как отображение $G \times G \rightarrow G'$) в топологиях, индуцированных исходной топологией группы G , на всех достаточно малых окрестностях единицы в $G \times G$, то коммутант группы разрывов гомоморфизма π совпадает с группой разрывов ограничения $\pi|_{G'}$ представления π на коммутант G' группы G :

$$\mathrm{DG}(\pi)' = \mathrm{DG}(\pi|_{G'}).$$

Доказательство. Пусть c — элемент коммутанта группы $\mathrm{DG}(\pi)$. Тогда c есть произведение конечного числа элементов вида $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$, где $a, b \in \mathrm{DG}(\pi)$. Любой элемент $[a, b]$, $a, b \in \mathrm{DG}(\pi)$, является пределом сети элементов вида

$$[\pi(g_U), \pi(h_U)] = \pi([g_U, h_U]), \quad g_U, h_U \in U \in \mathfrak{U},$$

которые принадлежат π -образу коммутанта G' группы G (где $\pi(g_U)$ сходится по базису фильтра $\mathfrak{U}$ к a , а $\pi(h_U)$ — к b). Для любого $V \in \mathfrak{U}$ существует такая окрестность $U_V \in \mathfrak{U}$, что $\{[g, h] \mid g, h \in U_V\} \subset V \cap G'$, так что семейство пересечений $V \cap G'$ пробегает базис окрестностей единицы в G' в индуцированной топологии. Поэтому сеть $[g_{U_V}, h_{U_V}]$ удовлетворяет условию $[g_{U_V}, h_{U_V}] \in V$ для любого $V \in \mathfrak{U}$ и любая предельная точка сети $\pi([g_{U_V}, h_{U_V}])$ принадлежит группе разрывов $\mathrm{DG}(\pi|_{G'})$. В частности, элемент $[a, b]$ тоже принадлежит группе $\mathrm{DG}(\pi|_{G'})$. Таким образом, любой элемент вида $[a, b]$, $a, b \in \mathrm{DG}(\pi)$, принадлежит группе разрывов $\mathrm{DG}(\pi|_{G'})$ ограничения гомоморфизма π на G' , и поэтому $c \in \mathrm{DG}(\pi|_{G'})$ (как произведение конечного числа элементов группы $\mathrm{DG}(\pi|_{G'})$), так что

$$\mathrm{DG}(\pi)' \subset \mathrm{DG}(\pi|_{G'}).$$

В свою очередь, замыкание $\overline{\pi(V_0)}$ компактно в H для некоторой окрестности единицы V_0 в G , и из условия открытости следует, что для любой достаточно малой окрестности единицы W в G существует такая окрестность единицы V в G , что множество $\overline{\pi(V \cap G')}$ содержится в замыкании множества элементов вида $\pi([a, b])$, $a, b \in W$. Таким образом, множество $\mathrm{DG}(\pi|_{G'})$ является подмножеством замыкания $\overline{\{\pi([a, b]) = [\pi(a), \pi(b)] \mid a, b \in W\}}$ для любой достаточно малой окрестности единицы W в G . Для любой точки прикосновения этого замыкания существуют соответствующие сети элементов a и b , обеспечивающие сходимость коммутатора $[a, b]$ к выбранной точке. Так как множество $\overline{\pi(V_0)}$ компактно, то можно выделить сходящиеся подсети элементов a и b . Отсюда и следует обратное включение

$$\mathrm{DG}(\pi)' \supset \mathrm{DG}(\pi|_{G'}).$$

□

Замечание 1.1.10. В частности, условие открытости в лемме 1.1.9 выполняется автоматически, если G — односвязная группа Ли. Действительно, в этом случае коммутант G' группы G замкнут (см. [238, теорема 3.18.8]) и из теоремы о неявной функции следует, что, поскольку дифференциал аналитического отображения $G \times G \rightarrow G'$, $\{p, q\} \mapsto [p, q]$, $p, q \in G$, сюръективен в единице группы, то образ окрестности в $G \times G$ точки $(e, e) \in G \times G$ при этом отображении содержит некоторую окрестность точки $e \in G'$ в G' .

Следствие 1.1.11. Пусть G — разрешимая связная локально компактная группа, а π — локально относительно компактный гомоморфизм группы G в топологическую группу H . Тогда группа разрывов $DG(\pi)$ является коммутативной компактной связной подгруппой в H . Если G — разрешимая связная односвязная группа Ли и π — локально относительно компактный гомоморфизм группы G в топологическую группу H , то гомоморфизм π непрерывен на коммутанте G' группы G .

Доказательство. Согласно следствию 1.1.8 группа разрывов $DG(\pi)$ является компактной связной подгруппой в H . Кроме того, поскольку группа G разрешима, то и группы $\pi(G)$ и $\overline{\pi(G)}$ разрешимы, и группа $DG(\pi)$ разрешима как подгруппа разрешимой группы. Но связная компактная разрешимая группа коммутативна (ср. [121, теорема 9.24]). Согласно замечанию 1.1.10 это означает, что $DG(\pi|_{G'}) = DG(\pi)' = \{e\}$, так что ограничение $\pi|_{G'}$ непрерывно (по теореме 1.1.2). $\square$

Следующее утверждение позволяет описывать структуру группы разрывов конечно разложимых топологических групп.

Лемма 1.1.12. Пусть G — топологическая группа, $A_1, \dots, A_n$ — замкнутые подгруппы в G и $A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$. Предположим, что отображение $A \rightarrow G$, определённое правилом $(a_1, a_2, \dots, a_n) \mapsto a_1 a_2 \dots a_n \in G$ для любого $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A$, $a_i \in A_i$, $i = 1, \dots, n$, открыто в единице группы A . Пусть π — локально относительно компактный гомоморфизм топологической группы G в топологическую группу H . Тогда любой элемент d группы разрывов $DG(\pi)$ можно представить в виде $d = d_1 d_2 \dots d_n$, где $d_i \in DG(\pi|_{A_i})$.

Доказательство. По предположению любая достаточно малая окрестность единицы в G содержится в множестве

$$\{a_1 a_2 \dots a_n \mid a_i \in U_i, i = 1, \dots, n\},$$

где U_i — окрестность единицы в A_i . Так как гомоморфизм π локально относительно компактен по предположению, то его ограничение на каждую подгруппу A_i тоже локально относительно компактно. Если сеть элементов

$$\pi(a_1 a_2 \dots a_n) = \pi(a_1) \pi(a_2) \dots \pi(a_n), \quad a_1 a_2 \dots a_n \in U \subset G,$$

сходится к некоторой точке группы разрывов $DG(\pi)$ по фильтру $\mathcal{U}$, то любая сеть $\pi(a_i)$, $a_i \in U \cap A_i$, $i = 1, \dots, n$, имеет предельные точки в компактном множестве $DG(\pi|_{A_i})$. Переходя к подсети, мы можем считать, что все сети $\pi(a_i)$, $a_i \in U \cap A_i$, $i = 1, \dots, n$, сходятся к некоторым точкам $d_i \in DG(\pi|_{A_i})$. Тогда требуемое соотношение следует из непрерывности умножения в G . $\square$

1.1.2. Условия непрерывности некоторых гомоморфизмов топологических групп

Начнём с теоретико-группового доказательства некоторого обобщения известных условий непрерывности приводимых представлений.

Теорема 1.1.13. Пусть G и H — топологические группы, f — локально относительно компактный гомоморфизм группы G в группу H . Пусть M и N — такие замкнутые нормальные делители в H , что пересечение $M \cap N$ не содержит нетривиальных компактных подгрупп, и пусть φ и ψ — канонические гомоморфизмы группы H на фактор-группы H/M и H/N соответственно. Если композиции $\varphi \circ f$ и $\psi \circ f$ непрерывны, то и гомоморфизм f непрерывен.

Доказательство. Согласно теореме 1.1.2 группа разрывов $DG(f) \subset H$ гомоморфизма f компактна, причём группы $\varphi(DG(f)) \subset (\varphi \circ f)(G)$ и $\psi(DG(f)) \subset (\psi \circ f)(G)$ единичны, поскольку группы $(\varphi \circ f)(G)$ и $(\psi \circ f)(G)$ единичны согласно теореме 1.1.2. Таким образом, группа разрывов $DG(f)$ гомоморфизма f является компактной подгруппой пересечения $M \cap N$, не содержащего нетривиальных компактных подгрупп по условию. Итак, $DG(f) = \{e_H\}$, что равносильно непрерывности гомоморфизма f согласно теореме 1.1.2. $\square$

Отсюда немедленно получаем следующее утверждение.

Следствие 1.1.14. Пусть G — топологическая группа, E — топологическое векторное пространство, $F_1, F_2, \dots, F_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, — замкнутые собственные векторные подпространства в E ,

$$\{0\} = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_{n-1} \subset F_n = E,$$

ρ — такое локально относительно компактное (в сильной операторной топологии, т. е. в топологии в пространстве $L(E)$ непрерывных линейных операторов в E , база окрестностей нуля которой состоит из множеств вида $\{T \mid t \in L(E), T(S) \subset V\}$, где S пробегает семейство конечных множеств в E , а V — базис окрестностей нуля в E) представление топологической группы G непрерывными линейными операторами в E , что

$$\rho(g)F_k \subset F_k \text{ для любых } g \in G, \quad k \in \{1, \dots, n\},$$

и представление, определяемое представлением ρ в F_1 и в каждом фактор-пространстве F_{k+1}/F_k , $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, непрерывно в сильной операторной топологии пространства непрерывных линейных операторов в F_1 или F_{k+1}/F_k соответственно. Тогда представление ρ группы G в E непрерывно в сильной операторной топологии пространства непрерывных линейных операторов в E .

Доказательство. Заметим сначала, что образ группы G в $L(E)$ есть топологическая группа. Для этого достаточно установить непрерывность умножения в этом образе по совокупности переменных (в сильной операторной топологии). Так как замыкания образов окрестностей единицы в G компактны в сильной операторной топологии по предположению, а все орбиты таких множеств операторов в E сильно компактны, то сети, сходящиеся в $L(E)$ в сильной операторной топологии (т. е. на каждом векторе), сходятся равномерно на этих орбитах [5, III.3.1 и III.4.5], что обычным образом доказывает непрерывность умножения на компакте, являющемся замыканием образа окрестности единицы. Отсюда сразу следует непрерывность умножения на всей группе $\pi(G)$ в сильной операторной топологии.

Итак, рассматриваемое представление можно считать гомоморфизмом топологических групп. Из индуктивных соображений следует, что достаточно рассмотреть случай $n = 2$. В этом случае множества $M = \{T \in \rho(G) \mid T|_{F_1} = 1_{F_1}\}$ и $N = \{T \in \rho(G) \mid \tilde{T} = 1_{E/F_1}\}$, где оператор $\tilde{T}$ определяется равенством $\tilde{T}(\xi + F_1) = T\xi + F_1 \in E/F_1$, $\xi \in E$, являются замкнутыми нормальными делителями в $\rho(G)$, а компактная группа разрывов $DG(\rho) \subset L(E)$ представления ρ имеет лишь тривиальное пересечение с $M \cap N$, поскольку последовательность степеней любого неединичного оператора T , принадлежащего пересечению $M \cap N \cap DG(\rho)$, не ограничена (действительно, при $T\xi = \xi + \eta$, $\xi \in E$, $\xi \notin F_1$, $\eta \in F_1$, $\eta \neq 0$, имеем $T^n\xi = \xi + n\eta$ для всех $n \in \mathbb{N}$) и поэтому не может принадлежать относительно компактному множеству в E . Остаётся применить теорему 1.1.13. $\square$

Этот результат является новым и для локально выпуклых пространств; аналогичный результат в слабой операторной топологии можно также получить с помощью аналога теоремы Л. Брауна [65] (о слабой непрерывности представлений с сильно непрерывным подпредставлением и сильно непрерывным представлением в соответствующем фактор-пространстве), полученного автором в [43] и утверждающем слабую непрерывность локально эквинепрерывных представлений со слабо непрерывным подпредставлением и слабо непрерывным представлением в фактор-пространстве.

Отметим ещё одно очевидное следствие.

Следствие 1.1.15. *Если все неприводимые подфакторы данного локально ограниченного конечномерного представления топологической группы непрерывны, то и всё представление непрерывно. Если все неприводимые локально ограниченные конечномерные представления топологической группы непрерывны, то и все локально ограниченные конечномерные представления этой группы непрерывны.*

Это следствие, вместе с аналогом теоремы Ли об одномерности не обязательно непрерывных неприводимых конечномерных представлений разрешимой группы Ли с делимыми коммутативными факторами, было использовано в [225] для доказательства автоматической непрерывности локально ограниченных конечномерных представлений связной группы Ли на коммутанте группы. Мы кратко изложим эти факты, а затем укажем другой подход к задаче, позволяющий существенно обобщить результаты.

1.2. Вариант теоремы Ли для не обязательно непрерывных гомоморфизмов разрешимых групп Ли

1.2.1. Вариант теоремы Ли для конечномерных неприводимых представлений разрешимых групп Ли

Лемма 1.2.1. *Пусть G — группа, N — нормальный делитель в G , π — неприводимое представление группы G в конечномерном векторном пространстве E ,*

и пусть существует одномерное подпространство $L \subset E$, инвариантное относительно ограничения σ представления π на N . Если существует безгранично делимое подмножество $X \subset G/N$, порождающее G/N , то все операторы представления σ кратны единичному оператору в пространстве E .

Доказательство. По предположению представление σ имеет одномерное подпредставление и тем самым общий собственный вектор $\xi \in E$, так что, в частности,

$$\sigma(n)\xi = \lambda(n)\xi \quad \text{для всех } n \in N,$$

где $\lambda(n) \in \mathbb{C}^*$, $n \in N$. Тогда

$$\sigma(n)\pi(g)\xi = \pi(g)\sigma(g^{-1}ng)\xi = \lambda(g^{-1}ng)\pi(g)\xi, \quad n \in N, \quad g \in G, \quad (1)$$

и поэтому все векторы вида $\pi(g)\xi$, $g \in G$, — общие собственные векторы для представления σ . Все такие векторы порождают некоторое конечномерное подпространство $F \subset E$ (линейную оболочку всех векторов вида $\pi(g)\xi$, $g \in G$, в подпространстве E), и по построению подпространство F имеет базис из собственных векторов представления σ . Разумеется, любое множество линейно независимых векторов вида $\sigma(g)\xi$, $g \in G$, конечно. Из формулы (1) следует, что ненулевое подпространство F инвариантно относительно представления π группы G . По предположению представление π неприводимо, так что $F = E$. Таким образом, множество различных функций вида λ_g , $g \in G$, где

$$\lambda_g(n) = \lambda(g^{-1}ng), \quad g \in G, \quad n \in N,$$

конечно. Поскольку λ_g , $g \in G$, — комплекснозначные характеры группы N , то они инвариантны относительно внутренних автоморфизмов группы N . Поэтому $\lambda_n = \lambda$, $n \in N$. Тем самым группа G/N транзитивно действует на (непустом) конечном множестве $\{\lambda_g \mid g \in G\}$ подстановками этого конечного множества, и если число элементов в этом конечном множестве равно m , то образ группы G/N является подгруппой симметрической группы S_m , так что порядок этой подгруппы является делителем числа $m!$. По условию для любого $x \in X$ существует такой элемент $y \in X$, что $y^{m!} = x$. Следовательно, подстановка, отвечающая элементу x , есть $m!$ -я степень подстановки, отвечающей элементу y , и поэтому является единичной подстановкой. Так как X по условию порождает группу G/N , то все подстановки, определяющие транзитивное действие группы G/N на $\{\lambda_g \mid g \in G\}$, единичны, так что множество $\{\lambda_g \mid g \in G\}$ одноэлементно, $\lambda_g = \lambda$ для всех $g \in G$, и тем самым все операторы представления σ являются скалярными кратными единичного оператора на E (операторами умножения на число, $\sigma(n) = \lambda(n)1_E$, $n \in N$). $\square$

Применим предыдущую лемму для доказательства аналога теоремы Ли для конечномерных представлений некоторых групп, разрешимых в теоретико-групповом смысле. (Другое применение леммы приведено в доказательстве теоремы 1.3.2.)

Теорема 1.2.2. Пусть G — разрешимая группа, и пусть каждый коммутативный фактор в композиционном ряде группы G безгранично делим. Пусть π —

представление группы G в конечномерном комплексном линейном пространстве E . Если представление π неприводимо, то пространство представления π одномерно.

Доказательство. Докажем теорему индукцией по длине композиционного ряда группы G . Если эта длина равна 1, то группа G коммутативна и утверждение справедливо даже без дополнительного предположения безграничной делимости, что устанавливает базу индукции. Рассмотрим индуктивный шаг. Пусть утверждение справедливо, если длина композиционного ряда разрешимой топологической группы, каждый фактор которого безгранично делим, не выше n , и пусть дана разрешимая топологическая группа G , длина композиционного ряда которой равна $n + 1$ и каждый фактор этого ряда безгранично делим. Пусть π — неприводимое представление группы G в конечномерном линейном пространстве E . Рассмотрим подгруппу G_1 , являющуюся следующим за группой G элементом композиционного ряда. Так как группа G/G_1 коммутативна, то группа G_1 содержит все коммутаторы $ghg^{-1}h^{-1}$, $g, h \in G$. По построению группа G_1 разрешима, длина композиционного ряда группы G_1 не выше n и каждый коммутативный фактор в композиционном ряде группы G_1 безгранично делим. Пусть ρ — ограничение представления π на подгруппу G_1 . По предположению индукции представление ρ имеет одномерное подпредставление. По лемме 1.2.1 представление ρ есть представление скалярными операторами. Так как коммутант группы G содержится в G_1 , то оператор $\rho(ghg^{-1}h^{-1})$, $g, h \in G$, есть скалярное кратное единичного оператора на E (оператор умножения на число $\lambda(ghg^{-1}h^{-1})$). Но

$$\rho(ghg^{-1}h^{-1}) = \pi(g)\pi(h)\pi(g^{-1})\pi(h^{-1}) \text{ для любых } g, h \in G,$$

и поэтому $\det \rho(ghg^{-1}h^{-1}) = 1$, или

$$(\lambda(ghg^{-1}h^{-1}))^{\dim E} = 1, \quad g, h \in G.$$

Таким образом, множество значений функции λ конечно на всей группе G_1 . Но функция λ единична на G_2 , и λ -образ группы G_1 можно рассматривать как образ безгранично делимой группы G_1/G_2 при гомоморфизме, определяемом переходом к фактор-группе по G_2 . Поскольку образ безгранично делимой группы при любом гомоморфизме безгранично делим, а конечная группа безгранично делима тогда и только тогда, когда она единична, то λ -образ группы G_1 единичен. Итак,

$$\lambda(ghg^{-1}h^{-1}) \equiv 1 \text{ для всех } g, h \in G.$$

Следовательно, ограничение представления ρ на коммутант группы G ратно единичному, и можно считать, что π — представление коммутативной фактор-группы группы G по её коммутанту. При этом по условию данное представление π неприводимо и, следовательно, одномерно. $\square$

Замечание 1.2.3. Теорему 1.2.2 можно доказать и с помощью теоремы Ли. Приведём схему соответствующего доказательства. Образ любого представления разрешимой группы есть разрешимая подгруппа полной линейной группы

в пространстве представления, которую можно рассматривать как конечномерную полную линейную группу. Следовательно, замыкание этого образа тоже разрешимая группа. С другой стороны, замкнутая подгруппа матричной группы является группой Ли (возможно, несвязной). Остаётся применить индукцию по длине композиционного ряда (что приводит к рассуждению почти того же размера), чтобы доказать, что рассматриваемое замыкание является связной группой Ли. Этот факт одновременно нетривиален и существен, особенно потому, что условие безграничной делимости факторов существенно для справедливости теоремы 1.2.2. (Действительно, симметрическая группа S_3 разрешима и имеет неприводимые двумерные представления.)

Отметим важное для дальнейшего следствие.

Следствие 1.2.4.

1. Любое (не обязательно непрерывное) неприводимое конечномерное представление связной разрешимой локально компактной группы одномерно.
2. Любое (не обязательно непрерывное) конечномерное представление связной разрешимой локально компактной группы имеет базис, в котором операторы представления записываются верхними треугольными матрицами.

Доказательство. Любая коммутативная связная локально компактная группа безгранично делима, как мы видели в следствии 1.1.8, а последовательные коммутанты связной топологической группы связны, как и фактор-группы по ним, и поэтому любая связная разрешимая локально компактная группа удовлетворяет всем условиям теоремы 1.2.2, что доказывает первое утверждение, а второе следует из первого. $\square$

Замечание 1.2.5. Напомним, что связная разрешимая группа Ли сама по себе не обязательно безгранично делима. Примером может служить универсальная накрывающая группы движений плоскости с естественными параметрами $\varphi, x, y \in \mathbb{R}$, где φ накрывает поворот. Кубический корень из элемента $(2\pi, x, y)$ с $x^2 + y^2 > 0$ не существует.

1.2.2. Некоторые следствия

Начнём с одного непосредственного приложения доказанного выше варианта теоремы Ли.

Следствие 1.2.6. Пусть G — связная разрешимая локально компактная группа. Любое (не обязательно непрерывное) локально ограниченное конечномерное представление группы G непрерывно на коммутанте G' группы G в топологии, индуцированной исходной топологией группы G .

Доказательство. Пусть π — локально ограниченное конечномерное представление группы G . Согласно следствию 1.2.4 существует базис в пространстве представления, в котором все матрицы операторов представления π являются верхними треугольными. Следовательно, в этом базисе все элементы

коммутанта G' записываются унитарными матрицами. Таким образом, все диагональные представления оказываются единичными представлениями группы G' , и поэтому они тривиальным образом непрерывны в любой групповой топологии на группе G' . Так как представление π группы G является локально ограниченным по предположению, то ограничение представления π на G' непрерывно согласно следствию 1.1.14. $\square$

Следующее утверждение носит предварительный характер и будет в дальнейшем существенно усилено.

Следствие 1.2.7. *Любая некоммутативная связная разрешимая локально компактная группа содержит нетривиальную замкнутую связную подгруппу, ограничение на которую любого локально ограниченного гомоморфизма данной группы в локально компактную группу непрерывно.*

Доказательство. Действительно, данный гомоморфизм непрерывен на неединичном коммутанте группы. $\square$

1.2.3. Условия непрерывности для конечномерных представлений группы Ли $SL(2, \mathbb{R})$

Начнём со следующей редукции.

Лемма 1.2.8. *Пусть G — связная простая группа Ли, а π — конечномерное представление группы G . Пусть H — нетривиальная однопараметрическая подгруппа в G .*

1. *Если ограничение представления π на H является локально ограниченным, то и всё представление π является локально ограниченным.*
2. *Если ограничение представления π на H непрерывно, то и всё представление π непрерывно.*

Доказательство. Так как присоединённое представление группы G в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы G неприводимо по определению простой группы Ли, то орбита ненулевого вектора, касательного к H , тотальна в $\mathfrak{g}$. Поэтому можно найти конечное число однопараметрических подгрупп $H_1 = H, H_2, \dots, H_n$, $n = \dim G$, каждая из которых сопряжена с H , ненулевые касательные векторы которых в единице группы образуют базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Таким образом, касательное пространство к множеству произведений $h_1 h_2 \dots h_n$ элементов h_i , где каждый сомножитель h_i принадлежит некоторой окрестности единицы в $V_i \subset H_i$, совпадает со всей алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Тогда само множество произведений содержит окрестность единицы в G . Выбирая окрестности V_i в H_i сопряжёнными такой окрестности V , что семейство $\pi|_V$ является ограниченным, мы видим, что представление π является локально ограниченным. Это доказывает первое утверждение. Доказательство второго утверждения аналогично. $\square$

В важнейшем частном случае конечномерных представлений вещественной унимодулярной группы матриц второго порядка $SL(2, \mathbb{R})$ полученные выше результаты приводят к следующим условиям непрерывности.

Теорема 1.2.9. Пусть G — универсальная накрывающая группа группы $SL(2, \mathbb{R})$, и пусть $G = KAN$ — разложение Ивасава группы G , где K накрывает группу вращений плоскости и изоморфна группе $\mathbb{R}$, A — подгруппа, накрывающая группу диагональных вещественных унимодулярных матриц с положительными элементами (группа A изоморфна этой матричной группе), а N — подгруппа, накрывающая группу унипотентных вещественных верхних треугольных матриц (группа N изоморфна этой матричной группе). Пусть ρ — конечномерное представление некоторой группы Ли, локально изоморфной группе G (ρ не предполагается непрерывным). Если ограничение представления ρ на подгруппу, соответствующую N , является локально ограниченным, то ρ непрерывно.

Доказательство. Рассмотрим ρ как представление группы G . Так как ограничение представления ρ на N является локально ограниченным, то из леммы 1.2.8 следует, что всё представление ρ является локально ограниченным. Так как группы A и N изоморфны безгранично делимой группе $\mathbb{R}$ и коммутант группы AN совпадает с N , то группа $H = AN$ удовлетворяет условиям теоремы 1.2.2. Следовательно, существует базис, в котором операторы представления ρ записываются верхними треугольными матрицами и поэтому имеют вид, требуемый в следствии 1.2.6. Так как группа N совпадает с коммутантом группы AN , то диагональные представления единичны, так что ограничение представления ρ на N непрерывно. Следовательно, всё представление ρ непрерывно по лемме 1.2.8. Так как накрытия являются локальными гомеоморфизмами, то рассматриваемое представление непрерывно и на фактор-группе группы G по ядру представления, что завершает доказательство теоремы 1.2.9. $\square$

1.3. Аналоги теоремы ван дер Вардена о непрерывности

1.3.1. Теорема ван дер Вардена о непрерывности для полупростых групп Ли

Приведём ключевую часть доказательства аналога теоремы ван дер Вардена для связных полупростых групп Ли.

Теорема 1.3.1 (см. [224]). Пусть G — связная полупростая группа Ли. Пусть ρ — конечномерное представление группы G (которое не предполагается непрерывным). Следующие условия равносильны.

1. Представление ρ является непрерывным.
2. Представление ρ является локально ограниченным.

Доказательство. Очевидно, что верна импликация $1 \implies 2$. Докажем, обратную импликацию $2 \implies 1$. Так как любая полупростая группа Ли является фактор-группой прямого произведения конечного числа простых групп Ли, достаточно рассмотреть случай, когда группа Ли G проста. Если G компактна, то утверждение следует из теоремы ван дер Вардена. Пусть G некомпактна.

Пусть $G = KAN$ — разложение Ивасава группы G , где K покрывает максимальную компактную подгруппу присоединённой группы, группа A покрывает соответствующую абелеву подгруппу, а N — соответствующую нильпотентную подгруппу разложения Ивасава присоединённой группы.

Воспользуемся корневой системой простой группы Ли G относительно A и выберем систему положительных корней для алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G . Для любого положительного корня α алгебры Ли $\mathfrak{g}$ можно построить стандартную трёхмерную «корневую» подалгебру Ли, изоморфную алгебре Ли группы Ли $SL(2, \mathbb{R})$. Так как композиция соответствующего отображения универсальной накрывающей Σ группы $SL(2, \mathbb{R})$ в группу G и данного локально ограниченного представления ρ группы Ли G непрерывна на нильпотентной части группы Σ (как было доказано в теореме 1.2.9), то ограничение представления ρ на однопараметрическую подгруппу в N непрерывно, и из леммы 1.2.8 следует, что всё представление ρ непрерывно, что завершает доказательство импликации $2 \Rightarrow 1$. $\square$

1.3.2. Теорема ван дер Вардена для коммутанта связной группы Ли

Теорема 1.3.2. Пусть G — связная группа Ли, пусть G' — коммутант группы G , и пусть π — локально ограниченное конечномерное представление группы G . Ограничение $\pi|_{G'}$ представления π на G' является непрерывным представлением группы G' в топологии, индуцированной исходной топологией группы G .

Доказательство. Ввиду исключительной важности доказываемого утверждения для теории локально ограниченных конечномерных представлений групп Ли и более общих групп, а также для теории локально ограниченных конечномерных представлений и не обязательно непрерывных гомоморфизмов таких групп мы приведём два доказательства теоремы. Одно из них существенно использует геометрические соображения, тогда как другое носит число алгебраический характер. Сравнение этих доказательств позволяет лучше понять природу рассматриваемого явления.

Рассмотрим сначала случай связной односвязной группы Ли G . Напомним некоторые факты. Пусть R — радикал группы G , т. е. максимальный связный разрешимый нормальный делитель в $\tilde{G}$ (см., например, [121, предложение 3.7]) и R' — коммутант группы R . Согласно теореме Леви—Мальцева и [238, теорема 3.18.2] группы R и R' односвязны, а фактор-группа G/R' является полупрямым произведением односвязной полупростой группы Ли S (изоморфной G/R) и векторного пространства V (изоморфного R/R').

Пусть H — универсальная накрывающая для G . Пусть R_H — радикал H , а R'_H — коммутант группы R_H . Для любого элемента $h \in H$ обозначим через h' канонический образ элемента h в H/R'_H , а через $C(h') = \{kh'h^{-1} \mid k \in H/R'_H\}$ класс элементов, сопряжённых элементу h' в H/R'_H . Обозначим через V_H векторное пространство, изоморфное R_H/R'_H .

Рассмотрим следующие утверждения:

- 1) любое локально ограниченное конечномерное представление группы G непрерывно;
- 2) любое локально ограниченное одномерное представление группы G непрерывно;
- 3) любой унитарный характер группы G непрерывен;
- 4) группа G не имеет нетривиальных локально ограниченных одномерных представлений;
- 5) группа G не имеет нетривиальных унитарных характеров;
- 6) группа G не имеет нетривиальных коммутативных фактор-групп;
- 7) группа G совершенна, т. е. G совпадает со своим коммутантом G' ;
- 8) алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G совершенна, т. е. $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$;
- 9) радикал $\mathfrak{r}$ и полупростая часть $\mathfrak{s}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G ($\mathfrak{g} = \mathfrak{r} \rtimes \mathfrak{s}$) удовлетворяют условию $\mathfrak{r} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$.

Напомним, что импликации $1) \implies 2) \implies 3)$, $4) \implies 5) \implies 3)$ и $4) \implies 2)$ очевидны, а эквивалентности $9) \iff 8) \iff 7) \iff 6)$ либо очевидны, либо общеизвестны (напомним, что согласно [238, теорема 3.14.1] если $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} + \mathfrak{r}$ — разложение Леви для $\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{g}' = \mathfrak{s} + [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$ — разложение Леви для коммутанта $\mathfrak{g}'$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$). Любая нетривиальная некоммутативная группа имеет нетривиальные унитарные характеры, и поэтому $5) \implies 6)$. Обратно, образ нетривиального одномерного представления (в частности, унитарного характера) является нетривиальной коммутативной фактор-группой, откуда следует, что $6) \implies 4)$, и тем самым $6) \iff 5) \iff 4)$. Так как импликация $5) \implies 3)$ тоже очевидна, остаётся доказать импликацию $3) \implies 1)$.

Рассмотрим следующее утверждение:

- 10) касательные пространства (рассматриваемые как векторные подпространства алгебры Ли группы $V_H = R_H/R'_H$) к классам сопряжённых элементов $C(r')$, $r' \in R_H/R'_H$, различных элементов группы R_H/R'_H порождают всю алгебру Ли векторного пространства V_H .

Докажем, что утверждения 1)–9) эквивалентны утверждению 10). Точнее, докажем импликацию $3) \implies 10)$ и $10) \implies 1)$.

Сначала докажем импликацию $3) \implies 10)$. Напомним, что группа G предполагается односвязной и поэтому совпадает со своей универсальной накрывающей группой. Предположим, что условие 10) не выполняется, т. е. существует такое векторное подпространство L в V коразмерности 1 в V , что любое касательное пространство любого класса сопряжённых элементов группы G/R' в V параллельно подпространству L в V (рассматриваемому как подпространство в алгебре Ли группы V). Заметим, что действие группы G/R' на V сводится к действию полупростой группы G/R , поскольку группа R/R' , изоморфная V , коммутативна и поскольку каждый гомоморфизм действия аддитивен и сохраняет нулевой элемент в V . Поэтому он линеен, и действие есть линейное представление полупростой группы Ли и непрерывно как действие группы на

её нормальном делителе. Каждое конечномерное линейное представление полупростой группы Ли вполне приводимо, а из строения конечномерных неприводимых представлений полупростых групп Ли следует, что их орбиты локально замкнуты (см. также [88; 238, теорема 1.1.5]). Так как любой класс сопряжённых элементов связан (как непрерывный образ связного множества), то любой класс сопряжённых элементов есть связное подмногообразие в V , все касательные пространства которого параллельны L . Таким образом, любой класс сопряжённых элементов целиком принадлежит некоторой гиперплоскости, параллельной L . отождествляя группу S с подгруппой Леви в G/R' и векторное пространство V с R/R' , мы получаем таблицу Кэли $svs_1v_1 = ss_1(s_1^{-1}vs_1)v_1$, $s, s_1 \in S$, $v, v_1 \in V$, и поэтому, записывая $v^s = s^{-1}vs$, $v \in V$, $s \in S$, видим, что

$$gg_1 = sv s_1 v_1 = ss_1 v^{s_1} v_1, \quad s, s_1 \in S, \quad v, v_1 \in V, \quad (2)$$

для любых элементов $g, g_1 \in G/R'$ с разложениями $g = sv$ и $g_1 = s_1 v_1$, $s, s_1 \in S$, $v, v_1 \in V$. Тогда, определяя S - и V -компоненты любого элемента $g = sv \in G$, $s \in S$, $v \in V$, формулами $s(g) = s$ и $v(g) = v$, мы видим, что V -компонента $v(gg_1)$ произведения gg_1 равна произведению $v^{s_1} v_1$.

Пусть теперь F — ненулевой линейный функционал на V , обращающийся в нуль на векторном пространстве L . Рассмотрим отображение $f: G/R' \rightarrow \mathbb{R}$, определённое правилом $f(g) = F(v(g))$. Из формулы (2) следует, что значение $f(gg_1) = F(v(gg_1)) = F(v^{s_1} v_1) = F(v^{s_1}) + F(v_1)$ равно $F(v) + F(v_1) = f(g) + f(g_1)$, так как $F(v^{s_1}) = F(v)$ по построению гиперплоскости L и функционала F . Образ функционала f совпадает с $\mathbb{R}$ по построению. Следовательно, отображение f — нетривиальный гомоморфизм f группы Ли G/R' на $\mathbb{R}$. Однако из условия 3) следует, что таких гомоморфизмов нет, потому что группа $\mathbb{R}$ имеет нетривиальные унитарные характеры. Это доказывает импликацию 3) $\Rightarrow$ 10) для односвязных групп, так как построенное выше отображение f непрерывно и открыто, и поэтому композиция f с любым разрывным характером группы $\mathbb{R}$ есть разрывный характер группы G/R' , а потому и группы G .

В общем случае возьмём универсальную накрывающую группу H данной группы G , применим результат об односвязных группах к группе H и построим гомоморфизм f для группы H с перечисленными выше свойствами. Образ ядра Z канонического эпиморфизма $\beta: H \rightarrow G$ дискретен и потому не более чем счётен. Поэтому либо естественное отображение факторизации $f(H/R'_H) = \mathbb{R}$ по $f(\beta(Z))$ непрерывно, и в этом случае композиция этого отображения со всеми (по крайней мере $2^{2^{\aleph_0}}$) разрывными характерами фактор-группы даёт $2^{2^{\aleph_0}}$ различных характеров и некоторые из них разрывны на исходной группе (потому что имеется не более $2^{\aleph_0}$ различных непрерывных характеров любой связной группы Ли), либо это фактор-отображение разрывно и образ этого отображения является абелевой группой с континуумом элементов и тем самым $2^{2^{\aleph_0}}$ разрывными характерами, так что, как и выше, композиции некоторых из этих характеров с каноническим гомоморфизмом на фактор-группу

$f(H/R'_H)/f(\beta(Z))$ разрывны на H и поэтому и на G . Это завершает доказательство импликации $3) \implies 10)$ для связных групп Ли.

Перейдём к доказательству импликации $10) \implies 1)$. Пусть G — группа, удовлетворяющая условию $10)$, и пусть π — локально ограниченное конечномерное представление группы G . Переходя к универсальной накрывающей группе группы G , мы можем ограничиться случаем, когда G — связная односвязная группа Ли. Действительно, если представление π исходной группы является непрерывным (локально ограниченным), то соответствующее представление универсальной накрывающей группы является непрерывным (локально ограниченным) по определению накрывающей группы. По этой причине мы в дальнейшем считаем группу G односвязной.

По теореме Леви—Мальцева группа G — полупрямое произведение связной односвязной полупростой группой Ли S и связного односвязного нормального делителя R (радикала группы G). Как и выше, обозначим через R' коммутант группы R . Пусть θ — канонический гомоморфизм $\theta: R \rightarrow R/R'$ группы R на фактор-группу R/R' .

Любой элемент группы G — (однозначно определённое) произведение элемента группы S и элемента группы R (именно в этом порядке, как и выше). Поэтому рассматриваемое представление однозначно определено его ограничениями на S и R . Представление непрерывно на G тогда и только тогда, когда эти ограничения непрерывны на S и R соответственно. По теореме 1.3.1 ограничение σ представления π на S непрерывно на S , и остаётся изучить непрерывность ограничения ρ данного представления π на R . Напомним, что по следствию 1.2.6 ограничение любого локально ограниченного конечномерного представления ρ группы G на R' непрерывно.

Соотношение

$$\rho(srs^{-1}) = \pi(srs^{-1}) = \pi(s)\pi(r)\pi(s)^{-1} = \sigma(s)\pi(r)\sigma(s)^{-1}, \quad s \in S, \quad (3)$$

выполняется в любой точке r группы R . Так как ограничение представления π на S непрерывно и отображение, переводящее элемент $s \in S$ в элемент $srs^{-1} \in R$, непрерывно и открыто, то из формулы (3) следует, что ограничение представления π (или ρ) на любой класс сопряжённых элементов $C(r)$, $r \in R$, непрерывно. Следовательно, для любого семейства $C(r_1), \dots, C(r_k)$, образованного конечным семейством классов сопряжённых элементов в R , ограничение представления π на произведение $C(r_1) \dots C(r_k) \cdot R' \subset R$ многообразий $C(r_1), \dots, C(r_k)$ и R' тоже непрерывно.

Однако по условию $10)$ можно найти конечное число точек $r_1, \dots, r_k$ в R со следующим свойством. Если r'_j — канонический образ элемента r_j в R' , $j \in \{1, \dots, k\}$, то касательные пространства (рассматриваемые как векторные подпространства алгебры Ли группы Ли $V = R/R'$) классов сопряжённых элементов $C'(r'_k)$, $r'_k \in R/R'$, в группе G/R' порождают пространство V . Таким образом, дифференциал отображения $\Phi: C'(r'_1) \times \dots \times C'(r'_k) \rightarrow C'(r'_1) \dots C'(r'_k)$ (определённого умножением в группе G/R') отображает декартово произведение касательных пространств классов сопряжённых элементов $C'(r'_1), \dots, C'(r'_k)$

на алгебру Ли группы R/R' . Применяя теорему о неявной функции, обычным образом получаем, что произведение классов сопряжённых элементов $C'(r'_j)$, $j = 1, \dots, k$, содержит нетривиальное открытое множество в R/R' , и следовательно, его полный θ -прообраз в R (т. е. произведение $C(r_1) \dots C(r_k) \cdot R'$, на котором представление ρ непрерывно по доказанному выше) содержит нетривиальное открытое множество в R . Таким образом, представление ρ непрерывно, и поэтому ограничение представления π на R непрерывно, что и требовалось. Это доказывает импликацию $10) \implies 1)$ и завершает доказательство теоремы 2.2.7.

Другое доказательство, основанное только на алгебраических соображениях, использует структуру не обязательно непрерывных неприводимых конечномерных представлений групп Ли. Мы приведём его для полноты изложения.

Согласно следствию 1.1.14 достаточно доказать, что неприводимые подфакторы представления π непрерывны. Поэтому мы вправе дополнительно предположить, что π — неприводимое представление. Изучим сначала представление π , рассматривая его как представление π_H универсальной накрывающей H группы G и пользуясь соответствующим разложением Леви—Мальцева. Рассмотрим ограничение представления π_H на радикал R_H группы H . По теореме 1.2.2 существует базис в пространстве E представления π_H (и тем самым в пространстве представления π), в котором ограничение представления π_H на радикал R_H записывается верхними треугольными матрицами. Следовательно, существует общий собственный вектор $\xi \in E$, $\xi \neq 0$, всех операторов $\pi_H(r)$, $r \in R_H$, так что $\pi_H(r)\xi = \lambda(r)\xi$ при $r \in R_H$, где $\lambda(r) \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ для любого $r \in R_H$. Таким образом, существует одномерное подпространство $L \subset E$, инвариантное относительно ограничения π_H представления π на R_H . Так как H/R_H — связная группа Ли, то она порождена любой окрестностью единицы, и существует безгранично делимая окрестность единицы (например, гомеоморфная звёздной окрестности единицы при экспоненциальном отображении). По лемме 1.2.1 отсюда следует, что все операторы представления π_H кратны единичному оператору в пространстве E . При этом по условию данное представление π неприводимо.

Таким образом,

$$\lambda(r)\pi_H(g)\xi = \lambda(g^{-1}rg)\pi_H(g)\xi = \pi_H(r)\pi_H(g)\xi, \quad g \in H, \quad r \in R_H,$$

откуда следует, что $\pi_H(r)$ действует как оператор $\lambda(r)1_F$ на неприводимом подпространстве F , порождённом вектором ξ , и F совпадает с E , поскольку представление π_H неприводимо по предположению. Итак,

$$\pi_H(r) = \lambda(r)1_E \quad \text{для любого } r \in R.$$

В частности, ограничение отображения π_H на любую полупростую подгруппу Леви в H является неприводимым представлением этой подгруппы, и характер λ централен, т. е. соотношение $\lambda(r) = \lambda(g^{-1}rg)$ выполняется для всех $g \in H$ и $r \in R_H$. Таким образом, функция λ тождественно равна единице на $[H, R_H] \supset \supset R'_H = [R_H, R_H]$.

С другой стороны, радикальная часть любого коммутатора в H (компонента полупрямого разложения, лежащая в радикале) принадлежит ядру центрального характера λ . Действительно, если S — подгруппа Леви и если $g = sr$ и $g_1 = s_1 r_1$, где $s, s_1 \in S$ и $r, r_1 \in R$, то

$$\begin{aligned} gg_1 g^{-1} g_1^{-1} &= sr s_1 r_1 r^{-1} s^{-1} r_1^{-1} s_1^{-1} = \\ &= ss_1 s^{-1} s_1^{-1} ((s_1 (s_1 s)^{-1})^{-1} r (s_1 (s_1 s)^{-1})) (s_1 s r_1 r^{-1} (s_1 s)^{-1}) (s_1 r_1^{-1} s_1^{-1}). \end{aligned}$$

Следовательно, $gg_1 g^{-1} g_1^{-1} = s_0 r_0$, где $\lambda(r_0) = 1$, и ограничение представления π_H на коммутант группы H действует как соответствующее представление полупростой фактор-группы Ли H/R_H (это представление тривиально на образе ядра естественного накрытия $H \rightarrow G$). Тогда ограничение неприводимого представления π на коммутант G' группы G можно считать ограничением представления фактор-группы группы G , определяемым неприводимым локально ограниченным представлением фактор-группы группы Ли G по её радикалу (который является замкнутым нормальным делителем в G), т. е. рассматривать как неприводимое локально ограниченное представление связной полупростой группы Ли, которое непрерывно в фактор-топологии по теореме 1.3.1. Итак, представление π совпадает на коммутанте G' группы G с представлением, поднятым с непрерывного представления фактор-группы G/R , и поэтому ограничение π на G' непрерывно в топологии, индуцированной исходной топологией группы G . $\square$

Отметим важное для дальнейшего следствие.

Следствие 1.3.3. Пусть G — связная группа Ли, H — группа Ли, а π — локально ограниченный гомоморфизм группы G в H . Тогда группа разрывов $DG(\pi)$ является коммутативной компактной связной подгруппой в H , и ограничение $\pi|_{G'}$ гомоморфизма π на коммутант G' группы G непрерывно, если топология коммутанта G' индуцирована топологией группы G .

Доказательство. Рассмотрим универсальную накрывающую группу $\tilde{G}$ группы G и композицию $\pi \circ \chi$ накрывающего гомоморфизма $\chi: \tilde{G} \rightarrow G$ и данного гомоморфизма π . Рассмотрим замыкание $L = \overline{\pi(G)} = \overline{(\pi \circ \chi)(\tilde{G})}$ образа $\pi(G)$ группы G в H . Группа L является группой Ли как замкнутая подгруппа группы Ли H . По теореме 1.1.2 и лемме 1.1.6 группа разрывов $DG(\pi \circ \chi)$ — компактный связный нормальный делитель в L , а фактор-группа $L/DG(\pi \circ \chi)$ — образ связной группы G при непрерывном отображении, получаемом композицией отображения $\pi \circ \chi$ и последующего перехода к фактор-группе по $DG(\pi \circ \chi)$, а эта композиция непрерывна, так как её группа разрывов единична (см. теорема 1.1.2 и лемма 1.1.7). Следовательно, группа L — связная группа Ли.

Применим теорему Леви—Мальцева и представим группу $\tilde{G}$ в виде полупрямого произведения $\tilde{G} = S_{\tilde{G}} \cdot R_{\tilde{G}}$, где $S_{\tilde{G}}$ — подгруппа Леви в $\tilde{G}$, а $R_{\tilde{G}}$ — радикал группы G . Обозначим через σ ограничение гомоморфизма $\pi \circ \chi$ на подгруппу Леви $S_{\tilde{G}}$. Пусть R_L — радикал группы L . Композиция θ отображения σ

и канонического гомоморфизма $L \rightarrow L/R_L$ переводит S в подгруппу полупростой группы Ли L/R_L . Поскольку присоединённая группа $\widehat{L/R_L}$ полупростой группы Ли L/R_L является линейной группой, получаемой из L/R_L факторизацией по дискретному центру, мы вправе рассматривать композицию отображения θ и последующего перехода к присоединённой группе группы $\widehat{L/R_L}$ как линейное представление полупростой группы $S_{\tilde{G}}$. Так как исходное представление группы G является локально ограниченным, то и полученное линейное представление группы $S_{\tilde{G}}$ является локально ограниченным. Следовательно, оно непрерывно по теореме 1.3.1, а тогда и отображение θ непрерывно (потому что группа Ли L/R_L и её присоединённая группа $\widehat{L/R_L}$ локально изоморфны). Таким образом, группа разрывов $DG(\sigma)$ отображения σ содержится в радикале R_L группы L и потому целиком содержится в замкнутом разрешимом нормальном делителе $DG(\pi \circ \chi) \cap R_L$ группы разрывов $DG(\pi \circ \chi)$. Но каждый элемент группы разрывов $DG(\pi \circ \chi)$ можно представить в виде произведения элемента группы $DG(\sigma)$ и элемента группы разрывов $DG(\pi \circ \chi|_{R_{\tilde{G}}})$ ограничения гомоморфизма $\pi \circ \chi$ на радикал $R_{\tilde{G}}$, а группа разрывов $DG(\pi \circ \chi|_{R_{\tilde{G}}})$ разрешима как подгруппа замыкания образа разрешимой группы $R_{\tilde{G}}$ при гомоморфизме $\pi \circ \chi$. Таким образом, группа $DG(\pi \circ \chi)$ является расширением разрешимой группы Ли с помощью разрешимой группы Ли и потому сама является разрешимой группой Ли. Но эта группа одновременно компактна и связна по следствию 1.1.8 и, следовательно, коммутативна [121, предложение 9.4]. Таким образом, группа $DG(\pi \circ \chi)$ является тором. Согласно замечанию 1.1.10 отсюда следует, что группа разрывов $DG(\pi \circ \chi|_{\tilde{G}'})$ ограничения $\pi \circ \chi|_{\tilde{G}'}$ гомоморфизма $\pi \circ \chi$ на коммутант $\tilde{G}'$ группы $\tilde{G}$, рассматриваемый во внутренней топологии Ли, тривиальна, и следовательно, ограничение $\pi \circ \chi|_{\tilde{G}'}$ отображения $\pi \circ \chi$ на $\tilde{G}'$ непрерывно во внутренней топологии Ли на аналитической подгруппе $\tilde{G}'$ группы $\tilde{G}$ по теореме 1.1.2. Кроме того, поскольку группа $\tilde{G}$ локально безгранично делима, а группа автоморфизмов тора является некоторой группой автоморфизмов решётки, то каноническое действие группы $\pi(G)$ на торе $DG(\pi \circ \chi)$ тривиально на окрестности единицы, а тогда и на всей группе $\pi(G)$, так что тор $DG(\pi \circ \chi)$ централен в $\pi(G) = \pi \circ \chi(\tilde{G})$.

