Геометрический подход к стабильным гомотопическим группам сфер. Инварианты Адамса—Хопфа*

П. М. АХМЕТЬЕВ
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

УДК 515.164

Ключевые слова: стабильные гомотопические группы сфер, инвариант Хопфа, диэдральная группа.

Аннотация

В работе предложен геометрический подход к стабильным гомотопическим группам сфер, основанный на конструкции Понтрягина—Тома. В рамках этого подхода получено новое доказательство теоремы Адамса об инвариантах Хопфа для всех размерностей, исключая 15, 31, 63, 127. А именно, доказано, что в предположении $n > 127$ в стабильной гомотопической группе сфер Π_n не существует элементов с инвариантом Хопфа, равным 1. Новое доказательство основано на методах геометрической топологии. Используется теорема Понтрягина—Тома (в форме, предложенной Р. Уэллсом) о представлении стабильных гомотопических групп вещественного бесконечномерного проективного пространства (эти гомотопические группы эпиморфно отображаются на 2-компоненты стабильных гомотопических групп сфер по теореме Кана—Придди) классами кобордизмов погружений в коразмерности 1 замкнутых (вообще говоря, неориентированных) многообразий. Инвариант Хопфа выражается через соответствующий характеристический класс классифицирующего пространства диэдральной группы, вычисленный для многообразия самопересечения погружения коразмерности 1, которое представляет заданный элемент в стабильной гомотопической группе. В новом доказательстве используется принцип геометрического контроля погружения в заданном классе регулярной гомотопии, открытый М. Громовым на основе теоремы Смейла—Хирша о погружениях.

Abstract

P. M. Akhmet'ev, Geometric approach to stable homotopy groups of spheres. The Adams–Hopf invariants, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 8, pp. 3—15.

In this paper, a geometric approach to stable homotopy groups of spheres based on the Pontryagin—Thom construction is proposed. From this approach, a new proof of Hopf invariant one theorem of J. F. Adams for all dimensions except 15, 31, 63, and 127 is obtained. It is proved that for $n > 127$, in stable homotopy group of spheres Π_n, there is no elements with Hopf invariant one. The new proof is based on geometric topology methods. The Pontryagin—Thom theorem (in the form proposed by R. Wells) about the representation of stable homotopy groups of the real, projective, infinite-dimensional space

*Работа поддержана грантом Лондонского королевского общества (1998—2000), грантами РФФИ 08-01-00663, INTAS 05-1000008-7805.

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 8, с. 3—15.

(these groups are mapped onto 2-components of stable homotopy groups of spheres by the Kahn—Priddy theorem) by cobordism classes of immersions of codimension 1 of closed manifolds (generally speaking, nonoriented) is considered. The Hopf invariant is expressed as a characteristic class of the dihedral group for the self-intersection manifold of an immersed codimension-1 manifold that represents the given element in the stable homotopy group. In the new proof, the geometric control principle (by M. Gromov) for immersions in the given regular homotopy classes based on the Smale—Hirsh immersion theorem is required.

Рассмотрим $f\colon M^{n-1} \looparrowright \mathbb{R}^n$, $n = 2^l - 1$, — гладкое погружение в коразмерности 1. Стабильным инвариантом Адамса—Хопфа назовём характеристическое число

$$\langle w_1^{n-1}(M); [M^{n-1}]\rangle = h(f),$$

которое зависит только от самого погружённого многообразия M^{n-1}. Связь с определением стабильного инварианта Хопфа, принятым в алгебраической топологии, рассмотрена в [6, 10].

Теорема Адамса [3]. *Для натурального числа $l \geqslant 4$ справедливо равенство $h(f) = 0$.*

Скошенно-оснащённые погружения

Рассмотрим погружение $f\colon M^{n-k} \looparrowright \mathbb{R}^n$ в коразмерности k. Пусть $\kappa\colon E(\kappa) \to M^{n-k}$ — выбранное линейное (= одномерное) расслоение над M^{n-k}, и пусть $\Xi\colon k\kappa \to \nu(f)$ — изоморфизм нормального расслоения погружения f с прямой суммой k экземпляров линейного расслоения κ.

Тройку (f, κ, Ξ) назовём скошенно-оснащённым погружением с характеристическим классом $\kappa \in H^1(M^{n-k}; \mathbb{Z}/2)$. (Если n нечётно, то $w_1(\kappa)$ является ориентирующим классом многообразия M^{n-k}, подробнее см. [5].)

Инварианты Адамса—Хопфа скошенно-оснащённых погружений

Характеристический класс

$$\langle w_1(\kappa)^{n-k}; [M^{n-k}]\rangle = h(f, \kappa, \Xi)$$

называется инвариантом Адамса—Хопфа скошенно-оснащённого погружения (f, κ, Ξ).

