Геометрический подход к стабильным гомотопическим группам сфер. Инварианты Кервера. II*

П. М. АХМЕТЬЕВ
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
e-mail: pmakhmet@mi.ras.ru

УДК 515.164

Ключевые слова: иммерсия, оснащённая иммерсия, инвариант Кервера, кобордизм.

Аннотация

Представлен подход к проблеме инвариантов Кервера 1. Вводится понятие геометрического $(\mathbb{Z}/2\oplus\mathbb{Z}/2)$-контроля самопересечения скошенно-оснащённого погружения и понятие $(\mathbb{Z}/2\oplus\mathbb{Z}/4)$-структуры (циклической структуры) на многообразии самопересечения $\mathbf{D}_4$-оснащённого погружения. Доказано, что скошенно-оснащённое погружение $f\colon M^{\frac{3n+q}{4}} \looparrowright \mathbb{R}^n$, $0<q\ll n$ (в условиях $(\frac{3n}{4}+\varepsilon)$-ранга) допускает геометрический $(\mathbb{Z}/2\oplus\mathbb{Z}/2)$-контроль, если характеристический класс скошенного оснащения допускает ретракцию порядка q, т. е. существует отображение $\kappa_0\colon M^{\frac{3n+q}{4}} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{\frac{3(n-q)}{4}}$, для которого композиция $I\circ\kappa_0\colon M^{\frac{3n+q}{4}} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{\frac{3(n-q)}{4}} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{\infty}$ является характеристическим классом скошенного оснащения f. Используя введённое понятие $(\mathbb{Z}/2\oplus\mathbb{Z}/2)$-контроля мы доказываем, что при достаточно большом n, $n=2^l-2$, произвольное $\mathbf{D}_4$-оснащённое погружение содержит в своём классе регулярного кобордизма (по модулю кручения нечётного порядка) погружение, которое допускает $(\mathbb{Z}/2\oplus\mathbb{Z}/4)$-структуру.

Abstract

P. M. Akhmet'ev, Geometric approach to stable homotopy groups of spheres. Kervaire invariants. II, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 8, pp. 17—41.

We present an approach to the Kervaire-invariant-one problem. The notion of the geometric $(\mathbb{Z}/2\oplus\mathbb{Z}/2)$-control of self-intersection of a skew-framed immersion and the notion of the $(\mathbb{Z}/2\oplus\mathbb{Z}/4)$-structure on the self-intersection manifold of a $\mathbf{D}_4$-framed immersion are introduced. It is shown that a skew-framed immersion $f\colon M^{\frac{3n+q}{4}} \looparrowright \mathbb{R}^n$, $0<q\ll n$ (in the $(\frac{3n}{4}+\varepsilon)$-range) admits a geometric $(\mathbb{Z}/2\oplus\mathbb{Z}/2)$-control if the characteristic class of the skew-framing of this immersion admits a retraction of the order q, i.e., there exists a mapping $\kappa_0\colon M^{\frac{3n+q}{4}} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{\frac{3(n-q)}{4}}$ such that this composition $I\circ\kappa_0\colon M^{\frac{3n+q}{4}} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{\frac{3(n-q)}{4}} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{\infty}$ is the characteristic class of the skew-framing of f. Using the notion of $(\mathbb{Z}/2\oplus\mathbb{Z}/2)$-control, we prove that for a sufficiently large n, $n=2^l-2$, an arbitrary immersed $\mathbf{D}_4$-framed manifold admits in the regular cobordism class (modulo odd torsion) an immersion with a $(\mathbb{Z}/2\oplus\mathbb{Z}/4)$-structure.

*Работа поддержана грантом Лондонского королевского общества (1998—2000), грантами РФФИ 08-01-00663, INTAS 05-1000008-7805.

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 8, с. 17—41.

1. Самопересечение погружений и инвариант Кервера

Проблема инвариантов Кервера 1 является открытой проблемой в алгебраической топологии (см. об алгебраическом подходе к решению [4, 7]). Мы рассмотрим геометрический подход к решению проблемы, который основан на результатах П. Дж. Экклза [8] (о другом геометрическом подходе см. [5, 6]).

Рассмотрим гладкое погружение $f\colon M^{n-1} \looparrowright \mathbb{R}^n$, $n = 2^l - 2$, $l > 1$, общего положения коразмерности 1. Обозначим через $g\colon N^{n-2} \looparrowright \mathbb{R}^n$ погружение многообразия самопересечения.

Определение 1. Инвариант Кервера погружения f определяется по формуле

$$\Theta(f) = \left\langle w_2^{\frac{n-2}{2}}; [N^{n-2}] \right\rangle,$$

где через $w_2 = w_2(N^{n-2})$ обозначен нормальный класс Штифеля—Уитни многообразия N^{n-2}.