Осталось доказать, что ограничение $\pi \circ \chi|_{\tilde{G}'}$ отображения $\pi \circ \chi$ на $\tilde{G}'$ непрерывно и в топологии, индуцированной исходной топологией группы $\tilde{G}$. Мы воспользуемся приёмом, использованным в теореме 1.1.13. Рассмотрим радикал R_L группы L , его коммутант R'_L и соответствующую полупростую фактор-группу $S_L = L/R_L$. Как известно, эти три группы связны. Группа S_L естественно действует на коммутативной связной фактор-группе Ли R_L/R'_L , которая изоморфна прямому произведению тора и векторного пространства, скажем $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^n$, $k, n \in \mathbb{Z}$, $k, n \geq 0$. В этом произведении группа $\mathbb{T}^k$ определена однозначно (как множество элементов группы Ли R_L/R'_L , семейство всех целых степеней которых имеет компактное замыкание) и центральна (по тем же причинам, что и тор в предыдущем абзаце).

Рассмотрим алгебру Ли группы Ли R_L/R'_L . Векторное пространство этой алгебры Ли изоморфно $\mathbb{R}^{k+n}$. Присоединённое представление группы L/R'_L

естественно определяет действие фактор-группы $S_L = L/R_L$ на векторном пространстве $\mathbb{R}^{k+n}$ алгебры Ли группы Ли R_L/R'_L . Это действие очевидным образом непрерывно, аддитивно и сохраняет начало координат. Следовательно, оно линейно. Таким образом, это линейное представление связной полупростой группы Ли S_L в векторном пространстве $\mathbb{R}^{k+n}$. Как и всякое непрерывное конечномерное линейное представление, это представление может быть разложено единственным образом в прямую сумму представлений, кратных попарно неэквивалентным неприводимым представлениям. Выделим подпредставление, кратное единичному, и рассмотрим соответствующие подгруппы Ли, отвечающие этому подпространству и дополнительному подпространству. Обе эти подгруппы инвариантны, замкнуты, связны и односвязны, причём одна из них центральна, а вторая пересекается с центром тривиально. Пусть W — полный прообраз в группе L второй подгруппы в R_L/R'_L (имеющей тривиальное пересечение с центром). Композиция отображения $\pi \circ \chi$ группы Ли $\tilde{G}$ в L и последующей факторизации по W определяет гомоморфизм группы Ли $\tilde{G}$ в группу Ли L/W . Рассмотрим ограничение этого гомоморфизма на коммутант $\tilde{G}'$ группы Ли $\tilde{G}$. Образ этого ограничения содержится в коммутанте образа $\pi \circ \chi(\tilde{G})$ группы Ли $\tilde{G}$ в L/W и тем самым и в коммутанте замыкания этого образа, т. е. в коммутанте фактор-группы L/W . Но поскольку центр группы L/W совпадает с её радикалом (в частности, замкнут), то коммутант группы L/W алгебраически изоморфен фактор-группе группы L/W по центру, т. е. полупростой группе разложения Леви—Мальцева. Несмотря на то что коммутант группы L/W в топологии, определяемой вложением в L/W , может быть не замкнут в L/W , он непрерывно и взаимно однозначно отображается на полупростую фактор-группу разложения Леви—Мальцева (в топологии Ли), а непрерывность обратного отображения очевидна. Таким образом, построенное отображение является композицией введённого выше непрерывного отображения (ограничения $\pi \circ \chi|_{\tilde{G}'}$, отображения $\pi \circ \chi$ на $\tilde{G}'$), непрерывного во внутренней топологии Ли на аналитической подгруппе $\tilde{G}'$ группы $\tilde{G}$, непрерывного отображения факторизации и гомеоморфизма коммутанта группы L/W на себя в топологии вложения и в топологии Ли. Тем самым ограничение на коммутант $\tilde{G}'$ построенного нами фактор-отображения непрерывно в топологии вложения. Отсюда следует, что группа разрывов $DG(\pi \circ \chi|_{\tilde{G}'})$ ограничения $\pi \circ \chi|_{\tilde{G}'}$, гомоморфизма $\pi \circ \chi$ на коммутант $\tilde{G}'$ группы $\tilde{G}$, рассматриваемый во внутренней топологии Ли, содержится в замкнутом нормальном делителе W . Но W имеет лишь тривиальное пересечение с группой разрывов $DG(\pi \circ \chi|_{\tilde{G}'})$, которая, как мы видели, центральна, а пересечение группы W с центром тривиально по построению. Таким образом, группа $DG(\pi \circ \chi|_{\tilde{G}'})$ (где окрестности берутся относительно топологии вложения) тривиальна, так что ограничение $\pi \circ \chi|_{\tilde{G}'}$, гомоморфизма $\pi \circ \chi$ на коммутант $\tilde{G}'$ непрерывно в топологии вложения, что и требовалось.

Напомним в заключение, что непрерывность ограничения $\pi \circ \chi|_{\tilde{G}'}$ эквивалентна непрерывности ограничения $\pi|_{G'}$, а группа разрывов $DG(\pi)$ совпадает с группой $DG(\pi \circ \chi)$. $\square$

Замечание 1.3.4. Из доказательства следует, что любой элемент $aba^{-1}b^{-1}$ коммутатора $\pi(G)' = \pi(G')$ группы $\pi(G)$ является единственным прообразом в $\pi(G)' = \pi(G')$ канонического образа рассматриваемого элемента в $\pi \circ \chi(\tilde{G})/\mathrm{DG}(\pi \circ \chi)$. Действительно, замена a на ac_a и b на bc_b , где $c_a, c_b \in \mathrm{DG}(\pi \circ \chi)$, приводит к тому же элементу $ac_ab c_b c_a^{-1} a^{-1} c_b^{-1} b^{-1} = aba^{-1}b^{-1}$ ввиду центральности элементов c_a и c_b .

Следующее утверждение тоже использует информацию о структуре компактных групп.

Теорема 1.3.5. *Любой гомоморфизм некоммутативной связной компактной группы в локально компактную группу имеет нетривиальное множество относительной непрерывности, а именно его ограничение на каждую простую компоненту коммутанта непрерывно.*

Доказательство. Теорема 9.24 в [121] утверждает, что $G = Z_0(G)G'$, где $Z_0(G)$ — центр группы G , а G' — коммутант группы G , а теорема 9.6 в [121] утверждает, что G' — полупростая компактная группа, т. е. её коммутант совпадает с ней. Кроме того, теорема 9.19 в [121] утверждает, что G' — фактор-группа прямого произведения односвязных простых компактных групп Ли. Поэтому ограничение любого гомоморфизма некоммутативной связной компактной группы в локально компактную группу на каждую простую компоненту коммутанта непрерывно по теореме ван дер Вардена [239]. $\square$

1.4. Свойства группы разрывов гомоморфизмов локально компактных групп

1.4.1. Свойства группы разрывов гомоморфизмов локально компактных групп

Нам нужна следующая информация о структуре конечномерных связных компактных групп Ли.

Лемма 1.4.1. *Пусть L — связная локально компактная группа, C — вполне несвязный компактный нормальный делитель в L , и пусть фактор-группа L/C есть группа Ли. Существует связная замкнутая разрешимая подгруппа группы L , пересечение которой с центром группы L является замкнутой подгруппой конечного индекса в центре группы L .*

Доказательство. Из условия следует, что группа C центральна в L , а L — конечномерная группа. Рассмотрим радикал R (наибольший связный разрешимый нормальный делитель) группы L (см. [188, теорема 3.7]). Тогда либо $L = R$, либо фактор-группа $\Sigma = L/R$ есть связная полупростая локально компактная группа конечной размерности [233, теорема 7.6]. Пусть $\pi: L \rightarrow \Sigma$ — каноническое отображение. Рассмотрим образ $\pi(Z(L))$ центра $Z(L)$ группы L в группе Σ . Так как π — эпиморфизм, то $\pi(Z(L))$ содержится в центре $Z(\Sigma)$

группы Σ . В этом случае $Z(L) \supset C$, и поэтому фактор-группа $\Sigma/Z(\Sigma)$ (по центру $Z(\Sigma)$ группы Σ) есть связная полупростая группа Ли без центра (прямое произведение присоединённых групп простых групп Ли).

Если сама группа Σ — группа Ли, то её центр конечен. Следовательно, существует замкнутая подгруппа Q конечного индекса в $Z(L)$ (Q — полный прообраз единицы в $Z(\Sigma)$), лежащая в R .

Пусть группа Σ не является группой Ли. Напомним [233, теорема 8.3], что в этом случае существует последовательность

$$\pi_n: L_{n+1} \rightarrow L_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

нетривиальных конечнократных накрытий связных групп Ли, где $L_0 = \Sigma/Z(\Sigma)$ (прямое произведение присоединённых групп простых групп Ли) и Σ — проективный предел семейства $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$, где каждая группа L_n есть гомоморфный образ универсальной накрывающей группы L_0 , которая изоморфна прямому произведению универсальных накрывающих простых сомножителей группы L_0 . Напомним, что для простого сомножителя в $\Sigma/Z(\Sigma)$ последовательность $\{\pi_n\}$ может существовать тогда и только тогда, когда этот сомножитель является эрмитово симметрической полупростой вещественной группой Ли. В этом случае центр любой группы L_n содержится в центральном торе максимальной компактной подгруппы группы L_n . Поскольку неэрмитовы прямые сомножители в $\Sigma/Z(\Sigma)$ имеют универсальные накрывающие группы с конечным центром, то центр $Z(\Sigma)$ группы Σ содержит подгруппу Z' конечного индекса (ядро факторизации группы Σ по прообразу в Σ прямого произведения всех неэрмитовых прямых сомножителей в $\Sigma/Z(\Sigma)$), лежащую в проективном пределе прямого произведения одномерных центральных торов максимальных компактных подгрупп эрмитовых сомножителей [233, пункт 8.5 и теорема 8.6]. Тогда группа Z' лежит в проективном пределе T' этих прямых произведений. Группа T' связна и коммутативна как проективный предел торов. Её полный прообраз R_1 в L разрешим как расширение связной коммутативной группы T' с помощью связной разрешимой группы R , и группа R_1 содержит центральную подгруппу Q конечного индекса в $Z(L)$.

Итак, в любом случае центр $Z(L)$ группы L содержит замкнутую подгруппу Q конечного индекса, принадлежащую замкнутой связной разрешимой подгруппе R_1 группы L . $\square$

1.4.2. Связность группы разрывов конечномерных локально ограниченных представлений связных локально компактных групп

Вернёмся к свойствам группы разрывов локально ограниченных гомоморфизмов связных локально компактных групп. Установим следующий общий факт, являющийся одним из основных утверждений настоящей статьи.

Теорема 1.4.2. Пусть G — связная локально компактная группа, а π — локально ограниченный гомоморфизм связной локально компактной группы G

в связную локально компактную группу H . Тогда группа разрывов $DG(\pi)$ является компактной связной группой (компактной подгруппой группы H).

Доказательство. Пусть π — локально ограниченный гомоморфизм связной локально компактной группы G в связную локально компактную группу H . Пусть K — некоторый компактный нормальный делитель в H , фактор-группа по которому является группой Ли. Композиция $\psi = \theta_K \circ \pi$, где θ_K — каноническое отображение группы H на фактор-группу H/K , является локально ограниченным гомоморфизмом связной локально компактной группы G в связную группу Ли H/K . Докажем, что группа разрывов гомоморфизма $\psi = \theta_K \circ \pi$ связна.

Пусть Q — такой компактный нормальный делитель в группе G , что фактор-группа G/Q является группой Ли. Пусть Q_0 — компонента единицы в группе Q . Фактор-группа G/Q_0 есть конечномерная локально компактная группа. По следствию 1.1.8 группа разрывов $M_1 = DG(\psi|_{Q_0})$ ограничения гомоморфизма ψ на подгруппу Q_0 есть связный компактный нормальный делитель в группе Ли, получаемой замыканием образа гомоморфизма ψ в связной группе Ли H/K . Композиция $\rho = \chi_{M_1} \circ \psi$ гомоморфизма ψ и канонического гомоморфизма χ_{M_1} группы $\psi(G)$ на фактор-группу $\psi(G)/M_1$ является локально ограниченным (и потому локально относительно компактным) гомоморфизмом связной локально компактной группы G в фактор-группу Ли $\psi(G)/M_1$. Согласно лемме 1.1.7 и [24, теорема 7.14] из связности группы M_1 следует, что достаточно проверить, что группа $DG(\rho)$ связна. По построению ограничение $\rho|_{Q_0}$ удовлетворяет условию $DG(\rho|_{Q_0}) = \{e_{H/K}\}$ и тем самым непрерывно по теореме 1.1.2. Поскольку группа Ли H/K не содержит малых подгрупп, то существует такой компактный нормальный делитель N в группе Q_0 , что фактор-группа Q_0/N есть группа Ли и ограничение отображения $\rho|_{Q_0}$ на N тривиально. Поэтому фактор-группа Q_0/N есть конечномерная связная локально компактная группа и ограничение отображения $\rho|_{Q_0}$ на N_0 тривиально. Следовательно, фактор-группа G/N_0 является конечномерной связной локально компактной группой [233, теорема 1.5], и гомоморфизм ρ корректно определяет гомоморфизм группы G/N_0 в группу Ли $\psi(G)/M_1$, группа разрывов которого совпадает с группой разрывов отображения ρ (мы обозначим его через σ). Тем самым достаточно доказать, что группа разрывов $DG(\sigma)$ любого гомоморфизма конечномерной связной локально компактной группы в связную группу Ли связна.

Напомним, что для любого компактного нормального делителя N_1 в локально компактной группе G_1 любая однопараметрическая группа в G_1/N_1 допускает подъём до однопараметрической группы в G_1 , которую каноническое отображение группы G_1 в G_1/N_1 проектирует в данную однопараметрическую группу [178, теорема 4.15.1]. Тем самым все однопараметрические подгруппы в группе $G_1/N_1 = (G/N_0)/(N/N_0) = G/N$, соответствующие векторам из некоторого базиса в алгебре Ли группы Ли $G_1/N_1 = G/N$, можно поднять до однопараметрических подгрупп в группе $G_1 = G/N_0$. Если Z — (вполне несвязный) центр группы G/N_0 , то произведение окрестностей единицы во всех базисных

однопараметрических подгруппах на центр Z есть окрестность единицы в G/N_0 (полный прообраз окрестности единицы в группе Ли G/N). Так как группа Z есть объединение конечного числа открыто-замкнутых подмножеств в Z , то произведение любых окрестностей единицы во всех базисных однопараметрических подгруппах на любую открыто-замкнутую подгруппу в Z есть окрестность единицы в G/N_0 .

Согласно лемме 1.4.1, условия которой выполнены для связной локально компактной группы $L = G/N_0$ и вполне несвязного нормального делителя $C = N/N_0$ в L , поскольку фактор-группа $L/C = G/N$ есть группа Ли, существует связная замкнутая разрешимая подгруппа M группы L , содержащая замкнутую подгруппу, являющуюся подгруппой конечного индекса в центре Z группы L . Следовательно, любое множество $V = U_1 U_2 \dots U_n U_M$, являющееся произведением (сколь угодно малых) окрестностей единицы U_i , $i = 1, \dots, n$, во всех поднятых базисных однопараметрических подгруппах $T_1, \dots, T_n$ в G/N_0 на (сколь угодно малые) окрестности единицы U_M в M , содержит некоторую окрестность единицы в G/N_0 .

Для таких окрестностей, образующих базис фильтра окрестностей единицы в G/N_0 , множества вида

$$\overline{(\sigma(V))} = \overline{\sigma(U_1)} \overline{\sigma(U_2)} \dots \overline{\sigma(U_n)} \overline{\sigma(U_M)}$$

сходятся, с одной стороны, к группе разрывов $DG(\sigma)$, а с другой — к произведению групп разрывов

$$DG(\sigma|_{T_1}) DG(\sigma|_{T_2}) \dots DG(\sigma|_{T_n}) DG(\sigma|_M),$$

где каждый из сомножителей $DG(\sigma|_{T_i})$, $i = 1, \dots, k$, как и последний сомножитель $DG(\sigma|_M)$, является связным по следствию 1.1.8.

Таким образом, и группа $DG(\sigma) = DG(\rho)$, и тем самым и группа $DG(\psi)$, где $\psi = \theta_K \circ \pi$, являются компактными связными группами для любого компактного нормального делителя K в группе-образе H , фактор-группа по которому является группой Ли. Если компактная группа разрывов $DG(\pi)$ не является связной, то существует такая окрестность единицы в группе H , что её пересечение с $DG(\pi)$ есть открыто-замкнутая компонента единицы в группе $DG(\pi)$, и эта окрестность тоже содержит компактный нормальный делитель K в H , фактор-группа по которому является группой Ли [178, гл. IV]. Тогда разные связные компоненты группы $DG(\pi)$ не могут объединиться в одну компоненту при факторизации по K , и тем самым группа $DG(\psi)$ оказывается несвязной, что невозможно по доказанному выше. Таким образом, сама группа разрывов $DG(\pi)$ является компактной связной группой, что завершает доказательство теоремы 1.4.2. $\square$

1.4.3. Некоторые примеры и следствия

Группа разрывов конечномерного локально ограниченного представления почти связной локально компактной группы, в частности компактной вполне несвязной группы, может быть несвязной. Рассмотрим следующий пример.

Пример 1.4.3. Пусть

$$K = \prod_{j=1}^{\infty} G_j,$$

где каждая компактная группа G_j , $j = 1, 2, \dots$, является копией некоторой группы корней из единицы, например

$$G_j = G = \left\{ \exp \left(2\pi \frac{ik}{n} \right) \mid k = 1, 2, \dots, n \right\}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Любой элемент f группы K определяет (ограниченную) последовательность, $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$. Применяя к каждой такой функции некоторый фиксированный характер χ банаховой алгебры $m = B(\mathbb{N})$ ограниченных комплексных последовательностей, не определяемый отображением взятия значения последовательности в какой-либо точке множества $\mathbb{N}$, мы получаем одномерный характер группы K , а именно $\pi: f \rightarrow \chi(f)$, $f \in K$. Представление π очевидным образом разрывно, и множество значений представления π на каждой окрестности единицы есть вся группа G_n n -х корней из единицы, так что $DG(\pi) = G_n$. Компактная группа G_n конечна, неединична и не является связной.

С другой стороны, для групп Ли можно получить существенно более точный результат.

Следствие 1.4.4. *Группа разрывов любого локально ограниченного конечномерного представления одной группы Ли в другую есть конечномерный тор.*

Доказательство. Пусть π — локально ограниченный гомоморфизм группы Ли G в группу Ли H . Как и выше, мы можем дополнительно предположить, что группа G односвязна. Как известно (см. лемма 1.1.6), группа $DG(\pi)$ является компактной связной линейной группой. Поэтому остаётся доказать, что группа $DG(\pi)$ абелева, или доказать равносильное утверждение о тривиальности коммутанта группы $DG(\pi)$. Но

$$\{e_H\} \subset DG(\pi)' = DG(\pi|_{G'})$$

по лемме 1.1.9, в то время как ограничение $\pi|_{G'}$ непрерывно по теореме 1.3.2, так что $DG(\pi|_{G'}) = \{e_H\}$ по теореме 1.1.2. Отсюда следует, что $DG(\pi)' = \{e_H\}$, что и доказывает абелевость группы $DG(\pi)$. $\square$

Определение 1.4.5. Конечномерное локально ограниченное представление группы Ли называется *t -разрывным*, если группа разрывов этого представления является t -мерным тором.

Очевидно, конечномерное локально ограниченное представление группы Ли 0-разрывно тогда и только тогда, когда оно непрерывно.

Предложение 1.4.6. *Любая нетривиальная связная абелева группа Ли и, следовательно, любая нетривиальная несовершенная связная группа Ли имеет локально ограниченное (и даже унитарное) конечномерное t -разрывное представление для любого натурального t .*

Доказательство. Переходя к универсальной накрывающей группе и к фактор-группе по коммутанту, видим, что достаточно доказать утверждение в одномерном случае и даже ограничиться группой $\mathbb{R}$. В этом случае мы можем воспользоваться базисом Гамеля в $\mathbb{R}$ и построить m -мерное унитарное представление ρ группы $\mathbb{R}$, переводящее произвольное вещественное число x в вектор вида $(\exp(i\pi f_1(x)), \dots, \exp(i\pi f_m(x)))$, где $f_1, \dots, f_m$ есть набор m первых координатных функционалов в выбранном базисе Гамеля. Группа разрывов $DG(\rho)$ является замкнутым тором в замыкании T образа $\rho(\mathbb{R})$, который, в свою очередь, является компактным подмножеством диагонального тора $T(m)$ в унитарной группе $U(m)$, где $T(m)$ изоморфен тору $\mathbb{T}^m$. Если замкнутая группа $DG(\rho)$ является собственной подгруппой в $T(m)$, то существует нетривиальный непрерывный характер ψ группы $T(m)$, ограничение которого на $DG(\rho)$ тождественно равно 1. Следовательно, из общего вида непрерывных характеров m -мерного тора и из определения группы разрывов следует, что композиция $\psi \circ \rho$ является непрерывным характером группы $\mathbb{R}$ и имеет вид

$$x \mapsto \exp(i\pi(n_1 f_1(x) + \dots + n_m f_m(x))), \quad x \in \mathbb{R},$$

где $n_1, \dots, n_m$ целые, не все равные нулю. Так как функции $f_1, \dots, f_m$ рационально независимы по построению и принимают только рациональные значения, то, с одной стороны, непрерывный характер $\psi \circ \rho$ нетривиален, а с другой стороны, этот характер принимает значения в группе корней из единицы. Противоречие. Таким образом, группа $DG(\rho)$ совпадает со всем m -тором $\mathbb{T}^m$, что и требовалось доказать. $\square$

Отметим следующее очевидное утверждение, вытекающее из теоремы 1.3.2 и следствия 1.4.4.

Следствие 1.4.7. *Связная односвязная группа Ли G с радикалом R совершенна тогда и только тогда, когда совершенна фактор-группа Ли G/R' , где $R' = [R, R]$ (и тем самым радикал R/R' группы Ли G/R' коммутативен).*

Напомним, что нормальный делитель R' замкнут в G по [238, теорема 3.18.2].

Замечание 1.4.8. Следует отличать используемое выше условие «алгебраического» совершенства группы Ли G от условия «топологического» совершенства группы Ли G , означающего, что замыкание коммутанта группы G совпадает с G . Напомним пример топологически совершенной группы Ли, которая не является совершенной и потому имеет разрывные гомоморфизмы с абелевыми образами. Рассмотрим фактор-группу H прямого произведения универсальной накрывающей G группы $SL(2, \mathbb{R})$ и одномерного тора $\mathbb{T}$ по дискретной подгруппе, порождённой элементом вида $\{z, \alpha\} \in G \times \mathbb{T}$, где z — порождающий элемент центра группы G , а α — иррациональное вращение (см. [238, гл. 3, упражнение 47]). Коммутант полученной группы Ли H плотен в H .

С другой стороны, аналог утверждения следствия 1.4.4 может не выполняться для компактных групп, которые не являются группами Ли. Рассмотрим следующий пример.

Пример 1.4.9. Пусть

$$K = \prod_{k=1}^{\infty} G_k,$$

где каждая компактная группа Ли G_k является копией некоторой простой компактной группы Ли, записанной в матричной форме, например $G_k = \mathrm{SU}(2)$, $k = 1, 2, \dots$. Как уже было сказано выше, любой матричный элемент f_{ij} , $i, j = 1, 2$, любого элемента $f = \{f_{ij}\}_{i,j=1}^2$ группы K определяет (ограниченную) функцию на натуральном ряде, $f_{ij}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$, $i, j = 1, 2$. Применяя к каждой такой функции некоторый фиксированный характер χ банаховой алгебры $m = B(\mathbb{N})$ ограниченных последовательностей, не определяемый отображением взятия значения последовательности в какой-либо точке множества $\mathbb{N}$, мы получаем конечномерное унитарное матричное представление $\pi: f = \{f_{ij}\}_{i,j=1}^2 \rightarrow \{\chi(f_{ij})\}_{i,j=1}^2$, $f \in K$, группы K . Представление π очевидным образом разрывно, поскольку множество значений представления π на каждой окрестности единицы есть вся группа $\mathrm{SU}(2)$, так что группа $\mathrm{DG}(\pi)$ совпадает с группой $\mathrm{SU}(2)$. Тем самым группа разрывов $\mathrm{DG}(\pi)$ некоммутативна.

1.5. Непрерывность представлений в терминах колебания в точке и гипотеза Мищенко

1.5.1. Условия непрерывности представлений в терминах колебания в точке

Ниже нам понадобятся условия непрерывности представлений групп в терминах их колебаний в единице группы. Введём соответствующее определение.

Определение 1.5.1 [35]. Пусть G — топологическая группа и π — её (не обязательно непрерывное) представление в нормированном пространстве E . Пусть $\|\cdot\|$ — норма на E , а E^* — пространство, сопряжённое к E . Введём *слабое колебание* (или *слабую вариацию*) $\omega(\pi, \|\cdot\|) \geq 0$ представления π в единичном элементе e группы G (или, кратко, *слабое колебание представления* π), полагая

$$\omega(\pi, \|\cdot\|) = \sup_{\substack{\xi \in E, \|\xi\| \leq 1; \\ f \in E^*, \|f\| \leq 1}} \inf_{U \ni e} \sup_{g \in U} |f(\pi(g)\xi - \xi)|.$$

Если пространство E конечномерно (и тем самым все нормы в E эквивалентны), введём *колебание* $v(\pi) \geq 0$ представления π в единичном элементе группы G (или, кратко, *колебание представления* π), полагая

$$v(\pi) = \inf_{\{\|\cdot\|\}} \omega(\pi, \|\cdot\|),$$

где нижняя грань берётся по всем нормам в E .

Мы будем иногда кратко писать $\omega(\pi)$ вместо $\omega(\pi, \|\cdot\|)$, если норма в соответствующем рассуждении остаётся неизменной. Напомним определение локальной ограниченности представления.

Определение 1.5.2. Пусть G — топологическая группа, π — её (не обязательно непрерывное) представление в нормированном пространстве E . Мы будем говорить, что π *локально равномерно ограничено* (или просто *локально ограничено*), если существует окрестность V единичного элемента e в G и постоянная C , удовлетворяющие условию $\|\pi(g)\| \leq C$ для любого $g \in V$.

Известен следующий критерий слабой непрерывности представлений топологических групп ограниченными линейными операторами в произвольном банаховом пространстве.

Теорема 1.5.3 [35]. Пусть G — топологическая группа, E — банахово пространство, π — (не обязательно непрерывное) локально равномерно ограниченное представление группы G в банаховом пространстве E непрерывными линейными операторами. Представление π непрерывно в слабой операторной топологии тогда и только тогда, когда $\omega(\pi) < 1$.

Таким образом, если слабое колебание $\omega(\pi)$ представления π топологической группы в банаховом пространстве меньше единицы, то это колебание равно нулю, и представление слабо непрерывно. Тем самым в классе представлений групп оказывается возможной финитная проверка инфинитезимального условия непрерывности. В конечномерном случае утверждение может быть уточнено. Например, справедлива следующая теорема.

Теорема 1.5.4 [39]. Пусть G — связная локально компактная группа. Тогда любое конечномерное представление π группы G , удовлетворяющее условию $\omega(\pi) < 2$, непрерывно.

Приведём и более общее утверждение.

Теорема 1.5.5 [221]. Пусть G — топологическая группа, в которой каждая окрестность единицы содержит открытый нормальный делитель. Следующие условия равносильны.

1. Любое (не обязательно непрерывное) представление π любого открытого нормального делителя O группы G в конечномерном нормированном пространстве, удовлетворяющее условию $\omega(\pi) < 2$, непрерывно.
2. Любой нормальный делитель N (конечного) нечётного индекса в любом открытом нормальном делителе O в G замкнут (и поэтому открыт).

Отметим следствие последней теоремы. Напомним известную проблему Серра (положительное решение которой было недавно дано Николовым и Сигалом [185—187]): верно ли, что любая подгруппа конечного индекса в топологически конечно порождённой компактной вполне несвязной группе замкнута? Применение теоремы 1.5.5 приводит к следующему результату, в условии которого компактность заменена локальной компактностью, а топологическая конечная

порождённости, участвующая в постановке проблемы Серра, заменена алгебраической порождённостью счётным набором топологически однопорождённых групп.

Теорема 1.5.6. Пусть G — локально компактная вполне несвязная топологическая группа, пусть $\{g_n\}$, $n \in I$, $I \subset \mathbb{N}$, — конечный или счётный набор элементов группы G , пусть G_n — подгруппа группы G , топологически порождённая элементом g_n , $n \in I$, и пусть группа G алгебраически порождена набором подгрупп G_n , $n \in I$. Тогда любая подгруппа $N \subset G$ (конечного) нечётного индекса замкнута в G (и поэтому открыта в G).

Доказательство теоремы 1.5.6 приведено в разделе 4.2.

В дальнейшем обсуждении условий непрерывности представлений в терминах колебания в точке мы ограничимся конечномерными представлениями топологических групп. Для таких представлений π величина $v(\pi)$ определена. Безусловно, величина $v(\pi)$ конечна тогда и только тогда, когда представление π локально ограничено. Докажем, что в этом случае величина $v(\pi)$ имеет нетривиальную верхнюю границу.

Следствие 1.5.7. Пусть G — топологическая группа, а π — локально ограниченное представление группы G в конечномерном нормированном векторном пространстве E . Тогда существует такая (евклидова) норма $\|\cdot\|$ на E , что $\omega(\pi, \|\cdot\|) \leq 2$. В частности, $v(\pi) \leq 2$.

Доказательство. Утверждение сразу следует из теоремы 1.1.2 и определения 1.5.1. Действительно, пусть π — локально ограниченное конечномерное представление группы G . Рассмотрим группу разрывов $DG(\pi)$. Это компактная подгруппа полной линейной группы пространства E . Следовательно, существует такое скалярное произведение в E , что группа $DG(\pi)$ является подгруппой соответствующей унитарной группы. Тогда неравенство $\omega(\pi, \|\cdot\|) \leq 2$ выполняется для нормы $\|\cdot\|$ на E , связанной с этим скалярным произведением, поскольку расстояние между любыми двумя унитарными операторами не превосходит числа 2, а базис фильтра $\{\pi(U) \mid U \in \mathfrak{U}\}$ сходится к $DG(\pi)$. $\square$

С другой стороны, если локально ограниченное конечномерное представление связной локально компактной группы разрывно, то величина $v(\pi)$ имеет и нетривиальную нижнюю границу.

Теорема 1.5.8. Пусть G — связная локально компактная группа, и пусть π — локально ограниченное представление группы G в конечномерном нормированном векторном пространстве E . В этом случае неравенство $v(\pi) \geq 2$ выполняется тогда и только тогда, когда представление π группы G разрывно.

Доказательство. Если представление π непрерывно, то $DG(\pi) = \{1_E\}$, и следовательно, нужно рассматривать только случай, в котором представление π разрывно. Как было доказано в следствии 1.4.4, в этом случае группа разрывов представления π — связная компактная группа. Диагонализуя образ максимального тора в группе разрывов в некотором базисе, получаем, что ограничение

тавтологического представления компактной связной группы разрывов на максимальный тор содержит по крайней мере один нетривиальный диагональный матричный элемент. Этот матричный элемент определяет непрерывный характер тора, образ которого является нетривиальной замкнутой связной подгруппой одномерного тора, и поэтому весь одномерный тор. Следовательно, если $DG(\pi) \neq \{1_E\}$, то по крайней мере один матричный элемент представления π принимает значение -1 в базисе собственных векторов некоторого максимального тора в $DG(\pi)$. Поэтому диаметр группы $DG(\pi)$ не меньше 2 по отношению к любой норме в E , так что $v(\pi) \geq 2$. $\square$

Получаем следующий критерий непрерывности конечномерных представлений связных локально компактных групп (ср. [43]).

Теорема 1.5.9 (ср. [39]). Пусть G — связная локально компактная группа. Любое конечномерное представление π группы G , удовлетворяющее условию $v(\pi) < 2$, непрерывно.

Теорема 1.5.9 немедленно следует из теоремы 1.5.8.

1.5.2. Гипотеза Мищенко для связных групп Ли

Напомним, что утверждение о возможных значениях величины колебания $\omega(\rho)$ для конечномерных представлений ρ «хороших» топологических групп было высказано А. С. Мищенко в качестве гипотезы. При обсуждении одного из докладов автора на семинаре А. С. Мищенко, В. М. Мануйлова и Е. В. Троицкого в МГУ (а именно при обсуждении теоремы 1.5.9), А. С. Мищенко предположил, что колебание конечномерного представления связной группы Ли в единице группы, введённое в определении 1.5.1, может принимать только три значения — 0, 2 и ∞ . Следующее утверждение доказывает справедливость этой гипотезы.

Теорема 1.5.10 (см. [225]). Пусть G — связная группа Ли, и пусть ρ — конечномерное представление группы G , которое не предполагается непрерывным. Тогда имеет место один из следующих трёх взаимно исключающих случаев:

- 1) представление ρ непрерывно (и в этом случае $\omega(\rho) = 0$ для любой нормы в пространстве представления);
- 2) представление ρ не является локально ограниченным (и в этом случае $\omega(\rho) = \infty$ для любой нормы в пространстве представления);
- 3) представление ρ разрывно и локально ограничено (и в этом случае существует норма в пространстве представления ρ , относительно которой имеем $\omega(\rho) = 2$); этот случай возможен тогда и только тогда, когда группа G не является совершенной).

Теорема 1.5.10 показывает, что утверждение теоремы 1.5.9 может быть существенно уточнено в классе совершенных связных групп Ли. А именно, справедливо следующее утверждение.

Следствие 1.5.11. Пусть G — совершенная связная группа Ли. Любое конечномерное представление ρ группы G с конечной величиной $\omega(\rho)$ непрерывно.

Действительно, конечномерное представление ρ топологической группы локально ограничено тогда и только тогда, когда величина $\omega(\rho)$ конечна для некоторой (следовательно, любой) нормы.

Таким образом, мы получили полное описание класса групп Ли, для которых единственными возможными значениями величины $\omega(\rho)$ для конечномерных представлений ρ этих групп являются величины 0 и ∞ , и теорема 1.5.10 показывает, в частности, справедливость гипотезы Мищенко для всех связных групп Ли.

Мы докажем эту теорему в более сильной форме, а именно для связных локально компактных групп, в следующих двух пунктах.

1.5.3. Группа финальных разрывов гомоморфизма локально компактных групп

Следующее определение специфично для топологических групп, имеющих открытую проективно-лиеву подгруппу. Нужную информацию о проективно-лиевых группах можно найти в [48].

Определение 1.5.12. Пусть G — топологическая группа, допускающая открытую проективно-лиеву подгруппу, и пусть π — (не обязательно непрерывный) локально относительно компактный гомоморфизм группы G в топологическую группу H . Пусть $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_G$ — семейство всех таких компактных подгрупп N в G , что каждая группа $N \in \mathfrak{N}$ является нормальным делителем в некоторой открытой проективно-лиевой подгруппе O_N в G , для которого фактор-группа O_N/N есть группа Ли.

Лемма 1.5.13. Семейство $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_G$ образует фильтр на группе G , и

$$\bigcap_{N \in \mathfrak{N}} N = \{e_G\}.$$

Доказательство. Если O_1 и O_2 — открытые проективно-лиевы подгруппы в G , а N_1 и N_2 — такие компактные нормальные делители в O_1 и O_2 соответственно, что O_1/N_1 и O_2/N_2 являются группами Ли, то $O = O_1 \cap O_2$ — открытая подгруппа в G и $N = N_1 \cap N_2$ — компактный нормальный делитель в O . Более того, O — открытая подгруппа в O_1 , и поэтому группа ON_1/N_1 — группа Ли (открытая подгруппа группы Ли O_1/N_1). Группа O/N является расширением группы Ли ON_1/N_1 с помощью компактного нормального делителя $N_1/(N_1 \cap N_2) = N_1N_2/N_2$, которая тоже является группой Ли (компактной подгруппой группы Ли O_2/N_2). Условие $\bigcap_{N \in \mathfrak{N}} N = \{e_G\}$ выполняется по самому определению проективно-лиевых групп. $\square$

Определение 1.5.14. Введём обозначение $\text{FDG}(\pi) = \bigcap_{N \in \mathfrak{N}} \overline{\pi(N)}$. Гомоморфизм π называется *финально непрерывным*, если $\text{FDG}(\pi) = \{e_H\}$.

Очевидно, если группа H локально компактна, то любой локально ограниченный гомоморфизм локально относительно компактен.

Теорема 1.5.15. Пусть G — топологическая группа, содержащая проективно-лиеву подгруппу, и пусть π — локально относительно компактный гомоморфизм группы G в топологическую группу H . Множество $\text{FDG}(\pi)$ содержится в группе разрывов $\text{DG}(\pi)$ и является компактным нормальным делителем в группе $\overline{\pi(G)}$. Фильтр $\{\overline{\pi(N)} \mid N \in \mathfrak{N}\}$ сходится к $\text{FDG}(\pi)$. Кроме того, $\text{FDG}(\pi) \subset \text{DG}(\pi)$.

Доказательство. Множество $\pi(N)$ является нормальным делителем в образе $\pi(O_N) \subset \pi(G)$ соответствующей проективно-лиевой подгруппы O_N в G . Следовательно, для любого $g \in G$ множество $\pi(g)\pi(N)\pi(g^{-1})$ является нормальным делителем в образе $\pi(g)\pi(O_N)\pi(g^{-1}) \subset \pi(G)$ открытой проективно-лиевой подгруппы gO_Ng^{-1} в G . Поэтому множество $\text{FDG}(\pi) = \bigcap_{N \in \mathfrak{N}} \overline{\pi(N)}$ является пересечением замкнутых подгрупп и инвариантно относительно сопряжений с элементами группы $\pi(G)$, а потому и с элементами группы $\overline{\pi(G)}$. Так как гомоморфизм π локально относительно компактен по предположению и образ любого нормального делителя, лежащего в окрестности, образ которой имеет компактное замыкание, относительно компактен, то множество $\text{FDG}(\pi)$ является компактным нормальным делителем в $\overline{\pi(G)}$. Так как для любой открытой проективно-лиевой подгруппы O в G любая окрестность единицы в G содержит такой компактный нормальный делитель N в O , что фактор-группа O/N является группой Ли, то имеет место включение $\text{FDG}(\pi) \subset \text{DG}(\pi)$. Наконец, так как базис фильтра $\{\overline{\pi(N)} \mid N \in \mathfrak{N}\}$ содержит компактный элемент и пересечение всех элементов базиса есть $\text{FDG}(\pi)$, то фильтр сходится к $\text{FDG}(\pi)$. $\square$

Группа финальных разрывов локально относительно компактного гомоморфизма и даже конечномерного локально ограниченного представления почти связной локально компактной группы и, в частности, компактной вполне несвязной группы может быть несвязной и некоммукативной.

Пример 1.5.16. Напомним разобранные выше примеры 1.4.3 и 1.4.9. Если в качестве сомножителей взять фиксированную конечную некоммукативную матричную группу, то повторение рассуждения в этих примерах показывает, что группа разрывов $\text{DG}(\pi)$ представления π , определяемого свободным ультрафильтром на натуральном ряде, совпадает с выбранным сомножителем, т. е. некоммукативна и несвязна. Очевидно, что и группа $\text{FDG}(\pi)$ совпадает с выбранным сомножителем, поскольку каждая окрестность в произведении содержит нормальный делитель, получаемый удалением из произведения конечного числа сомножителей, что не влияет на множество значений отображения π .

Перед формулировкой аналога теоремы ван дер Вардена для гомоморфизмов локально компактных групп и классификацией их гомоморфизмов по свойствам разрывности мы приведём общую характеристику финально непрерывных гомоморфизмов топологической группы, допускающей открытую проективно-лиеву подгруппу, в проективно-лиеву группу.

Теорема 1.5.17. Пусть G — топологическая группа, допускающая открытую проективно-лиеву подгруппу, а H — проективно-лиева группа. Пусть $\pi: G \rightarrow H$ — локально относительно компактный гомоморфизм. Следующие условия эквивалентны:

- 1) гомоморфизм π финально непрерывен, т. е. $\text{FDG}(\pi) = \{e_H\}$;
- 2) для любого такого компактного нормального делителя K в H , что фактор-группа H/K есть группа Ли, и для любой открытой проективно-лиевой подгруппы $U \subset G$ существует такой компактный нормальный делитель N в U , что фактор-группа U/N является группой Ли и $\pi(N) \subset K$; таким образом, гомоморфизм π корректно определяет (не обязательно непрерывный) гомоморфизм $\pi_{K,U,N}$, отображающий группу Ли U/N в группу Ли H/K по формуле $\pi_{K,U,N}(uN) = \pi(u)K$, $u \in U$.

Как показывает пример 1.5.16, условие $\text{FDG}(\pi) = \{e_H\}$ существенно для справедливости этого утверждения.

Доказательство. Пусть G и H — группы, свойства которых указаны в формулировке теоремы, и пусть $\pi: G \rightarrow H$ — локально относительно компактный гомоморфизм группы G в группу H . Предположим, что $\text{FDG}(\pi) = \{e_H\}$. Пусть U — проективно-лиева открытая подгруппа в G . Обозначим ограничение гомоморфизма π на U через π_U . Пусть K — компактный нормальный делитель в H , для которого фактор-группа $L_K = H/K$ есть группа Ли. Тогда существует окрестность единицы W в L_K , не содержащая неединичных подгрупп. Следовательно, полный прообраз V окрестности W в H не содержит подгрупп, не содержащихся в K . В частности, из условия $\text{FDG}(\pi) = \{e_H\}$ следует, что пересечение замыканий образов компактных нормальных делителей в U есть e и, так как фильтр $\{\overline{\pi(N)} \mid N \in \mathfrak{N}\}$ сходится к $\text{FDG}(\pi)$ (по теореме 1.5.15), найдётся такой элемент N фильтра, что его образ содержится в окрестности V , а поэтому и в нормальном делителе K . Итак, N — искомый компактный нормальный делитель в группе U , поскольку (по определению фильтра $\mathfrak{N}$) фактор-группа U/N является группой Ли, а из включения $\pi(N) \subset K$ следует, что π -образ в группе H каждого смежного класса по N (рассматриваемого как подмножество в U) содержится в однозначно определённом смежном классе по нормальному делителю K в H , так что гомоморфизм π корректно определяет (не обязательно непрерывный) гомоморфизм $\pi_{K,U,N}$, отображающий группу Ли U/N в группу Ли H/K по формуле $\pi_{K,U,N}(uN) = \pi(u)K$, $u \in U$, что и требовалось. $\square$

Теперь мы можем сформулировать и доказать аналог теоремы ван дер Вардена о непрерывности финально непрерывных локально ограниченных гомоморфизмов почти связных локально компактных групп на коммутанте компоненты единицы.

Теорема 1.5.18. Пусть G — почти связная локально компактная группа, H — связная локально компактная группа, а $\pi: G \rightarrow H$ — локально ограниченный гомоморфизм. Если гомоморфизм π финально непрерывен ($\text{FDG}(\pi) = \{e_H\}$), то гомоморфизм π непрерывен на коммутанте G'_0 компоненты единицы G_0 .

Как показывает пример 1.4.9, условие $\text{FDG}(\pi) = \{e_H\}$ существенно для справедливости утверждения теоремы.

Доказательство. По теореме 1.5.17 для любого такого компактного нормального делителя K в H , что фактор-группа H/K является группой Ли (с конечным числом связных компонент), существует компактный нормальный делитель N в G , для которого фактор-группа G/N — (связная) группа Ли и $\pi(N) \subset K$. Таким образом, гомоморфизм π корректно определяет (не обязательно непрерывный) гомоморфизм $\pi_{K,N}$ (возможно, несвязной) группы Ли в другую (связную) группу Ли, $\pi_{K,N}: G/N \rightarrow H/K$, по формуле $\pi_{K,N}(uN) = \pi(u)K$, $u \in U$. Гомоморфизм $\pi_{K,N}$ непрерывен на коммутанте компоненты единицы $(G/N)_0$ группы G/N по следствию 1.3.3. Однако образ компоненты единицы G_0 в G/N плотен в $(G/N)_0$ согласно [24, теорема 7.12] и поэтому совпадает с $(G/N)_0$, так как N компактен. Так как коммутант группы G_0 непрерывно отображается на коммутант группы $(G/N)_0$ (изоморфной $G_0/(G_0 \cap N)$) при каноническом гомоморфизме $\nu: G \rightarrow G/N$, то исходный гомоморфизм π определяет непрерывный гомоморфизм коммутанта группы G_0 во всевозможные фактор-группы Ли H/K , где K — компактный нормальный делитель в H . Из построения ясно, что это семейство непрерывных гомоморфизмов коммутирует с каноническими гомоморфизмами фактор-групп Ли (гомоморфизмами групп Ли вида $H/K_1 \rightarrow H/K_2$ для всех $K_1 \subset K_2$, где K_1 и K_2 — компактные нормальные делители в H), и тем самым корректно определён непрерывный гомоморфизм коммутанта группы G в H . $\square$

Отметим очевидное следствие теоремы 1.5.18.

Следствие 1.5.19. Пусть G — почти связная локально компактная группа, а H — связная локально компактная группа. Следующие условия эквивалентны.

1. Любой финально непрерывный локально ограниченный гомоморфизм $\pi: G \rightarrow H$ непрерывен.
2. Группа G_0 совпадает с коммутантом G'_0 .

Доказательство. Из теоремы 1.5.18 следует, что из условия 2 следует условие 1. С другой стороны, если группа G_0 не совпадает с G'_0 , то фактор-группа G_0/G'_0 является нетривиальной коммутативной группой. Если бы группы вида $(G/N)_0/(G/N)'_0 = (G_0/(N \cap G'_0))/(G'_0/(N \cap G'_0)) = (G/(N \cap G'_0))_0/(G'_0/(N \cap G'_0))$ были тривиальны для всех таких компактных нормальных делителей N в G , что фактор-группа G/N является группой Ли, то по самому определению проективного предела группа G_0/G'_0 тоже была бы тривиальна, что противоречит предположению. Таким образом, существует такая нетривиальная группа Ли вида G/N , что соответствующая коммутативная группа $(G/N)_0/(G/N)'_0$ нетривиальна.

Пусть группа $(G/N)'_0$ незамкнута в $(G/N)_0$. Тогда группа $(G/N)_0$ имеет разрывный характер. Действительно, если бы все характеры группы были непрерывными, то, поскольку (все, не обязательно непрерывные) характеры

коммутативной группы $(G/N)_0/(G/N)'_0$, которую можно рассматривать и как дискретную группу, разделяют точки группы $(G/N)_0/(G/N)'_0$, их композиции с каноническим отображением $(G/N)_0 \rightarrow (G/N)_0/(G/N)'_0$ тоже были бы непрерывными, и следовательно, пересечение их ядер (т. е. подгруппа $(G/N)'_0$) было бы замкнутой подгруппой в $(G/N)_0$.

Так как соответствующая фактор-группа $(G/N)/(G/N)_0$ конечна, то конечномерное представление группы G/N , индуцированное этим разрывным характером, является разрывным конечномерным унитарным представлением группы G/N , а потому и группы G . Если же, напротив, группа $(G/N)'_0$ замкнута в $(G/N)_0$, то фактор-группа $(G/N)_0/(G/N)'_0$ является нетривиальной связной коммутативной локально компактной группой. Очевидно, что связная топологическая группа не может содержать такую собственную замкнутую подгруппу, чтобы коммутативная локально компактная фактор-группа $(G/N)_0/(G/N)'_0$ была дискретна. Остаётся заметить, что каждая недискретная локально компактная группа допускает $2^{2^{\aleph_0}}$ разрывных характеров [197]. $\square$

Общая часть следующего утверждения очевидна, но на её основе во второй части утверждения мы приводим содержательную классификацию не обязательно непрерывных гомоморфизмов почти связных локально компактных групп в связные локально компактные группы по «уровню» разрывности этих гомоморфизмов.

Теорема 1.5.20.

I. Пусть G — топологическая группа, содержащая открытую проективно-лиеву подгруппу, H — связная локально компактная группа, а $\pi: G \rightarrow H$ — гомоморфизм. Этот гомоморфизм принадлежит одному и только одному из следующих классов.