Основная теорема 1. *Пусть $(f\colon M^{n-k} \looparrowright \mathbb{R}^n, \kappa, \Xi)$ — скошенно-оснащённое погружение, $n = 2^l - 1$, $\dim(M) = n - k = \frac{n+1}{2} + 7$. Тогда для $n \geqslant 255$ (т. е. для $l \geqslant 8$) справедливо равенство*

$$h(f, \kappa, \Xi) = \langle w_1(\kappa)^{\dim(M)}; [M]\rangle = 0 \pmod 2.$$

Следствие. *Теорема Адамса справедлива при $n \geqslant 255$.*

Обозначим через $\mathbf{D}_4$ диэдральную группу порядка 8,

$$\mathbf{D}_4 = \{a, b \mid a^4 = b^2 = e,\ [a, b] = a^2\}.$$

Это группа симметрий плоскости, сохраняющих пару координатных осей. Рассмотрим подгруппы

$$\mathbf{I}_a = \{e, a, a^2, a^3\}, \quad \mathbf{I}_b = \{e, b, a^2, a^2 b\}, \quad \mathbf{I}_c = \{e, ab, a^2, a^3 b\}$$

индекса 2 в группе $\mathbf{D}_4$. Циклическая $\mathbb{Z}/4$-подгруппа $\mathbf{I}_a$ порождена поворотом плоскости на уголі $\frac{\pi}{2}$. Другая $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$-подгруппа $\mathbf{I}_b$ ($\mathbf{I}_c$) порождена симметриями относительно биссектрис координат (относительно осей координат). Ещё одна $\mathbb{Z}/2$-подгруппа, определяемая как $\mathbf{I}_b \cap \mathbf{I}_c = \{e, a^2\}$, порождена центральной симметрией плоскости.

Рассмотрим скошенно-оснащённое погружение $(f\colon M^{n-k} \looparrowright \mathbb{R}^n, \kappa, \Xi)$ общего положения. Многообразие точек самопересечения этого погружения обозначим через N^{n-2k}. Это многообразие погружено в пространство $\mathbb{R}^n$ посредством $g\colon N^{n-2k} \looparrowright \mathbb{R}^n$, причём определён канонический изоморфизм $\Psi\colon \nu(g) = k\eta^*$ нормального расслоения $\nu(g)$ погружения g, где η^* — двумерное расслоение над N^{n-2k} со структурной группой $\mathbf{D}_4$. При этом расслоение η^* получено как обратный образ универсального расслоения $E(\mathbf{D}_4) \to K(\mathbf{D}_4, 1)$ посредством классифицирующего отображения $\eta\colon N^{n-2k} \to K(\mathbf{D}_4, 1)$.

Рассмотрим каноническое двулистное накрытие $\bar{N}^{n-2k} \to N^{n-2k}$ над многообразием точек самопересечения погружения g. Это накрытие соответствует подгруппе $\mathbf{I}_c \subset \mathbf{D}_4$.

Рассмотрим когомологический характеристический класс $\bar{\kappa} \in H^1(\bar{N}^{n-2k}; \mathbb{Z}/2)$, построенный по эпиморфизму $\mathbf{I}_c \to \mathbf{I}_d$, имеющему коядро $\mathbf{I}_d = \{e, a^2 \simeq ab\} = \mathbb{Z}/2$. Определим характеристическое число

$$\bar{h}(g, \eta, \Psi) = \langle \bar{\kappa}^{n-2k}; [\bar{N}^{n-2k}] \rangle.$$

Лемма 2. *Справедливо равенство* $h(f, \kappa, \Xi) = \bar{h}(g, \eta, \Psi)$.

Доказательство. Утверждение вытекает из теоремы Герберта о погружениях [7]. ☐

Определение (циклическая структура для скошенно-оснащённых погружений). Рассмотрим скошенно-оснащённое погружение (f, κ, Ξ) и многообразие N^{n-2k} точек самопересечения погружения f (заметим, что $n - 2k$ нечётно). Отображение

$$\mu\colon N^{n-2k} \to K(\mathbf{I}_a, 1)$$

называется *циклической структурой* погружения f, если выполнено равенство

$$\langle \mu^*(t); [N^{n-2k}] \rangle = h(f),$$

где $t \in H^{n-2k}(K(\mathbf{I}_a, 1); \mathbb{Z}/2)$ — образующая.

Основная лемма 3 (П. М. Ахметьев, П. Дж. Экклз, 1998). *Предположим, что* $n - k = \frac{n+1}{2} + 7$ $(n - 2k = 15)$, $n \geqslant 31$, *и определена циклическая структура*

$\mu\colon N^{n-2k} \to K(\mathbf{D}_4, 1)$ *погружения* f. *Тогда справедливо равенство* $h(f,\kappa,\Xi) = 0 \pmod 2$.

Лемма 4 (о циклической структуре скошенно-оснащённых погружений). *В предположении* $n \geqslant 255$ *произвольное скошенно-оснащённое погружение* $f\colon M^{n-k} \looparrowright \mathbb{R}^n$, $n-k = \frac{n+1}{2} + 7$, *регулярно-гомотопно погружению, допускающему циклическую структуру.*

Определение (циклическая структура для отображений общего положения вещественного проективного пространства). Пусть $g\colon \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-k} \to \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3k$, $n = 2^l - 1$, — отображение общего положения с многообразием самопересечения N^{n-2k}, которое имеет $(n-2k-1)$-мерный край $(\partial N)^{n-2k-1} \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-k}$, состоящий из критических точек отображения g. Структурное отображение

$$\eta\colon (N^{n-2k}, \partial N) \to \bigl(K(\mathbf{D}_4,1), K(\mathbf{I}_b,1)\bigr)$$

определяется аналогично случаю скошенно-оснащённого погружения, при этом легко проверить, что ограничение структурного отображения на край, состоящий из особенностей отображения g, принимает значение в подпространстве $K(\mathbf{I}_b,1) \subset K(\mathbf{D}_4,1)$. Скажем, что отображение

$$\mu\colon (N^{n-2k}, \partial N^{n-2k-1}) \to \bigl(K(\mathbf{I}_a,1), K(\mathbf{I}_d,1)\bigr)$$