Инвариант Кервера является инвариантом класса регулярного кобордизма погружения f. Более того, инвариант Кервера является гомоморфизмом

$$\Theta\colon \mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}}(n-1, 1) \to \mathbb{Z}/2. \tag{1}$$

Нормальное расслоение $\nu(g)$ погружения $g\colon N^{n-2} \looparrowright \mathbb{R}^n$ является двумерным расслоением над N^{n-2}, которое снабжено $\mathbf{D}_4$-оснащением. Классифицирующее отображение этого расслоения имеет вид $\eta\colon N^{n-2} \to K(\mathbf{D}_4, 1)$. Редукция структурной группы нормального расслоения к подгруппе $\mathbf{D}_4$ называется $\mathbf{D}_4$-оснащением нормального расслоения с характеристическим отображением η. Пара (g, η) представляет элемент в группе кобордизма $\mathrm{Imm}^{\mathbf{D}_4}(n-2, 2)$. Гомоморфизм

$$\delta\colon \mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}}(n-1, 1) \to \mathrm{Imm}^{\mathbf{D}_4}(n-2, 2) \tag{2}$$

корректно определён.

Вспомним, что группа кобордизма $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}}(n-k, k)$ обобщает группу кобордизма $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}}(n-1, 1)$. Новая группа определена как группа кобордизма троек (f, Ξ, κ), где $f\colon M^{n-k} \looparrowright \mathbb{R}^n$ — погружение, причём задан изоморфизм $\Xi\colon \nu(g) = k\kappa$, который называется скошенным оснащением, через $\nu(f)$ обозначено нормальное расслоение погружения f, κ является заданным линейным расслоением над M^{m-k} с характеристическим классом $w_1(\kappa) \in H^1(M^{m-k}; \mathbb{Z}/2)$. Отношение кобордизма на пространстве рассматриваемых троек является стандартным.

Группа $\mathrm{Imm}^{\mathbf{D}_4}(n-2, 2)$ обобщается следующим образом. Определим группы кобордизмов $\mathrm{Imm}^{\mathbf{D}_4}(n-2k, 2k)$. Каждая группа $\mathrm{Imm}^{\mathbf{D}_4}(n-2k, 2k)$ представлена тройками (g, Ξ, η), где $g\colon N^{n-2k} \looparrowright \mathbb{R}^n$ — погружение, Ξ — диэдральное k-оснащение, т. е. выделенный изоморфизм $\Xi\colon \nu_g = k\eta$, где η является двумерным расслоением над N^{n-2k}. Характеристическое отображение расслоения η обозначается также через $\eta\colon N^{n-2k} \to K(\mathbf{D}_4, 1)$. Отображение η является характеристическим для расслоения ν_g, поскольку $\nu_g = k\eta$.

Очевидно, что гомоморфизм Кервера (1) определён как композиция гомоморфизма (2) и гомоморфизма

$$\Theta_{\mathbf{D}_4}\colon \operatorname{Imm}^{\mathbf{D}_4}(n-2,2) \to \mathbb{Z}/2. \tag{3}$$

Гомоморфизм (3) называется инвариантом Кервера $\mathbf{D}_4$-оснащённого погружения.

Гомоморфизм Кервера определён в более общей ситуации при помощи прямого обобщения гомоморфизмов (1) и (3):

$$\Theta^k\colon \operatorname{Imm}^{\mathrm{sf}}(n-k,k) \to \mathbb{Z}/2,$$
$$\Theta^k_{\mathbf{D}_4}\colon \operatorname{Imm}^{\mathbf{D}_4}(n-2k,2k) \to \mathbb{Z}/2$$

(для $k=1$ новый гомоморфизм совпадает с определённым выше гомоморфизмом (3)), при этом следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Imm}^{\mathrm{sf}}(n-1,1) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "J^k"] & \operatorname{Imm}^{\mathbf{D}_4}(n-2,2) \arrow[r, "\Theta_{\mathbf{D}_4}"] \arrow[d, "J^k_{\mathbf{D}_4}"] & \mathbb{Z}/2 \arrow[d, equal] \\
\operatorname{Imm}^{\mathrm{sf}}(n-k,k) \arrow[r, "\delta^k"] & \operatorname{Imm}^{\mathbf{D}_4}(n-2k,2k) \arrow[r, "\Theta^k_{\mathbf{D}_4}"] & \mathbb{Z}/2.
\end{tikzcd}$$