- (А) Гомоморфизм π не является локально ограниченным.
- (В) Гомоморфизм π является локально ограниченным и не является финально непрерывным ($\text{DG}(\pi) \supset \text{FDG}(\pi) \neq \{e_H\}$).
- (Г) Гомоморфизм π является локально ограниченным и финально непрерывным ($\text{FDG}(\pi) = \{e_H\}$), однако $\text{DG}(\pi) \neq \{e_H\}$.
- (Д) Гомоморфизм π непрерывен.

II. Пусть G — почти связная локально компактная группа, H — связная локально компактная группа, а $\pi: G \rightarrow H$ — гомоморфизм. Тогда перечисленные выше классы (А)—(Д) обладают следующими свойствами.

Существуют гомоморфизмы π , не являющиеся локально ограниченными (даже среди гомоморфизмов связных локально компактных групп в группы Ли), принадлежащие типу (А), для которых либо (тип А₁) группа $\text{FDG}(\pi)$ не определена (это значит, что ограничение гомоморфизма π на любой компактный нормальный делитель, входящий в фильтр $\mathfrak{U}$, не является локально ограниченным), либо (тип А₂) группа $\text{FDG}(\pi)$ определена и нетривиальна (в этом случае, как и в следующем случае А₃, ограничение

гомоморфизма π на любой компактный нормальный делитель, входящий в фильтр $\mathcal{U}$, является локально ограниченным гомоморфизмом), либо (тип A_3) группа $\text{FDG}(\pi)$ определена и тривиальна. Гомоморфизм π принадлежит классу (B), если ограничение гомоморфизма π на любой нормальный делитель $N \in \mathfrak{N}$ в G разрывно и имеет относительно компактный образ в H . Если группа G связна, то гомоморфизм π принадлежит классу (Г), если гомоморфизм π является проективным пределом (не обязательно непрерывных) гомоморфизмов групп Ли (в смысле утверждения 2) в теореме 1.5.17), однако некоторые из этих аппроксимирующих гомоморфизмов разрывны. Случай (Г) может быть реализован, только если группа G_0 не является совершенной, и в этом случае группы разрывов аппроксимирующих гомоморфизмов коммутативны.

Пример 1.4.9 показывает, что условие $\text{FDG}(\pi) = \{e_H\}$ существенно для справедливости утверждения (Г).

Доказательство. Так как $\text{FDG}(\pi) \subset \text{DG}(\pi)$, если π локально относительно компактен, то любой локально относительно компактный гомоморфизм (т. е. любой гомоморфизм, не принадлежащий классу (A)) либо непрерывен (т. е. принадлежит классу (Δ)), либо разрывен. В последнем случае выполняется либо условие $\text{FDG}(\pi) \neq \{e_H\}$ (т. е. гомоморфизм принадлежит классу (B)), либо условие $\text{FDG}(\pi) = \{e_H\}$ (т. е. гомоморфизм принадлежит классу (Г)). Это завершает доказательство утверждения I.

Остаётся проверить справедливость утверждения II.

Композиция гомоморфизма, построенного в примере 1.4.9, с разрывным автоморфизмом комплексного поля является примером конечномерного, не являющегося локально ограниченным представлением связной компактной группы, принадлежащего классу A_1 , поскольку ограничение этого представления на любую окрестность не является локально ограниченным. Представление двумерного тора, которое является произведением характера первого сомножителя, не являющегося локально ограниченным, и ограниченного разрывного характера второго сомножителя, даёт пример одномерного представления типа A_2 , а ограничение этого представления на первый сомножитель является примером одномерного представления типа A_3 .

В случае (B) рассмотрим ограничение $\pi|_N$ гомоморфизма π на любой нормальный делитель $N \in \mathfrak{N}$ в группе G . Если бы это ограничение было непрерывно, то выполнялось бы соотношение $\text{DG}(\pi|_N) = \{e\}$, а тогда из соотношения $\text{FDG}(\pi) = \text{FDG}(\pi|_N) \subset \text{DG}(\pi|_N)$ следовало бы, что $\text{FDG}(\pi) = \{e\}$, в то время как $\text{FDG}(\pi) \neq \{e_H\}$ по предположению (B). Таким образом, представление $\pi|_N$ разрывно для любого $N \in \mathfrak{N}$. Наконец, ограничение $\pi|_N$ представления π на N имеет относительно компактный образ в H , поскольку π локально ограничено, а N компактен.

Если группа G связна, то, по теореме 1.5.17 в случае (Г) гомоморфизм π является проективным пределом гомоморфизмов групп Ли (в смысле пункта 2)

теоремы 1.5.17); при этом некоторые аппроксимирующие гомоморфизмы должны быть разрывны, поскольку проективный предел непрерывных гомоморфизмов групп Ли является непрерывным гомоморфизмом соответствующего проективного предела групп Ли. Группы разрывов аппроксимирующих гомоморфизмов коммутативны по следствию 1.3.3. Согласно тому же следствию 1.3.3 это возможно, только если группа G не является совершенной, что завершает доказательство теоремы 1.5.20. $\square$

Замечание 1.5.21. Ситуация (В), в которой гомоморфизм π локально ограничен и не является финально непрерывным, может быть несколько прояснена в случае, если G — связная локально компактная группа. Напомним, прежде всего, что *группа разрывов связна*. Кроме того, если $N \in \mathfrak{N}$, то фактор-группа N/N_0 группы N по компоненте единицы N_0 в N является вполне несвязным нормальным делителем в связной локально компактной группе G/N_0 , и следовательно, группа N/N_0 коммутативна. Согласно [121, теорема 9.41] существует такая компактная вполне несвязная подгруппа D в N , что $N = N_0D$ и $D \cap N_0 \subseteq Z_{N_0}$, где $D/(D \cap N_0)$ — коммутативная подгруппа в N/N_0 . Группа D компактна и разрешима. Ограничение гомоморфизма π на N может быть разрывным, если разрешимая группа D или центр группы N_0 недискретны (ограничения на эти подгруппы могут быть разрывными). Другой причиной разрывности гомоморфизма (как и в примере 1.4.9) может быть применение свободного ультрафильтра к бесконечному семейству представлений простого компактного фактора в полупростой части компактной группы N . В частности, если простые компактные факторы в связной компактной группе N_0 являются такими высокими группами [199], что любое натуральное число является размерностью лишь конечного числа (с точностью до эквивалентности) непрерывных унитарных представлений группы, то полупростая часть группы N_0 не имеет разрывных локально ограниченных конечномерных представлений. Мы обсудим эту задачу в отдельной публикации.

1.5.4. Гипотеза Мищенко для связных локально компактных групп

Теорема 1.5.22. Пусть G и H — связные локально компактные группы и $\pi: G \rightarrow H$ — гомоморфизм. Тогда осуществляется одна и только одна из следующих взаимно исключающих возможностей.

1. Гомоморфизм π не локально ограничен.
2. Гомоморфизм π локально ограничен, причём $\text{FDG}(\pi) \neq \{e_H\}$. В этом случае ограничение гомоморфизма π на любой нормальный делитель в группе G , фактор-группа по которому является группой Ли, разрывно и имеет относительно компактный образ в H .
3. Гомоморфизм π локально ограничен, причём $\text{FDG}(\pi) = \{e_H\}$, но $\text{DG}(\pi) \neq \{e_H\}$. В этом случае гомоморфизм π является проективным пределом (не обязательно непрерывных) гомоморфизмов групп Ли (в смысле утверждения пункта 2) теоремы 1.5.17); более того, среди аппроксимирующих

гомоморфизмов обязательно есть разрывные гомоморфизмы. Эта ситуация возможна только в случае, если группа G не является совершенной.

4. Гомоморфизм π непрерывен.

Доказательство. Утверждение выводится из следствия 1.5.7, теоремы 1.5.8 и теоремы 1.5.20. А именно, случай (А) теоремы 1.5.20 отвечает случаю 1, случай (В) теоремы 1.5.20 отвечает случаю 2, случай (Г) теоремы 1.5.20 отвечает случаю 3, а случай (Δ) теоремы 1.5.20 отвечает случаю 4. $\square$

Для бесконечномерных представлений и для конечномерных представлений несвязных групп ситуация богаче (см. [35, 41, 42, 218, 223]).

2. Отображения, близкие к представлениям банаховых алгебр и топологических групп, и аменабельные банаховы алгебры

Естественный математический интерес, связанный с объединением идей симметрии и близости, имеет и физический смысл, который можно описать следующим образом. Если у группы симметрий описания некоторой физической системы существуют квазипредставления, т. е. отображения в группу обратимых непрерывных линейных операторов в некотором топологическом векторном пространстве с равномерно малой разностью (скажем, не превосходящей точности измерений) между образом произведения и произведением образов, и не существует «достаточно близких» обычных представлений группы симметрий в том же топологическом векторном пространстве, то интерпретация эксперимента может оказаться более сложной, чем в случае, когда близкое представление по тем или иным причинам заведомо существует. Это явление может потребовать тщательного различения истинных симметрий (связанных с «законами природы») и «квазисимметрий». В терминах Гейзенберга (в эпиграфе) — чему можно учиться у квазипредставления?

Накопление экспериментальных фактов в этом направлении надолго опередило понимание природы явления. Когда Дедекинд, готовя к изданию тексты Римана в семидесятые годы XIX века, вычислил то, что теперь называется суммами или символом Дедекинда [90], это вычисление не было осознано как важное теоретико-групповое событие, что можно объяснить уровнем развития теории групп в то время. Через полвека, в 1932 г., Радемахер [195] придал результату другую форму и явно указал, что построенное им отображение Φ группы $SL(2, \mathbb{Z})$ в группу целых чисел $\mathbb{Z}$, равноценное символу Дедекинда («символ Радемахера», участвующий в формуле для действия модулярной группы на логарифм η -функции Дедекинда), почти аддитивно, а именно выполняется неравенство

$$|\Phi(g_1 g_2) - \Phi(g_1) - \Phi(g_2)| \leq 3, \quad g_1, g_2 \in SL(2, \mathbb{Z}).$$

Отсутствие ненулевых аддитивных гомоморфизмов $SL(2, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ было уже общеизвестно, но какой-либо реакции на открытие не последовало. Более того, с конца 1930-х и начала 1940-х годов появились первые «теоремы тривиальности». Так, Хайерс и Улам и их последователи интересовались аддитивной задачей (см., например, [125—127]) и получили ряд условий существования аддитивного отображения нормированных пространств, близкого к данному почти аддитивному отображению, в 1942 г. Монтгомери и Циппин [178] доказали теорему о тривиальности для малых возмущений компактных подгрупп групп Ли, а фон Нейман [184] — для матричных аппроксимаций. Возможно, эти события способствовали забвению результата Радемахера, но фактически именно этот пример был переоткрыт на другом языке в 1972 г., когда Джонсон [136] построил отображение f свободной группы с двумя образующими $\mathbb{F}_2$ в $\mathbb{R}$, родственное символу Радемахера (это видно из вычислений в [29, 210]), удовлетворяющее условию

$$|f(g_1 g_2) - f(g_1) - f(g_2)| \leq 6, \quad g_1, g_2 \in \mathbb{F}_2,$$

и не являющееся ограниченным возмущением обычного аддитивного гомоморфизма (затем практически тот же самый контрпример был переоткрыт в 1978 г. Бруксом [64], занимавшимся ограниченными когомологиями). Алгебраический смысл таких отображений оставался неясным до 1983 г., когда было введено понятие псевдохарактера [28].

Оказалось, что некоторые группы имеют даже одномерные нетривиальные квазипредставления (причём ограничение такого отображения на любую аменабельную подгруппу может быть представлением этой подгруппы). Исторически первыми (и простейшими) объектами этого рода были их одномерные вещественные аналоги — псевдохарактеры. Напомним, что вещественная функция f на группе G называется (*вещественным*) *квазихарактером* на G [29], если числовое множество $\{f(gh) - f(g) - f(h) \mid g, h \in G\}$ является ограниченным, и квазихарактер f называется *псевдохарактером* на G , если $f(g^n) = nf(g)$ для любых $g \in G$ и $n \in \mathbb{Z}$. В 1987 г. В. А. Файзиев, в то время мой аспирант, по моему заданию вычислил псевдохарактеры свободных групп и полугрупп и некоторых групповых конструкций [18, 19]. Понятие псевдохарактера (которое применялось с 1988 г. в ряде работ под названием однородного квазиморфизма [53—55, 58, 62, 109]) оказалось весьма продуктивным в теории ограниченных когомологий [34, 110, 111, 165, 175, 176, 190, 211, 215—217], в теории групп диффеоморфизмов [105, 106], в симплектической геометрии [59, 96, 97, 172, 193, 194, 201], в комбинаторной теории групп (см. [34, 110, 111, 175, 176], а также работу [109], хотя ссылки в ней неточны, а изложение истории вопроса небрежно) и в теории представлений групп [36, 37, 41, 43, 222] и заслужило популярность, достаточную для отдельной пояснительной публикации [150]. Псевдохарактерам и их приложениям посвящён раздел 2.5. Краткий (вынужденно неполный) обзор по теории отображений, близких к представлениям (почти представлений, аппроксимативных представлений, квазипредставлений, псевдопредставлений и т. д.) приведён в [43].

Начнём с необходимых определений и напоминаний.

2.1. Банаховы бимодули, дуальные бимодули и умножения Аренса

2.1.1. Банаховы бимодули

Определение 2.1.1 (см. [22, 23, 91, 234]). Пусть A — банахова алгебра. Банахово пространство X называется банаховым A -бимодулем, если пространство X снабжено совместно непрерывными (по норме) билинейными отображениями $(a, x) \mapsto ax$ и $(a, x) \mapsto xa$ из $A \times X$ в X (т. е. существует такая постоянная $C > 0$, что $\|xa\| \leq C\|a\|\|x\|$ и $\|ax\| \leq C\|a\|\|x\|$ для всех $a \in A$ и $x \in X$), определяющими левое и правое действия A на X (т. е. произведению элементов алгебры A отвечает композиция соответствующих операторов на пространстве X в соответствующем порядке).

Банахов A -модуль X называется *дуальным*, если X — банахово пространство, дуальное к банахову пространству некоторого банахова A -бимодуля X_* , причём операции в X накрест сопряжены операциям в X_* , т. е. $\langle fa, x \rangle = \langle f, ax \rangle$ и $\langle af, x \rangle = \langle f, xa \rangle$ для всех $a \in A$, $x \in X$, $f \in X_*$, где $\langle f, x \rangle = x(f)$ для всех $x \in X$ и $f \in X_*$. В частности, если A^* — пространство, сопряжённое к A , то A^* можно снабдить структурой банахова A -бимодуля, определяя fa и af формулами $\langle fa, b \rangle = \langle f, ab \rangle$ и $\langle af, b \rangle = \langle f, ba \rangle$ ($b \in A$) для всех $f \in A^*$ и $a \in A$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает здесь естественное спаривание между пространствами A^* и A .

В свою очередь, второе сопряжённое пространство A^{**} банаховой алгебры A допускает два произведения, превращающих A^{**} в банахову алгебру, так называемое первое (левое) и второе (правое) произведения Аренса, которые мы обозначим через $\square$ и $\triangle$ соответственно. В частности, первое (левое) произведение Аренса элементов $m, n \in A^{**}$ определяется формулой $\langle m \square n, f \rangle = \langle m, nf \rangle$ ($f \in A^*$), где $nf \in A^*$ определяется формулой $\langle nf, a \rangle = \langle n, fa \rangle$ ($a \in A$), а fa определено выше. По отношению к каждому из произведений $\square$ и $\triangle$ каноническое вложение исходной банаховой алгебры A в A^{**} является гомоморфизмом.

Произведения $\square$ и $\triangle$ имеют специфические свойства непрерывности. В частности, если $n \in A^{**}$, то отображение $m \rightarrow m \square n$ непрерывно из слабой* топологии в слабую*. Как обычно, мы здесь отождествляем A с его каноническим образом в A^{**} .

2.1.2. Проективное тензорное произведение

Напомним теперь определение проективного тензорного произведения банаховых пространств.

Определение 2.1.2. Пусть E и F — банаховы пространства. Алгебраическое тензорное произведение $E \otimes F$ пространств E и F можно снабдить так называемой *проективной тензорной нормой*

$$\|x\|_\gamma = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \|x_{1,i}\| \|x_{2,i}\| \right\},$$

где нижняя грань берётся по всем представлениям элемента x в виде

$$x = \sum_{i=1}^n x_{1,i} \otimes x_{2,i}.$$

Пополнение пространства $E \otimes F$ по норме $\|\cdot\|_\gamma$ называется *проективным тензорным произведением* пространств E и F и обозначается $E \hat{\otimes} F$ или $E \otimes_\gamma F$.

Следующее утверждение хорошо известно; одно из лучших изложений приведено в [234, гл. IV, теорема 2.3].

Теорема 2.1.3. Пусть E и F — комплексные банаховы пространства, а f — элемент пространства $(E \otimes_\gamma F)^*$, сопряжённого к $E \otimes_\gamma F$. Формула

$$\langle y, \Phi(f)x \rangle = \langle x \otimes y, f \rangle, \quad x \in E, \quad y \in F,$$

определяет изометрическое отображение Φ пространства $(E \otimes_\gamma F)^*$ на пространство непрерывных линейных операторов $\mathcal{L}(E, F^*)$. Аналогично формула

$$\langle x, \Psi(f)y \rangle = \langle x \otimes y, f \rangle, \quad x \in E, \quad y \in F,$$

определяет изометрическое отображение Ψ пространства $(E \otimes_\gamma F)^*$ на пространство непрерывных линейных операторов $\mathcal{L}(F, E^*)$. В частности, если пространство F является сопряжённым как банахово пространство, то и пространство $\mathcal{L}(E, F)$ является сопряжённым как банахово пространство.

Если E и F — банаховы алгебры, то банахово пространство проективного тензорного произведения естественно наделяется структурой банаховой алгебры. Более подробные сведения о проективных тензорных произведениях банаховых пространств и банаховых алгебр можно найти в [22, 23, 234].

2.2. Аменабельные банаховы алгебры

2.2.1. Основные определения

Все банаховы алгебры в дальнейшем предполагаются комплексными.

Следующее определение принадлежит Джонсону [136].

Определение 2.2.1. Банахова алгебра A называется *аменабельной*, если любое дифференцирование D из A в дуальный банахов A -бимодуль X^* (в A^*), т. е. такое отображение $D: A \rightarrow X^*$ ($D: A \rightarrow A^*$), что $D(ab) = D(a)b + aD(b)$ для любых $a, b \in A$, имеет вид $D(a) = ax - xa$, $a \in A$, для некоторого x из X^* .

Есть несколько равносильных определений понятия аменабельности банаховой алгебры, среди которых мы выделим два условия, введённые в [137] (см. также [138—148]). Согласно [137], банахова алгебра A аменабельна тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих двух условий (и тем самым оба условия):

- 1) A имеет *аппроксимативную диагональ*, т. е. такую ограниченную сеть $(m_i) \in A \hat{\otimes} A$, что для любого $x \in A$ выполняются соотношения $m_i x - x m_i \rightarrow 0$ и $\pi(m_i)x \rightarrow x$;

- 2) A имеет *виртуальную диагональ*, т. е. существует такой элемент $M \in (A \hat{\otimes} A)^{**}$, что $xM = Mx$ и $(\pi^{**}M)x = x$ для любого $x \in A$.

Через $\pi: A \hat{\otimes} A \rightarrow A$ здесь обозначено отображение, определяемое умножением в A .

2.2.2. Теорема Джонсона об аменабельных локально компактных группах

Роль аменабельных банаховых алгебр в дальнейшем изложении определяется прямой связью между аменабельностью локально компактной группы и её групповой алгебры $L^1(G)$, построенной по левоинвариантной мере Хаара. Напомним следующее определение (см. [4, 153, 188]).

Определение 2.2.2. Топологическая группа называется *аменабельной* (точнее, *левоаменабельной*), если на банаховом пространстве $CB_{\mathbb{R}}(G)$ всех ограниченных непрерывных вещественнозначных функций на G существует (*лево*)-*инвариантное среднее*, т. е. инвариантный относительно левых сдвигов функционал m с единичной нормой, равный единице на функции, тождественно равной единице ($m \in CB_{\mathbb{R}}(G)^*$, $m(gf) = m(f)$ для всех $f \in CB_{\mathbb{R}}(G)$ и $g \in G$, где $gf(h) = f(gh)$ для всех $f \in CB_{\mathbb{R}}(G)$ и $g, h \in G$, и $m(\mathbf{1}) = 1$, где $\mathbf{1}(g) = 1$ для всех $g \in G$).

Класс аменабельных групп содержит абелевы группы и компактные группы и замкнут относительно расширений, так что содержит и все разрешимые группы, но не исчерпывается этими «элементарными аменабельными» группами. Отметим, что связная локально компактная группа аменабельна тогда и только тогда, когда фактор-группа этой группы по радикалу (наибольшему связному разрешимому нормальному делителю) компактна [35, 188].

Следующая ключевая теорема принадлежит Б. Е. Джонсону.

Лемма 2.2.3 [136]. Локально компактная группа аменабельна тогда и только тогда, когда её групповая алгебра аменабельна как банахова алгебра.

Варианты и обобщения этого утверждения изучались многими авторами (см. [82, 86, 93, 100, 101, 112, 113, 120, 136, 137, 145, 146, 148, 189, 232, 244]).

2.2.3. Теория Джонсона АМNM-пар

Определение 2.2.4. Линейный функционал F на банаховой алгебре A называется *почти мультипликативным* или *АМ-функционалом*, если формула

$$(a, b) \mapsto F(ab) - F(a)F(b) \in \mathbb{C}, \quad a, b \in A,$$

определяет билинейный функционал $A \rightarrow \mathbb{C}$ с малой нормой (меньшей δ для некоторой малой постоянной δ ; величина этой нормы называется *дефектом* функционала F).

В статьях [134, 135], посвящённых теории почти мультипликативных функционалов, алгебры, которые в [139] названы АМNM-алгебрами (от слов «almost

multiplicative» и «nearly multiplicative», см. определение 2.2.6), называются *функционально стабильными* алгебрами.

Определение 2.2.5. Банахова алгебра A называется *функционально стабильной* алгеброй [134] или *AMNM-алгеброй* [139], если для любых $\varepsilon > 0$ и $C > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого почти мультипликативного функционала с нормой, не превосходящей C , и дефектом, не превосходящим δ , существует такой мультипликативный функционал G , что $\|F - G\| \leq \varepsilon$ (т. е. F близок к мультипликативному функционалу).

Примеры можно найти в [124, 139, 230].

Джонсон [136] связал вопросы теории возмущений банаховых алгебр с условием аменабельности. Следующее определение Джонсона [141], во многом объясненное своим появлением его предыдущим работам [137–140], вводит так называемые AMNM-пары банаховых алгебр, т. е. пары, для которых любое отображение A в B , для которого образ произведения мало отличается от произведения образов, близко к обычному гомоморфизму.

Определение 2.2.6 (см. [141]). Пусть A и B — банаховы алгебры. Пара (A, B) называется *AMNM-парой*, если для любых чисел $\varepsilon > 0$ и $C > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого ограниченного линейного оператора $T: A \rightarrow B$, удовлетворяющего условиям $\|T\| \leq C$ и

$$\|T(aa_1) - T(a)T(a_1)\| \leq \delta \|a\| \|a_1\| \text{ при любых } a, a_1 \in A,$$

существует ограниченный гомоморфизм $S: A \rightarrow B$, удовлетворяющий условию $\|T - S\| \leq \varepsilon$. Банахова алгебра A называется *AMNM-алгеброй* [139], если $(A, \mathbb{C})$ есть AMNM-пара.

Как показано в [141], любая пара конечномерных банаховых алгебр есть AMNM-пара.

По теореме Джонсона для любого аппроксимативно мультипликативного отображения аменабельной банаховой алгебры в банахову алгебру, являющуюся дуальным банаховым пространством, существует близкий гомоморфизм. Приведём формулировку этого утверждения [141] (ср. [142–148]), являющегося одним из важнейших инструментов, используемых ниже в разделе 3.2.

Теорема 2.2.7 [141]. Если A — аменабельная банахова алгебра и B — банахова алгебра, являющаяся дуальным банаховым B -бимодулем, то (A, B) — AMNM-пара.

Выскажем общее утверждение, дополняющее теорему Джонсона. Хотя все дальнейшие утверждения этого пункта нетрудно перевести на язык банаховых бимодулей, мы воспользуемся языком представлений банаховых алгебр. Заметим с этой целью, что любое сопряжённое представление банаховой алгебры A в сопряжённом банаховом пространстве $E = (E_*)^*$ снабжает полную матричную алгебру $\mathcal{L}(E)$ (всех непрерывных линейных операторов в E) естественной структурой дуального A -модуля и преддвойственным пространством служит проективное тензорное произведение $E \otimes E_*$ с естественной модульной структурой, где E_* — некоторое банахово пространство, преддвойственное

к E [136, 234]. Мы вправе считать (присоединяя единицу к банаховой алгебре A при необходимости), что A содержит единицу и образ единицы в рассматриваемом представлении есть единичный оператор.

Лемма 2.2.8. Любое билинейное отображение $R: A \times A \rightarrow \mathcal{L}(E)$ можно естественно отождествить с соответствующим линейным отображением $A \otimes_\gamma A \rightarrow \mathcal{L}(E)$, которое мы снова обозначим через R . Пусть M — виртуальная диагональ в $A \otimes_\gamma A$. Положим

$$\eta R = \iota^* R^{**}(M) \in \mathcal{L}(E),$$

где ι — каноническое вложение пространства $E \otimes_\gamma E_*$ в его второе сопряжённое пространство $(E \otimes_\gamma E_*)^{**}$. Пусть

$$m_\alpha = \sum_j a_{\alpha j} \otimes b_{\alpha j} \in A \otimes A —$$

некоторая аппроксимативная диагональ. Тогда предельное соотношение

$$\lim_\alpha \sum_j R(a_{\alpha j}, b_{\alpha j}) = \eta R$$

выполняется в слабой* топологии (т. е. в $(E \otimes E_*)$ -топологии) на $\mathcal{L}(E)$.

Доказательство. Это утверждение фактически установлено в доказательстве основной теоремы 3.1 в [141]. $\square$

Теорема 2.2.9. Близкие сопряжённые представления аменабельной банаховой алгебры в сопряжённом банаховом пространстве подобны. Более точно, пусть A — аменабельная банахова алгебра, E — сопряжённое банахово пространство, π и ρ — представления аменабельной банаховой алгебры A в E . Для любых $\varepsilon > 0$ и $C > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из условий

$$\|\pi(a) - \rho(a)\| \leq \varepsilon \|a\|, \quad \|\rho(a)\| \leq C \|a\|, \quad \|\pi(a)\| \leq C \|a\| \quad \text{для всех } a \in A$$

следует, что представления π и ρ подобны, т. е. существует такой непрерывный линейный оператор $S \in \mathcal{L}(E)$, что $\pi(a)S = S\rho(a)$ для всех $a \in A$, причём $\|S - 1_E\| \leq \varepsilon$, где 1_E — единичный оператор в E .

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 3.1 в [141], мы можем считать, что алгебра A унитарна, а отображения π и ρ переводят единицу в единичный оператор. Положим $R(a, b) = \pi(a)\rho(b)$, $a, b \in A$, и используем построения леммы 2.2.8. Тогда ηR — непрерывный линейный оператор в E , и из соотношений

$$\sum_j a_{\alpha j} b_{\alpha j} \rightarrow 1_A \quad (\text{по норме})$$

и

$$\sum_j a_{\alpha j} b_{\alpha j} a - a a_{\alpha j} b_{\alpha j} \rightarrow 0 \quad (\text{по норме})$$

следует, что

$$\sum_j \pi(a_{\alpha j} b_{\alpha j}) \rightarrow 1_E, \quad \sum_j \rho(a_{\alpha j} b_{\alpha j}) \rightarrow 1_E, \quad \pi(a) \eta R = \eta R \rho(a),$$

а неравенство $\|\eta R - 1_E\| \leq \varepsilon$ связано с тем, что R близок, скажем, к отображению $R_\pi(a, b) = \pi(a)\pi(b)$, $a, b \in A$, для которого, как мы только что видели, $\eta R_\pi = 1_E$. $\square$

2.3. Квазипредставления групп

2.3.1. Определение квазипредставления. Основные свойства

Определение 2.3.1 [30]. Пусть S — полугруппа, E — топологическое векторное пространство. Отображение T полугруппы S в алгебру $L(E)$ непрерывных линейных операторов в E называется *квазипредставлением* (точнее, *U -квазипредставлением*, где U — данное равностепенно непрерывное семейство в $L(E)$) полугруппы S в E , если семейство $U(T)$, определяемое равенством

$$U(T) = \{T(s_1 s_2) - T(s_1)T(s_2) \mid s_1, s_2 \in S\},$$

равностепенно непрерывно (соответственно если $U(T)$ содержится в U).

Пусть локально выпуклое пространство E метризуемо, d — некоторая метрика в E , $\varepsilon > 0$. Отображение T называется ε -квазипредставлением относительно метрики d , если

$$d(T(s_1 s_2)x, T(s_1)T(s_2)x) \leq \varepsilon d(x, 0), \quad s_1, s_2 \in S, \quad x \in E,$$

а число ε называется *дефектом* или *точностью* квазипредставления T .

Определение 2.3.2. Пусть G — топологическая группа, e — единичный элемент в G , B — банахово пространство, $\mathcal{L}(B)$ — алгебра ограниченных линейных операторов в B , 1_B — единичный оператор в B . Группа G называется *устойчиво представимой* в B , если для любых $\varepsilon > 0$ и $C > 0$ существует число $\delta > 0$, обладающее следующим свойством: если T — слабо непрерывное δ -квазипредставление группы G в B обратимыми операторами, удовлетворяющее условиям $T(e) = 1_B$, $T(g)^{-1} = T(g^{-1})$ и $\|T(g)\| \leq C$ для всех $g \in G$, то существует такое слабо* непрерывное представление R группы G в B^* , что $\|T(g)^* - R(g)\| \leq \varepsilon$ для всех $g \in G$, т. е. отображение T^* является ε -возмущением обычного (слабо* непрерывного) представления группы G .

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.3.3 [210]. Любая аменабельная локально компактная группа устойчиво представима в любом банаховом пространстве.

Основное отличие результата де ла Гарпа и Каруби [118] от универсальной теоремы 2.3.3 состоит в том, что для ограниченных квазипредставлений компактных групп нет необходимости в переходе к сопряжённому модулю. А именно, справедливо следующее утверждение.

Предложение 2.3.4 (см. [118]). Пусть A — комплексная банахова алгебра с единицей и M — унитарный правый банахов A -модуль. Пусть $\|vx\|_M \leq \|v\|_M \|x\|_A$ для всех $v \in M$ и $x \in A$. Если $0 \leq \varepsilon \leq 2^{-6}$, $K \geq 1$, G — компактная топологическая группа, π — такой δ -квазигомоморфизм группы G в группу G_M обратимых A -модульных отображений банахова модуля M в себя, что $\|\pi(g)\| \leq K$ и $\|\pi(g)^{-1}\| \leq K$ для всех $g \in G$ (т. е. $\|\pi(g)\pi(h) - \pi(gh)\| \leq \delta$ для всех $g, h \in G$) при $\delta \leq \varepsilon(2K)^{-9}$, то существует гомоморфизм ρ группы G в G_M , удовлетворяющий условию $\|\rho(g) - \pi(g)\| \leq \varepsilon$ для всех $g \in G$.

Приведём некоторые другие достаточные условия того, что данное квазипредставление аменабельной группы есть ограниченное (и даже малое) возмущение обычного представления. Характеризация локально компактных групп, аменабельных как дискретные группы, приведена в [220]. Связная локально компактная группа аменабельна как дискретная группа тогда и только тогда, когда она разрешима [188].

Теорема 2.3.5 (ср. [33]). Пусть G — аменабельная дискретная группа, а T — (не обязательно ограниченное) δ -квазипредставление группы G в сопряжённом банаховом пространстве E , $\delta < 1/2$. Предположим дополнительно, что $T(e) = 1_E$ и $T(g)^{-1} = T(g^{-1})$ для всех $g \in G$. Существует представление S группы G в E , удовлетворяющее условию

$$\|S(g) - T(g)\| \leq \varepsilon, \quad g \in G,$$

где $\varepsilon = f(\delta)$ с $f(t) = 1/(2 - 4t)$, $t \in [0, 1/2)$. При этом представление S можно выбрать так, что любое замкнутое подпространство, инвариантное относительно всех операторов $T(g)$, $g \in G$, является инвариантным относительно представления S .

Это свойство сильнее свойства устойчивой представимости, поскольку, в частности, в отличие от условия устойчивой представимости (см. определение 2.3.2), даже если T ограничено, величина δ не зависит здесь от величины C .

Доказательство. Так как T — δ -квазипредставление, для всех $g, h \in G$ имеем $\|T(gh)T(h^{-1}) - T(g)\| \leq \delta$. В частности, $h \mapsto T(gh)T(h^{-1})$, $h \in G$, — ограниченная операторнозначная функция для любого $g \in G$. Положим

$$T_1(g) = I_h(T(gh)T(h^{-1})), \quad g \in G,$$

где I — двусторонне инвариантное среднее на $L^\infty(G)$. Ввиду инвариантности среднего I имеем

$$\begin{aligned} T_1(g) &= I_h(T(gh)T(h^{-1})) = I_h\left((T(gkh)T((kh)^{-1}))\right) = I_h(T(gkh)T(h^{-1}k^{-1})) = \\ &= I_h\left((T(gkh) - T(gk)T(h))(T(h^{-1}k^{-1}) - T(h^{-1})T(k^{-1})) + \right. \\ &\quad \left. + T(gk)T(h)(T(h^{-1}k^{-1}) - T(h^{-1})T(k^{-1})) + T(gkh)T(h^{-1})T(k^{-1})\right) = \\ &= \Delta + T(gk)I_h\left(T(h)(T(h^{-1}k^{-1}) - T(h^{-1})T(k^{-1}))\right) + T_1(gk)T(k^{-1}) \end{aligned}$$

для всех $g, k \in G$, где через Δ обозначен оператор

$$I_h \left((T(gkh) - T(gk)T(h)) (T(h^{-1}k^{-1}) - T(h^{-1})T(k^{-1})) \right),$$

норма которого не превосходит δ^2 . Из соотношения $T(h)^{-1} = T(h^{-1})$, где $h \in G$, следует, что

$$I_h \left(T(h) (T(h^{-1}k^{-1}) - T(h^{-1})T(k^{-1})) \right) = I_h (T(h)T(h^{-1}k^{-1}) - T(k^{-1})),$$

а из инвариантности среднего (с помощью замены $h \mapsto kl$ и перехода к среднему по l) заключаем, что

$$I_h (T(h)T(h^{-1}k^{-1})) - T(k^{-1}) = I_l (T(k^{-1}l)T(l)) - T(k^{-1}) = T_1(k^{-1}) - T(k^{-1}).$$

Получаем, что

$$T_1(g) = \Delta + T(gk)(T_1(k^{-1}) - T(k^{-1})) + T_1(gk)T(k^{-1}),$$

или

$$T(gk)T(k^{-1}) - T(gk)T_1(k^{-1}) - T_1(gk)T(k^{-1}) + T_1(g) = \Delta,$$

для всех $g, k \in G$. С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned} (T_1(gk) - T(gk))(T_1(k^{-1}) - T(k^{-1})) &= \\ &= T_1(gk)T_1(k^{-1}) - T(gk)T_1(k^{-1}) - T_1(gk)T(k^{-1}) + T(gk)T(k^{-1}) \end{aligned}$$

для всех $g, k \in G$, и можно вычесть последнее тождество из предыдущего. Получаем, что

$$T_1(g) - T_1(gk)T_1(k^{-1}) = \Delta - (T_1(gk) - T(gk))(T_1(k^{-1}) - T(k^{-1})),$$

откуда $\|T_1(g) - T_1(gk)T_1(k^{-1})\| \leq 2\delta^2$, поэтому T_1 является $2\delta^2$ -квазипредставлением группы G , причём $\|T_1(g) - T(g)\| \leq \delta$. Возьмём $T = T_n$ и положим $T_{n+1} = T_1$. Тогда при $\delta = \delta_1 < 1/2$ оценка

$$\delta_{n+1} \leq 2\delta_n^2 \leq 2^{2^{n+1}-1} \delta_1^{2^{n+1}} = \frac{1}{2} (2\delta_1)^{2^{n+1}}$$

немедленно приводит к требуемому результату для отображения, определяемого как предел (по отношению к равномерной сходимости на группе в смысле нормы оператора) $S(g) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(g)$, $g \in G$, которое и оказывается искомым 0-квазипредставлением, или обычным представлением. $\square$

Заметим, что приведённое выше доказательство частично использует идею метода Ньютона, использованную при установлении основного результата статьи [141] в форме, переработанной в соответствии с [213].

Теорема 2.3.6 (см. [33]). Пусть G — аменабельная топологическая группа, E — сопряжённое банахово пространство, F — замкнутое векторное подпространство в E , а θ — такое слабо непрерывное δ -квазипредставление топологической группы G в E , что $\theta(g)F \subset F$ для любых $g \in G$. Предположим, что

θ является локально равномерно ограниченным, $\theta(e) = 1_E$, и $\theta(g^{-1}) = \theta(g)^{-1}$ для всех $g \in G$. Предположим также, что и ограничение представления θ на F , и отображение, определяемое отображением θ в фактор-пространстве E/F , являются обычными представлениями. Тогда существует такое слабо непрерывное представление π группы G в E , что $\|\pi(g) - \theta(g)\| \leq \delta$ для всех $g \in G$ и представления, определяемые представлением π в F и E/F , совпадают с представлениями, определяемыми квазипредставлением E в F и E/F соответственно.

Обозначим через I применение левоинвариантного среднего на группе и будем отмечать в индексе переменную, по которой берётся среднее. Следующее утверждение нетривиально в связи с отмеченной выше возможностью нарушения непрерывности при взятии среднего по одному из переменных от непрерывной функции двух переменных.

Следствие 2.3.7 (см. [42]). Пусть G — аменабельная топологическая группа, E — сопряжённое банахово пространство, F — замкнутое векторное подпространство в E , а θ — такое слабо непрерывное δ -квазипредставление топологической группы G в E , что $\theta(g)F \subset F$ для любых $g \in G$. Предположим, что $\theta(e) = 1_E$, θ является локально равномерно ограниченным и соотношения $\theta(g^{-1}) = \theta(g)^{-1}$ выполнены для всех $g \in G$. Предположим также, что ограничение представления θ на F и отображение, определяемое отображением θ в E/F , являются обычными представлениями. Тогда функция $g \mapsto I_h(\theta(gh)\theta(h^{-1}))$, $g \in G$, слабо непрерывна как функция со значениями в непрерывных линейных операторах в E .

В лемме 2.3.8 собраны некоторые элементарные сведения о неограниченных квазипредставлениях групп.

Лемма 2.3.8 (см. [33]). Пусть G — группа, T — её неограниченное квазипредставление в банаховом пространстве $E = E_T$.

1. Квазипредставление T имеет хотя бы одну неограниченную орбиту.
2. T -орбита вектора $(T(gh) - T(g)T(h))x$ является ограниченной для любых $g, h \in G$ и любого вектора $x \in E$. В частности, если все ненулевые T -орбиты неограниченные, то T — обычное представление.
3. Пусть L — векторное подпространство E , образованное такими элементами $x \in E$, что орбита $O_T(x) = \{T(g)x, g \in G\}$ ограничена. Снабдим L нормой $\|x\|_L = \sup_{g \in G} \|T(g)x\|$, $x \in E$, где $\|\cdot\| = \|\cdot\|_E$. Тогда тождественное отображение $j: L \rightarrow E$ непрерывно и L полно относительно нормы $\|\cdot\|_L$. Векторное подпространство $L \subset E$ инвариантно относительно всех операторов $T(g)$, $g \in G$, и выполняются соотношения

$$\|T(g)x\|_L \leq \|x\|_L + \varepsilon\|x\|, \quad g \in G, \quad x \in L, \quad (4)$$

и

$$\|(T(k)T(l) - T(kl))x\|_L \leq \varepsilon\|T(l)x\| + 2\varepsilon\|x\|, \quad g, k, l \in G, \quad x \in E, \quad (5)$$

для всех $g, k, l \in G$; в частности,

$$\|T(k)T(l) - T(kl)\|_L \leq 3\varepsilon \quad \text{для всех } k, l \in G.$$

4. Пусть S — квазипредставление группы G , являющееся ограниченным возмущением квазипредставления T (так что отображение $S - T: G \rightarrow \mathcal{L}(E)$ имеет ограниченный образ). Тогда образ оператора $S(g) - T(g)$ содержится в подпространстве $L \subset E$ для любого $g \in G$. В частности, если все ненулевые T -орбиты в E неограниченные (тогда T — обычное представление, см. утверждение 2), то T жёстко в том смысле, что если ограниченное возмущение S квазипредставления T является квазипредставлением, то S совпадает с T .

Поскольку мы существенно опираемся на это утверждение ниже, мы приведём его доказательство для удобства читателя.

Доказательство. Утверждение 1 непосредственно следует из принципа равномерной ограниченности.

Рассмотрим утверждение 3. Очевидно, что множество L — векторное подпространство в E (так как суммы и кратные ограниченных множеств тоже ограниченные), а $\|\cdot\|_L$ — норма на L . Непрерывность отображения $j: L \rightarrow E$ также очевидна, поскольку

$$\|x\|_L = \sup_{g \in G} \|T(g)x\| \geq \|x\|_E, \quad x \in E.$$

Если последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in L$, фундаментальна в L , то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное N , что

$$\|T(g)x_n - T(g)x_m\|_E \leq \varepsilon \quad \text{для всех } g \in G \text{ и всех } n, m > N.$$

Следовательно, для любого $g \in G$ существует такой вектор $y(g) \in E$, что $\|T(g)x_n - y(g)\| \leq \varepsilon$ для всех $n > N$. Однако $T(g)x_n \rightarrow T(g)x$, где $x = \lim x_n$ (напомним, что если $\{x_n\}$ фундаментальна в L , то она фундаментальна и в E). Отсюда следует, что $\|T(g)x_n - T(g)x\| \leq \varepsilon$ для всех $n > N$, или $\|x_n - x\|_L \leq \varepsilon$ при $n > N$, а это доказывает полноту L .

Для доказательства соотношения (4) воспользуемся основным неравенством $\|T(h)T(k) - T(hk)\| \leq \varepsilon$, или $\|T(h)T(k)x - T(hk)x\| \leq \varepsilon\|x\|$. Если $x \in L$, то отсюда сразу следует справедливость цепочки неравенств

$$\|T(h)(T(k)x)\| \leq \|T(hk)x\| + \varepsilon\|x\| \leq \|x\|_L + \varepsilon\|x\| \leq (1 + \varepsilon)\|x\|_L,$$

что доказывает одновременно и инвариантность L относительно $T(h)$ для любого $h \in G$, и соотношение (4).

Для доказательства соотношения (5) рассмотрим тождество

$$\begin{aligned} T(g)(T(k)T(l) - T(kl)) &= (T(g)T(k) - T(gk))T(l) + \\ &+ (T(gk)T(l) - T(gkl)) + (T(gkl) - T(g)T(kl)). \end{aligned} \quad (6)$$

Применим (6) к $x \in E$ и оценим норму. Для любых $g, k, l \in G$ и $x \in E$ получаем

$$\|T(g)(T(k)T(l) - T(kl))x\| \leq \varepsilon\|T(l)x\| + 2\varepsilon\|x\|.$$

По определению нормы в L отсюда следует неравенство

$$\|(T(k)T(l) - T(kl))x\|_L \leq \varepsilon\|x\|_L + 2\varepsilon\|x\|. \quad (7)$$

Это доказывает соотношение (5).

Заметим теперь, что, в частности, соотношение (5) доказывает первую часть утверждения 2, а вторая часть утверждения 2 сразу следует из первой части этого утверждения.

Рассмотрим утверждение 4. Пусть S — квазипредставление группы G , являющееся ограниченным возмущением квазипредставления T , $R = T - S$ ограниченное. Тогда T и S — квазипредставления, R ограниченное и множество

$$\begin{aligned} &\{T(gh) - T(g)T(h) = \\ &= S(gh) + R(gh) - S(g)S(h) - S(g)R(h) - R(g)S(h) - R(g)R(h), \quad g, h \in G\} \end{aligned}$$

ограниченное. Отсюда следует ограниченность множества

$$\{S(g)R(h) + R(g)S(h), \quad g, h \in G\}.$$

При любом фиксированном $h \in G$ это означает, что множество

$$\{S(g)R(h)x, \quad g \in G\}$$

является ограниченным для любого $x \in E$. Таким образом, $R(h)x \in L$ для всех $g \in G$ и $x \in E$. Это завершает доказательство леммы. $\square$

Как отмечено в [33], при доказательстве существования обычного представления, близкого к неограниченному непрерывному квазипредставлению с малым дефектом, нельзя непосредственно воспользоваться аменабельностью групповой алгебры. Может показаться возможным использовать аменабельность групповых алгебр с весом. Аменабельность таких алгебр действительно имеет место для некоторых аменабельных локально компактных групп и некоторых весов, но класс аменабельных алгебр с весом невелик. В частности, в [112] показано, что если G — локально компактная группа и неотрицательный непрерывный вес ω на G субмультипликативен (т. е. $\omega(st) \leq \omega(s)\omega(t)$, $s, t \in G$), то банахова алгебра $L^1(G, \omega)$ аменабельна тогда и только тогда, когда группа G аменабельна и $\sup\{\omega(g)\omega(g^{-1}) \mid g \in G\} < \infty$, и в этом случае банахова алгебра $L^1(G, \omega)$ изоморфна групповой алгебре $L^1(G)$ [241].

2.3.2. Операции над ε -квазипредставлениями

Для ε -квазипредставлений естественным образом определена операция прямой суммы (в подходящей прямой сумме пространств ε -квазипредставлений). Для ограниченных ε -квазипредставлений в нормированных пространствах (т. е. ε -квазипредставлений T , удовлетворяющих условиям $\|T(s)\| \leq C$ для всех $s \in S$

и для некоторого $C > 0$) естественно определена операция тензорного произведения (в подходящем тензорном произведении пространств ε -квазипредставлений). Тензорное произведение ε -квазипредставления и δ -квазипредставления в гильбертовых пространствах (с образами в шарах радиусов C_ε и C_δ соответственно) является σ -квазипредставлением, где $\sigma = \delta C_\varepsilon + \varepsilon C_\delta + \varepsilon \delta$, и его образ содержится в шаре радиуса $C_\varepsilon C_\delta$.

Далее, если X — некоторое множество, Ω — некоторая σ -алгебра его подмножеств, μ — мера на σ -алгебре Ω , $(H(x), x \in X)$ — измеримое поле сепарабельных гильбертовых пространств (см., например, [6]) и $(T(x), x \in X)$ — измеримое равномерно ограниченное поле ε -квазипредставлений (т. е. $(T(x))$ — ε -квазипредставление группы G в гильбертовом пространстве $H(x)$ при каждом $x \in X$ и для любого $g \in G$ операторное поле $(T(x)(g), x \in X)$ является равномерно ограниченным и измеримым), то в прямом интеграле гильбертовых пространств

$$\mathcal{H} = \int_X H(x) d\mu(x)$$

семейство операторов $\{T(g), g \in G\}$, определяемых как прямые интегралы

$$T(g) = \int_X T(x)(g) d\mu(x), \quad g \in G,$$

определяет ε -квазипредставление, более точно, σ -квазипредставление, где σ — существенная верхняя грань измеримой функции E , которая определяется формулой

$$E(x) = \sup\{\|T(x)(gh) - T(x)(g)T(x)(h)\| \mid g, h \in G\} \text{ для } x \in X,$$

причём $\sigma = \text{ess sup } E \leq \varepsilon$.

Очевидно, что ограничение ε -квазипредставления на подгруппу является δ -квазипредставлением с некоторым $\delta \leq \varepsilon$.

Кроме того, если G — сепарабельная локально компактная группа, H — её замкнутая подгруппа и T — ε -квазипредставление группы H в нормированном пространстве E , то в пространстве $L^2(H \setminus G)$ измеримых E -значных вектор-функций на однородном пространстве $H \setminus G$ с суммируемым квадратом относительно квазиинвариантной меры ν на $H \setminus G$ действует ε -квазипредставление V^T группы G , определяемое формулой

$$V^T(g)f(x) = T(h(x, g))\theta(x, g)f(x(g)), \quad f \in L^2(H \setminus G), \quad g \in G, \quad x \in H \setminus G,$$

где $x(g)$ — точка однородного пространства $H \setminus G$, в которую переходит точка $x \in H \setminus G$ при правом действии элемента $g \in G$, $\theta(x, g) \geq 0$ — квадратный корень из производной Радона—Никодима образа квазиинвариантной меры $d\nu(x)$ при действии элемента $g \in G$ на $H \setminus G$ по исходной мере $d\nu(x)$, а множитель $T(h(x, g))$ определяется с помощью формулы $X(x)g = h(x, g)X(x(g))$, где $X: H \setminus G \rightarrow G$ — такое борелевское сечение, что образ элемента $X(x)$ при каноническом отображении G на $H \setminus G$ равен x для всех $x \in H \setminus G$ [164].