является циклической структурой для g, если выполнены следующие условия:

1) гомологическое условие:

$$\langle \mu^*(t); [N^{n-2k}, \partial N^{n-2k-1}]\rangle = 1 \pmod 2,$$

где $t \in H^{n-2k}(K(\mathbf{I}_a,1), K(\mathbf{I}_d,1); \mathbb{Z}/2)$ (заметим, что указанное характеристическое число корректно определено, поскольку характеристический цикл $\mu_*([\partial N^{n-2k-1}]) \in H_{n-2k-1}\bigl(K(\mathbf{I}_d,1;\mathbb{Z}/2)\bigr)$, как нетрудно проверить, гомологичен нулю);

2) граничные условия: отображение

$$p_c \circ \eta|_{\partial N}\colon \partial N^{n-2k-1} \to K(\mathbf{I}_b,1) \to K(\mathbf{I}_d,1),$$

где $p_c\colon K(\mathbf{I}_b,1) \to K(\mathbf{I}_d,1)$ является стандартной проекцией с коядром $\mathbf{I}_d = \{e, a^2 \simeq ba^2\}$, совпадает с ограничением $\mu|_{\partial N^{n-2k-1}}$.

Лемма 5 (геометрический контроль). *Пусть* (f,κ,Ξ), $f\colon M^{n-k} \looparrowright \mathbb{R}^n$, — *произвольное скошенно-оснащённое погружение. Предположим* (см. предложение 6), *что существует отображение общего положения* $g\colon \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-k} \to \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3k$, *с циклической структурой*

$$\mu\colon (N^{n-2k}, \partial N^{n-2k-1}) \to \bigl(K(\mathbf{I}_a,1), K(\mathbf{I}_d,1)\bigr).$$

Тогда существует скошенно-оснащённое погружение (f',κ,Ξ') *в классе регулярной гомотопии погружения* f, *которое допускает циклическую структуру.*

План доказательства леммы 5. Рассмотрим отображение

$$g \circ \kappa\colon M^{n-k} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-k} \to \mathbb{R}^n.$$

Согласно [8, 1.2.2], в классе регулярной гомотопии погружения f существует погружение общего положения $f'\colon M^{n-k} \looparrowright \mathbb{R}^n$, которое является сколь угодно близкой C^0-аппроксимацией отображения (с особенностями) $g \circ \kappa$.

Отображение Мелихова (2004)

Обозначим через J джойн $2^{l-4}+1=r$ копий стандартного $\mathbb{Z}/4$-линзового пространства S^7/i, $\dim(J)=2^{l-1}+7=n-k$. Нетрудно проверить, что при $l \geqslant 8$ корректно определено стандартное вложение $i_J\colon J \subset \mathbb{R}^n$.

Определим отображение $p'\colon S^{n-k} \to J$ как джойн r экземпляров стандартного накрытия $S^7 \to S^7/i$. При этом определено фактор-отображение $\hat{p}\colon S^{n-k}/i \to J$ отображения p' и отображение $p\colon \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-k} \to J$ как композиция стандартной проекции $\pi\colon \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-k} \to S^{n-k}/i$ с отображением $\hat{p}$. Композиция $i_J \circ \hat{p}\colon S^{n-k}/i \to J \to \mathbb{R}^n$ также корректно определена. Рассмотрим отображение $\hat{g}\colon S^{n-k}/i \to \mathbb{R}^n$, которое определено как ε-малая деформация общего положения отображения $i_J \circ \hat{p}$, и отображение $d\colon \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-k} \to \mathbb{R}^n$, которое определено как ε_1-малая деформация общего положения композиции $\hat{g} \circ \pi$, $\varepsilon_1 \ll \varepsilon$.

Предложение 6*. *Отображение Мелихова $d\colon \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-k} \to \mathbb{R}^n$ допускает циклическую структуру.*

Начало доказательства предложения 6. Обозначим через Γ_0 *взрезанный квадрат* стандартного проективного пространства $\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-k}$:

$$\Gamma_0 = (\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-k} \times \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-k} \setminus \Delta_{\mathrm{diag}})/T',$$

причём факторизация происходит по свободной инволюции

$$T'\colon \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-k} \times \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-k} \setminus \Delta_{\mathrm{diag}} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-k} \times \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-k} \setminus \Delta_{\mathrm{diag}}, \quad T'(x,y)=(y,x).$$

Классифицирующее отображение $\eta_{\Gamma_0}\colon \Gamma_0 \to K(\mathbf{D}_4,1)$ корректно определено. (Заметим, что $\pi_1(\Gamma_0)=\mathbf{D}_4$ и инволюция T' построена на накрывающем пространстве с подгруппой $\mathbf{I}_c \subset \mathbf{D}_4$.)

Обозначим через $\Delta_{\mathrm{antidiag}} \subset \Gamma_0$ подпространство, называемое антидиагональю, определённое по формуле

$$\Delta_{\mathrm{antidiag}} = \{(x,y) \in (\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-k} \times \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-k}/T') \mid T(x)=y\},$$

где $T\colon \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-k} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-k}$ — стандартная инволюция на накрывающем

$$\mathbb{R}\mathrm{P}^{n-k} \to S^{n-k}/i.$$

Обозначим через Γ пространство

$$\Gamma_0 \setminus \bigl(U(\Delta_{\mathrm{antidiag}}) \cup U(\Delta_{\mathrm{diag}})\bigr),$$

где через $U(\Delta_{\mathrm{antidiag}})$ и $U(\Delta_{\mathrm{diag}})$ обозначены малые регулярные окрестности подпространства $\Delta_{\mathrm{antidiag}}$ и регулярная окрестность открытого конца, примыкающего к удалённому подпространству Δ_{diag}. (Радиус указанных регулярных

*Автору удалось доказать это предложение при обсуждениях с О. Саэки и Р. Р. Садыковым в 2006 г.