Эту операцию естественно называть операцией *квазииндуцирования*, а ε -квазипредставление V^T — ε -квазипредставлением группы G , квазииндуцированным ε -квазипредставлением T подгруппы H группы G .

2.3.3. Непрерывные почти гомоморфизмы групповых алгебр и ограниченные измеримые ε -квазипредставления локально компактных групп

Теорема 2.3.9. Семейство ограниченных измеримых ε -квазипредставлений локально компактной группы в сепарабельных банаховых пространствах связано с введённым Джонсоном (см. [139—144]) семейством почти гомоморфизмов (или обобщённых гомоморфизмов) групповой алгебры этой локально компактной группы с помощью интегрального соотношения между ограниченными представлениями этой группы и её групповой алгебры в банаховых пространствах.

Доказательство. Отображение π локально компактной группы G в пространство ограниченных линейных операторов в банаховом пространстве называется *существенным ε -квазипредставлением*, если соотношение

$$\|\pi(g_1 g_2) - \pi(g_1)\pi(g_2)\| \leq \varepsilon$$

выполняется для почти всех $g_1, g_2 \in G$. Пусть π — скалярно измеримое и существенно ограниченное (т. е. удовлетворяющее условию $\|\pi(g)\| \leq C$ для почти всех $g \in G$ по мере Хаара и для некоторого $C > 0$) существенное ε -квазипредставление локально компактной группы G в сепарабельном банаховом пространстве E и $\mathcal{L}(E)$ — алгебра ограниченных линейных операторов в E . Тогда формула

$$\pi(f) = \int_G f(g)\pi(g) dg, \quad f \in L_1(G),$$

где dg — левоинвариантная мера Хаара на G , определяет LMNM-отображение групповой алгебры $L_1(G)$, т. е. такое линейное отображение $\pi: L_1(G) \rightarrow \mathcal{L}(E)$, которое близко к мультипликативному отображению, а именно

$$\|\pi(f_1 * f_2) - \pi(f_1)\pi(f_2)\| \leq \varepsilon \|f_1\| \|f_2\| \quad \text{для всех } f_1, f_2 \in L_1(G).$$

Справедливость этого неравенства следует из очевидной оценки

$$\begin{aligned} & \|\pi(f_1 * f_2) - \pi(f_1)\pi(f_2)\| = \\ &= \left\| \int_G (f_1 * f_2)(g)\pi(g) dg - \int_G f_1(g_1)\pi(g_1) dg_1 \int_G f_2(g_2)\pi(g_2) dg_2 \right\| = \\ &= \left\| \int_G \int_G (f_1(h)f_2(h^{-1}g)dh)\pi(g) dg - \int_G f_1(g_1)\pi(g_1) dg_1 \int_G f_2(g_2)\pi(g_2) dg_2 \right\| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \int_G \int_G f_1(g_1) f_2(g_2) (\pi(g_1 g_2) - \pi(g_1) \pi(g_2)) dg_1 dg_2 \right\| \leq \\
&\leq \int_G \int_G |f_1(g_1)| |f_2(g_2)| \|\pi(g_1 g_2) - \pi(g_1) \pi(g_2)\| dg_1 dg_2,
\end{aligned}$$

$f_1, f_2 \in L_1(G)$, где вычисление оправдывается неравенством между нормой интеграла и интегралом нормы [5]. Напомним, что пространство E предполагается сепарабельным, и поэтому слабая измеримость отображения π равносильна сильной измеримости и функция $g \mapsto \|\pi(g)\|$, $g \in G$, автоматически оказывается измеримой как верхняя грань последовательности измеримых функций [5].

Обратно, пусть S — ε -почти гомоморфизм групповой алгебры $L_1(G)$ сепарабельной локально компактной группы G в алгебру $\mathcal{L}(E)$ ограниченных линейных операторов в банаховом пространстве E , которое является сопряжённым к некоторому банахову пространству E_* (вообще говоря, не определённое однозначно), т. е. предположим, что отображение S линейно, непрерывно и удовлетворяет условию

$$\|S(f_1 * f_2) - S(f_1)S(f_2)\| \leq \varepsilon \|f_1\| \|f_2\|$$

для некоторого $\varepsilon > 0$ и всех $f_1, f_2 \in L_1(G)$.

Так как S непрерывно, то образ отображения S сепарабелен. Поэтому [5, следствие VI.8.7] существует такое отображение π группы G в пространство $\mathcal{L}(E)$, что для любых $\xi \in E$ и $\eta \in E^*$ функция

$$g \mapsto (\pi(g)\xi, \eta), \quad g \in G,$$

является измеримой и существенно ограниченной, причём

$$(S(f)\xi, \eta) = \int_G f(g) (\pi(g)\xi, \eta) dg, \quad \xi \in E, \quad \eta \in E^*,$$

а норма отображения S равна существенной верхней грани функции $g \mapsto \|\pi(g)\|$, $g \in G$, что следует из [5, теорема VI.8.2] с учётом того, что банахово пространство $\mathcal{L}(E)$ изометрично банахову пространству, сопряжённому проективному тензорному произведению E_* и E (ср. [234]). Тогда соотношение

$$\|S(f_1 * f_2) - S(f_1)S(f_2)\| \leq \varepsilon \|f_1\| \|f_2\|$$

принимает вид неравенства

$$\begin{aligned}
&\sup \left\{ \left| (S(f_1 * f_2) - S(f_1)S(f_2))\xi, \eta \right| \mid \xi, \eta \in E, \|\xi\| \leq 1, \|\eta\| \leq 1 \right\} = \\
&= \sup \left\{ \left| \int_G \int_G f_1(g) f_2(h) ((\pi(gh) - \pi(g)\pi(h))\xi, \eta) dg dh \right| \mid \|\xi\|, \|\eta\| \leq 1 \right\} \leq \\
&\leq \varepsilon \|f_1\| \|f_2\|,
\end{aligned}$$

из которого следует, что для любых $\xi, \eta \in E$ существенная верхняя грань функции

$$\{g, h\} \mapsto \left| \left((\pi(gh) - \pi(g)\pi(h))\xi, \eta \right) \right|$$

не превосходит $\varepsilon \|\xi\| \|\eta\|$, так что

$$\operatorname{ess\,sup}_{g, h \in G} \|\pi(gh) - \pi(g)\pi(h)\| \leq \varepsilon.$$

□

2.4. Псевдопредставления

2.4.1. Определение псевдопредставления

Теорема об устойчивой представимости для аменабельных групп показывает, что ограничение любого ограниченного квазипредставления с малым дефектом на аменабельную подгруппу (в частности, на подгруппу, порождённую одним элементом) допускает аппроксимацию обычным ограниченным представлением подгруппы. Конечно, аппроксимирующее представление, вообще говоря, не определено однозначно (в [210] приведён пример двумерного квазипредставления группы $\mathbb{Z}$, для которого аналог явной формулы из [118] приводит к представлению, зависящему от выбора инвариантного среднего на $\mathbb{Z}$), но близкие представления аменабельной группы подобны при операторе, близком к единице. Этот факт позволяет ввести следующее определение.

Определение 2.4.1 [30]. Пусть G — группа, а π — ε -квазипредставление группы G в банаховом пространстве E . Отображение π называется ε -псевдопредставлением, если $\pi(g)^{-1} = \pi(g^{-1})$ для всех $g \in G$ и для всех $g \in G$ и всех $n \in \mathbb{Z}$ существует такой линейный оператор $A(n, g)$ в $L(E^*)$, что

$$\|A(n, g) - \mathbf{1}_{E^*}\| \leq \varepsilon, \quad \pi(g^n)^* = A(n, g)(\pi(g)^*)^n A(n, g)^{-1}, \quad g \in G, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где $\|\cdot\|$ — операторная норма в $L(E^*)$, а $\mathbf{1}_{E^*}$ — единичный оператор в E^* .

Определение 2.4.2 [210]. Пусть G — группа, E — банахово пространство. Группа G называется устойчиво псевдопредставимой в банаховом пространстве E , если для любых $\varepsilon > 0$ и $C > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если π — δ -квазипредставление группы G в E обратимыми операторами, удовлетворяющее условиям $\|\pi(g)\| \leq C$, $\|\pi(g)^{-1}\| \leq C$ для всех $g \in G$, то существует такое ε -псевдопредставление ρ группы G в E^* , что $\|\pi(g)^* - \rho(g)\| \leq \varepsilon$ для всех $g \in G$.

«Подкручивание» A существенно в определении 2.4.2, как показывает пример в [210].

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.4.3 [210]. Любая группа устойчиво псевдопредставима в любом банаховом пространстве.

2.4.2. Чистые псевдопредставления

Основной недостаток определения псевдопредставления состоит в отсутствии естественной процедуры усреднения, оставляющей данное псевдопредставление на месте. Этого недостатка лишено следующее понятие, выделяющее важный узкий класс псевдопредставлений, для которого $A \equiv 1$. Этот класс представляет особый интерес для свободных групп, односвязных групп Ли и полупростых групп Ли. Он достаточно богат для решения некоторых задач лифтинга и деформации представлений групп (см. [36, 37, 41, 222]).

Определение 2.4.4. Квазипредставление π группы G называется *чистым псевдопредставлением*, если ограничение π на любую аменабельную подгруппу H группы G является обычным представлением группы H .

Простейшими и важнейшими примерами псевдопредставлений являются экспоненты от псевдохарактеров, которые рассматриваются в следующем разделе.

2.5. Структура конечномерных квазипредставлений групп. Квазихарактеры и псевдохарактеры

В этом разделе мы приводим краткий обзор теории псевдохарактеров на группах Ли, а также некоторые родственные результаты.

2.5.1. Определения и основные свойства

Для одномерных квазипредставлений «подкручивание» A в определении 2.4.1 не влияет на результат, и поэтому аппроксимирующий объект определён однозначно и является одномерным чистым псевдопредставлением. Простейшая форма такого отображения — экспонента от отображения, переводящего произведение элементов группы «почти» в сумму образов этих элементов. Приведём соответствующее определение.

Определение 2.5.1. Пусть S — полугруппа. Вещественная функция f на S называется (*вещественным*) *квазихарактером* на S , если множество

$$\{f(st) - f(s) - f(t) \mid s, t \in S\}$$

является ограниченным. Вещественный квазихарактер f на S называется (*вещественным*) *псевдохарактером* на S , если $f(x^n) = nf(x)$ для всех $x \in S$ и всех $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 2.5.2 (см. [210]). Пусть S — полугруппа, f — вещественный квазихарактер на S .

1. Для любого $s \in S$ существует предел

$$\varphi(s) = \varphi_f(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} f(s^n). \quad (8)$$

Если $|f(st) - f(s) - f(t)| \leq C$ для всех $s, t \in S$, то $|f(s) - \varphi(s)| \leq C$ для всех $s \in S$ и $|\varphi(st) - \varphi(s) - \varphi(t)| \leq 4C$ для всех $s, t \in S$.

2. Ограниченный псевдохарактер (и, в частности, любой псевдохарактер на полугруппе с нулём) равен нулю.
3. Если R — односторонне аменабельная подполугруппа в S , то ограничение отображения φ на R есть аддитивный характер R , т. е. $\varphi(st) = \varphi(s) + \varphi(t)$ для всех $s, t \in S$. Кроме того, величина $\varphi(s)$, $s \in R$, может быть определена как общее значение всех односторонних инвариантных средних на соответствующей ограниченной функции $t \mapsto f(ts) - f(t)$, $t \in R$, или $t \mapsto f(st) - f(t)$, $t \in R$.
4. $\varphi(xy) = \varphi(yx)$ для всех $x, y \in S$.
5. Если G — топологическая группа и φ — локально ограниченный псевдохарактер на G , то φ непрерывен. В частности, если f — непрерывный квазихарактер на G , то φ непрерывен.
6. Если $S = G$ — группа, N — нормальный делитель в G , π — канонический эпиморфизм G на G/N и псевдохарактер φ обращается в нуль на N , то существует такой псевдохарактер ψ группы G/N , что $\varphi = \psi \circ \pi$. Если G — локально компактная группа, N замкнут и φ непрерывен, то ψ непрерывен.

Доказательство. Пусть подполугруппа R аменабельна справа (в случае левой аменабельности доказательство совершенно аналогичное). Для любого правоинвариантного среднего I на R положим

$$I_t(f(ts) - f(t)) = \varphi_I(s) \quad \text{для всех } s \in S.$$

Тогда

$$\varphi_I(sw) = I_t(f(tsw) - f(t)) = I_t((f(tsw) - f(ts)) + (f(ts) - f(t))) = \varphi_I(w) + \varphi_I(s)$$

для всех $s, t, w \in S$, откуда следует, что φ_I — аддитивный характер подполугруппы R . Следовательно,

$$\varphi_I(s^n) = \varphi_I(s)^n \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

Поэтому либо $\varphi_I(s) = 0$, либо множество $\{\varphi_I(s)\}$ является неограниченным. С другой стороны, по предположению $|f(ts) - f(t) - f(s)| \leq C$ для всех $t, s \in S$. Применяя среднее I по переменной t , получаем

$$|\varphi_I(s) - f(s)| \leq C \quad \text{для всех } s \in S, \quad (10)$$

откуда следует, что для другого правоинвариантного среднего J разность $\varphi_J(s) - \varphi_I(s)$, $s \in S$, является ограниченным псевдохарактером и потому равна нулю. Итак, $\varphi_J(s) = \varphi_I(s)$ для всех $s \in S$, и на функции $f_s(t) = f(ts) - f(t)$ переменной $t \in S$ все правоинвариантные средние совпадают, так что функция f_s является правосторонне почти сходящейся для любого $s \in S$.

Обозначим через $\varphi(s)$ общее значение всех правоинвариантных средних на функции f_s . Тогда из (10) следует неравенство $|f(s) - \varphi(s)| \leq C$ для всех $s \in S$, утверждение о существовании предела в утверждении 1 следует из (9) и (10), а из неравенства $|f(st) - f(s) - f(t)| \leq C$ для всех $s, t \in S$ и формулы (10) получаем, что $|\varphi(st) - \varphi(s) - \varphi(t)| \leq 4C$ для всех $s, t \in S$. Так как,

в частности, значения всех правоинвариантных средних совпадают на абелевой подполугруппе, образованной натуральными степенями данного элемента $s \in S$, то, применяя так называемый критерий Лоренца (см. [158]), видим, что средние Чезаро последовательности $k \mapsto f_s(s^k)$, $k \in \mathbb{N}$, сходятся, т. е. предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} (f_s(s^{k+1}) + \dots + f_s(s^{k+n}))$$

существует и равен общему значению инвариантных средних, т. е. числу $\varphi(s)$, причём этот предел равномерен относительно $k \in \mathbb{N}$. Таким образом, предел $\varphi(s)$ последовательности $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} (f(s^{k+n}) - f(s^{k+1}))$ равномерен относительно $k \in \mathbb{N}$. В частности, предел $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} f(s^n)$ существует и равен $\varphi(s)$ для всех $s \in S$. Отсюда сразу следует утверждение 2.

Так как функция φ , определённая в утверждении 1 теоремы 2.5.2, является псевдохарактером, как и функция, ограничение которой на каждую правоаменабельную подполугруппу определено в утверждении 3, то разность этих функций является ограниченным псевдохарактером, т. е. нулём, и поэтому функция φ , определённая в пункте 1, является гомоморфизмом на любой правоаменабельной подполугруппе в S и число $\varphi(s)$, $s \in S$, является общим значением на функции $f_s(t) = f(ts) - f(t)$, $t \in S$, $s \in S$, всех правоинвариантных средних на такой правоаменабельной подполугруппе в S . Это завершает доказательство утверждений 1 и 3.

Для доказательства утверждения 4 заметим, что $\varphi((xy)^n) = n\varphi(xy)$ при $x, y \in S$. Отсюда следует соотношение

$$|f((xy)^n) - n\varphi(xy)| \leq C.$$

Кроме того,

$$|f((xy)^n) - f(x) - f((yx)^{n-1}y)| \leq C$$

и аналогично

$$|f((yx)^{n-1}y) - f((yx)^{n-1}) - f(y)| \leq C \quad \text{при } x, y \in S.$$

Следовательно,

$$|f((xy)^n) - f(x) - f((yx)^{n-1}) - f(y)| \leq 2C.$$

Умножая на $1/n$ и переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$, получаем неравенство $|\varphi(xy) - \varphi(yx)| \leq 0$, или $\varphi(xy) = \varphi(yx)$, для всех $x, y \in S$. Это завершает доказательство утверждения 4.

Докажем утверждение 5. Пусть G — топологическая группа и φ — псевдохарактер на G , ограниченный на окрестности U единицы. Обозначим через M такую постоянную, что $|\varphi(g)| \leq M$ для всех $x \in U$. Напомним, что

$$|\varphi(yz) - \varphi(y) - \varphi(z)| \leq C$$

для всех $y, z \in G$. Следовательно, неравенства

$$|\varphi(ya^n) - \varphi(y) - \varphi(a^n)| \leq C, \quad |\varphi(za^n) - \varphi(z) - \varphi(a^n)| \leq C$$

выполняются для всех $y, z \in U$ и всех $n \in \mathbb{N}$. Вычитая одно из другого, получаем

$$|\varphi(u) - \varphi(v)| \leq 2C + 2M \quad \text{для всех } u, v \in Ua^n. \quad (11)$$

Предположим теперь, что $a \in G$ — точка разрыва псевдохарактера φ . Пусть $n \in \mathbb{N}$. Так как групповая операция непрерывна, то существует окрестность V элемента a в G , удовлетворяющая условию $V^n \subset Ua^n$. По построению a — точка разрыва псевдохарактера φ , так что для некоторого $\varepsilon > 0$, зависящего только от a , и для любой окрестности U существуют такие $b, c \in V$, что $|\varphi(b) - \varphi(c)| > \varepsilon$. Тогда $b^n, c^n \in V^n \subset Ua^n$, но $\varphi(b^n) = n\varphi(b)$ и $\varphi(c^n) = n\varphi(c)$, и поэтому

$$|\varphi(b^n) - \varphi(c^n)| = n|\varphi(b) - \varphi(c)| > n\varepsilon, \quad b^n, c^n \in V^n \subset Ua^n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (12)$$

Так как величина $\varepsilon > 0$ зависит только от a , то неравенства 11 и 12 не могут выполняться одновременно для достаточно больших $n \in \mathbb{N}$. Это доказывает утверждение 5.

Докажем утверждение 6. Предположим теперь, что псевдохарактер φ определён на группе G и обращается в нуль на нормальном делителе N группы G . Тогда для некоторого сечения $S: G/N \rightarrow G$ положим $f = \varphi \circ S$. Так как элементы $S(x)S(y)$ и $S(xy)$ лежат в одном и том же смежном классе по N , то они отличаются множителем $n(x, y) \in N$. Поэтому

$$|\varphi(S(x)S(y)) - \varphi(S(xy))| = |\varphi(S(xy)n(x, y)) - \varphi(S(xy))| \leq C + |\varphi(n(x, y))| = C,$$

а тогда и

$$|\varphi(S(x)) + \varphi(S(y)) - \varphi(S(xy))| \leq |\varphi(S(x)S(y)) - \varphi(S(xy))| + C \leq 2C,$$

так что величина $f(x) + f(y) - f(xy)$ ограничена. Следовательно, f — квазихарактер на G/N . Пусть ψ — псевдохарактер на G/N , связанный с f по теореме 2.5.2. Тогда разность $\psi - f$ ограничена, причём функция $F = \psi \circ \pi$ является псевдохарактером на группе G (так как на любой аменабельной подгруппе в G квазихарактер F является композицией гомоморфизмов) и выполняется соотношение $\psi = \psi \circ \pi \circ S$. Поэтому разность $\varphi - F$ ограничена на образе сечения S . Но изменения функций F и φ равномерно ограничены на каждом смежном классе по N . Поэтому разность $\varphi - F$ ограничена на всей группе G . Так как F и φ — псевдохарактеры на G , то их разность тоже псевдохарактер, причём ограниченный. Следовательно, он равен нулю (см. утверждение 2). Таким образом, $\varphi = \psi \circ \pi$.

Наконец, если G — локально компактная группа, а N замкнут, то отображение $\pi: G \rightarrow G/N$ открыто. Если φ — непрерывный псевдохарактер и если $\varphi = \psi \circ \pi$, то полный φ -прообраз любого открытого множества $U \subset \mathbb{R}$ открыт в G . Так как каноническое отображение π открыто, то образ множества $\varphi^{-1}(U)$ в G/N (этот образ совпадает с прообразом открытого множества U в фактор-группе G/N) тоже открыт, так что ψ непрерывен. $\square$

Приведём очевидное следствие теоремы 2.5.2.

Следствие 2.5.3 (см. [210]).

1. Для любого квазихарактера f на полугруппе S существует единственный псевдохарактер φ на S , для которого разность $f - \varphi$ ограничена, причём для всех $s \in S$ предел $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} f(s^n)$ существует и равен $\varphi(s)$.
2. Отображение $f \mapsto \varphi$, ставящее в соответствие квазихарактеру f связанный с ним псевдохарактер, линейно и является проектором.
3. Если $\|df\|$ — дефект квазихарактера f (квазинорма в пространстве квазихарактеров, определяемая условием, что $\|df\|$ есть радиус наименьшего замкнутого шара с центром в нуле, содержащего множество $\{f(st) - f(s) - f(t) \mid s, t \in S\}$), то отображение $f \mapsto \varphi$ непрерывно.

Приведём пример нетривиального псевдохарактера. Пусть M — группа, и пусть в M можно выделить такие подмножества M^+ и M^- , что

$$e \notin M^+, \quad M^+ \cap M^- = \emptyset, \quad M^- = (M^+)^{-1}, \quad M = M^+ \cup M^- \cup \{e\}.$$

Введём отображение $\text{sign}: M \rightarrow \mathbb{Z}$, полагая $\text{sign}(m)$ равным 1 при $m \in M^+$, -1 при $m \in M^-$ и $\text{sign}(e) = 0$. Пусть N — группа, $N \neq \{e\}$. Определим функцию f на свободном произведении $G = M * N$, полагая $f(g) = \sum_{i=1}^{k+1} \text{sign}(m_i)$ для $g = m_1 n_1 m_2 n_2 \dots m_k n_k m_{k+1}$, где $m_i \in M$, $n_i \in N$, $n_i \neq e$ для всех $i = 1, \dots, k$ и $m_i \neq e$ для $i = 2, \dots, k$.

Пример 2.5.4 (см. [210]). Функция f есть квазихарактер на G , принимающий целые значения, и $|f(g_1 g_2) - f(g_1) - f(g_2)| \leq 3$ для всех $g_1, g_2 \in G$.

Замечание 2.5.5. В [149] построен пример конечномерного (но не одномерного) квазипредставления фундаментальной группы римановой поверхности, не близкого к обычным представлениям. С другой стороны, экспонента от квазихарактера, построенного в примере 2.5.4, — это *одномерное* квазипредставление, не близкое к характерам.

Пример 2.5.6 (продолжение примера 2.5.4; частные случаи).

1. Свободные произведения. Пусть $M \neq \{e\}$ — подгруппа группы $\mathbb{R}$, пусть $M^+ = \{x \mid x \in M, x > 0\}$, и пусть sign есть ограничение обычной функции знака на M^+ . Тогда приведённая выше конструкция даёт нетривиальный псевдохарактер на свободном произведении $M * N$ для любой группы $N \neq \{e\}$. В частности, на любой некоммутативной свободной группе существует нетривиальный псевдохарактер.

2. Группа $\text{PSL}(2, \mathbb{Z}) = \text{SL}(2, \mathbb{Z}) / \{e, -e\} = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$. Пусть N — образ в $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ подгруппы группы $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$, порождённой элементом $a = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2$, $a_{11} = a_{22} = 0$, $a_{12} = -a_{21} = 1$; пусть M — образ подгруппы, порождённой элементом $b = (b_{ij})$, $i, j = 1, 2$, где $b_{11} = b_{12} = 1$, $b_{21} = -1$, $b_{22} = 0$. Если A и B — образы элементов a и b в $G = \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ соответственно, то $A^2 = B^3 = 1_G$ в G , причём G есть свободное произведение своих циклических подгрупп N и M , порождённых элементами A и B соответственно. Положим

$M^+ = \{B\}$, $M^- = \{B^2\}$. Тогда, очевидно, все условия примера 1 будут выполнены, что определяет квазихарактер на G (и потому также и связанный с ним псевдохарактер на G).

Таким образом, свободные группы (с более чем одной образующей) и свободные произведения на бесконечные циклические группы и циклические группы нечётного порядка имеют нетривиальные псевдохарактеры. Как указано во введении, их описание приведено в [18, 19].

3. Псевдохарактер Радемахера. Пусть η — эта-функция Дедекинда на верхней полуплоскости $\mathbb{C}^+$, т. е. $\eta(\tau) = e^{\pi i \tau / 12} h(e^{2\pi i \tau})$, где функция h есть произведение $h(x) = \prod_{m=1}^{\infty} (1 - x^m)$, $x = e^{2\pi i \tau}$, $\text{Im}(\tau) > 0$. Воспользуемся известными формулами для логарифма η -функции: если выбрать ветвь логарифма с $\text{Im} \ln(i) \in (0, \pi)$, то

$$\ln \eta(\tau') = \ln \eta(\tau) + (\text{sgn } c)^2 \frac{\ln(c\tau + d)}{2} - \frac{\pi i}{4} (\text{sgn } c) + \frac{\pi i}{12} \Phi(g),$$

где

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{Z}),$$

$\tau' = (a\tau + b)/(c\tau + d)$, а Φ — так называемый символ Радемахера [195], определяющий отображение группы $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ (точнее, её фактор-группы $G = \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$) в $\mathbb{R}$, удовлетворяющее соотношению $\Phi(gg') = \Phi(g) + \Phi(g') - 3 \text{sgn}(cc'c'')$ для всех $g, g' \in G$, где g, g', g'' — образы в $G = \text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ матриц

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{Z})$$

соответственно, так что Φ — квазихарактер на G , принимающий значения в $\mathbb{Z}$. Соответствующий псевдохарактер на группе $\text{PSL}(2, \mathbb{Z}) = \text{SL}(2, \mathbb{Z})/\{\pm e\}$ (или на группе $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$) мы назовём *псевдохарактером Радемахера* (подробности см. в [29]). В 2001 г. этот квазихарактер был указан в [106] без ссылки на [29].

2.5.2. Ограниченность коциклов Гишарде—Вигнера

Теория псевдохарактеров, развитие которой началось в 1983 г. [28], оказалась связанной с теорией группы двумерных ограниченных когомологий с вещественными коэффициентами для дискретных групп [58]. Полученное соответствие между пространствами псевдохарактеров и когомологиями было в дальнейшем продолжено до соответствия между введёнными Громовым [110] непрерывными ограниченными когомологиями, точнее группой двумерных ограниченных вещественных непрерывных когомологий $\hat{H}^2(G)$ локально компактной группы G , и пространством непрерывных вещественных псевдохарактеров на этой группе.

Пусть $H^n(G)$ есть n -я группа когомологий комплекса

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{d^0=0} C^1(G) \xrightarrow{d^1} C^2(G) \longrightarrow \dots, \quad (13)$$

где $C^n(G)$ — вещественное векторное пространство всех непрерывных вещественных функций f на группе G^n , $f: (g_1, \dots, g_n) \mapsto f(g_1, \dots, g_n) \in \mathbb{R}$, $g_i \in G$,

$$d^n f(g_1, \dots, g_n) = f(g_2, \dots, g_n) + \sum_{i=1}^n (-1)^i f(g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(g_1, \dots, g_n) \quad (14)$$

(см. [3], ср. [20], где эти группы называются *ванэстовскими* группами вещественных когомологий, соответствующими тривиальному действию группы G на $\mathbb{R}$). Группы $\hat{H}^n(G)$ ограниченных вещественных непрерывных когомологий группы G определяются аналогично формулами (13) и (14), в которых пространства $C^n(G)$ заменены пространствами $CB^n(G)$ ограниченных непрерывных функций на G^n .

Естественное отображение $\hat{H}^n(G) \rightarrow H^n(G)$ определяется рассмотрением ограниченных непрерывных коциклов как непрерывных коциклов без условия ограниченности цепей. Упомянутая выше связь между группой двумерных ограниченных вещественных непрерывных когомологий $\hat{H}^2(G)$ локально компактной группы G и пространством непрерывных вещественных псевдохарактеров на этой группе состоит в том, что при $n = 2$ ядро $\hat{H}^2(G)$ отображения $\hat{H}^2(G) \rightarrow H^2(G)$ естественно изоморфно (векторному) фактор-пространству $QP(G)$ пространства $P(G)$ всех непрерывных псевдохарактеров на G по векторному подпространству непрерывных (вещественных) характеров группы G (см. [34, 211, 215—217]).

Особую роль в группе $\hat{H}^2(G)$ играет компонента единицы данной локально компактной группы G . Этот феномен имеет место и для хорошо изученных ванэстовских групп $H^n(G)$ (см. [3, 20]), поскольку группа $H^n(G)$ естественно изоморфна группе $H^n(G/K)$, где K — такой компактный нормальный делитель в G , что компонента единицы фактор-группы G/K является группой Ли (аналогичное рассуждение позволяет доказать, что группа $H^n(G)$ конечномерна для любой почти связной локально компактной группы G). Строение группы $\hat{H}^2(G)$ определяется её образом в $H^2(G)$ и упомянутым выше ядром $\hat{H}(G)$ отображения $\hat{H}^2(G) \rightarrow H^2(G)$, которое может быть описано с помощью псевдохарактеров на G .

В [34] для данной локально компактной группы G строится такой «достаточно большой» нормальный делитель N в G , что компонента единицы в группе G/N является группой Ли, причём векторные пространства $\hat{H}^2(G)$ и $\hat{H}^2(G/N)$ естественно изоморфны. Это наблюдение приводит к описанию пространств $QP(G)$ и $\hat{H}^2(G)$ для любой связной локально компактной группы G и доказательству конечномерности фактор-пространства $QP(G)$ нетривиальных непрерывных вещественных псевдохарактеров по подпространству обычных характеров и пространства $\hat{H}^2(G)$ для любой почти связной локально компактной группы G .

Примем введённые выше обозначения для групп когомологий. Пусть G — простая группа Ли с конечным центром, а K — максимальная компактная под-

группа группы G . Напомним результаты Гишарде—Вигнера о вещественных непрерывных 2-коциклах на G и укажем связь между этими коциклами и нетривиальным псевдохарактером $\varphi_{GW}: g \mapsto z(k(g))$, где $g \in G$, $k(g) \in K$, $z(k(g)) \in \mathcal{Z}(K)$. Обозначим через $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{k}$ алгебры Ли групп G и K соответственно и начнём с определений и общих фактов.

Определение 2.5.7 (см. [21]). Простая группа Ли называется *эрмитово симметрической*, если центр её универсальной накрывающей группы бесконечен.

Теорема 2.5.8 (см. [21, гл. VIII и IX]). Если G — простая группа Ли, то условие $H^2(G) \neq 0$ выполняется тогда и только тогда, когда центр $\mathcal{Z}(\mathfrak{k})$ алгебры Ли $\mathfrak{k}$ нетривиален, а также тогда и только тогда, когда пространство гомоморфизмов Ли $\text{Hom}(\mathfrak{k}, \mathbb{R})$ отлично от нуля. Если эти условия выполнены (в этом случае пространство G/K естественно снабжено G -инвариантной комплексной структурой, относительно которой оно является эрмитово симметрическим), то

$$\dim H^2(G) = \dim \mathcal{Z}(\mathfrak{k}) = \dim \text{Hom}(\mathfrak{k}, \mathbb{R}) = 1.$$

С точностью до локального изоморфизма группа G совпадает с одной из следующих групп:

- 1) $\text{SU}(p, q)$, $p, q \in \mathbb{N}$,
- 2) $\text{SO}_0(2, q)$, где $q \in \mathbb{N}$, $q \neq 2$ (напомним, что $\text{SO}_0(2, 2)$ не является простой группой Ли),
- 3) $\text{Sp}(n, \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{R}$,
- 4) $\text{SO}^*(2n)$, $n > 1$ (напомним, что $\text{SO}^*(2)$ не является простой группой Ли),
- 5) вещественная форма комплексной простой группы Ли типа E_6 с $\dim \mathfrak{k} = 46$,
- 6) вещественная форма комплексной простой группы Ли типа E_7 с $\dim \mathfrak{k} = 79$.

Введём теперь 2-коцикл Гишарде—Вигнера [3, 116]. Пусть G — простая группа Ли и $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ — разложение Картана, связанное с компактной подалгеброй Ли $\mathfrak{k}$. Обозначим через $\exp$ экспоненциальное отображение алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в G .

Теорема 2.5.9 ([3, 116]). Пусть v — такая бесконечно дифференцируемая функция на G со значениями в $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, что ограничение v на K — нетривиальный гомеоморфизм K на одномерный тор $\mathbb{T}$, ограничение v на $\exp \mathfrak{p}$ строго положительно и K -инвариантно, а формула $v(k \exp p) = v(k)v(\exp p)$ справедлива для любых $k \in K$ и $p \in \mathfrak{p}$. Тогда функция

$$f(g_1, g_2) = (2\pi)^{-1} \text{Arg}(v(g_1)v(g_2)v(g_1g_2)^{-1}), \quad f(e, e) = 0, \quad (15)$$

допускает непрерывную ветвь на $G \times G$, определяющую вещественный дифференцируемый 2-коцикл на G .

Следующее утверждение устанавливает связь между ограниченными и обычными 2-когомологиями простых групп Ли.

Теорема 2.5.10. Для любой простой группы Ли G , универсальная накрывающая которой имеет бесконечный центр, любая функция f вида (15) является ограниченной на $G \times G$.

Сделаем несколько замечаний перед доказательством теоремы 2.5.10. Начнём со следующего наблюдения, известного ещё по докладу Бессона 1988 года в Лионе [58].

Теорема 2.5.11. Пусть G — группа, φ — псевдохарактер на G . Формула

$$\psi(g_1, g_2) = \varphi(g_1 g_2) - \varphi(g_1) - \varphi(g_2), \quad g_1, g_2 \in G,$$

определяет ограниченный 2-коцикл ψ на группе G . Коцикл ψ тривиален как ограниченный коцикл (т. е. является кограницей ограниченной цепи) тогда и только тогда, когда квазихарактер φ является ограниченным возмущением обычного аддитивного вещественного характера группы G .

Введём теперь псевдохарактер, непосредственно связанный с 2-коциклом Гишарде—Вигнера на эрмитово симметрической простой группе Ли. Оказывается, односвязные эрмитово симметрические простые группы Ли — единственные простые группы Ли, допускающие нетривиальные псевдохарактеры.

Определение 2.5.12 (см. [34, 211, 215—217]). Пусть G — связная односвязная простая группа Ли, центр которой бесконечен (соответствующее симметрическое пространство является эрмитово симметрическим, см. теорема 2.5.8), и пусть K — аналитическая подгруппа группы G , отвечающая максимальной компактной подалгебре Ли алгебры Ли группы Ли G . Осуществим изоморфное отождествление центра Z_K аналитической группы K с аддитивной группой поля вещественных чисел $\mathbb{R}$ (например, с помощью натурального параметра на однопараметрической подгруппе, определяемой подгруппой Z_K). Рассмотрим разложение Ивасава $G = KAN$, связанное с группой K . Пусть A — абелева группа, а N — нильпотентная группа в этом разложении, и пусть

$$g = k(g)an, \quad g \in G, \quad k(g) \in K, \quad a \in A, \quad n \in N, —$$

соответствующее разложение элемента $g \in G$. Как хорошо известно, отображение $\varpi: g \mapsto k(g)$, $g \in G$, переводящее каждый элемент $g \in G$ в «компактную» компоненту $k(g) \in K$ его разложения Ивасава, непрерывно. Рассмотрим композицию ψ отображения $\varpi: g \mapsto k(g)$, $g \in G$, и непрерывной проекции π , отображающей каждый элемент $k \in K$ в его центральную составляющую $z(k) \in Z_K$. Как доказано в [34, 211, 215—217], эта композиция $\psi = \pi \circ \varpi$ определяет некоторый квазихарактер на G . Псевдохарактер θ , соответствующий этому квазихарактеру, называется *псевдохарактером Гишарде—Вигнера* (ср. [34]).

Псевдохарактер Гишарде—Вигнера автоматически непрерывен на всей группе G , поскольку он связан с непрерывным квазихарактером ψ формулой (8) (см. [34, 211, 215—217]).

Очевидно, что псевдохарактер Гишарде—Вигнера на односвязной эрмитово симметрической простой группе Ли определён однозначно с точностью до ненулевого числового множителя.

Существует непосредственная связь между псевдохарактером Гишарде—Вигнера на универсальной накрывающей простой группы Ли и коциклом Гишарде—Вигнера на этой группе (и на всех её фактор-группах с конечным центром);

явный вид этой связи установлен в [34, 215–217]. Для группы $SL(2, \mathbb{R})$ ограниченность коцикла f , определяемого формулой (15), доказана в [211], где вычислен и соответствующий псевдохарактер θ , причём $|f(g)| < \pi/2$, $g \in SL(2, \mathbb{R})$ (см. также [216]). Оценки для коциклов Гишарде–Вигнера приведены в [216, 217]. Описание псевдохарактеров на всех эрмитово симметрических простых группах Ли с бесконечным центром было приведено в 1997 г. в [211]. В 2001 г. доказательство полноты этого описания [216] было получено с помощью исследования каждого из перечисленных выше классов групп отдельно. Частные результаты о псевдохарактерах на группах Ли были опубликованы также Гизом в 2001 г. [106] (для группы $SL(2, \mathbb{R})$) и позже Ентовым [96] (для группы $\widehat{Sp}(2n, \mathbb{R})$ — универсальной накрывающей соответствующей матричной группы) в связи с изучением финслеровой псевдометрики на симплектической группе.

В работе Н. Монода 2001 г. по непрерывным ограниченным когомологиям локально компактных групп [175] (как и в более поздних работах [70–72, 176]) нет ни доказательства ограниченности коциклов Гишарде–Вигнера, ни даже правильной постановки задачи. Хотя соответствующее утверждение и высказано в начале стр. 125 в [175] (пример 9.3.3), но (нетривиальная) проверка этого утверждения заменена неверным замечанием о компактности подгруппы Ли, отвечающей максимальной компактной подалгебре Ли эрмитово симметрической группы Ли. Это безоговорочно ошибочно, поскольку для случая односвязной группы, как раз и отвечающего нетривиальному псевдохарактеру, максимальная компактная подалгебра Ли содержит одномерный центр, и поэтому соответствующая подгруппа односвязной группы тоже содержит одномерный центр, изоморфный числовой прямой.

Вернёмся к доказательству теоремы 2.5.10.

Доказательство теоремы 2.5.10. Напомним, что группа когомологий одномерна, так что ненулевые кратные любых двух нетривиальных коциклов когомологичны. Рассмотрим каждый из случаев 1)–6) в теореме 2.5.8 отдельно.

Случай 1). $SU(p, q)$, $p, q \in \mathbb{N}$.

Для группы $U(p, q)$ нетривиальный коцикл требуемого вида вычислен в [116, раздел 5, случай I]. Напомним его описание. Реализуем группу G как множество комплексных матриц

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix},$$

где g_{ij} — подматрицы порядков $d_i \times d_j$ для $i, j = 1, 2$, $d_1 = p$ и $d_2 = q$, удовлетворяющие условиям $g j g^* = j$ и $\det g = 1$ (g^* означает матрицу, эрмитово сопряжённую g),

$$j = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}.$$

Группа K реализуется в этом описании как множество матриц $g \in G$, где $g_{12} = g_{21} = 0$, $g_{11} \in U(p)$, $g_{22} \in U(q)$ и $\det g_{11} \det g_{22} = 1$ (как всегда, $U(n)$ — группа

унитарных матриц порядка n). Пространство $\mathfrak{p}$ можно отождествить с множеством эрмитовых матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & R \\ R^* & 0 \end{pmatrix},$$

где R — любая $(p \times q)$ -матрица. В качестве функции v , определяющей коцикл по формуле (15), можно взять $v(g) = \det g_{11}$, $g \in G$, и в этом случае свойства, перечисленные в теореме 2.5.9, очевидны.

Докажем, что непрерывная функция

$$\{g_1, g_2\} \mapsto \text{Arg}(\det g_{11}^{(1)} \det g_{11}^{(2)} (\det(g^{(1)} g^{(2)})_{11})^{-1}),$$

$$\{g^{(1)}, g^{(2)}\} \in \text{SU}(p, q) \times \text{SU}(p, q), \quad (16)$$

является ограниченной на всей группе $\text{SU}(p, q) \times \text{SU}(p, q)$. Напомним, что для

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \in \text{SU}(p, q)$$

имеем

$$g_{11}^* g_{11} - g_{21}^* g_{21} = I_p, \quad g_{22}^* g_{22} - g_{12}^* g_{12} = I_q, \quad g_{11}^* g_{12} - g_{21}^* g_{22} = 0_{p,q}, \quad (17)$$

в частности

$$g_{12} = (g_{11}^*)^{-1} g_{21}^* g_{22}, \quad g_{12} (g_{22})^{-1} = (g_{11}^*)^{-1} g_{21}^*.$$

Поэтому

$$\det(g_{11}^{(1)} g_{11}^{(2)} + g_{12}^{(1)} g_{21}^{(2)}) = \det(g_{11}^{(1)} (1 + (g_{11}^{(1)})^{-1} g_{12}^{(1)} g_{21}^{(2)} (g_{11}^{(2)})^{-1}) g_{11}^{(2)}).$$

Подставляя эту формулу в (16), видим, что нам нужно оценить непрерывную ветвь функции

$$\det(1 + (g_{11}^{(1)})^{-1} g_{12}^{(1)} g_{21}^{(2)} (g_{11}^{(2)})^{-1}) \quad (18)$$

на группе $\text{SU}(p, q) \times \text{SU}(p, q)$. В формуле (18) произведение $A = g_{21}^{(2)} (g_{11}^{(2)})^{-1}$ удовлетворяет условию

$$A^* A = ((g_{11}^{(2)})^{-1})^* (g_{21}^{(2)})^* g_{21}^{(2)} (g_{11}^{(2)})^{-1},$$

где

$$(g_{21}^{(2)})^* g_{21}^{(2)} = ((g_{11}^{(2)})^{-1})^* (g_{11}^{(2)})^{-1} - I_p$$

по второй формуле в (17). Не выписывая ненужные сейчас верхние индексы (2), получаем

$$\begin{aligned} A^* A &= (g_{11}^{-1})^* g_{21}^* g_{21} g_{11}^{-1} = (g_{11}^{-1})^* ((g_{11}^{-1})^* g_{11}^{-1} - I_p) g_{11}^{-1} = \\ &= (g_{11}^*)^{-1} ((g_{11}^{-1})^* g_{11}^{-1} - I_p) g_{11}^{-1} = I_p - (g_{11}^*)^{-1} g_{11}^{-1} = I_p - (g_{11} g_{11}^*)^{-1}. \end{aligned}$$

Так как $g_{11}^* g_{11} = I_p + g_{21}^* g_{21} > I_p$, то оператор $g_{11} g_{11}^*$ (унитарно эквивалентный произведению $g_{11}^* g_{11}$) удовлетворяет неравенству $0 < A^* A < I_p$. Следовательно, $\|A\| < 1$.

Теперь мы не будем выписывать явно верхние индексы (1). Докажем, что норма оператора $B = g_{11}^{-1}g_{12}$ тоже меньше единицы. Заметим с этой целью, что группа $SU(p, q)$ инвариантна относительно перехода к комплексно сопряжённым матрицам (это сразу следует из приведённого выше описания алгебры Ли $\mathfrak{su}(p, q)$ группы Ли $SU(p, q)$). Следовательно, $I_p + g_{12}g_{12}^* = g_{11}^{-1}(g_{11}^*)^{-1}$. Если $B = g_{11}^{-1}g_{12}$, то $BB^* = g_{11}^{-1}g_{12}g_{12}^*(g_{11}^{-1})^{-1}$, и соотношение $\|B\| < 1$ доказывается аналогично предыдущему.

Таким образом, непрерывная ветвь выражения (17) совпадает с аргументом определителя оператора вида $I_p + C$ при $\|C\| < 1$. Приводя оператор C к жордановой нормальной форме, сразу видим, что модуль каждого диагонального элемента матрицы оператора C меньше единицы. Поэтому модуль вклада этого диагонального элемента в аргумент определителя меньше $\pi/2$, и модуль полного приращения аргумента определителя меньше $p\pi/2$, что завершает доказательство теоремы в случае 1).

Случай 2). $SO_0(2, q)$, где $q \in \mathbb{N}$, $q \neq 2$.

Для группы $SO_0(2, q)$ нетривиальный коцикл требуемого вида вычислен в [116, раздел 5, случай II]. Напомним его построение. Реализуем группу G в виде множества вещественных матриц

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix},$$

где g_{ij} — такие подматрицы порядков $d_i \times d_j$, $i = 1, 2$, $d_1 = 2$ и $d_2 = q$, что $g j g' = j$ и $\det g = 1$ (g' — матрица, транспонированная к g), причём $\det g_{11} > 0$ и

$$j = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}.$$

В этом описании подгруппа K реализуется как множество матриц $g \in G$, где $g_{12} = g_{21} = 0$, $g_{11} \in SO(2)$ и $g_{22} \in SO(q)$ ($SO(n)$, как всегда, означает группу ортогональных матриц порядка n с единичным определителем). Пространство $\mathfrak{p}$ можно отождествить с семейством матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & R \\ R' & 0 \end{pmatrix},$$

где R — любая вещественная матрица порядка $2 \times q$. Функцию v , определяющую коцикл по формуле (15), можно задать формулой

$$v(g) = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22} + ia_{21} - ia_{12}), \quad g = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in G, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}, \quad i, j = 1, 2. \quad (19)$$

Очевидно, что все свойства, требуемые в теореме 2.5.9, выполнены.

Докажем, что непрерывная функция

$$\begin{aligned} \{g^{(1)}, g^{(2)}\} \mapsto \operatorname{Arg} & \left((a_{11}^{(1)} + a_{22}^{(1)} + ia_{21}^{(1)} - ia_{12}^{(1)})(a_{11}^{(2)} + a_{22}^{(2)} + ia_{21}^{(2)} - ia_{12}^{(2)}) \times \right. \\ & \times \left((a_{11}^{(1)} a_{11}^{(2)} + a_{12}^{(1)} a_{21}^{(2)}) + (a_{12}^{(1)} a_{21}^{(2)} + a_{22}^{(1)} a_{22}^{(2)}) + \right. \\ & \left. \left. + i(a_{21}^{(1)} a_{11}^{(2)} + a_{22}^{(1)} a_{21}^{(2)}) - i(a_{11}^{(1)} a_{12}^{(2)} + a_{12}^{(1)} a_{22}^{(2)}) \right)^{-1} \right), \end{aligned} \quad (20)$$

где $\{g^{(1)}, g^{(2)}\} \in \operatorname{SO}_0(2, q) \times \operatorname{SO}_0(2, q)$, является ограниченной на множестве $\operatorname{SO}_0(2, q) \times \operatorname{SO}_0(2, q)$.

Воспользуемся полярным разложением (2×2) -матрицы g_{11} (напомним, что определитель матрицы g_{11} заведомо положителен). Если

$$g_{11} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \alpha & t \sin \alpha \\ -r \sin \alpha & t \cos \alpha \end{pmatrix},$$

то соотношение (20) принимает вид

$$v(g) = \frac{r+t}{2} \exp(i\alpha). \quad (21)$$

Отметим два следствия этой формулы. Во-первых, результат очевидным образом унитарно инвариантен. Во-вторых, отсюда следует, что вопрос о функции (19) можно заменить вопросом о том, верно ли, что есть непрерывная ветвь функции, заданной формулой (20), которая является ограниченной на всей группе G . Повторяя вычисления, проведённые в случае 1), можно убедиться, что произведение матриц

$$g^{(1)} = \begin{pmatrix} g_{11}^{(1)} & g_{12}^{(1)} \\ g_{21}^{(1)} & g_{22}^{(1)} \end{pmatrix}, \quad g^{(2)} = \begin{pmatrix} g_{11}^{(2)} & g_{12}^{(2)} \\ g_{21}^{(2)} & g_{22}^{(2)} \end{pmatrix}$$

приводит к матрице $(g^{(1)}g^{(2)})_{11}$, равной произведению трёх матриц:

$$(g^{(1)}g^{(2)})_{11} = g_{11}^{(1)} (I_2 + (g_{11}^{(1)})^{-1} g_{21}^{(1)} g_{21}^{(2)} (g_{11}^{(2)})^{-1}) g_{11}^{(2)}. \quad (22)$$

Как и в случае 1), можно доказать, что

$$\|(g_{11}^{(1)})^{-1} g_{21}^{(1)} g_{21}^{(2)} (g_{11}^{(2)})^{-1}\| < 1.$$

Так как модуль любого матричного элемента матрицы, норма которой меньше единицы, тоже меньше единицы, то вещественная часть функции в (19) положительна, и поэтому соответствующее значение функции v на матрице, стоящей в середине в правой части (22), не превосходит $\pi/2$. Остаётся выяснить, что происходит при умножении матриц.

Пусть

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} \cos \alpha^{(1)} & \sin \alpha^{(1)} \\ -\sin \alpha^{(1)} & \cos \alpha^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r^{(1)} & 0 \\ 0 & t^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^{(1)} \cos \alpha^{(1)} & t^{(1)} \sin \alpha^{(1)} \\ -r^{(1)} \sin \alpha^{(1)} & t^{(1)} \cos \alpha^{(1)} \end{pmatrix}$$

и (совершенно аналогично)

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} r^{(2)} \cos \alpha^{(2)} & t^{(2)} \sin \alpha^{(2)} \\ -r^{(2)} \sin \alpha^{(2)} & t^{(2)} \cos \alpha^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A^{(1)}A^{(2)} = \begin{pmatrix} \cos \alpha^{(1)} & \sin \alpha^{(1)} \\ -\sin \alpha^{(1)} & \cos \alpha^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r^{(1)} & 0 \\ 0 & t^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha^{(2)} & \sin \alpha^{(2)} \\ -\sin \alpha^{(2)} & \cos \alpha^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r^{(2)} & 0 \\ 0 & t^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Из формулы (21) следует, что

$$v(A^{(1)}A^{(2)}) = v(B) + i\alpha^{(1)},$$

где

$$B = \begin{pmatrix} r^{(1)} & 0 \\ 0 & t^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha^{(2)} & \sin \alpha^{(2)} \\ -\sin \alpha^{(2)} & \cos \alpha^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r^{(2)} & 0 \\ 0 & t^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Диагональные элементы матрицы

$$B \begin{pmatrix} \cos(\alpha^{(2)}) & \sin(-\alpha^{(2)}) \\ \sin(\alpha^{(2)}) & \cos(\alpha^{(2)}) \end{pmatrix}$$

равны суммам

$$r^{(1)}r^{(2)} \cos^2(\alpha^{(2)}) + r^{(1)}t^{(2)} \sin^2(\alpha^{(2)}), \quad t^{(1)}r^{(2)} \sin^2(\alpha^{(2)}) + t^{(1)}t^{(2)} \cos^2(\alpha^{(2)}),$$

откуда легко следует, что след матрицы

$$B \begin{pmatrix} \cos(\alpha^{(2)}) & \sin(-\alpha^{(2)}) \\ \sin(\alpha^{(2)}) & \cos(\alpha^{(2)}) \end{pmatrix}$$

положителен. Следовательно, разность между значением $v(A^{(1)}A^{(2)})$ и суммой $v(A^{(1)}) + v(A^{(2)})$ не превосходит $\pi/2$. Так как в формуле (22) мы должны применить это рассуждение дважды и модуль функции v на среднем сомножителе в (22) меньше $\pi/2$, то модуль любого значения рассматриваемого коцикла меньше $3\pi/2$.

Случай 3). $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{R}$.

В [116, раздел 5, случай III] найден и нетривиальный коцикл искомого вида на группе $G = \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$, но нам нужна лишь некоторая информация об этом коцикле, а не его явное описание. Эта информация позволит нам рассматривать нужный нетривиальный коцикл как ограничение коцикла на группе $\mathrm{SU}(n, n)$, описанного выше в случае 1), на подгруппу, изоморфную группе G . С этой целью мы рассмотрим группу G как семейство вещественных матриц

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix},$$

где g_{ij} — подматрицы порядков $n \times n$, удовлетворяющих условию $g j g' = j$ для

$$j = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Группу K можно тогда рассматривать как семейство матриц $g \in G$, удовлетворяющих условиям $g_{12} = -g_{21}$, $g_{11} = g_{22}$, $g_{11}g'_{11} + g_{12}g'_{12} = I_n$ и $g_{11}g'_{12} - g_{12}g'_{11} = 0$. Эта группа K изоморфна унитарной группе $U(n)$ при отображении

$$k \leftrightarrow k_{11} + ik_{12}, \quad k \in K, \quad k_{11} + ik_{12} \in U(n).$$

Пространство $\mathfrak{p}$ можно отождествить с множеством вещественных матриц вида

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12} & -X_{11} \end{pmatrix},$$

где вещественные матрицы X_{11} и X_{12} симметричны. Функцию

$$v(g) = \det \frac{1}{2}(g_{11} + g_{22} + ig_{12} - ig_{21}), \quad g \in G,$$

можно взять в качестве функции v , определяющей коцикл по обычной формуле (15), тогда свойства, требуемые в теореме 2.5.9, очевидно, выполнены.

Преобразование подобия, определяемое матрицей

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_p & iI_p \\ iI_p & I_p \end{pmatrix},$$

переводит группу $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ в рассмотренной выше форме на подгруппу G' группы $\mathrm{SU}(n, n)$ так, что K отображается на подгруппу матриц вида

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix}, \quad u \in U(n).$$

Это значит, что ограничение (нетривиального) коцикла Гишарде—Вигнера на группе $\mathrm{SU}(n, n)$ на подгруппу G' нетривиально и, следовательно, определяет нетривиальный коцикл Гишарде—Вигнера на G' . Это ограничение является ограниченным коциклом, так как коцикл Гишарде—Вигнера на $\mathrm{SU}(n, n)$ ограничен в случае 1).

Случай 4). $\mathrm{SO}^*(2n)$, $n > 1$.

Нетривиальный коцикл требуемого вида на группе $G = \mathrm{SO}^*(n)$ вычислен в [116, раздел 5, случай IV]. Но, как и в предыдущем случае, нам нужен не явный вид этого коцикла, а некоторая дополнительная информация, которая позволит рассматривать этот нетривиальный коцикл как ограничение коцикла на группе $\mathrm{SU}(n, n)$, описанного выше в случае 1), на подгруппу, изоморфную G . Напомним определение коцикла на G . Рассмотрим группу G как семейство комплексных матриц вида

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix},$$

где g_{ij} — подматрицы порядков $n \times n$, удовлетворяющих условию $g j g^* = j$ для той же матрицы

$$j = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix},$$

а также условию $g'g = I_{2n}$. В таком случае подгруппа K есть семейство матриц того же вида, что и в случае 3) (вещественных матриц, удовлетворяющих условиям $g_{12} = -g_{21}$, $g_{11} = g_{22}$, $g_{11}g'_{11} + g_{12}g'_{12} = I_n$ и $g_{11}g'_{12} - g_{12}g'_{11} = 0$), так что группа K снова изоморфна унитарной группе $U(n)$ при отображении

$$k \leftrightarrow k_{11} + ik_{12}, \quad k \in K, \quad k_{11} + ik_{12} \in U(n).$$

Пространство $\mathfrak{p}$ можно отождествить с семейством матриц вида

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ -X'_{12} & -X_{11} \end{pmatrix}.$$

В качестве функции v , определяющей коцикл по формуле (15), можно взять функцию

$$v(g) = \det \frac{1}{2}(g_{11} + g_{22} + ig_{12} - ig_{21}), \quad g \in G.$$

Тогда свойства, требуемые в теореме 2.5.9, очевидно, выполнены.

Как и в случае 3), преобразование подобия, определённое матрицей

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_p & iI_p \\ iI_p & I_p \end{pmatrix},$$

отображает группу $SO^*(n)$ в описанной выше форме на некоторую подгруппу G'' группы $SU(n, n)$, при этом преобразовании подобия группа K отображается на подгруппу матриц вида

$$\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^* \end{pmatrix},$$

где $u \in U(n)$. Это означает, что ограничение нетривиального коцикла Гишарде—Вигнера на группе $SU(n, n)$ на подгруппу G'' нетривиально и, следовательно, является нетривиальным коциклом Гишарде—Вигнера на G'' . Это ограничение является ограниченным коциклом, так как коцикл Гишарде—Вигнера на $SU(n, n)$ ограничен (см. случай 1)).

В статье [116] А. Гишарде и Д. Вигнера нет формул для коциклов на соответствующих вещественных формах групп E_6 и E_7 . Оказывается, однако, что подход, использованный в случаях 3) и 4) продуктивен и для этих исключительных групп Ли.

Случай 5). Вещественная форма G комплексной простой группы типа E_6 с размерностью максимальной компактной подгруппы $\dim \mathfrak{k} = 46$.

Согласно оригинальной статье Картана [76, раздел VII], рассматриваемая вещественная форма сохраняет кубик

$$\sum_{\substack{i,j=1,\dots,6, \\ i \neq j}} x_i y_j z_{i,j} - \sum_{s \in S_6} \text{sign}(s) z_{s(1),s(2)} z_{s(3),s(4)} z_{s(5),s(6)}$$

от 54 комплексных переменных

$$x_i, \quad y_j, \quad z_{i,j} \quad (i \neq j), \quad z_{i,j} = -z_{j,i}, \quad i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

и эрмитову форму

$$\sum_{i=1}^5 x_i \overline{x_i} - x_6 \overline{x_6} - \sum_{i=1}^5 y_i \overline{y_i} + y_6 \overline{y_6} + \sum_{\substack{i,j=1,\dots,5, \\ i \neq j}} z_{i,j} \overline{z_{i,j}} - \sum_{i=1}^5 z_{i,6} \overline{z_{i,6}}$$

от тех же переменных. Это условие инвариантности означает, что $G \subset \mathrm{SU}(16, 11)$. Очевидно, одномерная компактная группа Ли $\mathbb{T}$, элементы t_φ которой определяются формулами

$$x_k \mapsto \exp(i\varphi)x_k, \quad y_k \mapsto \exp(-i\varphi)y_k, \quad z_{j,k} \mapsto z_{j,k}, \quad j, k = 1, \dots, 6, \quad j \neq k,$$

сохраняет и кубическую форму, и эрмитову форму. Тем самым эта группа содержится в G . Определители унитарных компонент матриц, соответствующих элементам группы $\mathbb{T}$ в рассматриваемом представлении, нетривиальны, а именно $\det u_{11}(t_\varphi) = \exp(4i\varphi)$, $t_\varphi \in \mathbb{T}$. Как и в случаях 3) и 4), отсюда следует, что ограничение нетривиального коцикла Гишарде—Вигнера на группе $\mathrm{SU}(16, 11)$ на подгруппу G нетривиально, и тем самым оно определяет нетривиальный коцикл Гишарде—Вигнера на G . Это ограничение автоматически является ограниченным коциклом, так как коцикл Гишарде—Вигнера на $\mathrm{SU}(16, 11)$ ограничен (см. случай 1)).

Случай 6). Вещественная форма G комплексной простой группы типа E_7 с размерностью максимальной компактной подгруппы $\dim \mathfrak{k} = 79$.

Согласно [103, (4.1)] существует такое действие алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G в 56-мерном вещественном векторном пространстве, что одномерный центр компактной подалгебры Ли $\mathfrak{k}$ в $\mathfrak{g}$ действует в прямой сумме четырёх инвариантных подпространств размерностей 27, 27, 1 и 1 (соответственно) по формуле

$$\mathfrak{k} \ni \rho \mapsto \begin{pmatrix} i(\rho/3)I_{27} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i(\rho/3)I_{27} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\rho \end{pmatrix},$$

и следовательно, определители соответствующих унитарных компонент снова нетривиальны. Поэтому ограничение нетривиального коцикла Гишарде—Вигнера на группе $\mathrm{SU}(28, 28)$ на подгруппу G нетривиально. Таким образом, это ограничение определяет нетривиальный коцикл Гишарде—Вигнера на G , и он ограничен, поскольку уже коцикл Гишарде—Вигнера на $\mathrm{SU}(28, 28)$ ограничен (см. случай 1)).

Это завершает доказательство теоремы 2.5.10. $\square$

2.5.3. Структура конечномерных квазипредставлений групп

Конечномерные квазипредставления групп устроены следующим образом.

Теорема 2.5.13 [210]. Пусть G — группа, а T — квазипредставление группы G в конечномерном векторном пространстве E_T . Пусть E_T^* — пространство,

сопряжённое к E_T . Пусть L — множество векторов $\xi \in E_T$, орбита которых $\{T(g)\xi \mid g \in G\}$ является ограниченной в E , пусть M — множество функционалов $f \in E_T^*$, орбита которых $\{T(g)^*f \mid g \in G\}$ является ограниченной в E_T^* , в этом случае L и аннулятор $M^\perp$ множества M — T -инвариантные векторные подпространства в E_T . Рассмотрим возрастающий набор подпространств $\{0\}$, $L \cap M^\perp$, $M^\perp$, $L + M^\perp$, $E = E_T$ и запишем матрицу $t(g)$ оператора $T(g)$, $g \in G$, в блочной форме, отвечающей разложению пространства E в прямую сумму подпространств $L \cap M^\perp$, $M^\perp \setminus (L \cap M^\perp)$, $L \setminus (L \cap M^\perp)$ и $E \setminus (L + M^\perp)$ (символ $\setminus$ означает взятие дополнительного подпространства):

$$t(g) = \begin{pmatrix} \alpha(g) & \varphi(g) & \sigma(g) & \tau(g) \\ 0 & \beta(g) & 0 & \rho(g) \\ 0 & 0 & \gamma(g) & \chi(g) \\ 0 & 0 & 0 & \delta(g) \end{pmatrix}, \quad g \in G. \quad (23)$$

(Здесь $t_{23}(g) = 0$, так как L инвариантно относительно T .) Тогда справедливы следующие утверждения:

- 1) отображения α , δ , γ , σ и χ являются ограниченными;
- 2) матричнозначные отображения t_1 и t_2 , определяемые равенствами

$$t_1(g) = \begin{pmatrix} \alpha(g) & \varphi(g) \\ 0 & \beta(g) \end{pmatrix}, \quad t_2(g) = \begin{pmatrix} \beta(g) & \rho(g) \\ 0 & \delta(g) \end{pmatrix}$$

являются представлениями группы G ;

- 3) отображение τ — квазикоцикл относительно представлений t_1 и t_2 , т. е. отображение

$$(g, h) \mapsto \tau(gh) - \alpha(g)\tau(h) - \varphi(g)\rho(h) - \tau(g)\delta(h), \quad g, h \in G,$$

является ограниченным.

Доказательство. Так как семейство операторов

$$\{T(g_1)T(g_2) - T(g_1g_2) \mid g_1, g_2 \in G\}$$

является ограниченным, то из ограниченности множества $\{T(g)\xi \mid g \in G\}$ для некоторого вектора $\xi \in E_T$ следует, что множество $\{T(g)T(g_0)\xi \mid g \in G\}$ является ограниченным для любого $g_0 \in G$. Следовательно, множество L является T -инвариантным. Кроме того, множество L линейно, поскольку суммы и кратные ограниченных множеств являются ограниченными. Таким образом, L — T -инвариантное векторное подпространство в E . Аналогично доказывается, что семейство M — T^* -инвариантное векторное подпространство в E^* , откуда немедленно получаем, что его аннулятор $M^\perp \subset E$ — T -инвариантное векторное подпространство в E , так что разложение вида (23) имеет смысл.

Из определения подпространств L и M немедленно следует, что отображения $g \rightarrow T(g)|_L$ и $g \rightarrow T(g)^*|_M$, $g \in G$, ограниченные. Отсюда следует, что отображения α , δ , γ , σ и χ , перечисленные в утверждении 1), действительно ограниченные.

По определению L соотношение $\xi \notin L$ выполняется тогда и только тогда, когда множество $\{T(g)\xi \mid g \in G\}$ не является ограниченным. В частности, при $\xi \in M^\perp \setminus L$, $\xi \neq 0$ орбита вектора ξ не является ограниченным множеством. Следовательно, либо множество $\{\varphi(g)\xi \mid g \in G\}$, либо множество $\{\beta(g)\xi \mid g \in G\}$ не является ограниченным. С другой стороны, множества операторов

$$\{\varphi(gh) - \alpha(g)\varphi(h) - \varphi(g)\beta(h) \mid g, h \in G\}, \quad \{\alpha(g) \mid g \in G\}$$

ограниченные, и из ограниченности множества разностей вида

$$\{\alpha(g)\varphi(hk) + \varphi(g)\beta(hk) - \alpha(gh)\varphi(k) - \varphi(gh)\beta(k) \mid g, h, k \in G\}$$

следует ограниченность множества

$$\begin{aligned} & \{\alpha(g)\alpha(h)\varphi(k) + \alpha(g)\varphi(h)\beta(k) + \varphi(g)\beta(hk) - \alpha(gh)\varphi(k) - \varphi(gh)\beta(k)\} = \\ & = \{(\alpha(g)\alpha(h) - \alpha(gh))\varphi(k) + (\alpha(g)\varphi(h) + \varphi(g)\beta(h) - \varphi(gh))\beta(k) + \\ & + \varphi(g)(\beta(hk) - \beta(h)\beta(k)) \mid g, h, k \in G\}. \end{aligned} \quad (24)$$

Отображения

$$g \mapsto (\alpha(g)\alpha(h) - \alpha(gh))\varphi(k), \quad g \mapsto (\alpha(g)\varphi(h) + \varphi(g)\beta(h) - \varphi(gh))\beta(k), \quad g \in G,$$

являются ограниченными функциями от g при любых фиксированных h и k в G . Поэтому и слагаемое $\varphi(g)(\beta(hk) - \beta(h)\beta(k))$ в правой части (24) является ограниченной функцией от g при фиксированных h и k в G . Следовательно, функция $\varphi(g)$ является ограниченной на любом векторе, принадлежащем образу оператора $\beta(hk) - \beta(h)\beta(k)$. С другой стороны, на таком векторе функция $\beta(g)$ тоже является ограниченной, поскольку операторная функция

$$\begin{aligned} g \mapsto \beta(g)(\beta(hk) - \beta(h)\beta(k)) = \\ = (\beta(g)\beta(hk) - \beta(hgk)) + (\beta(ghk) - \beta(gh)\beta(k)) + (\beta(gh) - \beta(g)\beta(h))\beta(k), \quad g \in G, \end{aligned}$$

является ограниченной при любых фиксированных h и k в G . Из (φ, β) -условия следует тогда, что образ оператора $\beta(hk) - \beta(h)\beta(k)$ содержит только нулевой вектор в E_T при любых фиксированных h и k в G .

Таким образом, β — представление группы G . Отсюда и из (24) следует ограниченность множества

$$\begin{aligned} & \{\alpha(g)\alpha(h)\varphi(k) + \alpha(g)\varphi(h)\beta(k) + \varphi(g)\beta(hk) - \alpha(gh)\varphi(k) - \varphi(gh)\beta(k)\} = \\ & = \{(\alpha(g)\alpha(h) - \alpha(gh))\varphi(k) + \\ & + (\alpha(g)\varphi(h) + \varphi(g)\beta(h) - \varphi(gh))\beta(k) \mid g, h, k \in G\}. \end{aligned} \quad (25)$$

Обозначим оператор $-\alpha(g)\alpha(h) + \alpha(gh)$ через $\Delta_\alpha(g, h)$, а оператор $-\alpha(g)\varphi(h) - \varphi(g)\beta(h) + \varphi(gh)$ через $\Delta_\varphi(g, h)$. Из (25) следует, что семейство

$$\{\Delta_\alpha(g, h)\varphi(k) + \Delta_\varphi(g, h)\beta(k) \mid g, h, k \in G\}$$

является ограниченным.

Рассмотрим семейство N пар операторов A, B (где A действует в $L \cap M^\perp$, а B отображает $M^\perp \setminus L$ в $L \cap M^\perp$), для которых семейство $\{A\varphi(k) + B\beta(k) \mid k \in G\}$

является ограниченным. Как доказано выше, любая пара $(A, B) = (\Delta_\alpha, \Delta_\varphi)$ принадлежит семейству N . Ясно, что если $(A, B) \in N$, то для любого линейного оператора C в пространстве $L \cap M^\perp$ пара (CA, CB) тоже принадлежит N ; кроме того, очевидно, что N — линейное подпространство в пространстве пар операторов с указанным выше действием. Рассмотрим пару $(\Delta_\alpha, \Delta_\varphi) \in N$. Пусть R — линейный оператор в E_T , обращающийся в нуль на ядре оператора Δ_α и определяющий такое биективное отображение образа оператора Δ_α на векторное подпространство, дополнительное к ядру этого оператора, что $R\Delta_\alpha$ — проектор на линейное подпространство, дополнительное к $\text{Ker}(\Delta_\alpha)$ (такой оператор нетрудно построить с помощью некоторого скалярного произведения в E_T как подходящий многочлен от оператора $(\Delta_\alpha)^*\Delta_\alpha$). Тогда, очевидно, $\Delta_\alpha = \Delta_\alpha R\Delta_\alpha$. В частности, $\Delta_\alpha R$ тоже проектор (на образ оператора Δ_α).

Оператор R удовлетворяет соотношению $\Delta_\alpha R\Delta_\varphi = \Delta_\varphi$. Действительно, пары $(\Delta_\alpha, \Delta_\varphi)$ и $(\Delta_\alpha R\Delta_\alpha, \Delta_\alpha R\Delta_\varphi)$ одновременно принадлежат N . Следовательно, их разность $(0, \Delta_\varphi - \Delta_\alpha R\Delta_\varphi)$ также принадлежит N , и поэтому множество элементов вида $(\Delta_\varphi - \Delta_\alpha R\Delta_\varphi)\beta(k)$, $k \in G$, является ограниченным. Остаётся доказать, что из этого условия следует соотношение $\Delta_\varphi - \Delta_\alpha R\Delta_\varphi = 0$. Заметим с этой целью, что отображение

$$(g, h) \mapsto \tau(gh) - \alpha(g)\tau(h) - \varphi(g)\rho(h) - \tau(g)\delta(h), \quad g, h \in G,$$

ограниченное (так как отображения σ и χ ограниченные). Следовательно, множества

$$\begin{aligned} &\{\tau(ghk) - \alpha(g)\tau(hk) - \varphi(g)\rho(hk) - \tau(g)\delta(hk), \quad g, h, k \in G\}, \\ &\{\tau(ghk) - \alpha(gh)\tau(k) - \varphi(gh)\rho(k) - \tau(gh)\delta(k), \quad g, h, k \in G\} \end{aligned}$$

ограниченные, и поэтому множество

$$\begin{aligned} &\{(\alpha(gh) - \alpha(g)\alpha(h))\tau(k) + (\varphi(gh) - \alpha(g)\varphi(h) - \varphi(g)\beta(h))\rho(k) + \\ &+ \tau(g)(\delta(hk) - \delta(h)\delta(k)) + \varphi(g)(\rho(hk) - \beta(h)\rho(k) - \rho(h)\delta(k)), \quad g, h, k \in G\} \end{aligned}$$

тоже ограниченное. Из ограниченности подмножества этого множества, получаемого при переменном $g \in G$ при фиксированных $h, k \in G$, следует, что и множество

$$\{\tau(g)\Delta_\delta(h, k) + \varphi(g)\Delta_\rho(h, k) \mid g \in G\}$$

тоже ограниченное при фиксированных $h, k \in G$, где положено $\Delta_\delta(h, k) = \delta(hk) - \delta(h)\delta(k)$ и $\Delta_\rho(h, k) = \rho(hk) - \beta(h)\rho(k) - \rho(h)\delta(k)$ при $h, k \in G$. Точно так же из условия ограниченности при переменном $k \in G$ при фиксированных $h, g \in G$ следует, что множество

$$\{\Delta_\alpha(g, h)\tau(k) + \Delta_\varphi(g, h)\rho(k) \mid k \in G\}$$

ограниченное при фиксированных $h, g \in G$. Как и выше, из этого условия следует, что множество

$$\{(\Delta_\varphi(g, h) - \Delta_\alpha(g, h)R\Delta_\varphi(g, h))\rho(k) \mid k \in G\}$$

ограниченное для любых фиксированных $g, h \in G$. С другой стороны, из определения подпространства M следует, что для любого функционала f , ограничение которого на подпространство $M^\perp \setminus L$, дополняющее $M^\perp \cap L$ в $M^\perp$, отлично от нуля, хотя бы одно из множеств $\{\beta^*(g)f \mid g \in G\}$ и $\{\rho^*(g)f \mid g \in G\}$ неограниченное.

Так как множества

$$\{\beta^*(g)(\Delta_\varphi(h, k) - \Delta_\alpha(h, k)R\Delta_\varphi(h, k))^* \mid g \in G\}$$

и

$$\{\rho^*(g)(\Delta_\varphi(h, k) - \Delta_\alpha(h, k)R\Delta_\varphi(h, k))^* \mid g \in G\}$$

одновременно являются ограниченными для любых $h, k \in G$, то образ оператора $(\Delta_\varphi(h, k) - \Delta_\alpha(h, k)R\Delta_\varphi(h, k))^*$ состоит только из нулевого функционала для любых $h, k \in G$. Таким образом, $\Delta_\varphi(h, k) = \Delta_\alpha(h, k)R\Delta_\varphi(h, k)$ для любых $h, k \in G$. В частности, образ оператора $\Delta_\varphi(h, k)$ содержится в образе оператора $\Delta_\alpha(h, k)$ для любых $h, k \in G$.

Положим $Q = R\Delta_\varphi(h, k)$. Введём операторную матрицу

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -Q & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где каждый символ 1 означает единичный оператор в соответствующем пространстве. В базисе, получаемом из исходного базиса с помощью матрицы перехода S , матрица $t'(g)$ оператора $T(g)$, $g \in G$, имеет вид $t'(g) = S^{-1}T(g)S$, где

$$t'(g) = \begin{pmatrix} \alpha(g) & \varphi(g) + Q\beta(g) - \alpha(g)Q & \sigma(g) & \tau(g) + Q\rho(g) \\ 0 & \beta(g) & 0 & \rho(g) \\ 0 & 0 & \gamma(g) & \chi(g) \\ 0 & 0 & 0 & \delta(g) \end{pmatrix}, \quad g \in G.$$

Из этой формулы, из ограниченности отображения α и из предыдущих замечаний следует, что для функции $\varphi_1(g) = \varphi(g) + Q\beta(g) - \alpha(g)Q$, $g \in G$, множество $\{\Delta_\alpha\varphi_1(g) \mid g \in G\}$ ограниченное.

Пусть $\tau_1(g) = \tau(g) + Q\rho(g)$, $g \in G$. Напомним, что функция

$$k \mapsto \Delta_\alpha(g, h)\tau(k) + \Delta_\varphi(g, h)\rho(k), \quad k \in G,$$

является ограниченной для любых $g, h \in G$. Как и выше, отсюда следует, что функция $\Delta_\alpha(h, k)\tau_1(g)$, $g \in G$, является ограниченной для любых $h, k \in G$. С другой стороны, аналогично предыдущему, из определения подпространства M следует, что для любого функционала f , ограничение которого на подпространство $M^\perp \cap L$ отлично от нуля, хотя бы одно из множеств $\{\varphi_1^*(g)f \mid g \in G\}$ и $\{\tau_1^*(g)f \mid g \in G\}$ неограниченное. Так как функция

$$g \mapsto \tau(g)\Delta_\delta(h, k) + \varphi(g)\Delta_\rho(h, k), \quad g \in G,$$

является ограниченной для любых $h, k \in G$, то, с одной стороны, τ_1 и φ_1 должны удовлетворять тем же условиям, что и операторные функции τ и φ (и, в частности, хотя бы одно из множеств $\{\varphi_1^*(g)f \mid g \in G\}$ и $\{\tau_1^*(g)f \mid g \in G\}$ должно быть неограниченным для любого функционала f с ненулевым ограничением на подпространство $M^\perp \cap L$). С другой стороны, из одновременной ограниченности функций $g \mapsto \Delta_\alpha \varphi_1(g)$ и $g \mapsto \Delta_\alpha \tau_1(g)$, $g \in G$, следует, что для всех f из образа оператора $(\Delta_\alpha(h, k))^*$ обе орбиты, $\{\varphi_1^*(g)f \mid g \in G\}$ и $\{\tau_1^*(g)f \mid g \in G\}$, одновременно являются ограниченными. Следовательно, $\Delta_\alpha(h, k) = 0$ для любых $h, k \in G$ и α — обычное представление.

Как мы видели выше, отсюда следует, что образ отображения $\Delta_\varphi(h, k)$ (содержащийся в образе оператора $\Delta_\alpha(h, k)$) также тривиален. Следовательно, $\Delta_\varphi(h, k) = 0$, что завершает проверку того факта, что t_1 — обычное представление группы G . Применяя аналогичное рассуждение к сопряжённому представлению, мы видим, что и отображение t_2 также является обычным представлением группы G . Это завершает доказательство теоремы. $\square$

Таким образом, изучение конечномерных квазипредставлений групп в основном сводится к изучению обычных представлений, квазипредставлений с ограниченными орбитами и квазикоциклов. Результаты, полученные в [27, 50, 154], являются частными случаями теоремы 2.5.13. Некоторые результаты, родственные теореме 2.5.13, получены (для одномерных отображений) в [205].

Приведём важное для дальнейшего следствие.

Теорема 2.5.14 (см. [33, теорема 2.2]). Пусть G — аменабельная группа.

1. Любое конечномерное ε -квазипредставление группы G есть ограниченное возмущение обычного представления.
2. Радиус шара, содержащего все операторы этого ограниченного возмущения, определяется числом ε и нормами ограниченных компонент квазипредставления, упомянутыми в теореме 2.5.13, и стремится к нулю при равномерно ограниченных нормах ограниченных компонент и при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Доказательство. Из теоремы 2.5.13 непосредственно следует, что отображения t_3 и t_4 , определённые формулами

$$t_3(g) = \begin{pmatrix} \alpha(g) & \sigma(g) \\ 0 & \gamma(g) \end{pmatrix}, \quad t_4(g) = \begin{pmatrix} \gamma(g) & \chi(g) \\ 0 & \delta(g) \end{pmatrix}, \quad g \in G,$$

ограниченные и являются квазипредставлениями аменабельной группы G . Поэтому достаточно проверить оба утверждения теоремы для квазикоцикла τ . Действительно, если дефект ограниченного квазипредставления велик, то можно рассматривать это квазипредставление как ограниченное возмущение, скажем, единичного представления, а при малом дефекте оба утверждения теоремы 2.5.14 для отображений t_3 и t_4 следуют из теорем 2.3.3 и 2.3.5. Так как компоненты σ и χ ограниченные, при этой проверке мы вправе считать их нулевыми (поскольку замена их нулями есть ограниченное возмущение исходного отображения). Так как компонента γ ограниченная, мы вправе считать её представлением (по теореме 2.3.3; впрочем, и замена отображения γ на отображение

в единичный оператор в подпространстве $L \setminus (L \cap M^\perp)$ есть ограниченное возмущение исходного отображения t). Если подпространство $L \cap M^\perp$ нульмерно, то из перечисленных выше свойств отображения t непосредственно следует, что отображение t есть ограниченное возмущение обычного представления. Фактически, достаточно установить, что τ есть ограниченное возмущение соответствующего $\{t_1, t_2\}$ -коцикла в предположении, что исходное отображение имеет блочный вид:

$$t(g) = \begin{pmatrix} \alpha(g) & \phi(g) & 0 & \tau(g) \\ 0 & \beta(g) & 0 & \rho(g) \\ 0 & 0 & \gamma(g) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta(g) \end{pmatrix}, \quad g \in G.$$

Пусть I — некоторое правоинвариантное среднее на G . Применим I по аргументу $g \in G$ к правой части (24), умноженной слева на ограниченную величину $\alpha(g)^{-1} = \alpha(g^{-1})$, $g \in G$. Итак, если мы введём величину ψ с помощью формулы

$$\psi(h) = I_g \left((\alpha(g)^{-1}) (\tau(gh) - \phi(g)\rho(h) - \tau(g)\delta(h)) \right), \quad h \in G \quad (26)$$

(напомним, что это среднее имеет смысл, поскольку функция под знаком среднего в правой части (26) является равномерно ограниченной на группе G), то разность $\tau(g) - \psi(g)$, $g \in G$, будет ограниченной величиной, которую можно оценить с помощью величины ε и нормы отображения α . Тогда остаётся проверить, что ψ — коцикл относительно представлений t_1 и t_2 , т. е. что

$$\psi(gh) = \alpha(g)\psi(h) + \phi(g)\rho(h) + \tau(g)\delta(h), \quad g, h \in G. \quad (27)$$

Чтобы проверить (27), найдём левую часть:

$$\psi(gh) = I_k \left((\alpha(k)^{-1}) (\tau(kgh) - \phi(k)\rho(gh) - \tau(k)\delta(gh)) \right), \quad g, h \in G, \quad (28)$$

и воспользуемся тем, что ввиду правой инвариантности I справедлива формула

$$\psi(h) = I_k \left((\alpha(kg)^{-1}) (\tau(kgh) - \phi(kg)\rho(h) - \tau(kg)\delta(h)) \right), \quad g, h \in G. \quad (29)$$

Вычитая (29) из (28), умноженного слева на $\alpha(g)^{-1}$, и учитывая то, что α — (обычное) представление, мы находим

$$\begin{aligned} \alpha(g)^{-1}\psi(gh) - \psi(h) &= I_k \left((\alpha(kg)^{-1}) \times \right. \\ &\quad \left. \times (\phi(kg)\rho(h) + \tau(kg)\delta(h) - \phi(k)\rho(gh) - \tau(k)\delta(gh)) \right), \quad g, h \in G. \end{aligned} \quad (30)$$

Замечая, что t_1 и t_2 — представления группы G , и подставляя в (30) соответствующие выражения для функций от gh , получаем равенство

$$\begin{aligned} \alpha(g)^{-1}\psi(gh) - \psi(h) &= I_k \left((\alpha(kg)^{-1}) \left((\phi(k)\beta(g) + \alpha(k)\phi(g))\rho(h) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \tau(kg)\delta(h) - \phi(k)(\rho(g)\delta(h) + \beta(g)\rho(h)) - \tau(k)\delta(g)\delta(h) \right) \right), \quad g, h \in G. \end{aligned}$$

Перегруппируем слагаемые в правой части (30), выделяя в качестве сомножителя под знаком среднего группу слагаемых $\tau(kg) - \phi(k)\rho(g) - \tau(k)\delta(g)$ для $g, h \in G$:

$$\begin{aligned}\alpha(g)^{-1}\psi(gh) - \psi(h) &= I_k(\alpha(kg)^{-1}\phi(k)\beta(g)\rho(h) + \alpha(g^{-1})\phi(g)\rho(h) + \\ &+ \alpha(kg)^{-1}(\tau(kg) - \phi(k)\rho(g) - \tau(k)\delta(g))\delta(h) - \alpha(kg)^{-1}\phi(k)\beta(g)\rho(h)) = \\ &= I_k(\alpha(g^{-1})\phi(g)\rho(h) + \alpha(kg)^{-1}(\tau(kg) - \phi(k)\rho(g) - \tau(k)\delta(g))\delta(h)) = \\ &= \alpha(g^{-1})\phi(g)\rho(h) + I_k(\alpha(kg)^{-1}(\tau(kg) - \phi(k)\rho(g) - \tau(k)\delta(g))\delta(h)).\end{aligned}\quad (31)$$

Первое слагаемое в правой части (31) совпадает с первым слагаемым в (27) с точностью до введённого выше множителя $\alpha(g)^{-1}$. При вычислении второго множителя воспользуемся тем, что α — представление, и перестановочностью операции взятия операторного инвариантного среднего с умножением слева и справа на линейные операторы, не зависящие от параметра $k \in G$, по которому берётся среднее:

$$\begin{aligned}I_k(\alpha(kg)^{-1}(\tau(kg) - \phi(k)\rho(g) - \tau(k)\delta(g))\delta(h)) &= \\ &= I_k(\alpha(g)^{-1}\alpha(k)^{-1}(\tau(kg) - \phi(k)\rho(g) - \tau(k)\delta(g))\delta(h)) = \\ &= \alpha(g)^{-1}I_k(\alpha(k)^{-1}(\tau(kg) - \phi(k)\rho(g) - \tau(k)\delta(g)))\delta(h) = \\ &= \alpha(g)^{-1}\psi(g)\delta(h), \quad g, h \in G,\end{aligned}$$

где использовано определение отображения ψ с помощью (26). Эта величина совпадает со вторым слагаемым в (27) с точностью до введённого выше множителя $\alpha(g)^{-1}$, что завершает доказательство формулы (27) и тем самым доказывает теорему 2.5.14. $\square$

Непосредственным следствием теоремы 2.5.13 о квазипредставлениях с ограниченными орбитами является следующая теорема.

Теорема 2.5.15. *Если конечномерное неприводимое квазипредставление некоторой группы является неограниченным, то оно является обычным представлением этой группы.*

Следующий пример квазикоцикла представляет особый интерес.

Пример 2.5.16. Пусть G — группа $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, τ — псевдохарактер Радемахера на G (см. пункт 3 примера 2.5.6), и пусть

$$g \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \tau(g) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g \in G, \quad -$$

отображение группы G в группу матриц второго порядка. В терминах предыдущей теоремы имеем $\alpha = 1$ и $\delta = 1$, а подпространство $L = M^\perp$ натянуто на первый вектор базиса.

Этот пример показывает, что отображение τ в условиях теоремы не обязано быть ни коциклом, ни ограниченным возмущением коцикла.

Ряд других следствий теоремы 2.5.13 указан в разделе 3.3.5.

3. Конечномерные квазипредставления групп Ли

В этом разделе излагается один из основных результатов статьи, а именно описывается структура конечномерных локально ограниченных квазипредставлений произвольной связной группы Ли (это утверждение является и своего рода классификацией рассматриваемых квазипредставлений). Одним из основных инструментов этого описания является «теорема тривиальности» для конечномерных унитарных квазипредставлений с достаточно малым дефектом для произвольной компактной группы Ли, которую можно также рассматривать как утверждение об устойчивости для теоремы ван дер Вардена о непрерывности конечномерных локально ограниченных представлений компактных групп Ли. «Теорема тривиальности» доказывается в разделе 3.2, где изучается также структура квазигомоморфизмов полупростых компактных групп Ли, а подготовительные сведения (свойства коммутаторов в компактных группах Ли и банаховых алгебрах) приводятся в разделе 3.1. Основные результаты собраны в разделе 3.3. Здесь устанавливаются специальные свойства одномерных псевдопредставлений и вещественных псевдохарактеров на группах Ли, включая автоматическую непрерывность этих отображений на связных полупростых группах Ли и другие свойства автоматической непрерывности конечномерных квазипредставлений связных групп Ли, и даётся полное описание всех конечномерных локально ограниченных квазипредставлений связных полупростых групп Ли и связных групп Ли общего вида. Одним из наиболее запоминающихся утверждений этого раздела является утверждение о возможности аппроксимировать любое локально ограниченное конечномерное квазипредставление связной группы Ли некоторым чистым псевдопредставлением этой группы (и ошибка аппроксимации, грубо говоря, мала при малом дефекте). Здесь также высказан ряд замечаний и описаны некоторые нерешённые задачи.

Классификационные проблемы (описание структуры отображений того или иного класса) можно надеяться решить и в некоторых классах отображений, строго содержащих класс квазипредставлений. Одна из более широких постановок задачи возникла в работах Конна и Хигсона [80, 81] и Громова [111] (см. также [12, 79, 110, 174]). В них речь идёт об отображениях, удовлетворяющих условию ограниченности или малости не на всей группе, а на некотором компакте (в частности, на множестве образующих конечно порождённой дискретной группы). Эта точка зрения оказалась чрезвычайно продуктивной в К-теории, в частности в различных вариантах К-теории для C^* -алгебр [8—15, 22, 56, 83—85, 94, 95, 107, 108, 115, 119, 120, 152, 162, 204—207, 236, 237, 244]. Недавно Конном и Хигсоном [81] было введено понятие асимптотического или аппроксимативного представления, которое затем было развито и эффективно использовано в указанных выше работах В. М. Мануйлова, А. С. Мищенко и К. Томсена по фредгольмовым представлениям дискретных групп и теории расширений C^* -алгебр. А именно, аппроксимативный гомоморфизм — это семейство почти представлений в смысле Громова—Конна со стремящимся к нулю отклонением нормы разности между образом произведения и произведением

образов на всех элементах некоторого семейства, порождающего рассматриваемую группу [8, 10, 12—15, 56, 166—171, 174, 244]. Некоторые приложения понятия аппроксимативного гомоморфизма к физике частиц указаны в [152]. Мы приводим (к сожалению, слишком краткий) обзор последних результатов теории аппроксимативных гомоморфизмов C^* -алгебр в дополнении 4.1.

Таким образом, помимо класса всех отображений группы в алгебры линейных операторов или в топологические группы, есть содержательные классы почти представлений, существенно более широкие, чем класс квазипредставлений, и многие из этих классов представляют больший интерес для геометрии. Тем самым здесь сделан лишь первый шаг к уяснению истинного богатства и роли класса отображений, «выглядающих как представления».

3.1. Коммутаторы в компактных группах Ли

В этом разделе напоминаются свойства коммутаторов в банаховых алгебрах и компактных группах Ли.

3.1.1. Определения

Определение 3.1.1 (см. [121]). Пусть A — банахова алгебра с единичным элементом e , A^{-1} — множество обратимых элементов A , $B_1(e)$ — открытый шар единичного радиуса с центром в e , $\exp: A \rightarrow A^{-1}$ — отображение, определённое формулой

$$\exp x = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{-1} x^n, \quad x \in A,$$

$\ln: B_1(e) \rightarrow A$ — отображение, определённое формулой

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-1} x^n, \quad x \in B_1(e),$$

и D — множество всех пар $(x, y) \in A \times A$, удовлетворяющих условию $\exp x \exp y \in B_1(e)$. Отображение $D \rightarrow A$, определяемое формулой

$$(x, y) \mapsto x * y = \ln(\exp x \exp y), \quad (x, y) \in D,$$

называется *СН-умножением* (или *умножением Бейкера—Кемпбелла—Хаусдорфа—Дынкина*) на A .

Определение 3.1.2.

1. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$. Обозначим через $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ линейную оболочку элементов $[a, b]$, $a \in \mathfrak{a}$, $b \in \mathfrak{b}$. Пусть $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ — так называемый коммутаторный идеал в $\mathfrak{g}$.
2. Пусть G — группа, $A, B \subset G$, $a \in A$, $b \in B$. Положим $\text{comm}(a, b) = aba^{-1}b^{-1}$. Обозначим через $\text{comm}(A, B)$ подгруппу, порождённую всеми элементами вида $\text{comm}(a, b)$, $a \in A$, $b \in B$, и положим $G' = \text{comm}(G, G)$.

Отметим, что построение $(A, B) \rightarrow \text{comm}(A, B)$ не содержит операции замыкания.

3.1.2. Лемма о коммутаторах в банаховых алгебрах

Лемма 3.1.3 ([121, предложение 5.59]). Пусть A — банахова алгебра, $\mathfrak{g}$ — замкнутая конечномерная подалгебра Ли в A , а B — такой открытый шар с центром в 0, что произведение $B * B * B * B$ определено и содержится в шаре радиуса π^* . Пусть размерность коммутаторной алгебры $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ равна n . Положим $\text{comm}_*(x, y) = x * y * (-x) * (-y)$, $x, y \in \mathfrak{g} \cap B$. Тогда

- 1) $\text{comm}_*(x, y) \in \overline{[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]}$ для любых $x, y \in \mathfrak{g} \cap B$;
- 2) существуют такие элементы $X_j, Y_j \in \mathfrak{g}$, $j = 1, \dots, n = \dim \mathfrak{g}'$, что для любого набора $(r_1, \dots, r_n)$ вещественных чисел, удовлетворяющих условию $0 < |r_j| < 1$ для всех $j = 1, \dots, n$, существует такое $\varepsilon > 0$, что функция $\varphi: (-\varepsilon, \varepsilon)^n \rightarrow B \cap \mathfrak{g}$, определяемая формулой

$$\begin{aligned} \varphi(s_1, \dots, s_n) &= (r_1 \cdot X_1 * s_1 \cdot Y_1 * (-r_1 \cdot X_1) * (-s_1 \cdot Y_1)) * \dots * \\ &\quad * (r_n \cdot X_n * s_n \cdot Y_n * (-r_n \cdot X_n) * (-s_n \cdot Y_n)) = \\ &= \text{comm}(r_1 \cdot X_1, s_1 \cdot Y_1) * \dots * \text{comm}(r_n \cdot X_n, s_n \cdot Y_n), \end{aligned}$$

является гомеоморфизмом на некоторую окрестность нуля в $\mathfrak{g}'$;

- 3) любой элемент некоторой окрестности нуля в $\mathfrak{g}'$ является $*$ -произведением не более чем n экземпляров $*$ -коммутаторов. В частности, существует такой открытый шар B' с центром в нуле в $\mathfrak{g}'$, что $B' \cap \mathfrak{g}'$ — наименьшая локальная подгруппа относительно B' , содержащая все $*$ -коммутаторы $\text{comm}_*(X, Y) \in B'$, $X, Y \in B'$.

3.2. Теорема о квазигомоморфизмах полупростых компактных групп Ли

3.2.1. Квазипредставления полупростых компактных групп Ли

Теорема 3.2.1. Пусть G — связная полупростая компактная группа Ли. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого конечномерного унитарного δ -квазипредставления группы G существует непрерывное представление S (в том же векторном пространстве), ε -близкое к T .

Доказательство. Пусть n — размерность алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G . Пусть ε и δ — положительные числа. Условия малости на величины ε и δ будут постепенно наложены в ходе доказательства.

Пусть E — конечномерное гильбертово пространство представления, U — окрестность единицы в группе $U(E)$ унитарных операторов в E . Ввиду непрерывности операции умножения существует такая окрестность единицы W

*Как известно, достаточно предположить, что $\|x\| < (1/2) \ln(2 - \sqrt{1/2})$ для любого $x \in B$.

в $U(E)$, что

$$\text{comm}(\{h_1\} \times U(E)) \dots \text{comm}(\{h_n\} \times U(E)) \subseteq U \quad (32)$$

для любых $h_1, \dots, h_n \in W$ (см. [121, лемму 5.63]). При этом, согласно утверждению леммы 3.1.3, существуют такие векторы $X_j \in \mathfrak{g}$, $j = 1, \dots, n$, что для любого набора $r_1, \dots, r_n$ ненулевых вещественных чисел r_j , $0 < |r_j| < 1$, множество

$$\text{comm}(\{\exp(r_1 \cdot X_1)\} \times G) \dots \text{comm}(\{\exp(r_n \cdot X_n)\} \times G)$$

содержит некоторую окрестность V единицы в группе G . Очевидно, что это свойство сохранится при любом достаточно малом шевелении векторов X_j , $j = 1, \dots, n$, а сколь угодно малым шевелением этих векторов можно добиться того, чтобы семейство этих векторов было линейно независимым.

Рассмотрим замкнутую однопараметрическую подгруппу G_j в G , порождённую элементом X_j алгебры Ли группы Ли $\mathfrak{g}$. Подгруппа G_j компактна и коммутативна, и поэтому аменабельна. Ограничение T_j отображения T на подгруппу G_j является квазипредставлением подгруппы G_j . Если δ достаточно мал, то по теореме 2.2.7, применённой к групповой алгебре подгруппы G_j , где G_j рассматривается в дискретной топологии, существует обычное (конечно, не обязательно непрерывное) представление S_j группы G_j в том же пространстве E , равномерно близкое к квазипредставлению T_j . Пусть $\sigma > 0$ — такое число, что

$$\|S_j(g) - T_j(g)\| \leq \sigma \quad \text{для всех } g \in G_j \text{ и для всех } j = 1, \dots, n. \quad (33)$$

По той же теореме 2.2.7 мы вправе считать, что число σ мало вместе с δ .