окрестностей зависит, вообще говоря, от константы аппроксимации ε, которая используется при построении отображения Мелихова.) Пространство Γ является многообразием с границей. Инволюция $T\colon \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-k} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-k}$ индуцирует свободную инволюцию $T_\Gamma\colon \Gamma \to \Gamma$. Полиэдр

$$\Sigma_0 = \{[(x,y)] \in \Gamma_0,\ p(x) = p(y)\}, \quad \Sigma_0 \subset \Gamma_0,$$

двойных точек отображения $p\colon \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-k} \to J$ называется *пространством особенностей* или *полиэдром особенностей*.

Отображение $\eta_{\Sigma_0}\colon \Sigma_0 \to K(\mathbf{D}_4, 1)$ определено как ограничение отображения $\eta_{\Gamma_0}|_{\Sigma_0}$. Подполиэдр $\Sigma_0 \subset \Gamma_0$ представлен в виде объединения $\Sigma_0 = \Sigma_{\mathrm{antidiag}} \cup K$, $K \subset \Gamma$, где $\Sigma_{\mathrm{antidiag}} = \Sigma_0 \cap U(\Delta_{\mathrm{antidiag}})$. Ограничение $\eta_{\Gamma_0}|_K$ обозначим через $\eta_K\colon K \to K(\mathbf{D}_4, 1)$.

Граничные условия отображения η_K

Компоненты границы K, примыкающие к диагонали и антидиагонали, обозначим через $Q_{\mathrm{diag}} = K \cap \partial U(\Delta_{\mathrm{diag}})$ и $Q_{\mathrm{antidiag}} = K \cap \partial U(\Delta_{\mathrm{antidiag}})$ соответственно. Отображение

$$\eta_K|_{Q_{\mathrm{antidiag}}}\colon Q_{\mathrm{antidiag}} \to K(\mathbf{D}_4, 1)$$

представлено в виде композиции

$$i_a \circ \eta_{\mathrm{antidiag}}\colon Q_{\mathrm{antidiag}} \to K(\mathbf{I}_a, 1) \subset K(\mathbf{D}_4, 1).$$

Отображение

$$\eta_K|_{Q_{\mathrm{diag}}}\colon Q_{\mathrm{diag}} \to K(\mathbf{D}_4, 1)$$

представлено в виде композиции

$$i_b \circ \eta_{\mathrm{diag}}\colon Q_{\mathrm{antidiag}} \to K(\mathbf{I}_b, 1) \subset K(\mathbf{D}_4, 1).$$

Пространство разрешения особенностей RK

Мы определим пространство RK, которое назовём *пространством разрешения особенностей* полиэдра K. Это пространство будет определено так, что существует коммутативная диаграмма

$$K(\mathbf{I}_a, 1) \xleftarrow{\varphi} RK \xrightarrow{\mathrm{pr}} K.$$

Обозначим $\mathrm{pr}^{-1}(Q_{\mathrm{diag}})$ через RQ_{diag} и $\mathrm{pr}^{-1}(Q_{\mathrm{diag}})$ через RQ_{antidiag}. Граничные условия на Q_{antidiag} зададим в виде

$$\begin{tikzcd}
RQ_{\mathrm{antidiag}} \arrow[rr, "\mathrm{pr}"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & Q_{\mathrm{antidiag}} \arrow[dl, "\eta_{\mathrm{antidiag}}"] \\
& K(\mathbf{I}_a, 1). &
\end{tikzcd}$$

Граничные условия на Q_{diag} зададим в виде

$$\begin{tikzcd}
RQ_{\mathrm{diag}} \arrow[r, "\mathrm{pr}"] \arrow[d, "\varphi"'] & Q_{\mathrm{diag}} \arrow[d, "\eta_{\mathrm{diag}}"] \\
K(\mathbf{I}_d, 1) & K(\mathbf{I}_b, 1). \arrow[l, "p_b"']
\end{tikzcd}$$

Две диаграммы, построенные выше, включаются в следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
K(\mathbf{I}_a, 1) & \\
RK \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r] \arrow[d] & RQ_{\mathrm{diag}} \cup RQ_{\mathrm{antidiag}} \arrow[ul] \arrow[d] \\
K \arrow[r, phantom, "\supset"] \arrow[d, "\eta"] & Q_{\mathrm{diag}} \cup Q_{\mathrm{antidiag}} \arrow[dl] \\
K(\mathbf{D}_4, 1). &
\end{tikzcd}$$

Рассмотрим отображение Мелихова $d\colon \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-k} \to \mathbb{R}^n$, которое определено как результат приведения отображения

$$i \circ p \circ \pi\colon \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-k} \to S^{n-k}/i \to J \subset \mathbb{R}^n$$

в общее положение. Пусть N^{n-2k} — многообразие (с краем) точек самопересечения отображения d, вложение $N^{n-2k} \subset \Gamma_0$ корректно определено. Многообразие N^{n-2k} представлено в виде объединения двух многообразий с краем вдоль общего края:

$$N^{n-2k} = N_{\mathrm{antidiag}} \cup N_d,$$

$$N_{\mathrm{antidiag}} = N^{n-2k} \cap U(\Delta_{\mathrm{antidiag}}), \quad N_d = N^{n-2k} \cap \Gamma.$$

Лемма 7. *Существует отображение* $\mathrm{res}\colon N_d \to RK$, *называемое отображением* разрешения особенностей, *которое индуцирует отображение* $\mu\colon N_d \to K(\mathbf{I}_a, 1)$, *включённое в коммутативную диаграмму*

$$\begin{tikzcd}
K(\mathbf{I}_a, 1) \arrow[r, phantom, "="] & K(\mathbf{I}_a, 1) & \\
RK \arrow[u, "\varphi"] \arrow[d, "\eta"'] & N_d \arrow[l, "\mathrm{res}"'] \arrow[u, "\mu"'] \arrow[d, "\eta"] \arrow[r, phantom, "\supset"] & W_{\mathrm{diag}} \cup W_{\mathrm{antidiag}} \arrow[ul] \arrow[dl] \\
K(\mathbf{D}_4, 1) \arrow[r, phantom, "="] & K(\mathbf{D}_4, 1), &
\end{tikzcd}$$

с граничными условиями на W_{antidiag}

$$\mu|_{W_{\mathrm{antidiag}} \subset N_d} = i_a \circ \eta_{\mathrm{antidiag}}\colon W_{\mathrm{antidiag}} \longrightarrow K(\mathbf{I}_a, 1) \xrightarrow{i_a} K(\mathbf{D}_4, 1)$$

и с граничными условиями на W_{diag}

$$\mu = i_a \circ p_b \circ \eta_{\mathrm{diag}} \colon W_{\mathrm{diag}} \to K(\mathbf{I}_b,1) \to K(\mathbf{I}_d,1) \to K(\mathbf{I}_a,1).$$

Лемма 8. *Отображение*

$$\mu_a = \eta|_{N_{\mathrm{antidiag}}} \cup \mu \colon N^{n-2k} = N_{\mathrm{antidiag}} \cup N_d \to K(\mathbf{I}_a,1)$$

определяет циклическую структуру отображения d.

Доказательство. Докажем равенство

$$\langle \mu_a^*(t); [N^{n-2k}, \partial N^{n-2k-1}]\rangle = 1, \quad t \in H^{n-2k}\bigl(K(\mathbf{I}_a,1), K(\mathbf{I}_d,1)\bigr).$$

Рассмотрим свободную инволюцию $T_\Gamma \colon \Gamma \to \Gamma$ и фактор-пространство Γ/T_Γ. Фундаментальная группа $\pi_1(\Gamma/T_\Gamma)$, которая обозначена через $\mathbb{E}$, является квадратичным расширением группы $\mathbf{D}_4$ посредством элемента $c \in \mathbb{E} \setminus \mathbf{D}_4$, $c^2 = a^2$. Элемент c порядка 4 коммутирует с произвольным элементом подгруппы $\mathbf{D}_4 \subset \mathbb{E}$. При этом определена следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccccccc}
N_d & \longrightarrow & RK & \longrightarrow & K & \subset & \Gamma \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
N_d/T & \longrightarrow & RK/T & \longrightarrow & K/T & \subset & G/T \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
K(\mathbf{I}_a,1) & = & K(\mathbf{I}_a,1) & & K(\mathbb{E},1) & = & K(\mathbb{E},1).
\end{array}$$

Композиция $RK \to RK/T \to K(\mathbf{I}_a,1)$ совпадает с φ. (Элемент $c \in \pi_1(RK/T) \setminus \pi_1(RK)$ коммутирует с произвольным элементом из подгруппы $\pi_1(RK) \subset \pi_1(RK/T)$ индекса 2, и отображение $RK/T \to K(\mathbf{I}_a,1)$ корректно определено. Индуцированный образ элемента c является образующей в $\mathbf{I}_a$.) Композиция $N_d \to N_d/T_{N_d} \to K(\mathbf{I}_a,1)$ левых вертикальных стрелок в диаграмме совпадает с отображением $\mu \colon N_d \to K(\mathbf{I}_a,1)$. При этом пара (N^{n-2k}, μ_a) кобордантна паре (N'^{n-2k}, μ'_a), где $N'^{n-2k} = N'^{n-2k}_{\mathrm{cycl}} \cup N'^{n-2k}_d$, причём $N'^{n-2k}_{\mathrm{cycl}}$ является замкнутым многообразием. Многообразие (с краем) $N'^{n-2k}_{\mathrm{cycl}}$ является двулистным накрывающим над ориентированным многообразием (с границей) $N'^{n-2k}_{\mathrm{cycl}}/T_{N_d}$. База этого накрытия определяет цикл в $H_{n-2k}(K(\mathbf{I}_a,1), K(\mathbf{I}_d,1); \mathbb{Z})$. Следовательно, относительный цикл

$$\mu'_{a,*}([N'^{n-2k}_d, \partial N']) \in H_{n-2k}\bigl(K(\mathbf{I}_a,1), K(\mathbf{I}_d,1)\bigr)$$

равен нулю и справедливо равенство

$$\langle \mu_a^*(t); [N^{n-2k}, \partial N^{n-2k-1}]\rangle = \langle \mu_a'^*(t); [N'^{n-2k}_{\mathrm{cycl}}]\rangle.$$

Рассмотренное выше характеристическое число совпадает с характеристическим числом $\langle \kappa^{n-k}; [\bar{N}^{n-k}]\rangle = 1$. Лемма 8 доказана. $\square$

Естественная стратификация полиэдра K. Доказательство леммы 7

Обозначим через J джойн линзовых пространств $(S^7/i)_j$, $j = 1, \ldots, r$. Пространство J допускает естественную стратификацию, определяемую семейством подджойнов $J(k_1, \ldots, k_s)$, построенных по линзовым пространствам с номерами $0 < k_1 < \ldots < k_s < r$.