Пусть H_j — образ группы G_j в представлении S_j . Покажем, что для любого j , $j = 1, \dots, n$, существует такое вещественное число r_j , $0 < |r_j| < 1$, что элемент $S_j(\exp(r_j \cdot X_j))$ принадлежит множеству W . Если H_j — единичная группа, то достаточно взять $r_j = \frac{1}{2}$, и тогда $S_j(\exp(r_j \cdot X_j)) = 1 \in W_H$. Пусть теперь группа H_j неединична. По построению группа H_j — гомоморфный образ безгранично делимой группы $\mathbb{R}$. Поэтому сама группа H_j безгранично делима. По предположению группа H_j неединична; следовательно, она бесконечна, а потому недискретна в $U(E)$. Но тогда и образ любой проколотой окрестности нуля в группе $\mathbb{R}$ не может быть конечным множеством, поскольку образ каждой проколотой окрестности непуст, а пересечение всех этих образов пусто. Таким образом, множество $M_{1/2} = \{S_j(\exp(r \cdot X_j)), 0 < |r| < 1/2\}$ бесконечно, а потому и недискретно, т. е. имеет точку накопления. Рассматривая отношения двух сколь угодно близких различных элементов коммутативного семейства $M_{1/2}$, видим, что множество $M_1 = \{S_j(\exp(r \cdot X_j)), 0 < |r| < 1\}$ содержит неединичные элементы, сколь угодно близкие к единичному элементу $e_H \in H$. Таким образом, в любом случае множество всевозможных элементов вида

$$S(\exp(r_1 \cdot X_1))h_1S(\exp(-r_1 \cdot X_1))h_1^{-1} \dots S(\exp(r_n \cdot X_n))h_nS(\exp(-r_n \cdot X_n))h_n^{-1},$$

где $h_1, \dots, h_n$ — любые элементы группы $U(E)$, содержится в выбранной ранее окрестности U единичного элемента в $U(E)$. В частности, и множество всевозможных элементов группы $U(E)$, допускающих представление в виде произведения

$$S(\exp(r_1 \cdot X_1))T(g_1)S(\exp(-r_1 \cdot X_1))T(g_1)^{-1} \times \dots \times \\ \times S(\exp(r_n \cdot X_n))T(g_n)S(\exp(-r_n \cdot X_n))T(g_n)^{-1},$$

где $g_1, \dots, g_n$ — любые элементы группы G , содержится в той же выбранной ранее окрестности U единичного элемента в $U(E)$.

Воспользуемся теперь неравенством

$$\|S(\exp(r_1 \cdot X_1))\tilde{T}(g_1)S(\exp(-r_1 \cdot X_1))\tilde{T}(g_1)^{-1} \times \dots \times \\ \times S(\exp(r_n \cdot X_n))\tilde{T}(g_n)S(\exp(-r_n \cdot X_n))\tilde{T}(g_n)^{-1} - \\ - \tilde{T}(\exp(r_1 \cdot X_1))\tilde{T}(g_1)\tilde{T}(\exp(-r_1 \cdot X_1))\tilde{T}(g_1)^{-1} \times \dots \times \\ \times \tilde{T}(\exp(r_n \cdot X_n))\tilde{T}(g_n)\tilde{T}(\exp(-r_n \cdot X_n))\tilde{T}(g_n)^{-1}\| \leq 2n\sigma,$$

которое легко вывести индукцией по n из неравенства (5) и унитарности отображений S_j и $\tilde{T}$, и неравенством

$$\|\tilde{T}(\exp(r_1 \cdot X_1)(g_1) \exp(-r_1 \cdot X_1)(g_1)^{-1} \times \dots \times \\ \times \exp(r_n \cdot X_n)(g_n) \exp(-r_n \cdot X_n)(g_n)^{-1}) - \\ - \tilde{T}(\exp(r_1 \cdot X_1))\tilde{T}(g_1)\tilde{T}(\exp(-r_1 \cdot X_1))\tilde{T}(g_1)^{-1} \times \dots \times \\ \times \tilde{T}(\exp(r_n \cdot X_n))\tilde{T}(g_n)\tilde{T}(\exp(-r_n \cdot X_n))\tilde{T}(g_n)^{-1}\| \leq 2n\delta, \quad (34)$$

которое, ввиду унитарности отображения $\tilde{T}$, следует из неравенства

$$\|\tilde{T}(g_1 g_2 \dots g_m) - \tilde{T}(g_1) \dots \tilde{T}(g_m)\| = \\ = \|\tilde{T}(g_1 g_2 \dots g_m) - \tilde{T}(g_1 g_2 \dots g_{m-1})\tilde{T}(g_m) + \tilde{T}(g_1 g_2 \dots g_{m-1})\tilde{T}(g_m) - \\ - \tilde{T}(g_1 g_2 \dots g_{m-2})\tilde{T}(g_{m-1})\tilde{T}(g_m) + \dots + \tilde{T}(g_1 g_2)\tilde{T}(g_3) \dots \tilde{T}(g_m) - \\ - \tilde{T}(g_1)\tilde{T}(g_2)\tilde{T}(g_3) \dots \tilde{T}(g_m)\| \leq \\ \leq \|\tilde{T}(g_1 g_2 \dots g_m) - \tilde{T}(g_1 g_2 \dots g_{m-1})\tilde{T}(g_m)\| + \dots + \\ + \|\tilde{T}(g_1 g_2)\tilde{T}(g_3) \dots \tilde{T}(g_m) - \tilde{T}(g_1) \dots \tilde{T}(g_m)\| \leq m\delta, \\ g_i \in G, \quad i = 1, \dots, m, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (35)$$

Пусть окрестность U имеет вид $\{h \in U(E), \|h - 1_E\| \leq \theta\}$ для достаточно малого $\theta > 0$. Объединяя это неравенство и неравенства (33)–(35), получаем, что при всех $g \in G$, допускающих представление в виде произведения (ср. (32))

$$(\exp(r_1 \cdot X_1))g_1(\exp(-r_1 \cdot X_1))(g_1)^{-1} \dots (\exp(r_n \cdot X_n))g_n(\exp(-r_n \cdot X_n))(g_n)^{-1}, \\ r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R}, \quad g_1, \dots, g_n \in G,$$

и, в частности, в указанной выше окрестности V единичного элемента группы G , выполняется неравенство

$$\|\tilde{T}(g) - 1_E\| = \left\| \tilde{T}((\exp(r_1 \cdot X_1))g_1(\exp(-r_1 \cdot X_1))(g_1)^{-1} \times \dots \times \right. \\ \left. \times (\exp(r_n \cdot X_n))g_n(\exp(-r_n \cdot X_n))(g_n)^{-1}) - 1_E \right\| \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left\| \tilde{T} \left((\exp(r_1 \cdot X_1)) g_1 (\exp(-r_1 \cdot X_1)) (g_1)^{-1} \times \dots \times \right. \right. \\
&\quad \times (\exp(r_n \cdot X_n)) g_n (\exp(-r_n \cdot X_n)) (g_n)^{-1} \Big) - \\
&\quad - \tilde{T}(\exp(r_1 \cdot X_1)) \tilde{T}(g_1) \tilde{T}(\exp(-r_1 \cdot X_1)) \tilde{T}((g_1)^{-1}) \times \dots \times \\
&\quad \times \tilde{T}(\exp(r_n \cdot X_n)) \tilde{T}(g_n) \tilde{T}(\exp(-r_n \cdot X_n)) \tilde{T}((g_n)^{-1}) \Big) \Big\| + \\
&\quad + \left\| \tilde{T}(\exp(r_1 \cdot X_1)) \tilde{T}(g_1) \tilde{T}(\exp(-r_1 \cdot X_1)) \tilde{T}((g_1)^{-1}) \times \dots \times \right. \\
&\quad \times \tilde{T}(\exp(r_n \cdot X_n)) \tilde{T}(g_n) \tilde{T}(\exp(-r_n \cdot X_n)) \tilde{T}((g_n)^{-1}) - \\
&\quad - S_1(\exp(r_1 \cdot X_1)) \tilde{T}(g_1) S_1(\exp(-r_1 \cdot X_1)) \tilde{T}((g_1)^{-1}) \times \dots \times \\
&\quad \times S_n(\exp(r_n \cdot X_n)) \tilde{T}(g_n) S_n(\exp(-r_n \cdot X_n)) \tilde{T}((g_n)^{-1}) \Big\| + \\
&\quad + \left\| S_1(\exp(r_1 \cdot X_1)) \tilde{T}(g_1) S_1(\exp(-r_1 \cdot X_1)) \tilde{T}((g_1)^{-1}) \times \dots \times \right. \\
&\quad \times S_n(\exp(r_n \cdot X_n)) \tilde{T}(g_n) S_n(\exp(-r_n \cdot X_n)) \tilde{T}((g_n)^{-1}) - 1_E \Big\| \leq 2n\delta + 2n\sigma + \theta.
\end{aligned}$$

Тогда каждое из представлений S_j группы $G_j \subset G$ удовлетворяет условиям

$$\|S_j(g) - 1_E\| \leq \|S_j(g) - \tilde{T}(g)\| + \|\tilde{T}(g) - 1_E\| \leq 2n\delta + (2n+1)\sigma + \theta, \quad g \in V,$$

и можно считать числа δ , σ и θ столь малыми, что правая часть неравенства меньше числа, меньшего двух. По теореме 1.5.4 каждое представление S_j непрерывно.

Напомним, что в соответствии с построением набора элементов $X_1, \dots, X_n$, применённым в [121] в доказательстве утверждения леммы 3.1.3 (т. е. предложения 5.69 в [121]), можно считать, что система $X_1, \dots, X_n$ образует базис алгебры Ли группы G . Рассмотрим отображение Φ_1 произведения групп $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ в группу G , определяемое умножением

$$\{g_1, g_2, \dots, g_n\} \mapsto g_1 g_2 \dots g_n, \quad g_i \in G_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

и отображение Φ_2 произведения групп $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ в группу H , определяемое формулой

$$\{g_1, g_2, \dots, g_n\} \mapsto S_1(g_1) S_2(g_2) \dots S_n(g_n), \quad g_i \in G_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Отображения Φ_1 и Φ_2 непрерывны, и по теореме о неявной функции отображение Φ_1 является гомеоморфизмом на некоторой окрестности O единичного элемента в произведении групп. Ограничим оба отображения Φ_1 и Φ_2 на эту окрестность. Очевидно, отображение $\rho: \Phi_1(O) \rightarrow \Phi_2(O)$, заданное формулой

$$\rho(g_1 g_2 \dots g_n) = S_1(g_1) S_2(g_2) \dots S_n(g_n)$$

для всех $\{g_1, g_2, \dots, g_n\} \in O$, корректно определено, непрерывно и удовлетворяет условию

$$\begin{aligned}
\|\rho(g) - \tilde{T}(g)\| &= \|\rho(g_1 g_2 \dots g_n) - \tilde{T}(g_1 g_2 \dots g_n)\| = \\
&= \|S_1(g_1) S_2(g_2) \dots S_n(g_n) - \tilde{T}(g_1 g_2 \dots g_n)\| =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \|S_1(g_1)S_2(g_2)\dots S_n(g_n) - \tilde{T}(g_1)\tilde{T}(g_2)\dots \tilde{T}(g_n) + \\
&+ \tilde{T}(g_1)\tilde{T}(g_2)\dots \tilde{T}(g_n) - \tilde{T}(g_1g_2\dots g_n)\| \leq \\
&\leq \|S_1(g_1)S_2(g_2)\dots S_n(g_n) - \tilde{T}(g_1)\tilde{T}(g_2)\dots \tilde{T}(g_n)\| + \\
&+ \|\tilde{T}(g_1)\tilde{T}(g_2)\dots \tilde{T}(g_n) - \tilde{T}(g_1g_2\dots g_n)\| \leq n\sigma + n\delta, \quad g \in O.
\end{aligned}$$

Как обычно, для любого $g_0 \in G$ введём окрестность $O_{g_0} \subset G$ точки g_0 , рассмотрим конечное подпокрытие группы G окрестностями $O_{g_k} \subset G$, $k = 1, \dots, K$, и положим

$$R(g_k g) = T(g_k)\rho(g), \quad g \in g_k^{-1}\left(O(g_k) \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} O(g_j)\right)\right),$$

где $\bigcup_{j=1}^0 O(g_j)$ означает пустое множество. Очевидно, что R — борелевская операторнозначная функция на G и

$$\begin{aligned}
\|T(g) - R(g)\| &= \|T(g_k w) - T(g_k)\rho(w)\| \leq \\
&\leq \|T(g_k w) - T(g_k)T(w)\| + \|T(g_k)T(w) - T(g_k)\rho(w)\| \leq (n+1)\delta + n\sigma
\end{aligned}$$

для любого $g \in G$, если k — такой индекс, что

$$g \in g_k^{-1}\left(O(g_k) \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} O(g_j)\right)\right).$$

Если $\delta > 0$ (и тем самым и $\sigma > 0$) достаточно мал, то достаточно доказать утверждение теоремы для борелевского (и потому измеримого) отображения R , которое является унитарным квазипредставлением группы G и

$$\begin{aligned}
\|R(gg_1) - R(g)R(g_1)\| &\leq \\
&\leq \delta + \|R(gg_1) - T(gg_1)\| + \|R(g) - T(g)\| + \|R(g_1) - T(g_1)\| \leq \\
&\leq (3n+4)\delta + 3n\sigma, \quad g, g_1 \in G.
\end{aligned}$$

Согласно разделу 2.3, формула

$$R(f) = \int_G f(g)R(g) dg, \quad f \in L^1(G),$$

определяет непрерывное квазипредставление групповой алгебры $L^1(G)$ группы G в E . Эта алгебра аменабельна по лемме 2.2.3. Тогда, с учётом малости величины σ при малом δ , из теоремы 2.2.7 следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$ (поскольку $(3n+4)\delta + 3n\sigma$ можно считать достаточно малым при малом δ ; точный смысл условия малости можно найти в соответствующем неравенстве на с. 299 в [141]), что существует обычное непрерывное представление V групповой алгебры $L^1(G)$ в том же пространстве E , удовлетворяющее условию $\|R(f) - V(f)\| \leq \varepsilon \|f\|$ для всех $f \in L^1(G)$.

Это непрерывное представление V групповой алгебры $L^1(G)$ в пространстве E определяет непрерывное представление U группы G в пространстве E ,

в свою очередь определяющее исходное представление V групповой алгебры $L^1(G)$, и норма разности $R(g) - U(g)$, $g \in G$, существенно ограничена величиной ε . Поскольку топологическая группа G аменабельна, а представление U в конечномерном пространстве E непрерывно, то, не уменьшая общности, можно считать пространство E гильбертовым (вообще говоря, относительно скалярного произведения, которое может отличаться от исходного), а представление U — унитарным относительно этой гильбертовой структуры. Тогда из условия унитарности отображения $\tilde{T}$ относительно «старого» скалярного произведения, равномерной близости квазипредставления $\tilde{T}$ и представления R и унитарности представления R относительно нового скалярного произведения следует (см., например, [33, 177]), что оператор, осуществляющий изоморфизм гильбертовых пространств относительно этих двух скалярных произведений, мало отличается от единичного оператора (в каждой из норм).

Итак, $\operatorname{ess\,sup}_{g \in G} \|R(g) - U(g)\| \leq \varepsilon$. Так как на окрестности O разность $R - U$ непрерывна, то функция $g \mapsto \|R(g) - U(g)\|$, $g \in O$, непрерывна на O и поэтому ограничена на O величиной ε . Тогда из построения отображения R следует, что в рассматриваемом нами разбиении можно использовать открытую окрестность с нулевой мерой границы и учитывать только слагаемые, имеющие внутренние точки. Отсюда сразу следует, что норма разности $R(g) - U(g)$ не превосходит ε на всей группе G . Это завершает доказательство теоремы 3.2.1. $\square$

3.2.2. Квазигомоморфизмы полупростых компактных групп Ли

Теорема 3.2.2. Пусть H — компактная группа Ли, а G — связная полупростая компактная группа Ли. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого δ -квазигомоморфизма групп $T: G \rightarrow H$ существует непрерывный гомоморфизм $S: G \rightarrow H$, ε -близкий к T .

Доказательство. Как и любая компактная группа Ли, группа H допускает точное линейное представление (ср. [121, теорема XI.8.3.I]), и тем самым можно считать группу H компактной подгруппой некоторой унитарной группы $U(E)$. Поэтому, переходя при необходимости от компактной группы Ли H к её образу в точном непрерывном унитарном представлении, мы вправе считать, что H — (замкнутая) подгруппа группы унитарных операторов в некотором конечномерном гильбертовом пространстве E и рассматривать квазигомоморфизм T как квазипредставление $\tilde{T}$ группы G в пространстве E .

Напомним следующий результат Монтгомери и Циппина, полученный в 1942 г. в [177] (это один из первых результатов теории возмущений для групп Ли) и приведённый с полным доказательством в [178, теорема V.5.3]: если G — группа Ли, K — компактная подгруппа в G , то существует такое открытое множество O в G , содержащее K , что если H — компактная подгруппа в G , содержащаяся в O , то существует элемент $g \in G$, удовлетворяющий условию $g^{-1}Hg \subset K$, и для данной окрестности W единицы в G открытое множество O можно выбрать так, что для любой подгруппы $H \subset O$ элемент g , осуществляю-

щий указанное подобие, можно выбрать в окрестности W . Выберем число $\varepsilon > 0$ столь малым, что $\varepsilon/3$ -окрестность подгруппы H в $U(E)$ содержится в O . Пусть W — $\varepsilon/3$ -окрестность единичного элемента в $U(E)$.

Воспользуемся результатом предыдущей теоремы и для выбранного ε найдём число δ , удовлетворяющее условию теоремы 3.2.1 для числа $\varepsilon/3$. Рассмотрим δ -квазигомоморфизм $T: G \rightarrow H$. Согласно утверждению теоремы 3.2.1 существует обычное непрерывное унитарное представление S группы G в пространстве E , $\varepsilon/3$ -близкое к T . Образ $S(G)$ этого отображения является подгруппой группы $U(E)$, содержащейся в O , и тем самым, по приведённой выше теореме Монтгомери—Циппина [177], существует такой элемент $a \in W \subset U(E)$, что $a^{-1}S(G)a \subset H$. Тогда отображение $S': G \rightarrow H$, определённое формулой $g \mapsto a^{-1}S(g)a$, $g \in G$, является непрерывным гомоморфизмом группы G в $U(E)$, и образ этого гомоморфизма содержится в группе, которую мы отождествили с H . Очевидная выкладка показывает, что $\|T(g) - S'(g)\| \leq \varepsilon$ для всех $g \in G$, что завершает доказательство основной теоремы этого раздела, теоремы 3.2.2. $\square$

3.3. Структура конечномерных локально ограниченных квазипредставлений групп Ли

3.3.1. Автоматическая непрерывность псевдохарактеров

Вопросы непрерывности представлений групп многократно изучались с различных точек зрения, как в предположении измеримости или борелевости этих представлений, если речь шла о представлениях локально компактных или метрических групп (см. исторический обзор в [104]), так и без этого предположения, в том числе для более общих классов топологических групп [35, 38, 39, 42, 43, 51, 65, 218, 219, 221, 223]. В то же время аналогичный вопрос для квазипредставлений практически не исследован. Сложность этого вопроса связана с тем, что он не индивидуален. Вопрос относится, собственно, не к объекту, а к классу и ставится следующим образом: есть ли непрерывное отображение среди малых возмущений данного квазипредставления π ?

Простейшим классом групп, где этот вопрос заслуживает изучения, является класс связных групп Ли. Если группа разрешима, то она не имеет нетривиальных квазипредставлений, и поэтому следует начинать с полупростых групп Ли. Поскольку каждая полупростая группа Ли является фактор-группой прямого произведения простых групп Ли, рассмотрим условия автоматической непрерывности для простых групп Ли. Начнём с одномерных квазипредставлений.

В отличие от общего случая, любое одномерное квазипредставление определяет класс эквивалентности (класс отображений, получаемых ограниченным возмущением данного квазипредставления), допускающий выделенный элемент. А именно, в одномерном случае псевдопредставление, связанное с данным квазипредставлением (с достаточно малым дефектом), определено однозначно (см. теорема 2.4.3 и раздел 3.3.3). Таким образом, следующее утверждение можно

рассматривать как первый шаг в изучении проблемы автоматической непрерывности для квазипредставлений (в форме, поставленной выше).

Теорема 3.3.1. *Любое одномерное псевдопредставление простой группы Ли непрерывно.*

Мы докажем теорему 3.3.1 в разделе 3.3.3. Следующее утверждение является первым шагом к доказательству.

Теорема 3.3.2. *Пусть G — связная простая группа Ли. Если G не является эрмитово симметрической группой или если центр группы G конечен, то любой псевдохарактер на G тождественно равен нулю. Если G — эрмитово симметрическая группа с бесконечным центром, то любой псевдохарактер на G кратен псевдохарактеру Гишарде—Вигнера на G . В частности, любой псевдохарактер на простой группе Ли непрерывен.*

Доказательство теоремы 3.3.2 приведено в следующем разделе.

3.3.2. Доказательство теоремы 3.3.2

Начнём с нескольких вспомогательных утверждений.

Лемма 3.3.3. *Если G — полупростая связная группа Ли, не являющаяся эрмитово симметрической, то единственным вещественным псевдохарактером на G является нулевой характер.*

Доказательство. Из нашего предположения следует, что центр группы G конечен. Пусть f — псевдохарактер на G . Из пункта 3 теоремы 2.5.2 следует, что ограничение f на каждую однопараметрическую подгруппу в G является её гомоморфизмом. Кроме того, псевдохарактер f инвариантен относительно внутренних автоморфизмов, так что его ограничения на торы (которые являются обычными гомоморфизмами по пункту 3 теоремы 2.5.2) инвариантны относительно соответствующих групп Вейля.

Воспользуемся теперь разложением Ивасава $G = KAN$, где группа K компактна (поскольку центр группы G конечен), а группы A , N и AN абелевы (поскольку A абелева, N нильпотентна, а AN разрешима). Из нашего предположения следует, что компактная группа Ли K полупроста. Если f — псевдохарактер на G , то его ограничения на подгруппы K и AN являются соответственно псевдохарактерами χ_K и χ_{AN} на этих группах. По пункту 3 теоремы 2.5.2 псевдохарактер χ_{AN} является обычным характером. Но любой характер группы AN тривиален на нильпотентной части N , поскольку каждый элемент группы N является коммутатором (см., например, [119, гл. I, лемма 5.4]). Поэтому для $g = kan$ разность $f(g) - \chi_K(k) - \chi_{AN}(a)$ должна быть ограничена. С другой стороны, характер χ_{AN} должен быть инвариантен относительно группы Вейля, связанной с A . Эта группа Вейля содержит семейство отражений в элементах некоторого базиса, так что характер χ_{AN} должен принимать равные значения в точках, симметричных относительно соответствующих плоскостей. Гиперплоскостей, проходящих через эти орбиты относительно

группы Вейля, не существует. Следовательно, характер χ_{AN} должен быть нулевым. Наконец, любой элемент некоторой окрестности единичного элемента полупростой компактной группы Ли может быть представлен в виде произведения ограниченного числа элементов, принадлежащих подгруппам, изоморфным группе $SU(2)$ [121, 6.45 и 6.46]. Но любой элемент в группе $SU(2)$ сопряжён своему обратному, и поэтому любой псевдохарактер на группе $SU(2)$ равен нулю. Следовательно, любой псевдохарактер на полупростой компактной группе Ли ограничен на некоторой окрестности единичного элемента. Из компактности группы G следует тогда, что рассматриваемый псевдохарактер ограничен на всей группе и поэтому равен нулю. В частности, псевдохарактер χ_K нулевой. Таким образом, псевдохарактер f ограничен, так что $f = 0$, что завершает доказательство леммы 3.3.3. $\square$

Лемма 3.3.4. *Если G — эрмитово симметрическая простая связная группа Ли, то любой псевдохарактер на G является одним из псевдохарактеров Гисхарде—Вигнера на G . В частности, если центр группы G конечен, то любой псевдохарактер на G равен нулю.*

Доказательство утверждения леммы 3.3.4 фактически дано в [227], но мы приведём доказательство для полноты изложения. Сформулируем сначала следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 3.3.5. *Пусть G — односвязная эрмитово симметрическая простая группа Ли, K — аналитическая подгруппа группы G , отвечающая максимальной компактной подалгебре Ли алгебры Ли группы Ли G . Рассмотрим разложение Ивасава*

$$g = k(g)an, \quad g \in G, \quad k \in K,$$

связанное с группой K . Рассмотрим композицию отображения $g \mapsto k(g)$, $g \in G$, и непрерывной проекции, отображающей каждый элемент $k \in K$ в его центральную составляющую $z(k) \in Z_K$. Существует класс сопряжённых элементов, на котором эта композиция не принимает постоянного значения.

Доказательство. Если рассматриваемая композиция постоянна на классах сопряжённых элементов, то компактная подгруппа $Q \subset K$ с тривиальной центральной компонентой в группе K (с $z(k) = e_K$) является нормальным делителем не только в K , но и в G , что невозможно. $\square$

Доказательство леммы 3.3.4. Пусть G — эрмитово симметрическая полупростая связная группа Ли, и пусть f — псевдохарактер на G . Пусть $Q \subset K$ — компактная подгруппа, образованная элементами с тривиальной центральной компонентой в группе K (с $z(k) = e_K$). По существу повторяя рассуждения, применённые в доказательстве леммы 3.3.3, мы видим, что ограничения псевдохарактера f на Q и AN равны нулю. Таким образом, достаточно доказать, что ограничение псевдохарактера f на центр Z_K компактной группы K , которое является обычным характером центра Z_K по теореме 2.5.2, непрерывно.

Действительно, если это ограничение непрерывно, то ограничения псевдохарактера f на K и на AN совпадают с ограничениями некоторого псевдохарактера Гишарде—Вигнера на эти подгруппы. Тогда разность этих псевдохарактеров ограничена и является псевдохарактером и поэтому равна нулю, так что рассматриваемый псевдохарактер действительно совпадает с некоторым псевдохарактером Гишарде—Вигнера.

Итак, нам осталось доказать, что обычный вещественный характер центра Z_K группы K , получаемый при ограничении псевдохарактера f на Z_K , непрерывен. Воспользуемся леммой 3.3.5. Согласно этой лемме существует класс сопряжённых элементов, на котором композиция отображения $g \mapsto k(g)$, $g \in G$, и непрерывной проекции, отображающей каждый элемент $k \in K$ в его центральную составляющую $z(k) \in Z_K$, не принимает постоянного значения. Таким образом, образ ограничения этого вещественно-аналитического отображения на класс сопряжённых элементов, содержащий некоторый нетривиальный элемент вида an , $a \in A$, $n \in N$, не является одноточечным множеством и, следовательно, содержит некоторый интервал V в силу теоремы о сохранении области. Ограничение рассматриваемого характера на окрестность V является ограниченным, поскольку произведение любого элемента z окрестности V на произведение некоторого элемента $q \in Q$ и некоторого элемента $an \in AN$ принадлежит выделенному классу сопряжённых элементов, содержащему некоторый фиксированный элемент $z_0 \in K_T$. Тогда на произведении $zqan$ псевдохарактер f принимает то же значение, что и на построенном элементе z_0 группы Z_K , причём

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq |f(z) - f(zqan)| + |f(zqan)| = \\ &= |f(z) - f(z) - f(q) - f(an)| + |f(z_0)| + 2C \leq |f(z_0)| + 2C \end{aligned}$$

при $z \in V$, так что псевдохарактер f , а потому и характер, определяемый ограничением псевдохарактера f на Z_K , ограничен на V . Однако, как хорошо известно, любой характер группы $\mathbb{R}$, ограниченный на некоторой окрестности, непрерывен. То же верно, если вещественный характер ограничен на множестве A положительной меры в локально компактной группе G , так как он ограничен и на AA^{-1} , а такое множество содержит непустое открытое подмножество по теореме о непрерывности свёртки двух суммируемых функций на группе. Это завершает доказательство леммы 3.3.4. $\square$

Доказательство теоремы 3.3.2 непосредственно следует из теоремы 2.5.2 и лемм 3.3.3 и 3.3.4.

3.3.3. Одномерные квазипредставления групп Ли

В этом разделе мы докажем теорему 3.3.1. Кроме того, мы убедимся, что теорема 3.3.1 позволяет описать структуру любых одномерных квазипредставлений групп Ли, откуда будет следовать, что любое одномерное псевдопредставление полупростой группы Ли является экспонентой от псевдохарактера этой группы.

В дальнейшем нам понадобится следующее вспомогательное утверждение («лемма о подобии»).

Лемма 3.3.6. Пусть G — аменабельная группа, а π и ρ — унитарные представления группы G в конечномерном евклидовом пространстве E , удовлетворяющие условию $\|\pi(g) - \rho(g)\| \leq q$ для некоторого $q < 1$ и всех $g \in G$. Тогда представления π и ρ подобны с помощью оператора A , удовлетворяющего условию $\|1_E - A\| \leq q$.

Это утверждение допускает обобщение и на бесконечномерный случай (и даже на случай представлений в пространствах Фреше).

Доказательство. Применяя левоинвариантное среднее к ограниченной функции $g \mapsto \pi(g)\rho(g^{-1})$, $g \in G$, и обозначая результат усреднения через A , получаем $\pi(h)A\rho(h^{-1}) = A$ для всех $h \in G$ как следствие левой инвариантности и $\|1_E - A\| \leq q$ как следствие неравенства $\|\pi(g)\rho(g^{-1}) - 1_E\| \leq q$ для всех $g \in G$. Отсюда следует обратимость оператора A . $\square$

Следствие 3.3.7. Пусть G — группа, а f — одномерное псевдопредставление группы G .

1. Ограничение псевдопредставления f на каждую циклическую подгруппу в G является гомоморфизмом.
2. При достаточно малом дефекте псевдопредставление f инвариантно относительно внутренних автоморфизмов группы G .

Доказательство. Первое утверждение очевидно, так как в одномерном случае отображение f является либо неограниченным, и тогда оно представление (характер) по лемме 2.3.8, либо ограниченным, и тогда его можно считать унитарным и применить лемму 3.3.6, причём подобие означает равенство ввиду одномерности. Второе утверждение справедливо по той же причине, так как если f неограниченное, то f — представление, а если f ограниченное, то ограничение $h \mapsto f(h)$, $h \in H$, на любую циклическую подгруппу H мало отличается от представления $h \mapsto f(ghg^{-1})$, $h \in H$, для любого $g \in G$, и снова подобие означает равенство, $f(h) = f(ghg^{-1})$ для всех $h \in H$ и $g \in G$. $\square$

Следствие 3.3.8. Пусть G — группа, а f — одномерное псевдопредставление группы G . Ограничение псевдопредставления f на каждую аменабельную подгруппу в G является гомоморфизмом, так что f — чистое псевдопредставление.

Доказательство. Пусть f — одномерное псевдопредставление группы G . Согласно следствию 3.3.7 ограничение f на каждую циклическую подгруппу в G является гомоморфизмом. Кроме того, ограничение f на каждую аменабельную подгруппу H в G мало отличается от некоторого обычного характера подгруппы H . Ограничение этого характера группы H на каждую циклическую подгруппу в H мало отличается от характера этой циклической подгруппы, определяемого ограничением псевдопредставления f на ту же циклическую подгруппу. Следовательно, эти ограничения равны для любой циклической подгруппы, поэтому они равны, и тем самым ограничение отображения f на каждую

аменабельную подгруппу H в G является обычным характером подгруппы H . Таким образом, f — чистое псевдопредставление. $\square$

Доказательство теоремы 3.3.1 будет дано после нескольких вспомогательных утверждений, являющихся вариантами вспомогательных утверждений из предыдущего пункта.

Лемма 3.3.9. *Если G — полупростая связная группа Ли, не являющаяся эрмитово симметрической, то единственным вещественным одномерным псевдопредставлением группы G является единичное представление.*

Доказательство. Напомним, что из нашего предположения следует, что центр группы G конечен. Пусть f — одномерное псевдопредставление группы G . Согласно следствию 3.3.8 ограничение f на каждую однопараметрическую подгруппу в G является представлением этой подгруппы. Согласно следствию 3.3.7 при достаточно малом дефекте одномерное псевдопредставление f инвариантно относительно внутренних автоморфизмов, так что его ограничения на торы (которые являются обычными гомоморфизмами по следствию 3.3.8) инвариантны относительно соответствующих групп Вейля.

Воспользуемся разложением Ивасава $G = KAN$, где группа K компактна (поскольку центр группы G конечен), а группы A , N и AN аменабельны (поскольку A абелева, N нильпотентна, а AN разрешима). Из нашего предположения следует, что компактная группа K полупроста. Если f — одномерное псевдопредставление группы G , то его ограничения на подгруппы K и AN являются соответственно одномерными псевдопредставлениями χ_K и χ_{AN} этих групп. По следствию 3.3.8 и определению 2.4.4 одномерное псевдопредставление χ_{AN} является обычным одномерным представлением (комплексным характером). Но любой характер группы AN тривиален на нильпотентной части N , поскольку каждый элемент группы N является коммутатором (см., например, [21, гл. I, следствие VI.4.8]). Тогда для $g = kan$ разность $f(g) - \chi_K(k)\chi_{AN}(a)$ должна быть ограничена (и не превосходит дефекта псевдопредставления F). С другой стороны, характер χ_{AN} должен быть инвариантен относительно группы Вейля, связанной с A . Эта группа Вейля содержит семейство отражений в элементах некоторого базиса, так что характер χ_{AN} должен принимать равные значения в точках, симметричных относительно соответствующих плоскостей. Гиперплоскостей, проходящих через эти орбиты относительно группы Вейля, не существует. Следовательно, характер χ_{AN} должен быть единичным. Наконец, любой элемент полупростой компактной группы Ли может быть представлен в виде произведения ограниченного числа элементов, принадлежащих подгруппам, изоморфным группе $SU(2)$ [121, 6.45 и 6.46]. Но любой элемент в группе $SU(2)$ сопряжён своему обратному, и поэтому любое одномерное псевдопредставление группы $SU(2)$ с малым дефектом единично. Следовательно, любое одномерное псевдопредставление полупростой компактной группы Ли с малым дефектом является малым возмущением единичного представления и потому единично. В частности, одномерное псевдопредставление χ_K единично. Таким образом, отображение f единично, что завершает доказательство леммы 3.3.9. $\square$

Лемма 3.3.10. Если G — эрмитово симметрическая полупростая связная группа Ли, то любое одномерное псевдопредставление группы G с достаточно малым дефектом является экспонентой от некоторого псевдохарактера Гишарде—Вигнера на G . В частности, если центр группы G конечен, то любое одномерное псевдопредставление группы G с достаточно малым дефектом единично.

Очевидно, не все непрерывные одномерные псевдопредставления такой группы тривиальны. Даже если G — группа без центра (присоединённая), формула

$$\varphi_n(g) = \exp\left(2in\pi \frac{\theta(\tilde{g})}{f(z_0)}\right), \quad g \in G, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где z_0 — образующий элемент центра универсальной накрывающей $\tilde{G}$ группы G (см., например, [181]), $\tilde{g}$ — любой прообраз элемента $g \in G$ в $\tilde{G}$, а θ — псевдохарактер Гишарде—Вигнера на $\tilde{G}$, корректно определяет (нетривиальное при $n \neq 0$) одномерное псевдопредставление группы G (ср. [36, 37, 41, 222]).

Доказательство. Пусть G — эрмитово симметрическая полупростая связная группа Ли, и пусть f — одномерное псевдопредставление группы G . Достаточно рассмотреть случай, когда группа G проста. Пусть $Q \subset K$ — компактная подгруппа, образованная элементами с тривиальной центральной компонентой в группе K (с $z(k) = e_K$). По существу повторяя рассуждения, применённые в доказательстве леммы 3.3.9, мы видим, что ограничения одномерного псевдопредставления f на Q и AN единичны. Таким образом, как и в доказательстве леммы 3.3.4, достаточно доказать, что ограничение F одномерного псевдопредставления f на одномерный центр Z_K группы K , которое является обычным комплексным характером центра по следствию 3.3.8, непрерывно.

Действительно, пусть ограничение F непрерывно. Пусть одномерный центр Z_K группы K компактен и тем самым изоморфен одномерному тору $\mathbb{T}$. Ограничение представления F на Z_K является унитарным представлением тора Z_K . Если оно не единично, то колебание соответствующего характера в данной окрестности единичного элемента группы G ограничено снизу. С другой стороны, поскольку, ввиду ограниченности f , для любого $g \in G$ модуль

$$|f(gng^{-1}) - f(g)f(n)f(g^{-1})|$$

равномерно мал при $n \in N$, а $f(n)$ единичен для любого $n \in N$, то $f(gng^{-1})$ единичен для любого $n \in N$ и любого $g \in G$. Отсюда легко следует, что есть окрестность единичного элемента группы G , на которой отклонение F от единицы мало вместе с дефектом. Следовательно, при достаточно малом дефекте квазипредставления f представление F группы Z_K , определяемое ограничением этого квазипредставления на Z_K , не содержит неединичных унитарных характеров и потому единично.

Пусть теперь одномерный центр Z_K группы K некомпактен и тем самым изоморфен $\mathbb{R}$. Любой непрерывный характер этой группы есть экспонента от некоторого вещественного характера группы $\mathbb{R}$. Таким образом, ограничения f

на K и AN совпадают с ограничениями экспоненты от некоторого псевдохарактера Гишарде—Вигнера на эти подгруппы. Обратно, экспонента от псевдохарактера является одномерным псевдопредставлением. Но два одномерных псевдопредставления с достаточно малым дефектом, совпадающие на порождающем семействе подгрупп, равномерно мало отличаются на подгруппах, порождённых всеми элементами группы, так что подобны и потому совпадают на всех однопорожждённых подгруппах и потому на всех элементах. Таким образом, в этом случае рассматриваемое одномерное псевдопредставление действительно совпадает с экспонентой от некоторого псевдохарактера Гишарде—Вигнера.

Итак, нам осталось доказать, что обычный комплексный характер центра Z_K группы K , получаемый при ограничении одномерного псевдопредставления f на Z_K , непрерывен. Воспользуемся леммой 3.3.5. Согласно этой лемме существует класс сопряжённых элементов, на котором композиция отображения $g \mapsto k(g)$, $g \in G$, и непрерывной проекции, отображающей каждый элемент $k \in K$ в его центральную составляющую $z(k) \in Z_K$, не принимает постоянного значения. Таким образом, образ ограничения этого вещественно-аналитического отображения на класс сопряжённых элементов, содержащий некоторый нетривиальный элемент вида an , $a \in A$, $n \in N$, не является одноточечным множеством и, следовательно, содержит некоторый интервал V в силу теоремы о сохранении области. Ограничение рассматриваемого характера на окрестность V ограничено, поскольку произведение любого элемента z окрестности V на произведение некоторого элемента $q \in Q$ и некоторого элемента $an \in AN$ принадлежит выделенному классу сопряжённых элементов, содержащему некоторый фиксированный элемент $z_0 \in K_T$. Поэтому на произведении $zqan$ одномерное псевдопредставление f принимает то же значение, что и на построенном элементе z_0 группы Z_K , причём

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &\leq |f(z) - f(zqan)| + |f(zqan) - f(z_0)| = \\ &= |f(z) - f(z)f(q)f(an)| + |f(z_0) - f(z_0)| + C \leq C \end{aligned}$$

при $z \in V$, так что одномерное псевдопредставление f , а потому и характер, определяемый ограничением одномерного псевдопредставления f на Z_K , имеет малую вариацию на V , если C мало. Но любой характер группы $\mathbb{R}$, вариация которого на некоторой окрестности меньше двойки, непрерывен*. Это завершает доказательство леммы 3.3.10. $\square$

Доказательство теоремы 3.3.1 непосредственно следует из теоремы 3.3.2 и лемм 3.3.10 и 3.3.9. В частности, как мы видим, любое одномерное псевдопредставление полупростой группы Ли является экспонентой от псевдохарактера этой группы.

*То же верно, если вариация комплексного характера ограничена числом, меньшим единицы, на множестве A положительной меры в локально компактной группе G , так как тогда вариация строго меньше двойки на AA^{-1} , а такое множество содержит непустое открытое подмножество по теореме о непрерывности свёртки двух квадратично интегрируемых функций на группе.

3.3.4. Автоматическая непрерывность и другие свойства квазипредставлений групп Ли

В следующей теореме, которая может рассматриваться как свидетельство физической (или метафизической) осмысленности понятия неприводимого неограниченного конечномерного представления совершенной группы Ли, объединены результаты известных теорем из [42—44, 224—228].

Теорема 3.3.11. *Любое локально ограниченное неограниченное неприводимое конечномерное квазипредставление совершенной группы Ли G есть обычное непрерывное представление этой группы.*

Случай ограниченных отображений в утверждении такого вида должен быть исключён, поскольку экспоненты от мнимых кратных псевдохарактера Гишарде—Вигнера на эрмитово симметрических полупростых группах Ли являются нетривиальными непрерывными одномерными унитарными чистыми псевдопредставлениями этих полупростых групп Ли (и их расширений) и малые возмущения нетривиальных прямых сумм таких экспонент могут быть неприводимыми.

В отличие от представлений, непрерывное конечномерное квазипредставление полупростой группы Ли может быть не вполне приводимым. Например, таково отображение

$$g \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \varphi(g) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad g \in G,$$

где G — простая эрмитово симметрическая группа Ли с бесконечным центром, а φ — псевдохарактер Гишарде—Вигнера на G .

3.3.5. Локально ограниченные конечномерные квазипредставления полупростых групп Ли

Нам понадобится следующая техническая лемма о псевдохарактерах на прямых произведениях групп.

Лемма 3.3.12. *Пусть G — группа, представимая в виде прямого произведения своих подгрупп $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$, $n \in \mathbb{N}$, пусть f — псевдохарактер на G , и пусть f_i — ограничение псевдохарактера f на подгруппу G_i . Если $g = \{g_1, \dots, g_n\}$, $g \in G$, $g_i \in G_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$, то*

$$f(g) = \sum_{i=1}^n f_i(g_i). \quad (36)$$

Доказательство. Правая часть формулы (36) определяет квазихарактер на G . Так как разность $f(g) - \sum_{i=1}^n f_i(g_i) = f(g_1, \dots, g_n) - \sum_{i=1}^n f_i(g_i)$ ограничена по определению псевдохарактера, то псевдохарактер f является ограниченным возмущением квазихарактера, определённого правой частью соотношения (36). Кроме того, очевидно, что ограничение этого квазихарактера на любую циклическую подгруппу является характером, и следовательно, левая и правая части

формулы (36) являются псевдохарактерами, разность которых ограничена. Следовательно, она равна нулю, что завершает доказательство. $\square$

Мы также введём следующее определение псевдохарактера Гишарде—Вигнера на полупростой группе Ли.

Определение 3.3.13. Пусть G — связная полупростая группа Ли, f — псевдохарактер на G . Поскольку при необходимости группу G можно заменить её универсальной накрывающей группой (и обозначить эту группу той же буквой G), мы вправе считать, что группа G односвязна (и, таким образом, является произведением односвязных простых групп Ли), и рассматривать псевдохарактер f как псевдохарактер (который мы снова обозначим через f) на этой односвязной группе, или, иначе говоря, как псевдохарактер на указанном выше произведении простых групп Ли. По лемме 3.3.12 этот псевдохарактер является суммой тривиальных продолжений его ограничений на простые факторы. Эти ограничения либо равны нулю (например, если рассматриваемый фактор компактен или некомпактен, но не эрмитово симметричен), либо являются ненулевыми кратными соответствующих псевдохарактеров Гишарде—Вигнера, продолженных на всю группу нулём, т. е. равных нулю на всех остальных простых факторах (рассматриваемый фактор действительно эрмитово симметричен). В дальнейшем любая линейная комбинация этих продолжений псевдохарактеров Гишарде—Вигнера на эрмитово симметрических факторах G_i группы G (в обозначениях леммы 3.3.12) называется *псевдохарактером Гишарде—Вигнера* на G .

Теорема 3.3.14. Пусть G — связная полупростая группа Ли, T — квазипредставление группы G в конечномерном векторном пространстве E_T . Пусть E_T^* — пространство, сопряжённое к E_T . Пусть L — множество таких векторов $\xi \in E_T$, что орбита $\{T(g)\xi \mid g \in G\}$ ограничена. Пусть M — множество таких функционалов $f \in E_T^*$, что орбита $\{T(g)^*f \mid g \in G\}$ ограничена в E_T^* . Множества L и M — векторные подпространства в E_T и $E_T^* = E_T^*$, инвариантные относительно T и T^* соответственно, где $T^*(g)$ — оператор, сопряжённый к $T(g)$ для всех $g \in G$. Рассмотрим возрастающий набор подпространств $\{0\}, L \cap M^\perp, M^\perp, L + M^\perp, E = E_T$, где $M^\perp$ — аннулятор векторного подпространства $M \subset E_T^*$, и запишем матрицу $t(g)$ оператора $T(g)$, $g \in G$, в блочной форме, отвечающей разложению пространства E в прямую сумму подпространств $L \cap M^\perp, M^\perp \setminus (L \cap M^\perp), L \setminus (L \cap M^\perp)$ и $E \setminus (L + M^\perp)$, где символ $\setminus$ означает взятие дополнительного подпространства:

$$t(g) = \begin{pmatrix} \alpha(g) & 0 & \sigma(g) & \tau(g) \\ 0 & \beta(g) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma(g) & \chi(g) \\ 0 & 0 & 0 & \delta(g) \end{pmatrix}, \quad g \in G.$$

Здесь нули означают соответствующие нулевые операторы, а α и δ — матрично-значные отображения, определяемые представлениями максимальной компакт-

ной фактор-группы группы G в соответствующих пространствах. Кроме того, справедливы следующие утверждения.

1. Если группа G имеет нетривиальную эрмитово симметрическую фактор-группу, то отображение γ является возмущением прямой суммы Γ (обычных) произведений непрерывных неприводимых унитарных представлений максимальной компактной фактор-группы группы G на одномерные псевдопредставления Гишарде—Вигнера, т. е. на отображения вида $g \rightarrow \exp(ir\theta(g))$, $g \in G$, для некоторых $r \in \mathbb{R}$. Если группа G не имеет нетривиальных эрмитово симметрических фактор-групп, то отображение γ является возмущением прямой суммы Γ (обычных) непрерывных неприводимых унитарных представлений максимальной компактной фактор-группы группы G , которое мы в этом случае тоже обозначим через Γ .
2. Если группа G имеет нетривиальную эрмитово симметрическую фактор-группу, то отображение τ является возмущением некоторого отображения $\psi: G \rightarrow \mathcal{L}(E \setminus (L + M^\perp), L \cap M^\perp)$, имеющего вид

$$\psi(g) = \sum_{i=1}^n \theta_i(g) A_i, \quad g \in G,$$

где $A_i \in \mathcal{L}(E \setminus (L + M^\perp), L \cap M^\perp)$ — некоторые линейные операторы, пересечение ядер которых (в подпространстве $E \setminus (L + M^\perp)$) тривиально,

$$\bigcap_{i=1}^n \ker A_i = \{0\} \subset E \setminus (L + M^\perp),$$

и каждая функция вида θ_i является продолжением на всю группу G (рассматриваемую как прямое произведение конечного числа простых односвязных групп Ли G_i) псевдохарактера Гишарде—Вигнера на G_i (если такой псевдохарактер на G_i существует) нулём на все факторы, отличные от G_i . Таким образом, в частности, если G — связная односвязная эрмитово симметрическая группа Ли, то

$$\psi(g) = \theta(g) A, \quad g \in G,$$

где θ — псевдохарактер Гишарде—Вигнера на G , а A — линейный изоморфизм между пространствами $E \setminus (L + M^\perp)$ и $L \cap M^\perp$,

$$A \in \mathcal{L}(E \setminus (L + M^\perp), L \cap M^\perp).$$

Если группа G не имеет нетривиальных эрмитово симметрических фактор-групп, то отображение τ является возмущением нулевого отображения, которое мы в этом случае тоже обозначим через ψ .

3. Величина возмущений (в равномерной норме на группе G), упомянутых в пунктах 1 и 2, определяется нормой ограниченного отображения γ , нормами отображений σ и χ и дефектом исходного квазипредставления t и, при данной оценке норм γ , σ и χ , сколь угодно мала при достаточно малом дефекте.

4. Аппроксимирующее отображение

$$\Theta(g) = \begin{pmatrix} \alpha(g) & 0 & 0 & \psi(g) \\ 0 & \beta(g) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma(g) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta(g) \end{pmatrix}, \quad g \in G,$$

является чистым псевдопредставлением группы G , и отображение Θ (или, что равносильно, представление β) непрерывно тогда и только тогда, когда оно является локально ограниченным.

Это утверждение является частным случаем основного утверждения следующего пункта 3.3.5 и используется в его доказательстве.

Доказательство. Пусть G — связная полупростая группа Ли. Если группа G компактна, то любое локально ограниченное конечномерное квазипредставление группы G является ограниченным. Отсюда следует, что $L = E_T$ и $M = E_T^* = E_{T^*}$. Таким образом, $E_T = L + M^\perp$ и $T = \gamma$. Согласно теореме 3.2.1 любое ограниченное квазипредставление группы G с достаточно малым дефектом является шевелением обычного непрерывного представления группы G .