Прообраз $p^{-1}\big(J(k_1, \ldots, k_s)\big) \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-k}$, $p\colon \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-k} \to J$, обозначим через $R(k_1, \ldots, k_s)$.

Произвольная точка $x \in R(k_1, \ldots, k_s) \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-k}$ определяется набором координат $(x_{k_1}, \ldots, x_{k_s}, \lambda)$, причём набор рассматривается с точностью до антиподального преобразования первых s координат $x_{k_j} \in S^7_j$. Последняя координата λ набора — это барицентрическая координата на стандартном $(s-1)$-мерном симплексе.

Полиэдр K допускает естественную стратификацию $K(k_1, \ldots, k_s)$, $1 \leqslant s \leqslant r$, которая соответствует стратификации J. Максимальный страт $K(1, \ldots, r)$ этой стратификации представлен несвязным объединением компонент различных типов.

Предположим, что точка (x_1, x_2) принадлежит страту $K(1, \ldots, r)$. Набор координат, определяющий эту точку, запишется в виде $(x_{1,1}, x_{2,1}, \ldots, x_{1,r}, x_{2,r}, \lambda)$, где первые $2r$ элементов представляют собой упорядоченный r-набор пар точек на стандартной сфере S^7, при этом допускается одновременная перестановка каждой пары точек набора и независимое антиподальное преобразование каждой первой или каждой второй точки набора. Таким образом, класс эквивалентности данного набора координат содержит восемь наборов.

Типы компонент максимального страта

Пусть $x \in K(1, \ldots, r)$ — точка, которая определена r-набором $(x_{1,i}, x_{2,i})$ пары точек на S^7. Возможны следующие случаи: пара координат в паре с номером i 1) совпадает, или 2) антиподальна, или 3) связана посредством образующего преобразования в слое $\mathbb{Z}/4$-накрытия.

В соответствии с условиями 1), 2), 3) определяется последовательность r комплексных чисел $v_i \in \{1, -1, +i, -i\}$, $i = 1, \ldots, r$. Эту последовательность назовём характеристикой. Для точек рассматриваемой компоненты $K(1, \ldots, r)$ соответствующая характеристика корректно определена с точностью до почленного умножения на -1 и не зависит от выбора точки на компоненте. Скажем, что компонента имеет тип $\mathbf{I}_a$ (тип $\mathbf{I}_b$), если соответствующая характеристика принимает лишь значения $\{+i, -i\}$ ($\{+1, -1\}$); скажем, что компонента имеет тип $\mathbf{I}_d$, если характеристика принимает по меньшей мере три различных значения.

Нетрудно проверить, что образ характеристического отображения $\eta\colon \Gamma \to K(\mathbf{D}_4, 1)$ на страт типа $\mathbf{I}_a$, $\mathbf{I}_b$ или $\mathbf{I}_d$ лежит в подпространстве $K(\mathbf{I}_a, 1)$, $K(\mathbf{I}_b, 1)$, $K(\mathbf{I}_d, 1)$ пространства $K(\mathbf{D}_4, 1)$ соответственно. Указанная редукция (для стратов типов $\mathbf{I}_a$ и $\mathbf{I}_b$) определена с точностью до композиции с отображением соответствующего классифицирующего пространства, отвечающего гомоморфизму сопряжения $\mathbf{D}_4 \to \mathbf{D}_4$, $x \to (ba)x(ba)^{-1}$, $x \in \mathbf{D}_4$, $ba \in \mathbf{I}_c$.

Пространство разрешения особенностей RK

Обозначим через $K_1 \subset K$ дизъюнктное объединение всех особых стратов глубины 1, через K_0 — дизъюнктное объединение всех максимальных стратов, через $K_{\mathrm{reg}} \subset K$ — подполиэдр, определённый по формуле $K_{\mathrm{reg}} = K_0 \cup K_1$. Компонента границы $K_{\mathrm{reg}} \cap Q_{\mathrm{antidiag}}$ обозначается через $Q_{\mathrm{reg,antidiag}}$, компонента границы $K_{\mathrm{reg}} \cap Q_{\mathrm{diag}}$ — через $Q_{\mathrm{reg,diag}}$. Легко заметить, что $Q_{\mathrm{reg,antidiag}}$ ($Q_{\mathrm{reg,diag}}$) пересекается лишь со стратами, у которых не более чем два значения характеристики отличаются от $+i$ ($+1$). Компоненты связности пространства K_0 можно разделить на три класса: диагональные, антидиагональные и общего вида. Компоненты диагонального класса пересекаются с диагональю (антидиагональю) по максимальному страту на диагонали (антидиагонали). При этом диагональный (антидиагональный) страт имеет ровно одно значение характеристики, отличное от $+i$ ($+1$).