Пусть группа G некомпактна. Переходя при необходимости к универсальной накрывающей группе и рассматривая квазипредставления как отображения этой накрывающей группы, мы вправе считать, что группа G односвязна. Тогда группа G — прямое произведение простых односвязных полупростых групп Ли.

Согласно утверждению 2) теоремы 2.5.13 отображения t_1 и t_2 , определённые матричнозначными функциями

$$t_1(g) = \begin{pmatrix} \alpha(g) & \varphi(g) \\ 0 & \beta(g) \end{pmatrix}, \quad t_2(g) = \begin{pmatrix} \beta(g) & \rho(g) \\ 0 & \delta(g) \end{pmatrix},$$

$g \in G$, являются представлениями группы G . Так как группа G полупроста по условию, то (при правильном выборе дополнительных подпространств $M^\perp \setminus (L \cap M^\perp)$ и $E \setminus (L + M^\perp)$) представления t_1 и t_2 являются прямыми суммами неприводимых представлений. Так как единственными конечномерными унитарными представлениями любой простой односвязной группы Ли являются представления максимальной компактной фактор-группы, то отображения α и δ являются представлениями максимальной компактной фактор-группы группы G в соответствующих пространствах (в частности, их ограничения на максимальное слагаемое в G , не содержащее компактных слагаемых, тривиально (является единичным отображением)) и, кроме того, отображения φ и ρ можно считать нулевыми. Здесь представление β группы Ли G не имеет ограниченных подпредставлений (или, что равносильно, не имеет нетривиальных подпредставлений). Остаётся изучить поведение ограниченных отображений γ , σ и χ и неограниченного отображения τ .

Напомним, что группа G предполагается некомпактной. Рассмотрим разложение Ивасава $G = KAN$ группы G . Согласно теореме 2.5.14 ограничение ограниченного квазипредставления γ на разрешимую подгруппу AN является

малым возмущением ограниченного представления группы AN . Это представление Γ можно считать унитарным (см., например, [4, теорема 3.4.1] или [188, задача 0-34]). Следовательно, можно считать, что Γ — конечная прямая сумма неприводимых унитарных представлений группы AN . По теореме 1.2.2 каждое из этих неприводимых унитарных представлений одномерно, т. е. является унитарным характером группы AN , который тем самым тривиален на N , поскольку каждый элемент группы N является коммутатором (см., например, [21, гл. I, следствие VI.4.8]). Таким образом, ограничение квазипредставления γ на подгруппу N является возмущением единичного представления группы N , и малость этого возмущения определяется малостью дефекта квазипредставления γ .

Поскольку это рассуждение можно также применить к ограничению квазипредставления γ на любую подгруппу D , отвечающую некоторой $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ -тройке (см. [63, гл. VIII, § 11]), то ограничение квазипредставления γ на верхнюю треугольную подгруппу (подгруппу, отвечающую верхней треугольной подалгебре Ли $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ -подалгебры Ли в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G) в группе Ли D , ограниченное затем на нильпотентную часть треугольной подгруппы, является малым шевелением тривиального представления этой нильпотентной части. Однако в самой группе $SL(2, \mathbb{R})$ элементы

$$w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad u(b) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \in \mathbb{R}, \quad s(a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}^+,$$

удовлетворяют условию

$$s(a) = wu(a^{-1})wu(a)wu(a^{-1}) \quad \text{для любого } a \in \mathbb{R}^+.$$

Следовательно, если W — элемент подгруппы D , накрывающий элементы $\pm w \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$, и если однопараметрические подгруппы S и U в D накрывают подгруппы s и u соответственно, то $S(a)$ — произведение элемента

$$WU(a^{-1})WU(a)WU(a^{-1})$$

на некоторый элемент центра группы D , и этот центральный элемент не зависит от a при $a > 0$, что вытекает из соображений связности и из непрерывности умножения. Таким образом, ограничение квазипредставления γ на данную треугольную подгруппу группы Ли D близко к постоянному отображению на подполугруппе, составляющей половину дополнений единицы в группе, откуда немедленно следует, что это ограничение является малым шевелением представления этой треугольной подгруппы, кратного тривиальному.

Напомним теперь, что семейство корней полупростой группы Ли порождает пространство, сопряжённое к алгебре Ли $\mathfrak{a}$ подгруппы A (действительно, если существует такой элемент $a \in \mathfrak{a}$, что $\alpha(a) = 0$ для всех корней α , то $\mathrm{ad} a = 0$; отсюда следует, что $a = 0$, поскольку центр полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ равен нулю). Следовательно, алгебра Ли $\mathfrak{a}$ подгруппы A порождена диагональными подалгебрами Ли $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ -троек как векторное пространство, и представление Γ ратно единичному.

Отсюда следует, что квазипредставление γ мало отличается (при малом дефекте) от отображения, определяемого ограничением квазипредставления γ

на аналитическую группу K , входящую в разложение Ивасава, т. е. норма $\|\gamma(kan) - \gamma(k)\|$ равномерно мала при любых $k \in K$, $a \in A$, $n \in N$. Группа K либо полупроста (если группа G не содержит эрмитово симметрических сомножителей), либо является прямым произведением полупростой компактной группы Ли K' и нетривиальной конечномерной векторной группы (если группа G содержит нетривиальные эрмитово симметрические сомножители). По теореме 3.2.1 ограничение квазипредставления γ на полупростую компактную группу Ли K' является малым возмущением обычного непрерывного представления группы K'^* . Ограничение этого представления на любой тор является унитарным представлением этого тора. Если оно не единично, то колебание соответствующего характера в данной окрестности единичного элемента группы G ограничено снизу. С другой стороны, поскольку, ввиду ограниченности γ , для любого $g \in G$ норма $\|\gamma(gng^{-1}) - \gamma(g)\gamma(n)\gamma(g^{-1})\|$ мала равномерно по $n \in N$, а $\gamma(n)$ мало отличается от единичного оператора для любого $n \in N$, то $\gamma(gng^{-1})$ мало отличается от единичного оператора для любого $n \in N$ и любого $g \in G$. Отсюда легко следует, что есть окрестность единичного элемента группы G , на которой отклонение γ от единичного оператора мало вместе с дефектом. Следовательно, при достаточно малом дефекте квазипредставления γ представление группы K' , определяемое ограничением этого квазипредставления на полупростую компактную группу Ли K' , не содержит унитарных подпредставлений, нетривиальных на компактных частях некомпактных простых факторов группы G , и поэтому рассматриваемое представление может считаться представлением максимальной компактной фактор-группы (или, что равносильно, максимального компактного слагаемого) группы G . Напомним, что универсальная накрывающая группа компактной группы Ли компактна (см., например, [181, XI.7.2.I]).

Отсюда следует, что квазипредставление γ мало (при малом дефекте) отличается от отображения, определяемого ограничением квазипредставления γ на произведение максимального компактного слагаемого группы G и связной компоненты единицы C центра Z_K группы K , входящей в разложение Ивасава, т. е. норма $\|\gamma(zk'k''an) - \gamma(zk')\|$ равномерно мала при $z \in C$, $k', k'' \in K'$, $a \in A$, $n \in N$, где k' принадлежит максимальному компактному слагаемому группы G , а k'' — максимальному слагаемому в G , не содержащему нетривиальных компактных слагаемых.

Поскольку группа C абелева (как подгруппа центра Z_K), то она аменабельна (как дискретная группа). В частности, ограничение квазипредставления γ на C является малым возмущением обычного ограниченного представления ϖ группы C , и, как и выше, мы можем считать представление ϖ унитарным. Следовательно, представление ϖ определяется прямой суммой унитарных характеров группы C .

*Это наблюдение позволяет избежать отдельного рассмотрения случая, когда группа G не имеет нетривиальных компактных фактор-групп.

Предположим сначала, что группа G имеет нетривиальную эрмитово симметрическую фактор-группу. В этом случае, согласно лемме 3.3.10, каждый из характеров, входящих в разложение представления τ , определяет одномерное псевдопредставление группы G , это псевдопредставление непрерывно и является экспонентой от некоторого псевдохарактера Гишарде—Вигнера. Таким образом, ограничение отображения γ на максимальное слагаемое в группе G , не содержащее компактных слагаемых, является шевелением прямой суммы одномерных псевдопредставлений Гишарде—Вигнера, т. е. отображением вида

$$g \rightarrow \exp(ir\theta(g)), \quad g \in G, \quad \text{для некоторого } r \in \mathbb{R}.$$

Заметим, что это псевдопредставление автоматически непрерывно.

По той же причине, если группа G не имеет нетривиальных эрмитово симметрических факторов, то ограничение отображения γ на максимальное слагаемое в G , не содержащее нетривиальных компактных слагаемых, является шевелением (малым, если дефект мал) единичного отображения

$$g \mapsto 1_{L \setminus (L \cap M^\perp)}, \quad g \in G.$$

Заметим, что это ограничение тоже автоматически непрерывно.

Согласно «теореме тривиальности» (см. теоремы 3.2.2 и 3.2.1) ограничение квазипредставления γ на максимальное компактное слагаемое W группы G (а эта подгруппа полупроста по построению) является шевелением некоторого непрерывного унитарного представления группы W .

Рассмотрим теперь произведение группы W и связной компоненты C центра Z_K группы K . По построению эта группа аменабельна как дискретная группа. Снабдим группу $W \times C$ топологией прямого произведения компактной группы W , рассматриваемой в её обычной топологии, и группы Z_K , которую мы снабдим дискретной топологией. Оба сомножителя — аменабельные топологические группы. Следовательно, их произведение $W \times Z_K$ тоже аменабельная топологическая группа [4, 188]. Как и выше, отсюда следует, что ограничение квазипредставления γ на $W \times Z_K$ является шевелением обычного непрерывного ограниченного представления группы $W \times Z_K$. Как обычно, это представление можно считать унитарным представлением. Следовательно, оно является прямой суммой неприводимых унитарных представлений. Однако, как хорошо известно, любое неприводимое унитарное представление прямого произведения компактной группы Ли и локально компактной абелевой группы является произведением (тензорным, которое в данном случае — ввиду одномерности одного из сомножителей — сводится к обычному произведению) некоторого неприводимого непрерывного унитарного представления группы W на характер группы Z_K . Как мы видели выше, это означает, что квазипредставление γ является возмущением (малым, если дефект представления γ мал) суммы соответствующих произведений тех же неприводимых представлений группы W на экспоненты от псевдохарактеров на G (или, что равносильно, на слагаемом Σ , дополняющем W в G), отвечающих полученным характеристам-сомножителям группы Z_K . Как нам известно, эти псевдохарактеры могут быть либо единичными характеристиками, либо

(если нетривиальные эрмитово симметрические факторы группы G существуют) псевдохарактерами Гишарде—Вигнера на G . Следовательно, все эти одномерные сомножители-псевдопредставления автоматически непрерывны на G , и поэтому произведения непрерывны, а с ними и их сумма непрерывна. Таким образом, аппроксимирующее отображение, которое мы обозначим через Γ , в любом случае является непрерывным псевдопредставлением группы G .

Так как это рассуждение, касающееся отображения γ , можно также применить к отображениям, определённым операторными матрицами по формулам

$$g \mapsto \begin{pmatrix} \alpha & \sigma \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad g \mapsto \begin{pmatrix} \gamma & \chi \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \quad g \in G,$$

то оба эти отображения оказываются шевелениями произведений некоторых непрерывных неприводимых унитарных представлений группы W на экспоненты от некоторых псевдохарактеров Гишарде—Вигнера на G , и следовательно, отображения σ и χ можно считать малыми, если дефект отображения T мал.

Напомним, что ограничение отображения τ на компактную подгруппу W является ограниченным и к тому же может считаться малым при малом дефекте по теореме 3.2.1. С другой стороны, согласно теореме 2.5.13, поскольку отображения α и δ тривиальны на «совсем некомпактной» части Σ группы G (т. е. на слагаемом, не содержащем нетривиальных компактных слагаемых в G), то ограничение любого матричного элемента матрицы τ на подгруппу Σ определяет вещественный квазихарактер на G . Если группа G имеет нетривиальный эрмитово симметрический фактор, то матричнозначное отображение τ является шевелением отображения

$$\Psi: G \rightarrow \mathcal{L}(E \setminus (L + M^\perp), L \cap M^\perp),$$

каждый из матричных элементов которого является псевдохарактером на группе G . Как нам уже известно, этот псевдохарактер является псевдохарактером Гишарде—Вигнера на G . Если группа G не имеет нетривиальных эрмитово симметрических фактор-групп, то матричнозначное отображение τ является шевелением нулевого отображения, которое мы в этом случае тоже обозначим Ψ .

Эти рассуждения показывают, что (в обозначениях леммы 3.3.12) отображение Ψ определено формулой

$$\Psi(g) = \sum_{i=1}^n \theta_i(g) A_i, \quad g \in G,$$

для некоторых линейных операторов

$$A_i \in \mathcal{L}(E \setminus (L + M^\perp), L \cap M^\perp),$$

где через θ_i обозначен псевдохарактер Гишарде—Вигнера на G_i , а суммирование распространено только на эрмитово симметрические слагаемые группы G . Если пересечение ядер операторов A_i нетривиально в подпространстве $E \setminus (L + M^\perp)$, то любой ненулевой вектор в этом ядре (который автоматически является элементом пространства $E \setminus (L + M^\perp)$) должен принадлежать пересечению $L \cap M^\perp$

по определению подпространств L и M . Это противоречие показывает, что

$$\bigcap_{i=1}^n \ker A_i = \{0\} \subset E \setminus (L + M^\perp).$$

В частности, если группа G — простая односвязная эрмитово симметрическая группа Ли, то оператор A определяет изоморфизм между пространствами $E \setminus (L + M^\perp)$ и $L \cap M^\perp$.

Это завершает доказательство утверждения 2.

Утверждение 3 было фактически установлено в ходе доказательства утверждения 2.

Первая часть утверждения 4 следует из того, что все обычные представления, все одномерные псевдопредставления и все псевдохарактеры являются чистыми отображениями, т. е. их ограничения на любую аменабельную подгруппу являются гомоморфизмами подгруппы (см. утверждение 3 теоремы 2.5.2 и следствие 3.3.8). Вторая часть утверждения 4 непосредственно следует из теоремы 1.3.1. Это завершает доказательство теоремы 3.3.14. $\square$

В следующей теореме, которая может рассматриваться как свидетельство физической (впрочем, скорее метафизической) осмысленности понятия неприводимого конечномерного представления простой группы Ли, выделены важные частные случаи результатов теорем 2.5.13, 3.3.14 и 3.2.2.

Теорема 3.3.15. *Любое неприводимое локально ограниченное конечномерное неодномерное чистое псевдопредставление простой группы Ли есть обычное непрерывное представление этой группы. Любое неприводимое неограниченное локально ограниченное конечномерное квазипредставление полупростой группы Ли есть обычное непрерывное представление этой группы.*

Это утверждение не может быть распространено на случай общих квазипредставлений (как бы мал ни был положительный дефект). Сколь угодно малое возмущение представления, кратного единичному, может оказаться неприводимым.

Отметим простейший и важнейший частный случай теоремы 3.3.14.

Следствие 3.3.16. Пусть G — некомпактная связная простая группа Ли, T — квазипредставление группы G в конечномерном векторном пространстве E_T . Пусть E_T^* — пространство, сопряжённое к E_T . Пусть L — множество таких векторов $\xi \in E_T$, что орбита $\{T(g)\xi \mid g \in G\}$ ограничена. Пусть M — множество таких функционалов $f \in E_T^*$, что орбита $\{T(g)^*f \mid g \in G\}$ ограничена в E_T^* . Множества L и M — векторные подпространства в E_T и $E_T^* = E_T^*$, инвариантные относительно T и T^* соответственно, где $T^*(g)$ — оператор, сопряжённый к $T(g)$ для всех $g \in G$. Рассмотрим возрастающий набор подпространств $\{0\}$, $L \cap M^\perp$, $M^\perp$, $L + M^\perp$, $E = E_T$, где $M^\perp$ — аннулятор векторного подпространства $M \subset E_T^*$, и запишем матрицу $t(g)$ оператора $T(g)$, $g \in G$, в блочной форме, отвечающей разложению пространства E в прямую сумму подпространств $L \cap M^\perp$, $M^\perp \setminus (L \cap M^\perp)$, $L \setminus (L \cap M^\perp)$ и $E \setminus (L + M^\perp)$, где символ $\setminus$ означает взятие

дополнительного подпространства:

$$t(g) = \begin{pmatrix} 1_{L \cap M^\perp} & 0 & \sigma(g) & \tau(g) \\ 0 & \beta(g) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma(g) & \chi(g) \\ 0 & 0 & 0 & 1_{E \setminus (L + M^\perp)} \end{pmatrix}, \quad g \in G. \quad (37)$$

Здесь нули означают соответствующие нулевые операторы, а $1_{L \cap M^\perp}$ и $1_{E \setminus (L + M^\perp)}$ — единичные операторы в соответствующих пространствах. Кроме того, справедливы следующие утверждения.

1. Если группа G эрмитово симметрическая, то отображение γ является возмущением прямой суммы Γ одномерных псевдопредставлений Гишарде—Вигнера, т. е. отображений вида $g \rightarrow \exp(ir\theta(g))$, $g \in G$, для некоторых $r \in \mathbb{R}$. Если группа G не является эрмитово симметрической, то отображение γ является возмущением единичного отображения $g \mapsto 1_{L \setminus (L \cap M^\perp)}$, $g \in G$, которое мы в этом случае тоже обозначим через Γ .
2. Если группа G эрмитово симметрическая, то отображение τ является возмущением отображения $\psi: G \rightarrow \mathcal{L}(E \setminus (L + M^\perp), L \cap M^\perp)$, каждый матричный элемент которого кратен псевдохарактеру Гишарде—Вигнера θ на группе G , т. е. $\psi(g) = \theta(g)A$, $g \in G$, для некоторого линейного оператора $A \in \mathcal{L}(E \setminus (L + M^\perp), L \cap M^\perp)$, причём A — изоморфизм подпространств $E \setminus (L + M^\perp)$ и $L \cap M^\perp$. Если группа G не является эрмитово симметрической, то отображение τ — возмущение нулевого отображения, которое мы в этом случае тоже обозначим через ψ .
3. Величина возмущений (в равномерной норме на группе G), упомянутых в пунктах 1 и 2, определяется нормой ограниченного отображения γ , нормами отображений σ и χ и дефектом исходного квазипредставления t и, при данной оценке норм γ , σ и χ , сколь угодно мала при достаточно малом дефекте.
4. Аппроксимирующее отображение

$$\Theta(g) = \begin{pmatrix} 1_{L \cap M^\perp} & 0 & 0 & \psi(g) \\ 0 & \beta(g) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma(g) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{E \setminus (L + M^\perp)} \end{pmatrix}, \quad g \in G,$$

является чистым псевдопредставлением группы G , и отображение Θ (или, что равносильно, представление β) непрерывно тогда и только тогда, когда оно является локально ограниченным.

Как мы видели выше, в отличие от представлений, приводимое непрерывное конечномерное квазипредставление полупростой группы Ли может быть не вполне приводимым. Поэтому вопросы непрерывности квазипредставлений связаны с более богатым классом отображений.

Пусть G — связная группа Ли, π — её конечномерное ε -квазипредставление с достаточно малым ε . Переходя при необходимости к универсальной накрывающей группе группы G и рассматривая квазипредставление группы G как отображение её универсальной накрывающей, мы можем предполагать, что группа G односвязна. Ограничение квазипредставления π на радикал группы G близко к обычному представлению (см. теорема 2.5.14), а ограничение квазипредставления на полупростую часть, которая является в рассматриваемом случае прямым произведением связных односвязных простых групп Ли (и квазипредставление полупростой группы определяется ограничениями на эти простые сомножители), описано выше в теореме 3.3.14. Это позволяет дать описание локально ограниченных конечномерных квазипредставлений связных односвязных групп Ли, чему и посвящён следующий раздел.

3.3.6. Локально ограниченные конечномерные квазипредставления связных групп Ли

Теорема 3.3.17. Пусть G — связная односвязная группа Ли, а T — квазипредставление группы G с достаточно малым дефектом в конечномерном векторном пространстве E_T . Напомним, что по теореме Леви—Мальцева группу G можно представить в виде полупрямого произведения односвязного радикала R группы G и подгруппы Леви S (связной односвязной полупростой группы Ли, изоморфной фактор-группе G/R). Пусть E_T^* — пространство, сопряжённое к E_T . Пусть L — множество таких векторов $\xi \in E_T$, что орбита $\{T(g)\xi \mid g \in G\}$ ограничена. Пусть M — множество таких функционалов $f \in E_T^*$, что орбита $\{T(g)^*f \mid g \in G\}$ ограничена в E_T^* . Множества L и M — векторные подпространства в E_T и $E_T^* = E_T^*$, инвариантные относительно T и T^* соответственно, где $T^*(g)$ — оператор, сопряжённый к $T(g)$ для всех $g \in G$. Рассмотрим возрастающий набор подпространств $\{0\}, L \cap M^\perp, M^\perp, L + M^\perp, E = E_T$, где $M^\perp$ — аннулятор векторного подпространства $M \subset E_T^*$, и запишем матрицу $t(g)$ оператора $T(g)$, $g \in G$, в блочной форме, отвечающей разложению пространства E в прямую сумму подпространств $L \cap M^\perp, M^\perp \setminus (L \cap M^\perp), L \setminus (L \cap M^\perp), E \setminus (L + M^\perp)$, где под $A \setminus B$ для векторных подпространств B и $A, B \subset A$, понимается переход к подпространству в A , дополнительному к B :

$$t(g) = \begin{pmatrix} \alpha(g) & \varphi(g) & \sigma(g) & \tau(g) \\ 0 & \beta(g) & 0 & \rho(g) \\ 0 & 0 & \gamma(g) & \chi(g) \\ 0 & 0 & 0 & \delta(g) \end{pmatrix}, \quad g \in G. \quad (38)$$

Нули в формуле (38) означают соответствующие нулевые операторы. Кроме того, справедливы следующие утверждения.

1. Ограниченные представления α и δ эквивалентны прямым суммам произведений G -центральных унитарных характеров группы R (G -центральность означает, что эти характеры инвариантны относительно внутренних автоморфизмов группы G) на непрерывные неприводимые унитарные

представления компактных фактор-групп группы S . Отображения φ и ρ удовлетворяют условиям $\varphi(sr) = \alpha(s)\varphi(r)$ и $\rho(rs) = \varphi(r)\delta(s)$ для любых $s \in S$ и $r \in R$ и, таким образом, при данных α и δ , определяются своими ограничениями на радикал R .

2. Если группа G (или S) имеет нетривиальную эрмитово симметрическую фактор-группу, то отображение γ является шевелением прямой суммы Γ (обычных) произведений некоторых непрерывных неприводимых унитарных представлений максимальной компактной фактор-группы W группы G , некоторого одномерного псевдопредставления Гишарде—Вигнера (т. е. отображения вида $g \rightarrow \exp(ir\theta(g))$, $g \in G$, для некоторого $r \in \mathbb{R}$, где θ — псевдохарактер Гишарде—Вигнера на G) и некоторых G -центральных унитарных характеров группы R (понятие G -центральности характера радикала введено в утверждении 1 теоремы 3.3.14). Если группа G не имеет нетривиальных эрмитово симметрических фактор-групп, то отображение γ является шевелением прямой суммы (обычных) произведений некоторых непрерывных неприводимых унитарных представлений максимальной компактной фактор-группы группы G и некоторых G -центральных унитарных характеров группы R , и в этом случае мы обозначим аппроксимирующее представление тем же символом Γ .
3. Если группа S имеет нетривиальную эрмитово симметрическую фактор-группу и если $S = S_1 \times \dots \times S_n$, где каждая из групп S_i проста, то отображение τ является шевелением некоторого отображения

$$\varpi: G \rightarrow \mathcal{L}(E \setminus (L + M^\perp), L \cap M^\perp)$$

вида

$$\varpi(rs) = \alpha(r) \sum_{i=1}^n \theta_i(s) A_i + \varpi(r) \delta(s), \quad r \in R, \quad s \in S,$$

где

$$A_i \in \mathcal{L}(E \setminus (L + M^\perp), L \cap M^\perp) —$$

такие линейные операторы, что пересечение их ядер в подпространстве $E \setminus (L + M^\perp)$ тривиально,

$$\bigcap_{i=1}^n \ker A_i = \{0\} \subset E \setminus (L + M^\perp),$$

а каждая функция θ_i является продолжением псевдохарактера Гишарде—Вигнера на G_i (если он есть) на всю группу G (рассматриваемую как прямое произведение конечного числа простых односвязных групп Ли G_i) нулём на все простые сомножители, отличные от G_i . В частности, если группа S — простая односвязная эрмитово симметрических группа, то

$$\varpi(g) = \theta(g)A, \quad g \in G,$$

где θ — псевдохарактер Гишарде—Вигнера на G , а A — некоторый линейный изоморфизм,

$$A \in \mathcal{L}(E \setminus (L + M^\perp), L \cap M^\perp).$$

Если группа G не имеет нетривиальных эрмитово симметрических фактор-групп, то отображение τ является шевелением некоторого отображения

$$\varpi: G \rightarrow \mathcal{L}(E \setminus (L + M^\perp), L \cap M^\perp)$$

(которое мы, таким образом, также обозначим через ϖ) вида

$$\varpi(rs) = \varpi(r)\delta(s), \quad r \in R, \quad s \in S,$$

где ограничение отображения τ на R является шевелением $\alpha|_R\delta|_R$ -коцикла ϖ , т. е.

$$\varpi(r_1r_2) = \alpha(r_1)\varpi(r_2) + \varpi(r_1)\delta(r_2), \quad r_1, r_2 \in R,$$

и, кроме того, норма разности $\varpi(s^{-1}rs) - \delta(s^{-1})\varpi(r)\delta(s)$ равномерно мала для $s \in S$ и $r \in R$.

4. Величина возмущений (в равномерной норме на группе G), упомянутых в пунктах 2 и 3, определяется нормой ограниченного отображения γ , величиной отображений σ и χ в той же норме и дефектом исходного квазипредставления T и, при данной оценке норм γ , σ и χ , сколь угодно мала при достаточно малом дефекте квазипредставления T .
5. Отображение

$$\Theta(g) = \begin{pmatrix} \alpha(g) & \varphi(g) & 0 & \varpi(g) \\ 0 & \beta(g) & 0 & \rho(g) \\ 0 & 0 & \Gamma(g) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta(g) \end{pmatrix}, \quad g \in G,$$

аппроксимирующее квазипредставление T , является чистым псевдопредставлением группы G . Отображение Θ непрерывно тогда и только тогда, когда оно является локально ограниченным.

Доказательство. Ограничение квазипредставления T на разрешимую подгруппу R является возмущением (малым при малом дефекте) обычного представления по теореме 2.5.14. Структура ограничения квазипредставления T на полупростую подгруппу Леви S описана в теореме 3.3.14. Объединение этих двух фактов приводит к утверждению теоремы 3.3.17, если существует общее блочное разложение для блочно-диагонального квазипредставления группы S , определяемого ограничением ограниченного квазипредставления γ на S , и для диагонального представления группы R , аппроксимирующего ограничение квазипредставления γ на R .

Чтобы доказать существование общего блочного разложения для этой пары (квазипредставления и представления), рассмотрим прямое произведение P группы W (введённой в доказательстве предыдущей теоремы) и расширения $\bar{R}$

радикала R с помощью связной компоненты C центра Z_K «компактной» части K разложения Ивасава полупростой группы S . Группа Ли $\bar{R}$ разрешима по построению. Ограничение квазипредставления T на разрешимую подгруппу $\bar{R}$ является возмущением (малым при малом дефекте) обычного представления группы $\bar{R}$ (по той же теореме 2.5.14). Следовательно, это представление группы $\bar{R}$ можно считать унитарным. Это конечномерное унитарное представление разрешимой группы Ли эквивалентно некоторой прямой сумме Γ одномерных унитарных характеров группы $\bar{R}$. Таким образом, в пространстве этого представления группы $\bar{R}$ есть ортонормированный базис, в котором матрицы операторов представления диагональны. С другой стороны, ограничение нашего квазипредставления на W является шевелением (малым при малом дефекте) обычного непрерывного представления группы W по теореме 3.2.1.

Рассмотрим группу W в обычной топологии компактной группы Ли и группу $\bar{R}$ в дискретной топологии. Обе эти группы аменабельны как топологические группы. Следовательно, их произведение P тоже аменабельно. Поэтому, согласно теореме 2.5.14, ограничение квазипредставления γ на P является шевелением обычного непрерывного ограниченного представления группы P . Ввиду аменабельности группы и непрерывности представления мы можем считать это представление унитарным. Следовательно, оно является прямой суммой неприводимых унитарных представлений группы P . Но ограничение этого представления на подгруппу $\bar{R}$ тоже унитарно и поэтому тоже является прямой суммой неприводимых унитарных представлений группы $\bar{R}$. Но любое (не обязательно непрерывное в обычной топологии) неприводимое конечномерное представление разрешимой группы Ли одномерно (теорема 1.2.2) и потому тривиально на коммутанте группы $\bar{R}$. Поэтому унитарное представление группы $\bar{R}$ можно считать представлением коммутативной фактор-группы $\bar{R}/\bar{R}'$ группы $\bar{R}$ по её коммутанту $\bar{R}'$. Таким образом, любое конечномерное унитарное представление группы P можно считать представлением прямого произведения компактной группы W на коммутативную (дискретную) локально компактную группу. Но, как хорошо известно, любое неприводимое унитарное представление такого произведения групп является (обычным) произведением неприводимого непрерывного унитарного представления группы W на унитарный характер группы $\bar{R}/\bar{R}'$ или, что то же, на унитарный характер группы R' .

Напомним, что, как мы видели в доказательстве теоремы 3.3.14, ограничение $\gamma|_S$ квазипредставления γ на подгруппу Леви S мало отличается (при малом дефекте) от отображения γ' , определяемого ограничением квазипредставления γ на прямое произведение $W \times Z_{K_\Sigma}$ центра $Z_{K_\Sigma} \subset Z_K$ подгруппы $K_\Sigma = K \cap \Sigma$ группы K , входящей в разложение Ивасава $S = KAN$, и компактной подгруппы W , т. е. квазипредставления, определяемого формулой

$$\gamma'(wzk'an) = \gamma(w)\gamma(z), \quad w \in W, \quad z \in Z_{K_\Sigma}, \quad k' \in K' \cap \Sigma, \quad a \in A, \quad n \in N,$$

и тем самым норма $\|\gamma(wzk'an) - \gamma(w)\gamma(z)\|$ равномерно мала при $w \in W$, $z \in Z_{K_\Sigma}$, $k' \in K' \cap \Sigma$, $a \in A$, $n \in N$, где K' — полупростая часть группы K , как и выше. Но, как мы только что видели, ограничение квазипредставления γ на Z_K

равномерно близко к ограничению $\Gamma|_{Z_K}$ прямой суммы Γ одномерных унитарных характеров группы R' на Z_K . Таким образом, чистое псевдопредставление группы S , построенное в теореме 3.3.14 и отвечающее квазипредставлению γ' , близко к псевдопредставлению группы S , отвечающему квазипредставлению Γ' группы S , определяемому формулой

$$\Gamma'(wzk'an) = \Gamma(w)\Gamma(z), \quad w \in W, \quad z \in Z_{K\Sigma}, \quad k' \in K' \cap \Sigma, \quad a \in A, \quad n \in N.$$

Но по построению матрицы операторов квазипредставления Γ' диагональны в выбранном базисе. Поэтому и на любой подгруппе группы S , аменабельной как дискретная группа (в частности, на любой абелевой подгруппе), эти матрицы диагональны в том же базисе. С другой стороны, согласно теореме 2.3.5, если матрицы квазипредставления аменабельной дискретной группы имеют некоторую фиксированную блочную структуру (т. е. некоторый возрастающий набор инвариантных подпространств с инвариантными дополнениями), то их произведения, средние и пределы имеют ту же блочную структуру, так что среди аппроксимирующих представлений этой аменабельной группы можно найти представление, матрицы которого диагональны в том же базисе или, соответственно, имеют ту же блочную структуру. Как мы видели в теореме 3.2.1, аналогичное свойство имеют и квазипредставления компактных полупростых групп Ли. Поэтому базис в пространстве E_T , отвечающий разложению представления группы P , шевелением которого является ограничение квазипредставления γ на P , на неприводимые представления, может считаться базисом, в котором все матрицы псевдопредставления группы S , построенного в теореме 3.3.14 и аппроксимирующего квазипредставление Γ' , блочно-диагональны с неприводимыми блоками, причём операторы представления группы R' в этом базисе тоже диагональны. Таким образом, в этом базисе представление группы R , получаемое ограничением построенного выше представления группы R' , диагонализуется, а представление группы W блочно-диагонально с неприводимыми блоками. Это завершает доказательство теоремы 3.3.17. $\square$

3.4. Заключительные замечания

3.4.1. Замечания о «теореме тривиальности»

Теорема 3.2.1, являющаяся своего рода «теоремой тривиальности», автоматически даёт полное описание конечномерных унитарных квазипредставлений (с малым дефектом) полупростых компактных групп Ли, рассматриваемых в дискретной топологии (это первый пример описания конечномерных унитарных квазипредставлений с малым дефектом для неаменабельной группы), и показывает, что есть неаменабельные дискретные группы, представляющие собой простые компактные группы Ли в дискретной топологии, для которых все их конечномерные унитарные квазипредставления с малым дефектом являются возмущениями обычных представлений. С другой стороны, в 1994 г. автор высказал следующую гипотезу.

Гипотеза 3.4.1 (см. [32]). Локально компактная группа аменабельна тогда и только тогда, когда она устойчиво представима в смысле определения 2.3.2, т. е. тогда и только тогда, когда любое её слабо непрерывное унитарное квазипредставление с достаточно малым дефектом является малым возмущением обычного (сильно непрерывного) унитарного представления.

Аналогичный вопрос задал Громов в 1995 г. в [111]: существуют ли неаменабельные группы, все квазипредставления которых являются возмущениями обычных представлений?

Теорема 3.2.1 показывает, что для проверки справедливости гипотезы 3.4.1 необходимо привлекать бесконечномерные унитарные представления группы.

3.4.2. Заключительные замечания и нерешённые задачи

Отметим также непосредственное следствие теорем 1.5.20 и 1.5.22.

Следствие 3.4.2. Если G — совершенная связная группа Ли и H — связная группа Ли, то любой гомоморфизм G в H , переводящий ограниченные множества в G в ограниченные множества в H , непрерывен. Образ любого такого гомоморфизма совершенен. В частности, любой изоморфизм совершенной связной группы Ли на связную группу Ли, переводящий ограниченные множества в ограниченные, непрерывен и потому является топологическим изоморфизмом совершенных групп Ли.

Отметим следующий критерий непрерывности конечномерных представлений связных групп Ли.

Следствие 3.4.3. Пусть G — связная группа Ли. Данное локально ограниченное конечномерное представление группы G непрерывно тогда и только тогда, когда ограничение этого представления на радикал непрерывно.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда группа односвязна. В этом случае ограничение представления на подгруппу Леви непрерывно по теореме 1.3.1, а ограничение на радикал непрерывно по условию. $\square$

Как мы видели (см. пример 1.4.9), аналогичный критерий непрерывности конечномерных представлений локально компактных групп не имеет места.

Отметим в заключение, что за пределами семейства локально компактных групп семейство разрывных представлений группы может быть устроено сложнее, чем в локально компактном случае, даже в классе групп, весьма близких к компактным, например в классе псевдокомпактных групп. В [42] приведён пример характера связной псевдокомпактной группы, для которого и группа разрывов, и группа финальных разрывов есть группа корней третьей степени из единицы. Изучение условий непрерывности в более общих классах топологических групп и их представлений и гомоморфизмов представляет несомненный интерес.

4. Дополнение. Обзор близких результатов

Здесь приведены результаты, связанные с другими направлениями исследований по теории отображений, близких к представлениям.

4.1. Аппроксимативные представления C^* -алгебр

В этом кратком обзоре теории так называемых аппроксимативных, асимптотических и почти представлений C^* -алгебр и их приложений учтены результаты статей [1, 2, 8–16, 53, 54, 56, 57, 60, 66, 69, 73, 77–81, 83–85, 87, 93–95, 107, 108, 111, 113, 115, 119, 120, 155–157, 159, 160, 162, 166–171, 174, 236, 237, 244].

Понятие асимптотического представления, введённое в [81], многократно подвергалось различным модификациям. В различных ситуациях асимптотический гомоморфизм из A в B — это непрерывное семейство отображений $\varphi_t: A \rightarrow B$, асимптотически удовлетворяющее аксиомам $*$ -гомоморфизмов C^* -алгебр.

Определение 4.1.1. Пусть A и B — C^* -алгебры. Асимптотическим гомоморфизмом из A в B называется такое семейство отображений

$$\{\varphi_t\}_{t \in [1, \infty)}: A \rightarrow B,$$

что

- 1) отображения $t \mapsto \varphi_t(a)$, $a \in A$, непрерывны по t для любого $a \in A$;
- 2) $\lim_{t \rightarrow \infty} (\varphi_t(a) + \alpha \varphi_t(a') - \varphi_t(a + \alpha a')) = 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} (\varphi_t(a) \varphi_t(a') - \varphi_t(aa')) = 0$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} (\varphi_t(a)^* - \varphi_t(a^*)) = 0$ для любых $a, a' \in A$ и $\alpha \in \mathbb{C}$.

Можно показать (см., например, [80]), что для любого асимптотического гомоморфизма $\{\varphi_t\}_{t \in [1, \infty)}: A \rightarrow B$ неравенство

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\varphi_t(a)\| \leq \|a\|$$

выполняется для всех $a \in A$.

Определение 4.1.2. Пусть B — C^* -алгебра. Обозначим через CB семейство ограниченных непрерывных B -значных функций на $[1, \infty)$ и снабдим его естественной структурой C^* -алгебры. Пусть C_0B — идеал в CB , образованный функциями, стремящимися к нулю на бесконечности, и пусть QB — фактор-алгебра CB/C_0B . Назовём QB асимптотической алгеброй для B . Асимптотические гомоморфизмы $\{\varphi_t\}_{t \in [1, \infty)}$, $\{\varphi'_t\}_{t \in [1, \infty)}$ называются асимптотически эквивалентными, если $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi_t(a) - \varphi'_t(a)\| = 0$ для любого $a \in A$.

Отметим некоторые свойства этих понятий [80]. Асимптотический гомоморфизм $\{\varphi_t\}: A \rightarrow B$ индуцирует гомоморфизм групп $K_*(A) \rightarrow K_*(B)$. Кроме того, асимптотические гомоморфизмы допускают композицию на гомотопическом уровне, и композиция является согласованной с этим гомоморфизмом K -групп. Гомотопические классы эквивалентности асимптотических гомоморфизмов из $C_0(\mathbb{R}) \otimes A$ в $C_0(\mathbb{R}) \otimes B \otimes \mathcal{K}$ ($\mathcal{K}(\mathcal{H}) = \mathcal{K}$ — C^* -алгебра компактных

операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве) образуют абелеву группу $E(A, B)$. Тем самым построен бифунктор E , и композиция асимптотических гомоморфизмов определяет мультипликативную структуру, аналогичную произведению Каспарова в KK -теории. На самом деле существует естественное (мультипликативное) отображение $KK(A, B) \rightarrow E(A, B)$. Это отображение является изоморфизмом на классе K -ядерных C^* -алгебр Скандалиса, а короткие точные последовательности C^* -алгебр приводят к периодическим шестичленным точным последовательностям в E -теории по обоим переменным (без предположения ядерности).

В [12] отображения, близкие к гомоморфизмам, вводятся несколько иначе. Пусть $\mathcal{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство, и пусть $\mathcal{Q}(\mathcal{H}) = \mathcal{B}(\mathcal{H})/K(\mathcal{H})$ — соответствующая алгебра Калкина. Если $f = \{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ — строго возрастающая последовательность положительных целых чисел и если выбрано некоторое отождествление пространства $\mathbb{C}^{n_k}$ с подпространством в $\mathbb{C}^{n_{k+1}} \subset H$, а $\sigma = \{\sigma_k\}$ ($\sigma_k(g^{-1}) = \sigma_k(g)^{-1}$ для всех $g \in G$ и $k \in \mathbb{N}$) — последовательность отображений дискретной конечно представимой группы π в унитарные группы указанных подпространств (или в их индуктивный предел $U(\infty)$), удовлетворяющих условию

$$\|\sigma_k(gh) - \sigma_k(g)\sigma_k(h)\| \leq \varepsilon_k$$

для всех таких g, h из некоторого конечного подмножества $F \subset \pi$, что $gh \in F$, где $\varepsilon_k \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{g \in F \subset \pi} \|\sigma_k(g) - \sigma_{k+1}(g)\| = 0$, то последователь-

ность σ называется *асимптотическим представлением* группы π относительно конечного подмножества F и последовательности $\{n_k\}$. С помощью вычисления K -групп в [12, 167] показано, что эти асимптотические представления можно рассматривать как асимптотические фредгольмовы представления (но не обязательно фредгольмовы [16]), а в [174] указана связь между асимптотическими представлениями в $U(\infty)$ в рассматриваемом смысле и асимптотическими представлениями в смысле работ [79, 80, 118]. В частности, в случае если классифицирующее пространство $B\pi$ есть конечный комплекс, в [174] приведена явная конструкция векторного расслоения по асимптотическому гомоморфизму, что и определяет естественный гомоморфизм кольца асимптотических представлений в $K^0(B\pi)$. Отметим также, что в [10] указан пример дискретной группы, а именно группы Γ с образующими a, b, c и соотношениями $aca^{-1}c^{-1} = b^2 = (ab)^2 = e$, не обладающей достаточным запасом асимптотических представлений.

Пусть $U(\infty) = \lim_{m \rightarrow \infty} \text{ind } U(m)$ — естественный индуктивный предел конечномерных унитарных групп, и пусть Γ — конечно представимая дискретная группа с образующими $(g_1, \dots, g_n)$ и связывающими их определяющими соотношениями $r_1(g_1, \dots, g_n) = e, \dots, r_k(g_1, \dots, g_n) = e$. Набор операторов $\sigma = (u_1, \dots, u_n)$, $u_j \in U(\infty)$, $j = 1, \dots, n$, называется ε -почти представлением дискретной группы Γ , если $\|r_j(u_1, \dots, u_n) - I\| \leq \varepsilon$ для всех $j = 1, \dots, k$. Пусть

$$\|\sigma\| = \max_j \|r_j(u_1, \dots, u_n) - I\|.$$

С этой точки зрения асимптотическое представление группы Γ задаётся набором таких унитарных ($\|\cdot\|$ -непрерывных) путей

$$\{\sigma_t = (u_1(t), \dots, u_n(t))\}_{t \in [0, \infty)} \subset U(\infty),$$

что $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\sigma_t\| = 0$. Пусть $R_{\text{asym}}(\Gamma)$ — группа Гротендика всех асимптотических представлений группы Γ .

Дискретная группа Γ называется *имеющей свойство ППА* («почти представления с малой $\|\sigma_t\|$ -характеристикой порождают асимптотические представления»), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(\varepsilon) = 0$ и для любого ε -почти представления σ группы Γ существует такое $\{\sigma_t\}_{t \in [0, \infty)} \in R_{\text{asym}}(\Gamma)$, что $\sigma_0 = \sigma$ и $\|\sigma_t\| \leq \delta(\varepsilon)$. В [10] показано, что свободные группы, конечные группы, свободные абелевы группы и фундаментальные группы ориентированных двумерных поверхностей имеют свойство ППА, что существенно облегчает вычисления, позволяя работать с почти представлениями вместо асимптотических представлений.

Вернемся к асимптотическим гомоморфизмам в смысле определения 4.1.2 и рассмотрим несколько другой вариант определения.

Определение 4.1.3. Пусть A и B — C^* -алгебры. Будем говорить, что семейство отображений $\psi = (\psi_t)_{t \in \mathbb{R}}: A \rightarrow B$ есть *асимптотический гомоморфизм* (ср. [15]), если

- 1) отображение $t \mapsto \psi_t(a)$ непрерывно для любого $a \in A$;
- 2) $\lim_{t \rightarrow -\infty} \psi_t(a) = 0$ для любого $a \in A$;
- 3) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\psi_t(ab) - \psi_t(a)\psi_t(b)\| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\psi_t(\lambda a + b^*) - \lambda\psi_t(a) - \psi_t(b)^*\| = 0$ для любых $a, b \in A$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Напомним, что общий подход к изучению расширений C^* -алгебр был предложен Брауном, Дугласом и Филлмором в [66] и развит Каспаровым [8]. Недостаток этого подхода состоит в том, что он не всегда создаёт групповую структуру на множестве классов расширений, даже когда гомотопические классы расширений образуют группу. После появления конструкции Конна—Хигсона возник вопрос о свойствах объектов, которые можно получить с её помощью. В. М. Мануйлов и К. Томсен [13—15, 168—171] получили полную информацию об асимптотическом гомоморфизме в смысле последнего определения, полученном конструкцией Конна—Хигсона.

Пусть $\tau = (\tau_s)_{s \in \mathbb{R}}$ — действие группы $\mathbb{R}$ на «надстройке» $SA = C_0(\mathbb{R}, A)$ сдвигами, т. е. $\tau_s(f)(t) = f(t - s)$ для $f \in SA$ и $t, s \in \mathbb{R}$, и пусть $\psi = (\psi_t)_{t \in \mathbb{R}}: SA \rightarrow B$ — асимптотический гомоморфизм. Назовём ψ *асимптотически трансляционно инвариантным*, если $\lim_{t \rightarrow +\infty} (\psi_{t-s}(f) - \psi_t \circ \tau_s(f)) = 0$ для всех $s \in \mathbb{R}$, $f \in SA$, и *трансляционно инвариантным*, если он равномерно непрерывен и $\psi_t \circ \tau_s = \psi_{t-s}$ для всех $t, s \in \mathbb{R}$. Два (асимптотически) трансляционно инвариантных гомоморфизма φ и ψ *гомотопны*, если существует такой (асимптотически) трансляционно инвариантный гомоморфизм

$\Phi: SA \rightarrow IB (= C[0, 1] \otimes B)$, что $ev_1 \circ \Phi_t = \varphi_t$ и $ev_0 \circ \Phi_t = \psi_t$ для всех $t \in \mathbb{R}$, где $ev_s: IB \rightarrow B$ — гомоморфизм вычисления в точке $s \in [0, 1]$. Обозначим через $[[SA, B]]_\tau$ множество гомотопических классов трансляционно инвариантных гомоморфизмов, а через $[[SA, B]]_{a, \tau}$ множество гомотопических классов асимптотически трансляционно инвариантных гомоморфизмов из SA в B .

В дальнейшем будем считать, что A — сепарабельная, а B — σ -унитальная C^* -алгебра. Обозначим через $M(B)$ алгебру мультипликаторов алгебры B , т. е. идеализатор алгебры B в обёртывающей алгебре фон Неймана B^{**} (напомним, что для любой C^* -алгебры B первое и второе умножения Аренса на B^{**} совпадают), а через $Q(B)$ — обобщённую алгебру Калкина $M(B)/B$. *Расширение* C^* -алгебры A с помощью C^* -алгебры B — это короткая точная последовательность C^* -алгебр $0 \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow 0$. Поскольку каждый элемент алгебры A определяет элемент фактор-алгебры E/B и потому мультипликатор алгебры B с точностью до элемента самой алгебры B [73], то каждое расширение $0 \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow A \rightarrow 0$ естественно определяет $*$ -гомоморфизм алгебры A в $Q(B)$, который может быть выписан явно по некоторым дополнительно конструируемым объектам, что определяет отображение $CH_\tau: \text{Ext}_h(A, B) \rightarrow [[SA, B]]_\tau$, где $\text{Ext}_h(A, B)$ — множество гомотопических классов расширений C^* -алгебры A с помощью C^* -алгебры B . Полученный таким образом асимптотический гомоморфизм трансляционно инвариантен, и любой асимптотический гомоморфизм $CH(\psi): SA \rightarrow B$, полученный с помощью конструкции Конна—Хигсона [80], гомотопен трансляционно инвариантному асимптотическому гомоморфизму.

Следующий результат является одним из самых замечательных достижений последних лет, связанных с изучением расширений C^* -алгебр с помощью асимптотических гомоморфизмов.