Обозначим через $\bar{K}^1$ двулистное накрывающее над K^1 с подгруппой $\mathbf{I}_c \subset \mathbf{D}_4$. Это накрытие совпадает с ограничением канонического двулистного накрытия над полиэдром особенностей самопересечения.

Пространство RK определяется при помощи диаграммы

$$\bar{K}^1 \to K^1 \subset K \supset K_{\mathrm{reg}}.$$

Пространство K_{reg} определяется посредством приклеивания семейства пространств двулистных накрытий над регулярной окрестностью каждой компонентой особого страта глубины 1 по отображению

$$U(\bar{K}_1) \setminus \bar{K}_1 \longrightarrow K_{\mathrm{reg}} \setminus K_1.$$

Циклическое отображение $\varphi\colon RK \to K(\mathbf{I}_a, 1)$

Обозначим объединение всех компонент диагонального, антидиагонального классов и класса общего вида через $K_{0,\mathrm{diag}}$, $K_{0,\mathrm{antidiag}}$, $K_{0,\mathrm{int}}$ соответственно. Ограничение отображения $\eta\colon K \to K(\mathbf{D}_4, 1)$ на $K_{0,\mathrm{diag}} \subset K$ ($K_{0,\mathrm{antidiag}} \subset K$) представляется композицией

$$K_{0,\mathrm{diag}} \to K(\mathbf{I}_b, 1) \subset K(\mathbf{D}_4, 1) \quad (K_{0,\mathrm{antidiag}} \to K(\mathbf{I}_a, 1) \subset K(\mathbf{D}_4, 1)).$$

Указанные граничные условия однозначно определяют редукцию структурного отображения. Редукция структурного отображения на компонентах из $K_{0,\mathrm{int}}$ не является канонической.

Отображение

$$\varphi_0\colon K_0 \to K(\mathbf{I}_a, 1)$$

продолжается до отображения
$$\varphi\colon RK \to K(\mathbf{I}_a, 1).$$
Композиция
$$\bar{K}_1 \to K_1 \xrightarrow{\eta} K(\mathbf{D}_4, 1)$$
допускает естественную редукцию к отображению в пространство $K(\mathbf{I}_c, 1) \subset \subset K(\mathbf{D}_4, 1)$.

Рассмотрим две компоненты $K_{0,\alpha}, K_{0,\beta} \subset K_0$, предполагая, что они имеют одинаковый тип $\mathbf{I}_b$ (или $\mathbf{I}_a$), причём компоненты пересекаются по общему граничному страту глубины 1 $K_{1,\gamma} \subset K_1$. Определено циклическое отображение
$$\varphi_{0,*} = \pi_d \circ \eta_*\colon K_{0,*} \to K(\mathbf{I}_b, 1) \to K(\mathbf{I}_d, 1),$$
$$\eta_*\colon K_{0,*} \to K(\mathbf{I}_a, 1), \quad * \in \{\alpha, \beta\},$$
причём $K_{0,*} \to K(\mathbf{I}_b, 1)$ ($K_{0,*} \to K(\mathbf{I}_a, 1)$) определено с точностью до композиции с отображением $K(\mathbf{I}_b, 1) \to K(\mathbf{I}_b, 1)$ ($K(\mathbf{I}_a, 1) \to K(\mathbf{I}_a, 1)$). Последнее отображение индуцировано автоморфизмом
$$\mathbf{D}_4 \to \mathbf{D}_4, \quad x \to (ba)x(ba)^{-1}, \quad x \in \mathbf{D}_4, \quad ba \in \mathbf{I}_c.$$

Трансфер относительно включения $\mathbf{I}_c \subset \mathbf{D}_4$ определяет единственное отображение
$$\eta^!_*\colon \bar{K}_{0,*} \to K(\mathbf{I}_d, 1).$$
Следовательно, продолжение отображения φ с заданными граничными условиями существует.

Отображение поднятия $\mathrm{res}\colon N_d \to RK$

Рассмотрим PL-гомотопию общего положения
$$F(\tau)\colon S^{n-k}/i \to \mathbb{R}^n, \quad \tau \in [0; 1],$$
с граничными условиями
$$F(0) = i \circ \hat{p}\colon S^{n-k}/i \to J \subset \mathbb{R}^n.$$
Для заданного значения $\tau \in (0; 1]$ двойные точки отображения $F(\tau)$ обозначаются через $\hat{N}(\tau)$. Это пространство является многообразием с границей, причём это подмногообразие в $\Gamma/T_\Gamma \times \{\tau\}$. Полиэдр $\bigcup\limits_{\tau} \hat{N}(\tau)$, $\tau \in (0, \varepsilon]$ (ε достаточно мало), обозначим через $\hat{N}_{(0;\varepsilon]}$.

Поскольку отображение F является PL-отображением, нижняя часть границы $\hat{N}_{(0;\varepsilon]}$, которую мы обозначим через $\hat{N}_0$, является 15-мерным подполиэдром в фактор-пространстве $\Gamma/T_\Gamma \times \{0\}$. Полиэдр $\hat{N}_{(0;\varepsilon]}$ является базой четырёхлистного накрытия $N_{(0;\varepsilon]} \to \hat{N}_{(0;\varepsilon]}$, где через $N_{(0;\varepsilon]}$ обозначены точки самопересечения композиции (в предположении общего положения)
$$F(\tau) \circ \pi\colon \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-k} \to S^{n-k}/i \to \mathbb{R}^n.$$

Условия общего положения влекут следующие условия:

1) полиэдр N_0 не пересекает (если положительная константа ε достаточно мала) особые страты глубины не меньше 2 пространства Γ (эти страты имеют коразмерность не меньше 16);
2) полиэдр N_0 находится в общем положении со стратами глубины 1; в частности, ограничение $F(\tau)|_{p^{-1}(J^1)}$, $J^1 \subset J$, $\tau \in (0, \varepsilon]$, на особый страт глубины 1 является вложением.