Теорема 4.1.4 [15]. Пусть A и B — C^* -алгебры, причём A сепарабельна, а B является σ -унитальной (т. е. имеет счётную аппроксимативную единицу) и стабильной (т. е. изоморфна своему тензорному произведению на C^* -алгебру компактных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве). Тогда имеет место изоморфизм $[[SA, B]]_{a, \tau} \simeq [[SA, B]]_\tau$ (абелевых полугрупп), и построенное выше отображение

$$CH_\tau: \text{Ext}_h(A, B) \rightarrow [[SA, B]]_\tau$$

есть изоморфизм.

Как отмечено в [15], группа $[[SA, B \otimes \mathbb{K}]]_\tau$ совпадает с группой $E(SA, B)$ по крайней мере в двух известных случаях: когда алгебра A ядерна и когда она является надстройкой.

Эквивариантной E -теории посвящена работа [115].

4.2. Вариант проблемы Серра

Условия замкнутости подгрупп конечного индекса в конечно порождённых проконечных группах выяснены полностью. Тем самым полностью решена про-

блема Серра: все подгруппы конечного индекса в конечно порождённой проконечной группе замкнуты (см. [185—187]).

Отметим факты, поясняющие проблему. Любая подгруппа конечного индекса в конечно порождённой про- p -группе, в произведении простых неабелевых конечных групп или в проразрешимой группе замкнута. Существует пример проконечной нильпотентной группы высоты 2 с простым показателем (эта группа является прямым произведением счётного числа конечных групп), в которой коммутант незамкнут, а любая конечная подгруппа в дополнении к коммутанту имеет плотное дополнение, но не имеет замкнутого дополнения. В то же время неметризуемые компактные вполне несвязные группы могут содержать более чем континуум незамкнутых подгрупп конечного индекса. В частности, компактные вполне несвязные группы несчётного веса содержат собственные плотные незамкнутые псевдокомпактные подгруппы конечного индекса (см. литературу в [185—187]).

Приведём обещанное выше следствие теоремы 1.5.5. Поскольку произведения замкнутых подмножеств локально компактной группы не обязательно замкнуты, это утверждение не является прямым следствием теоремы Сигала—Николова [185—187], дающей положительное решение проблемы Серра для компактных вполне несвязных топологически конечно порождённых групп.

Теорема 4.2.1. Пусть G — локально компактная вполне несвязная топологическая группа, пусть $\{g_n\}$, $n \in I$, $I \subset \mathbb{N}$, — конечный или счётный набор элементов группы G , пусть G_n — подгруппа группы G , топологически порождённая элементом g_n , $n \in I$, и пусть группа G алгебраически порождена набором подгрупп G_n , $n \in I$. Тогда любая подгруппа $N \subset G$ (конечного) нечётного индекса замкнута в G (и поэтому открыта в G).

Доказательство. По теореме 1.5.5 достаточно доказать, что любое конечно-мерное представление S группы G , для которого $\omega(S) < 2$, непрерывно. Рассмотрим ограничение представления S на каждую из подгрупп G_n . Замкнутость всех подгрупп конечного индекса в G_n известна [185] (и к тому же очевидна, потому что фактор-группа по подгруппе конечного индекса конечна и все элементы этой группы равны единице после возведения в степень, равную индексу подгруппы, причём это отображение является непрерывным гомоморфизмом, так что его образ компактен, а следовательно, замкнут и открыт). Расположим всевозможные конечные упорядоченные наборы подгрупп G_n (возможно, с повторениями) в последовательность (скажем, с индексом $m \in \mathbb{N}$), рассмотрим (очевидно, компактные и монотонно неубывающие) образы K_m отображения произведения первых m подгрупп последовательности в группу G и введём множества L_m , $m \in \mathbb{N}$, по правилу

$$L_1 = K_1, \quad L_m = K_m \setminus \bigcup_{j=1}^{m-1} K_j \quad \text{при } m \geq 2.$$

Очевидно, каждое множество L_m есть разность компактов и потому борелевское множество (конечно, из первого класса Бэра). Множества L_m попарно не пересекаются, и их сумма равна G .

Согласно [89], на каждом из множеств K_m отображение произведения имеет борелевское сечение. Объединяя ограничения этих сечений на множества L_m , мы получаем борелевское сечение F на всей группе G со значениями в финитных последовательностях элементов групп G_{n_m} , т. е. групп вида G_n , расположенных в указанной выше последовательности (финитность означает, что все элементы последовательности, кроме конечного их числа, равны единичному элементу), и, таким образом, со значениями в прямой сумме групп G_{n_m} . Так как ограничение представления S на каждую подгруппу вида G_n непрерывно, то композиция сечения с отображением

$$\{g_m\} \mapsto \prod_{k=1}^{\infty} S(g_m), \quad \{g_m\} \in \sum_{m=1}^{\infty} G_{n_m},$$

является борелевским отображением группы G в группу обратимых операторов в конечномерном пространстве и при этом совпадает с отображением S , поскольку S — представление. Но любое борелевское представление локально компактной группы непрерывно [183]. Итак, любое конечномерное представление группы G непрерывно. Остаётся снова применить теорему 1.5.5. $\square$

Литература

- [1] Вершик А. М. Комментарии к русскому переводу // Фон Нейман Дж. Избранные труды по функциональному анализу. Т. I. — М.: Наука, 1988. — С. 372—374.
- [2] Вершик А. М., Карпушев С. И. Когомологии групп в унитарных представлениях, окрестность единицы и условно положительно определённые функции // Мат. сб. — 1982. — Т. 119 (161), № 4 (12). — С. 521—533.
- [3] Гишарде А. Когомологии топологических групп и алгебр Ли. — М.: Мир, 1984.
- [4] Гринлиф Ф. Инвариантные средние на топологических группах и их приложения. — М.: Мир, 1973.
- [5] Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Т. I. — М.: Изд. иностр. лит., 1962.
- [6] Диксмье Ж. C^* -алгебры и их представления. — М.: Наука, 1974.
- [7] Дэй М. М. Нормированные линейные пространства. — М.: Наука, 1961.
- [8] Каспаров Г. Г. Операторный K -функтор и расширения C^* -алгебр // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — Т. 44, № 3. — С. 571—636.
- [9] Мануйлов В. М. О почти представлениях групп $\pi \times \mathbf{Z}$ // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. — 1999. — Т. 225. — С. 257—263.
- [10] Мануйлов В. М. Почти представления и асимптотические представления дискретных групп // Изв. РАН. Сер. мат. — 1999. — Т. 63, № 5. — С. 159—178.
- [11] Мануйлов В. М. О C^* -алгебрах, связанных с асимптотическими гомоморфизмами // Мат. заметки. — 2000. — Т. 68, № 3. — С. 377—384.
- [12] Мануйлов В. М., Мищенко А. С. Асимптотические и фредгольмовы представления дискретных групп // Мат. сб. — 1998. — Т. 189, № 10. — С. 53—72.

- [13] Мануйлов В. М., Томсен К. Асимптотически расщепимые расширения и E -теория // Алгебра и анализ. — 2000. — Т. 12, № 5. — С. 142—157.
- [14] Мануйлов В. М., Томсен К. Отображение Конна—Хигсона является изоморфизмом // Успехи мат. наук. — 2001 — Т. 56, № 4. — С. 151—152.
- [15] Мануйлов В. М., Томсен К. Трансляционно инвариантные асимптотические гомоморфизмы и расширения C^* -алгебр // Функц. анализ и его прил. — 2005. — Т. 39, № 3. — С. 87—91.
- [16] Мищенко А. С. О фредгольмовых представлениях дискретных групп // Функц. анализ и его прил. — 1975. — Т. 9, № 2. — С. 36—41.
- [17] Улам С. Нерешённые математические задачи. — М.: Наука, 1964.
- [18] Файзиев В. А. Псевдохарактеры на свободных произведениях полугрупп // Функц. анализ и его прил. — 1987. — Т. 21, № 1. — С. 86—87.
- [19] Файзиев В. А. Псевдохарактеры на свободных группах и некоторых групповых конструкциях // Успехи мат. наук. — 1988. — Т. 43, № 5. — С. 225—226.
- [20] Фейгин Б. Л., Фукс Д. Б. Когомологии групп и алгебр Ли // Итоги науки и техники. Сер. Совр. пробл. математики. Фундаментальные направления. Т. 21. — М.: ВИНТИ, 1988. — С. 121—209.
- [21] Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. — М.: Мир, 1964.
- [22] Хелемский А. Я. Гомология в банаховых и топологических алгебрах. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986.
- [23] Хелемский А. Я. Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомологии. — М.: Наука, 1989.
- [24] Хьюитт Э., Росс К. А. Абстрактный гармонический анализ. Т. I. — М.: Наука, 1975.
- [25] Шефер Х. Топологические векторные пространства. — М.: Мир, 1971.
- [26] Штерн А. И. О жёсткости положительных характеров // Успехи мат. наук. — 1980. — Т. 35, № 5. — С. 218.
- [27] Штерн А. И. Об устойчивости гомоморфизмов в группу R^* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. I, Математика, механика. — 1982. — № 3. — С. 29—32.
- [28] Штерн А. И. Устойчивость представлений и псевдохарактеры // Ломоносовские чтения. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983.
- [29] Штерн А. И. Псевдохарактер, определённый символом Радемахера // Успехи мат. наук. — 1990. — Т. 45, № 3. — С. 197—198.
- [30] Штерн А. И. Квазипредставления и псевдопредставления // Функц. анализ и его прил. — 1991. — Т. 25, № 2. — С. 87—91.
- [31] Штерн А. И. Об операторах в пространствах Фреше, подобных изометриям // Вестн. Моск. ун-та. Сер. I, Математика, механика. — 1991. — № 4. — С. 94—96.
- [32] Штерн А. И. Характеризации аменабельных групп в классе связных локально компактных групп // Успехи мат. наук. — 1994. — Т. 49, № 2. — С. 183—184.
- [33] Штерн А. И. Жёсткость и аппроксимация квазипредставлений аменабельных групп // Мат. заметки. — 1999. — Т. 65, № 6. — С. 908—920.
- [34] Штерн А. И. Структурные свойства и ограниченные вещественные непрерывные 2-когомологии локально компактных групп // Функц. анализ и его прил. — 2001. — Т. 35, № 4. — С. 67—80.

- [35] Штерн А. И. Критерии слабой и сильной непрерывности представлений топологических групп в банаховых пространствах // Мат. сб. — 2002. — Т. 193, № 9. — С. 139—156.
- [36] Штерн А. И. Деформация неприводимых унитарных представлений дискретной серии эрмитово симметрических простых групп Ли в классе чистых псевдопредставлений // Мат. заметки. — 2003. — Т. 73, № 3. — С. 478—480.
- [37] Штерн А. И. Деформация неприводимых унитарных представлений дискретной серии эрмитово симметрических простых групп Ли в классе чистых псевдопредставлений // Соврем. мат. и её прил. — 2003. — Т. 1. — С. 161—176.
- [38] Штерн А. И. Критерии непрерывности конечномерных представлений групп // Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования. — М.: Наука, 2003. — С. 122—124.
- [39] Штерн А. И. Критерии непрерывности конечномерных представлений связных локально компактных групп // Мат. сб. — 2004. — Т. 195, № 9. — С. 145—159.
- [40] Штерн А. И. Почти периодические функции и представления в локально выпуклых пространствах // Успехи мат. наук. — 2005. — Т. 60, № 3. — С. 97—168.
- [41] Штерн А. И. Проективные представления и чистые псевдопредставления эрмитово симметрических простых групп Ли // Мат. заметки. — 2005. — Т. 78, № 1. — С. 140—146.
- [42] Штерн А. И. Сильная и слабая непрерывность представлений топологически псевдополных групп в локально выпуклых пространствах // Мат. сб. — 2006. — Т. 197, № 3. — С. 155—167.
- [43] Штерн А. И. Проблема Каждана—Мильмана для полупростых компактных групп Ли // Успехи мат. наук. — 2007. — Т. 62, № 1. — С. 123—190.
- [44] Штерн А. И. Вариант теоремы ван дер Вардена и доказательство гипотезы Мищенко для гомоморфизмов локально компактных групп. — В печати.
- [45] Энгелькинг Р. Общая топология. — М.: Мир, 1986.
- [46] Abel M., Jarosz K. Small deformations of topological algebras // Studia Math. — 2003. — Vol. 156, no. 3. — P. 202—226.
- [47] Araujo J., Jarosz K. Separating maps on spaces of continuous functions // Function Spaces. Proc. 3rd Conf. (Edwardsville, IL, 1998). — Providence: Amer. Math. Soc., 1999. — (Contemp. Math.; Vol. 232). — P. 33—37.
- [48] Bagley R. W., Wu T. S., Yang J. S. Pro-Lie groups // Trans. Amer. Math. Soc. — 1985. — Vol. 287, no. 2. — P. 829—838.
- [49] Baker J. W., Lashkarizadeh B. M. Representations and positive definite functions on topological semigroups // Glasgow Math. J. — 1996. — Vol. 38, no. 1. — P. 99—111.
- [50] Baker J., Lawrence J., Zorzitto F. The stability of equation $f(xy) = f(x)f(y)$ // Proc. Amer. Math. Soc. — 1979. — Vol. 74, no. 2. — P. 242—246.
- [51] Banach S. Théorie des opérations linéaires. — Warsaw: PWN, 1932. — (Monogr. Mat.).
- [52] Banyaga A. Sur la structure du groupe des difféomorphismes qui préservent une forme symplectique // Comm. Math. Helv. — 1978. — Vol. 53, no. 2. — P. 174—227.
- [53] Barge J., Ghys E. Surfaces et cohomologie bornée // Invent. Math. — 1988. — Vol. 92. — P. 509—526.

- [54] Barge J., Ghys E. Cocycles d'Euler et de Maslov // *Math. Ann.* — 1992. — Vol. 294, no. 2. — P. 235–265.
- [55] Bavard C. Longueur stable des commutateurs // *Enseign. Math.* — 1991. — Vol. 37. — P. 109–150.
- [56] Beggs E. J. Pointwise bounded asymptotic morphisms and Thomsen's non-stable k -theory. — 2002. — [arXiv:math.OA/0201051](https://arxiv.org/abs/math.OA/0201051).
- [57] Bekka M. B., de la Harpe P., Valette A. Kazhdan's Property (T). — 2004. — <http://perso.univ-rennes1.fr/bachir.bekka/KazhdanTotal.pdf>.
- [58] Besson G. Sur la cohomologie bornée // Report. Séminaire cohomologie bornée. — Éc. Norm. Sup. Lyon, Février 1988.
- [59] Biran P., Entov M., Polterovich L. Calabi quasimorphisms for the symplectic ball // *Commun. Contemp. Math.* — 2004. — Vol. 6, no. 5. — P. 793–802.
- [60] Blackadar B., Kirchberg E. Generalized inductive limits of finite-dimensional C^* -algebras // *Math. Ann.* — 1997. — Vol. 307, no. 3. — P. 343–380.
- [61] Borel A. Sections locales de certains espaces fibrés // *C. R. Acad. Sci. Paris.* — 1950. — Vol. 230. — P. 1246–1248.
- [62] Bouarich A. Suites exactes en cohomologie bornée réelle des groupes discrets // *C. R. Acad. Sci. Paris.* — 1995. — Vol. 320. — P. 1355–1359.
- [63] Bourbaki N. Lie groups and Lie algebras. Chapters 7–9. — Berlin: Springer, 2005.
- [64] Brooks R. Some remarks on bounded cohomology // *Riemann Surfaces and Related Topics. Proc. 1978 Stony Brook Conf.* (State Univ. New York, Stony Brook, NY, 1978). — Princeton: Princeton Univ. Press, 1981. — (*Ann. Math. Stud.*; Vol. 97). — P. 53–63.
- [65] Brown L. G. Continuity of actions of groups and semigroups on Banach spaces // *J. London Math. Soc.* (2). — 2000. — Vol. 62, no. 1. — P. 107–116.
- [66] Brown L. G., Douglas R. G., Fillmore P. A. Extensions of C^* -algebras and K -homology // *Ann. Math.* — 1977. — Vol. 105, no. 2. — P. 265–324.
- [67] Brown L. G., Wong N. C. Unbounded disjointness preserving linear functionals // *Monatsh. Math.* — 2004. — Vol. 141, no. 1. — P. 21–32.
- [68] Brzdek J. On orthogonally exponential and orthogonally additive mappings // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1997. — Vol. 125. — P. 2127–2132.
- [69] Bühler T. Gromov's Geodesic Flow. — Diplomarbeit. — Zürich: ETZ, 2002.
- [70] Burger M., Iozzi A. Boundary maps in bounded cohomology // *Geom. Funct. Anal.* — 2002. — Vol. 12, no. 2. — P. 281–292.
- [71] Burger M., Monod N. Continuous bounded cohomology and applications to rigidity theory // *Geom. Funct. Anal.* — 2002. — Vol. 12, no. 2. — P. 219–280.
- [72] Burger M., Monod N. On and around the bounded cohomology of SL_2 // *Rigidity in Dynamics and Geometry. Contrib. from the Programme Ergodic Theory, Geometric Rigidity and Number Theory*, Isaac Newton Inst. for the Math. Sci., Cambridge, January 5–July 7, 2000. — Berlin: Springer, 2002. — P. 19–37.
- [73] Busby R. C. Double centralizers and extensions of C^* -algebras // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1968. — Vol. 132, no. 1. — P. 79–99.
- [74] Calabi E. On the group of automorphisms of a symplectic manifold // *Problems in Analysis (Lectures at the Symp. in Honor of Salomon Bochner, Princeton Univ., Princeton, N.J., 1969).* — Princeton: Princeton Univ. Press, 1970. — P. 1–26.

- [75] Cambern M. On isomorphisms with small bound // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1967. — Vol. 18. — P. 1062–1066.
- [76] Cartan É. Les groupes réels simples, finis et continus // *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*. — 1914. — Vol. 31. — P. 263–355.
- [77] Christensen E. Close operator algebras // *Deformation Theory of Algebras and Structures and Applications*, NATO Adv. Study Inst., Castelveccchio—Pascoli/Italy, 1986. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1988. — (NATO ASI Ser., Ser. C, Math. Phys. Sci.; Vol. 247). — P. 537–556.
- [78] Christensen E., Effros E. G., Sinclair A. Completely bounded multilinear maps and C^* -algebraic cohomology // *Invent. Math.* — 1987. — Vol. 90, no. 2. — P. 279–296.
- [79] Connes A., Gromov M. L., Moscovici H. Conjecture de Novikov et fibrés presque plats // *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math.* — 1990. — Vol. 310, no. 5. — P. 273–277.
- [80] Connes A., Higson N. Almost homomorphisms and KK -theory. — 1989. — <http://www.math.psu.edu/higson/Papers/ch1.pdf>.
- [81] Connes A., Higson N. Déformations, morphismes asymptotiques et K -théorie bivariente // *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math.* — 1990. — Vol. 311, no. 2. — P. 101–106.
- [82] Corach G., Galé J. E. On amenability and geometry of spaces of bounded representations // *J. London Math. Soc. (2)*. — 1999. — Vol. 59, no. 1. — P. 311–329.
- [83] Cuntz J. Bivariente K -Theorie für lokalkonvexe Algebren und der bivariente Chern–Connes-Charakter // *Doc. Math.* — 1997. — Vol. 2. — P. 139–182.
- [84] Cuntz J. Bivariant K -theory and the Weyl algebra. — 2004. — [arXiv:math.KT/0401295](https://arxiv.org/abs/math.KT/0401295).
- [85] Dadarlat M., Eilers S. Asymptotic unitary equivalence in KK -theory // *K-Theory*. — 2001. — Vol. 23. — P. 305–322.
- [86] Dales H. G., Ghahramani F., Helemskii A. Ya. The amenability of measure algebras // *J. London Math. Soc. (2)*. — 2002. — Vol. 66, no. 1. — P. 213–226.
- [87] Dales H. G., Villena A. R. Continuity of derivations, intertwining maps, and cocycles from Banach algebras // *J. London Math. Soc. (2)*. — 2001. — Vol. 63, no. 2. — P. 215–225.
- [88] Dani S. G., Raja C. R. E. Asymptotics of measures under group automorphisms and an application of factor sets // *Lie Groups and Ergodic Theory. Proc. Int. Colloq., Mumbai, India, January 4–12, 1996*. — New Delhi: Narosa Publ. House, 1998. — (Tata Inst. Fundam. Res. Stud. Math.; Vol. 14). — P. 59–73.
- [89] Debs G., Saint Raymond J. Compact covering mappings between Borel sets and the size of constructible reals // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 2004. — Vol. 356, no. 1. — P. 73–117.
- [90] Dedekind R. Erläuterungen zu den Fragmenten, XXVIII // *Collected Works of Bernhard Riemann*. — New York: Dover, 1953. — P. 466–478.
- [91] Duncan J., Hosseiniun S. A. R. The second dual of a Banach algebra // *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*. — 1979. — Vol. 19. — P. 309–325.
- [92] Dupont J.-L. Simplicial de Rham cohomology and characteristic classes of flat bundles // *Topology*. — 1976. — Vol. 15. — P. 233–245.
- [93] Effros E. G., Ruan Z.-J. Operator spaces. — New York: Clarendon Press, Oxford Univ. Press, 2000. — (London Math. Soc., New Ser.; Vol. 23).

- [94] Eilers S., Loring T. A. Computing contingencies for stable relations // *Internat. J. Math.* — 1999. — Vol. 10, no. 3. — P. 301–326.
- [95] Elliott G. A., Lin Q. Cut-down method in the inductive limit decomposition of non-commutative tori // *J. London Math. Soc. (2)*. — 1996. — Vol. 54, no. 1. — P. 121–134.
- [96] Entov M. Commutator length of symplectomorphisms // *Comment. Math. Helv.* — 2004. — Vol. 79. — P. 58–104.
- [97] Entov M., Polterovich L. Calabi quasimorphism and quantum homology // *Internat. Math. Res. Notices.* — 2003. — Vol. 30. — P. 1635–1676.
- [98] Exel R., Laca M. Continuous Fell bundles associated to measurable twisted actions // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 1997. — Vol. 125, no. 3. — P. 795–799.
- [99] Exel R., Loring T. A. Invariants of almost commuting unitaries // *J. Funct. Anal.* — 1991. — Vol. 95, no. 2. — P. 364–376.
- [100] Eymard R. L'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact // *Bull. Soc. Math. France.* — 1964. — Vol. 92. — P. 181–236.
- [101] Forrest B. E., Runde V. Amenability and weak amenability of the Fourier algebra // *Math. Z.* — 2004. — Vol. 250. — P. 731–744.
- [102] Forti G. L. The stability of homomorphisms and amenability, with applications to functional equations // *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg.* — 1987. — Vol. 57. — P. 215–226.
- [103] Freudenthal H. Beziehungen der E_7 und E_8 zur Oktavebene. I // *Indag. Math.* — 1954. — Vol. 16, no. 3. — P. 218–230.
- [104] Gaal S. A. *Linear Analysis and Representation Theory.* — New York: Springer, 1973.
- [105] Gambaudo J.-M., Ghys É. Commutators and diffeomorphisms of surfaces // *Ergodic Theory Dynam. Syst.* — 2004. — Vol. 24, no. 5. — P. 1591–1617.
- [106] Ghys É. Groups acting on the circle // *Enseign. Math. (2)*. — 2001. — Vol. 47, no. 3-4. — P. 329–407.
- [107] Gong G., Lin H. Almost multiplicative morphisms and almost commuting matrices // *J. Operator Theory.* — 1998. — Vol. 40, no. 2. — P. 217–275.
- [108] Gong G., Lin H. Almost multiplicative morphisms and K -theory // *Internat. J. Math.* — 2000. — Vol. 11, no. 8. — P. 983–1000.
- [109] Grigorchuk R. I. Some results on bounded cohomology // *Combinatorial and Geometric Group Theory. Proc. Workshop Held at Heriot-Watt University, Edinburgh, 1993* / A. J. Duncan, N. D. Gilbert and J. Howie, eds. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995. — (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; Vol. 284). — P. 111–163.
- [110] Gromov M. Volume and bounded cohomology // *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* — 1982. — Vol. 56. — P. 5–99.
- [111] Gromov M. Positive curvature, macroscopic dimension, spectral gaps and higher signatures // *Functional Analysis on the Eve of the 21st Century. Vol. II.* — Boston: Birkhäuser, 1996. — P. 1–213.
- [112] Grønbæk N. Amenability of weighted convolution algebras on locally compact groups // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1990. — Vol. 319, no. 2. — P. 765–775.
- [113] Grønbæk N., Johnson B. E., Willis G. A. Amenability of Banach algebras of compact operators // *Israel J. Math.* — 1994. — Vol. 87, no. 1-3. — P. 289–324.

- [114] Grove K., Karcher H., Ruh E. A. Jacobi fields and Finsler metrics on a compact Lie groups with an application to differential pinching problems // *Math. Ann.* — 1974. — Vol. 211, no. 1. — P. 7–21.
- [115] Guentner E., Higson N., Trout J. Equivariant E -Theory for C^* -Algebras. — (Mem. Amer. Math. Soc.; Vol. 703). — Amer. Math. Soc., 2000.
- [116] Guichardet A., Wigner D. Sur la cohomologie réelle des groupes de Lie simples réels // *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4). — 1978. — Vol. 11. — P. 277–292.
- [117] De la Harpe P. Topics in Geometric Group Theory. — Chicago: Univ. of Chicago Press, 2000. — (Chicago Lect. Math.).
- [118] De la Harpe P., Karoubi M. Représentations approchées d'un groupe dans une algèbre de Banach // *Manuscripta Math.* — 1977. — Vol. 22, no. 3. — P. 293–310.
- [119] Higson N. A primer on KK -theory // *Operator Theory: Operator Algebras and Applications, Proc. Summer Res. Inst., Durham, USA, 1988.* — Providence: Amer. Math. Soc., 1990. — (Proc. Sympos. Pure Math.; Vol. 51, Part 1). — P. 239–283.
- [120] Higson N., Roe J. Amenable group actions and the Novikov conjecture // *J. Reine Angew. Math.* — 2000. — Vol. 519. — P. 143–153.
- [121] Hofmann K.-H., Morris S. A. The Structure of Compact Groups. — Berlin: Walter de Gruyter, 1998.
- [122] Hofmann K.-H., Ruppert W. A. F. Lie groups and subsemigroups with surjective exponential function. — Amer. Math. Soc., 1997. — (Mem. Amer. Math. Soc.; Vol. 618).
- [123] Hotzel E. Right projective semigroups with 0 // *J. Pure Appl. Algebra.* — 2002. — Vol. 170, no. 1. — P. 35–66.
- [124] Howey R. A. J. Approximately multiplicative functionals on algebras of smooth functions // *J. London Math. Soc.* (2). — 2003. — Vol. 68, no. 3. — P. 739–752.
- [125] Hyers D. H. On the stability of the linear functional equation // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.* — 1941. — Vol. 27, no. 2. — P. 222–224.
- [126] Hyers D. H., Rassias T. M. Approximate homomorphisms // *Aequationes Math.* — 1992. — Vol. 44, no. 2-3. — P. 125–153.
- [127] Hyers D. H., Ulam S. M. On approximate isometry // *Bull. Amer. Math. Soc.* — 1945. — Vol. 51. — P. 288–292.
- [128] Iwasawa K. On some types of topological groups // *Ann. Math.* — 1949. — Vol. 50, no. 2. — P. 507–558.
- [129] Jarosz K. Perturbations of Banach Algebras. — Berlin: Springer, 1985. — (Lect. Notes Math.; Vol. 1120).
- [130] Jarosz K. Small isomorphisms between operator algebras // *Proc. Edinburgh Math. Soc.* (2). — 1985. — Vol. 28, no. 2. — P. 121–131.
- [131] Jarosz K. Perturbations of function algebras // *Deformation Theory of Algebras and Structures and Applications, NATO Adv. Study Inst., Castelvechio—Pascoli/Italy, 1986.* — Dordrecht: Kluwer Academic, 1988. — (NATO ASI Ser., Ser. C, Math. Phys. Sci.; Vol. 247). — P. 557–563.
- [132] Jarosz K. Automatic continuity of separating linear isomorphisms // *Can. Math. Bull.* — 1990. — Vol. 33, no. 2. — P. 139–144.
- [133] Jarosz K. Small perturbations of algebras of analytic functions on polydisks // *Function Spaces, Proc. Conf., Edwardsville (USA), 1990.* — New York: Marcel Dekker, 1992. — (Lect. Notes Pure Appl. Math.; Vol. 136). — P. 223–240.

- [134] Jarosz K. Almost multiplicative functionals // *Studia Math.* — 1997. — Vol. 124, no. 1. — P. 37–58.
- [135] Jarosz K. When is a linear functional multiplicative? // *Function Spaces, Proc. 3rd Conf., Edwardsville (USA), May 19–23, 1998.* — Providence: Amer. Math. Soc., 1999. — (Contemp. Math.; Vol. 232). — P. 201–210.
- [136] Johnson B. E. Cohomology in Banach Algebras. — Providence: Amer. Math. Soc., 1972. — (Mem. Amer. Math. Soc.; Vol. 127).
- [137] Johnson B. E. Approximate diagonals and cohomology of certain annihilator Banach algebras // *Amer. J. Math.* — 1972. — Vol. 94. — P. 685–698.
- [138] Johnson B. E. Perturbations of Banach algebras // *Proc. London Math. Soc.* (3). — 1977. — Vol. 34, no. 3. — P. 439–458.
- [139] Johnson B. E. Approximately multiplicative functionals // *J. London Math. Soc.* (2). — 1986. — Vol. 34, no. 3. — P. 489–510.
- [140] Johnson B. E. Continuity of generalized homomorphisms // *Bull. London Math. Soc.* — 1987. — Vol. 19, no. 1. — P. 67–71.
- [141] Johnson B. E. Approximately multiplicative maps between Banach algebras // *J. London Math. Soc.* (2). — 1988. — Vol. 37, no. 2. — P. 294–316.
- [142] Johnson B. E. Perturbations of multiplication and homomorphisms // *Deformation Theory of Algebras and Structures and Applications, NATO Adv. Study Inst., Castelvechio—Pascoli/Italy, 1986.* — Dordrecht: Kluwer Academic, 1988. — (NATO ASI Ser., Ser. C, Math. Phys. Sci.; Vol. 247). — P. 565–579.
- [143] Johnson B. E. Derivations from $L^1(G)$ into $L^1(G)$ and $L^\infty(G)$ // *Harmonic Analysis, Proc. Int. Symp., Luxembourg, 1987.* — Berlin: Springer, 1988. — (Lect. Notes Math.; Vol. 1359). — P. 191–198.
- [144] Johnson B. E. Near inclusions for subhomogeneous C^* algebras // *Proc. London Math. Soc.* (3). — 1994. — Vol. 68, no. 2. — P. 399–422.
- [145] Johnson B. E. Non-amenability of the Fourier algebra of a compact group // *J. London Math. Soc.* (2). — 1994. — Vol. 50, no. 2. — P. 361–374.
- [146] Johnson B. E. Symmetric amenability and the nonexistence of Lie and Jordan derivations // *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* — 1996. — Vol. 120, no. 3. — P. 455–473.
- [147] Johnson B. E. Local derivations on C^* -algebras are derivations // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 2001. — Vol. 353, no. 1. — P. 313–325.
- [148] Johnson B. E. The derivation problem for group algebras of connected locally compact groups // *J. London Math. Soc.* (2). — 2001. — Vol. 63, no. 2. — P. 441–452.
- [149] Kazhdan D. On ε -representations // *Israel J. Math.* — 1982. — Vol. 43, no. 4. — P. 315–323.
- [150] Kotschick D. What is... a quasi-morphism? // *Notices Amer. Math. Soc.* — 2004. — Vol. 51, no. 2. — P. 208–209.
- [151] Kunze R. A., Stein E. M. Uniformly bounded representations and harmonic analysis on the 2×2 real unimodular group // *Amer. J. Math.* — 1960. — Vol. 82, no. 1. — P. 1–62.
- [152] Landsman N. P. Strict deformation quantization of a particle in external gravitational and Yang–Mills fields // *J. Geom. Phys.* — 1993. — Vol. 12, no. 2. — P. 93–132.

- [153] Lau A. T.-M. Amenability of semigroups // *The Analytical and Topological Theory of Semigroups*. — Berlin: Walter de Gruyter, 1990. — (De Gruyter Exp. Math.; Vol. 1). — P. 313–334.
- [154] Lawrence J. W. The stability of multiplicative semigroup homomorphisms to real normed algebras // *Aequationes Math.* — 1985. — Vol. 28, no. 1-2. — P. 94–101.
- [155] Lin H. Almost multiplicative morphisms and some applications // *J. Operator Theory*. — 1997. — Vol. 37, no. 1. — P. 121–154.
- [156] Lin H. When almost multiplicative morphisms are close to homomorphisms // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1999. — Vol. 351, no. 12. — P. 5027–5049.
- [157] Lin H., Phillips N. C. Almost multiplicative morphisms and the Cuntz algebra $\mathcal{O}_2$ // *Internat. J. Math.* — 1995. — Vol. 6, no. 4. — P. 625–643.
- [158] Lorentz G. G. A contribution to the theory of divergent sequences // *Acta Math.* — 1948. — Vol. 80. — P. 167–190.
- [159] Loring T. A. Almost multiplicative maps between C^* algebras // *Operator Algebras and Quantum Field Theory, Proc. Conf. Dedicated to Daniel Kastler in Celebration of his 70th Birthday, Accademia Nazionale dei Lincei, Roma, Italy, July 1–6, 1996* / S. Doplicher, ed. — Cambridge, MA: Internat. Press, 1997. — P. 111–122.
- [160] Loring T. A., Pedersen G. K. Corona extendibility and asymptotic multiplicativity // *K-Theory*. — 1997. — Vol. 11, no. 1. — P. 83–102.
- [161] Louvet N. A propos d'un théorème de Vershik et Karpushev // *Enseign. Math. (2)*. — 2001. — Vol. 47, no. 3-4. — P. 287–314.
- [162] Loy R. J., Read C. J., Runde V., Willis G. A. Amenable and weakly amenable Banach algebras with compact multiplication // *J. Funct. Anal.* — 2000. — Vol. 171, no. 1. — P. 78–114.
- [163] Ma D. Upper semicontinuity of isotropy and automorphism groups // *Math. Ann.* — 1992. — Vol. 292, no. 3. — P. 533–545.
- [164] Mackey G. W. Borel structure in groups and their duals // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1957. — Vol. 85. — P. 134–165.
- [165] Manning J. F. Geometry of pseudocharacters // *Geom. Topol.* — 2005. — Vol. 9. — P. 1147–1185.
- [166] Manuilov V. M. Almost commutativity implies asymptotic commutativity // *Operator Theoretical Methods, Proc. 17th Int. Conf. on Operator Theory, Timișoara, Romania, June 23–26, 1998* / A. Gheondea, ed. — Bucharest: Theta Foundation, 2000. — P. 257–268.
- [167] Manuilov V. M., Mishchenko A. S. Almost, asymptotic and fredholm representations of discrete groups // *Acta Appl. Math.* — 2001. — Vol. 68. — P. 159–210.
- [168] Manuilov V. M., Thomsen K. Quasidiagonal extensions and sequentially trivial asymptotic homomorphisms // *Adv. Math.* — 2000. — Vol. 154. — P. 258–279.
- [169] Manuilov V., Thomsen K. E -theory is a special case of KK -theory // *Proc. London Math. Soc. (3)*. — 2004. — Vol. 88, no. 2. — P. 455–478.
- [170] Manuilov V., Thomsen K. Semi-invertible extensions and asymptotic homomorphisms // *K-Theory*. — 2004. — Vol. 32, no. 2. — P. 101–138.
- [171] Manuilov V., Thomsen K. The Connes–Higson construction is an isomorphism // *J. Funct. Anal.* — 2004. — Vol. 213, no. 1. — P. 154–175.

- [172] McDuff D. A survey of the topological properties of symplectomorphism groups // *Topology, Geometry and Quantum Field Theory*. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004. — (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; Vol. 308). — P. 173–193.
- [173] Megrelishvili M. Generalized Heisenberg groups and Shtern's question // *Georgian Math. J.* — 2004. — Vol. 11, no. 4. — P. 775–782.
- [174] Mishchenko A. S., Mohammad N. Asymptotic representation of discrete groups // *Lie Groups and Lie Algebras*. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1998. — (Math. Appl.; Vol. 433). — P. 299–312.
- [175] Monod N. Continuous Bounded Cohomology of Locally Compact Groups. — Berlin: Springer, 2001. — (Lect. Notes Math.; Vol. 1758).
- [176] Monod N., Remy B. Boundedly generated groups with pseudocharacter(s). — 2003. — [arXiv:math.GR/0310065](#). — P. 21–23.
- [177] Montgomery D., Zippin L. A theorem on Lie groups // *Bull. Amer. Math. Soc.* — 1942. — Vol. 48. — P. 448–452.
- [178] Montgomery D., Zippin L. Topological Transformation Groups. — New York: Interscience Publishers, 1955.
- [179] Moore C. C. Group extensions and cohomology for locally compact groups. III // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1976. — Vol. 221, no. 1. — P. 1–33.
- [180] Moore R. T. Measurable, Continuous and Smooth Vectors for Semi-Groups and Group Representations. — Providence: Amer. Math. Soc., 1968. — (Mem. Amer. Math. Soc.; Vol. 78).
- [181] Naimark M. A., Štern [Shtern] A. I. Theory of Group Representations. — Berlin: Springer, 1982.
- [182] Neeb K.-H. On a theorem of S. Banach // *J. Lie Theory*. — 1997. — Vol. 7, no. 2. — P. 293–300.
- [183] Neeb K.-H., Pickrell D. Supplements to the papers entitled: «On a theorem of S. Banach» and «The separable representations of $U(H)$ » // *J. Lie Theory*. — 2000. — Vol. 10, no. 1. — P. 107–109.
- [184] Von Neumann J. Approximative properties of matrices of high finite order // *Portugal. Math.* — 1942. — Vol. 3. — P. 1–62; фон Нейман Дж. Аппроксимативные свойства матриц высокого конечного порядка // фон Нейман Дж. Избранные труды по функциональному анализу. Т. I. — М.: Наука, 1988. — С. 277–328.
- [185] Nikolov N., Segal D. Finite index subgroups in profinite groups // *C. R., Math., Acad. Sci. Paris*. — 2003. — Vol. 337, no. 5. — P. 303–308.
- [186] Nikolov N., Segal D. On finitely generated profinite groups. I: Strong completeness and uniform bounds // *Ann. Math.* — 2007. — Vol. 165. — P. 171–238.
- [187] Nikolov N., Segal D. On finitely generated profinite groups. II: Products in quasisimple groups // *Ann. Math.* — 2007. — Vol. 165. — P. 239–273.
- [188] Paterson A. L. T. Amenability. — Providence: Amer. Math. Soc., 1988.
- [189] Pestov V. G. Amenable representations and dynamics of the unit sphere in an infinite-dimensional Hilbert space // *Geom. Funct. Anal.* — 2000. — Vol. 10, no. 5. — P. 1171–1201.
- [190] Picaud J.-C. Cohomologie bornée des surfaces et courants géodésiques // *Bull. Soc. Math. France*. — 1997. — Vol. 125, no. 1. — P. 115–142.

- [191] Pitts D. R. Perturbations of certain reflexive algebras // *Pacific J. Math.* — 1994. — Vol. 165, no. 1. — P. 161–180.
- [192] Poincaré H. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle // *J. de Mathématiques.* — 1882. — Vol. 8. — P. 251–296; Poincaré H. Œuvres. Vol. I. — Paris: Gauthier-Villars, 1928.
- [193] Polterovich L., Rudnick Z. Stable mixing for cat maps and quasi-morphisms of the modular group // *Ergodic Theory Dynam. Systems.* — 2004. — Vol. 24, no. 2. — P. 609–619.
- [194] Py P. Quasi-morphismes et invariant de Calabi. — 2005. — [arXiv:math.SG/0506096](https://arxiv.org/abs/math/0506096).
- [195] Rademacher H. Zur Theorie der Modulfunktionen // *J. Reine Angew. Math.* — 1932. — Vol. 167. — S. 312–336.
- [196] Raeburn I., Taylor J. L. Hochschild cohomology and perturbations of Banach algebras // *J. Funct. Anal.* — 1977. — Vol. 25, no. 3. — P. 258–266.
- [197] Rajagopalan M. Characters of locally compact Abelian groups // *Math. Z.* — 1964. — Vol. 86. — P. 268–272.
- [198] Read C. J. Commutative, radical amenable Banach algebras // *Studia Math.* — 2000. — Vol. 140, no. 3. — P. 199–212.
- [199] Rindler H. Unitary representations and compact groups // *Arch. Math. (Basel).* — 1992. — Vol. 58, no. 5. — P. 492–499.
- [200] Sally P. J., Jr. Analytic Continuation of the Irreducible Unitary Representations of the Universal Covering Group of $SL(2, \mathbb{R})$. — Providence: Amer. Math. Soc., 1967. — (Mem. Amer. Math. Soc.; Vol. 69).
- [201] Sambusetti A. Minimal entropy and simplicial volume // *Manuscripta Math.* — 1999. — Vol. 99, no. 4. — P. 541–560.
- [202] Sasvari Z. Positive Definite and Definitizable Functions. — Berlin: Akademie, 1994.
- [203] Segal G. Cohomology of topological groups // *Symposia Mathematica, Roma. Vol. IV. Teoria Numeri, Dic. 1968, e Algebra, Marzo 1969.* — London: Academic Press, 1970. — P. 377–387.
- [204] Šemrl P. Hyers–Ulam stability of isometries on Banach spaces // *Aequationes Math.* — 1999. — Vol. 58. — P. 157–162.
- [205] Šemrl P. Almost multiplicative functions and almost linear multiplicative functionals // *Aequationes Math.* — 2002. — Vol. 63. — P. 180–192.
- [206] Shalom Y. Bounded generation and Kazhdan’s property (T) // *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1999).* — 2001. — Vol. 90. — P. 145–168.
- [207] Shavgulidze E. T. Some properties of quasi-invariant measures on groups of diffeomorphisms of the circle // *Russ. J. Math. Phys.* — 2000. — Vol. 7, no. 4. — P. 464–472.
- [208] Shavgulidze E. T. Properties of the convolution operation for quasi-invariant measures on groups of diffeomorphisms of a circle // *Russ. J. Math. Phys.* — 2001. — Vol. 8, no. 4. — P. 495–498.
- [209] Shtern A. I. Almost convergence and its applications to the Fourier–Stieltjes localization // *Russ. J. Math. Phys.* — 1993. — Vol. 1, no. 1. — P. 115–125.
- [210] Shtern A. I. Quasi-symmetry. I // *Russ. J. Math. Phys.* — 1994. — Vol. 2, no. 3. — P. 353–382.

- [211] Shtern A. I. Remarks on Pseudocharacters and the Real Continuous Bounded Cohomology of Connected Locally Compact Groups. — 1997. — Sfb 288 Preprint no. 289.
- [212] Shtern A. I. Almost representations and quasi-symmetry // Lie Groups and Lie Algebras. Their Representations, Generalizations and Applications / B. P. Komrakov, I. S. Krasil'shchik, G. L. Litvinov, A. B. Sossinsky, eds. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1998. — (Math. Its Appl.; Vol. 433). — P. 337–358.
- [213] Shtern A. I. Triviality and continuity of pseudocharacters and pseudorepresentations // Russ. J. Math. Phys. — 1998. — Vol. 5, no. 1. — P. 135–138.
- [214] Shtern A. I. Quasi-symmetry and amenability // Abstracts of Reports, ICM-98. Vol. II. — Berlin, 1998. — P. 138.
- [215] Shtern A. I. A criterion for the second real continuous bounded cohomology of a locally compact group to be finite-dimensional // Acta Appl. Math. — 2001. — Vol. 68, no. 1-3. — P. 105–121.
- [216] Shtern A. I. Bounded continuous real 2-cocycles on simply connected simple Lie groups and their applications // Russ. J. Math. Phys. — 2001. — Vol. 8, no. 1. — P. 122–133.
- [217] Shtern A. I. Remarks on pseudocharacters and the real continuous bounded cohomology of connected locally compact groups // Ann. Global Anal. Geom. — 2001. — Vol. 20, no. 3. — P. 199–221.
- [218] Shtern A. I. Continuity of Banach representations in terms of point variations // Russ. J. Math. Phys. — 2002. — Vol. 9, no. 2. — P. 250–252.
- [219] Shtern A. I. Continuity criteria for finite-dimensional representations of compact connected groups // Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang). — 2003. — Vol. 6, no. 2. — P. 141–156.
- [220] Shtern A. I. Values of invariant means, left averaging, and criteria for a locally compact group to be amenable as discrete group // Russ. J. Math. Phys. — 2003. — Vol. 10, no. 2. — P. 185–198.
- [221] Shtern A. I. Continuity conditions for finite-dimensional representations of some compact totally disconnected groups // Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang). — 2004. — Vol. 8, no. 1. — P. 13–22.
- [222] Shtern A. I. Projective irreducible unitary representations of Hermitian symmetric simple Lie groups are generated by pure pseudorepresentations // Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang). — 2004. — Vol. 9, no. 1. — P. 1–6.
- [223] Shtern A. I. Representations of topological groups in locally convex spaces: Continuity properties and weak almost periodicity // Russ. J. Math. Phys. — 2004. — Vol. 11, no. 1. — P. 81–108.
- [224] Shtern A. I. Van der Waerden continuity theorem for arbitrary semisimple Lie groups // Russ. J. Math. Phys. — 2006. — Vol. 13, no. 2. — P. 210–223.
- [225] Shtern A. I. Van der Waerden's continuity theorem for the commutator subgroups of connected Lie groups and Mishchenko's conjecture // Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang). — 2006. — Vol. 13, no. 2. — P. 143–158.
- [226] Shtern A. I. Van der Waerden continuity theorem for the Poincaré group and for some other group extensions // Adv. Theor. Appl. Math. — 2006. — Vol. 1, no. 1. — P. 79–90.

- [227] Shtern A. I. Automatic continuity of pseudocharacters on Hermitian symmetric semisimple Lie groups // *Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang)*. — 2007. — Vol. 12, no. 1. — P. 1–8.
- [228] Shtern A. I. Stability of the van der Waerden theorem on the continuity of homomorphisms of compact semisimple Lie groups // *Appl. Math. Comp.* — 2007. — Vol. 187, no. 1. — P. 455–465.
- [229] Shulman H., Tischler D. Leaf invariants for foliations and the van Est isomorphism // *J. Differential Geom.* — 1976. — Vol. 11. — P. 535–546.
- [230] Sidney S. J. Are all uniform algebras AMNM? // *Bull. London Math. Soc.* — 1997. — Vol. 29, no. 3. — P. 327–330.
- [231] Sinclair A. M., Smith R. R. *Hochschild Cohomology of von Neumann Algebras*. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995. — (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; Vol. 203).
- [232] Spronk N. Operator weak amenability of the Fourier algebra // *Proc. Amer. Math. Soc.* — 2002. — Vol. 130, no. 12. — P. 3609–3617.
- [233] Stroppel M. Lie theory for non-Lie groups // *J. Lie Theory*. — 1994. — Vol. 4, no. 2. — P. 257–284.
- [234] Takesaki M. *Theory of Operator Algebras. I*. — New York: Springer, 1979.
- [235] Teleman S. Sur la représentation lineaire des groupes topologiques // *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*. — 1957. — Vol. 74. — P. 319–339.
- [236] Thomsen K. Nonstable K-theory for operator algebras // *Internat. J. Math.* — 1991. — Vol. 4, no. 3. — P. 245–267.
- [237] Thomsen K. Asymptotic homomorphisms and equivariant KK -theory // *J. Funct. Anal.* — 1999. — Vol. 163, no. 2. — P. 324–343.
- [238] Varadarajan V. S. *Lie groups, Lie Algebras, and Their Representations*. — Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1974.
- [239] Van der Waerden B. L. Stetigkeitssätze für halbeinfache Liesche Gruppen // *Math. Z.* — 1933. — Vol. 36. — S. 780–786.
- [240] Warner G. *Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups. Vols. I, II*. — New York: Springer, 1972.
- [241] White M. C. Characters on weighted amenable groups // *Bull. London Math. Soc.* — 1991. — Vol. 23, no. 4. — P. 375–380.
- [242] Willis G. A. The continuity of derivations from group algebras: Factorizable and connected groups // *J. Aust. Math. Soc. Ser. A*. — 1992. — Vol. 52. — P. 185–204.
- [243] Wood G. V. Small isomorphisms between group algebras // *Glasgow Math. J.* — 1991. — Vol. 33, no. 1. — P. 21–28.
- [244] Yu G. The Novikov conjecture for groups with finite asymptotic dimension // *Ann. Math. (2)*. — 1998. — Vol. 147, no. 2. — P. 325–355.