Отображение *разрешения особенностей*

$$\mathrm{res}\colon N_d(\varepsilon) \to RK,$$

удовлетворяющее заданным граничным условиям, определено условиями 1), 2). Заметим, что $\mathrm{diam}(U_{\mathrm{antidiag}})$, $\mathrm{diam}(U_{\mathrm{diag}})$ должны выбираться много меньшими, чем расстояние между N_0 и $K_2 \subset K$.

Предложение 6 доказано.

Обсуждения

Гипотеза 1. Существует замкнутое гладкое многообразие K^7 размерности 7 с нормальным $\mathbf{D}_4$-оснащением в коразмерности $2^l - 8$, $l \geqslant 4$, такое что пара (K^7, Ξ_K) имеет инвариант Адамса—Хопфа, равный 1.

Замечание. Произвольное многообразие (N^7, Ξ_N) с циклическим $\mathbf{I}_a$-оснащением в коразмерности $2^l - 8$ имеет нулевой инвариант Адамса—Хопфа. Если гипотеза 1 справедлива, то $\mathbf{D}_4$-оснащённое многообразие (K^7, Ξ_K) не может служить многообразием самопересечения никакого скошенно-оснащённого погружения $f\colon M^{2^{l-1}+3} \looparrowright \mathbb{R}^{2^l-1}$.

Гипотеза 2. Основная теорема справедлива при $n \geqslant 31$, т. е. произвольное скошенно-оснащённое погружение $f\colon M^{2^{l-1}+7} \looparrowright \mathbb{R}^{2^l-1}$, $l \geqslant 5$, имеет тривиальный инвариант Адамса—Хопфа.

Замечание. Доказательство гипотезы 2, вероятно, следует искать в рамках следующего обобщения отображения Мелихова (см. также [1] по поводу сходной конструкции). Заменим джойн стандартных отображений $\mathbb{R}\mathrm{P}^7 \to S^7/i \subset \mathbb{R}^{14}$ джойном соответствующего числа копий стандартного отображения $\mathbb{R}\mathrm{P}^3 \to Q^3 \subset \mathbb{R}^4$, где Q^3 определено как стандартное кватернионное линзовое пространство размерности 3, отображение $\mathbb{R}\mathrm{P}^3 \to Q^3$ является стандартным четырёхлистным накрытием, вложение $Q^3 \subset \mathbb{R}^4$ является стандартным вложением Масси.

В обобщённой конструкции определено отображение $\mathbb{R}\mathrm{P}^{4k-1} \to \mathbb{R}^{5k-1}$ (ниже метастабильной размерности), допускающее циклическую структуру. Случай $k = 6$, $4k - 1 = 23 = 2^4 + 7$, $5k - 1 = 29 < 31 = 2^5 - 1$ требуется для обобщения основной теоремы 1.

Настоящая работа была начата на семинаре профессора М. М. Постникова в 1996 г. Работа посвящается памяти профессора М. М. Постникова и завершена на семинаре профессора А. С. Мищенко. Был сделан доклад на конференции памяти М. М. Постникова «Algebraic Topology: Old and New» (2007 г.). Предварительный доклад был сделан на конференции памяти Ю. П. Соловьёва «Топология, анализ и приложения к математической физике» (2005 г.).

Литература

[1] Мелихов С. А. Выворачивания сфер и реализация отображений // Геометрическая топология и теория множеств. Сб. статей к 100-летию Л. В. Келдыш. — Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. — 2004. — Т. 247. — С. 159—181.

[2] Понтрягин Л. С. Гладкие многообразия и их применение в теории гомотопий. — М.: Наука, 1976.

[3] Adams J. F. On the non-existence of elements of Hopf-invariant one // Ann. Math. (2). — 1960. — Vol. 72. — P. 2—104.

[4] Adams J. F. The Kahn—Priddy theorem // Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1973. — Vol. 73. — P. 43—55.

[5] Akhmet'ev P. M., Eccles P. J. The relationship between framed bordism and skew-framed bordism // Bull. London Math. Soc. — 2007. — Vol. 39, no. 3. — P. 473—481.

[6] Eccles P. J. Codimension one immersions and the Kervaire invariant problem // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1981. — Vol. 90. — P. 483—493.

[7] Eccles P. J., Grant M. Bordism groups of immersions and classes represented by self-intersections // Alg. Geom. Topol. — 2007. — Vol. 7. — P. 1081—1097.

[8] Gromov M. Partial Differential Relations. — Berlin: Springer, 1986. — (Ergebnisse Math. ihrer Grenzgebiete 3 Folge).

[9] Hirsh M. W. Immersions of manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. — 1960. — Vol. 93. — P. 242—276.

[10] Koschorke U. Multiple points of immersions and the Kahn—Priddy theorem // Math. Z. — 1979. — Vol. 169. — P. 223—236.

[11] Wells R. Cobordism groups of immersions // Topology. — 1966. — Vol. 5. — P. 281—294.