Рассмотрим $\mathbf{D}_4$-оснащённое погружение (g,Ξ,η) общего положения коразмерности $2k$. Обозначим через $h\colon L^{n-4k} \looparrowright \mathbb{R}^n$ погружение многообразия самопересечения (многообразие двойных точек) погружения g. Нормальное расслоение ν_h погружения h представляется в виде прямой суммы k изоморфных копий четырёхмерного расслоения ζ со структурной группой $\mathbb{Z}/2\wr\mathbf{D}_4$. Итак, определён изоморфизм нормального расслоения $\Psi\colon \nu_h = k\zeta$. Расслоение ν_h классифицируется отображением $\zeta\colon L^{n-4k} \to K\big(\mathbb{Z}/2\wr\mathbf{D}_4,1\big)$.

Всевозможные тройки (h,ζ,Ψ), которые были описаны выше (мы не предполагаем, что $\mathbf{D}_4$-оснащённое погружение, определённое произвольной тройкой, реализуется как многообразие точек самопересечения некоторого $\mathbf{D}_4$-оснащённого погружения), с точностью до стандартного отношения кобордизма образуют группу кобордизма $\operatorname{Imm}^{\mathbb{Z}/2\wr\mathbf{D}_4}(n-4k,4k)$. Многообразие самопересечения произвольного $\mathbf{D}_4$-оснащённого погружения является $\big(\mathbb{Z}/2\wr\mathbf{D}_4\big)$-оснащённым погружением, и класс оснащённого кобордизма этого погружения определяет гомоморфизм

$$\delta^k_{\mathbf{D}_4}\colon \operatorname{Imm}^{\mathbf{D}_4}(n-2k,2k) \to \operatorname{Imm}^{\mathbb{Z}/2\wr\mathbf{D}_4}(n-4k,4k).$$

Подгруппа $\mathbf{D}_4\oplus\mathbf{D}_4 \subset \mathbb{Z}/2\wr\mathbf{D}_4$ индекса 2 индуцирует двулистное накрытие $\bar{L}^{n-4k} \to L^{n-4k}$. Это двулистное накрытие соответствует каноническому двулистному накрытию над многообразием точек самопересечения.

Рассмотрим классифицирующее отображение $\bar{\zeta}\colon \bar{L}^{n-4k} \to K(\mathbf{D}_4,1)$, которое индуцировано гомоморфизмом проекции на первое слагаемое $\mathbf{D}_4\oplus\mathbf{D}_4 \to \mathbf{D}_4$. Предположим, что $\bar{\zeta} \to L^{n-4k}$ является двумерным расслоением со структурной группой $\mathbf{D}_4$, которое определено как обратный образ универсального двумерного расслоения по отображению $\bar{\zeta}$.

Определение 2. Инвариант Кервера $\Theta^k_{\mathbb{Z}/2\wr\mathbf{D}_4}$ произвольного $(\mathbb{Z}/2\wr\mathbf{D}_4)$-оснащённого погружения (h,Ψ,ζ) определён формулой

$$\Theta^k_{\mathbb{Z}/2\wr\mathbf{D}_4}(h,\Psi,\zeta)=\left\langle w_2(\bar\eta)^{\frac{n-4k}{2}};[L^{n-4k}]\right\rangle.$$

Этот инвариант является гомоморфизмом

$$\Theta^k_{\mathbb{Z}/2\wr\mathbf{D}_4}\colon \operatorname{Imm}^{\mathbb{Z}/2\wr\mathbf{D}_4}(n,n-4k)\to\mathbb{Z}/2,$$

включённым в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Imm}^{\mathbf{D}_4}(n-2k,2k) \arrow[r, "\Theta_{\mathbf{D}_4}"] \arrow[d, "\delta^k_{\mathbf{D}_4}"] & \mathbb{Z}/2 \arrow[d, equal] \\
\operatorname{Imm}^{\mathbb{Z}/2\wr\mathbf{D}_4}(n-4k,4k) \arrow[r, "\Theta^k_{\mathbb{Z}/2\wr\mathbf{D}_4}"] & \mathbb{Z}/2.
\end{tikzcd} \tag{4}$$

Сформулируем первый основной результат работы. В разделе 2 определено понятие $(\mathbb{Z}/2\oplus\mathbb{Z}/2)$-контроля ($\mathbf{I}_b$-контроля) на многообразии самопересечения скошенно-оснащённого погружения. Теорема 1 (доказательство в разделе 3) утверждает, что при естественных размерностных ограничениях условие $\mathbf{I}_b$-контроля достигается для погружения в классе регулярного кобордизма по модулю элементов нечётного порядка.

В разделе 4 сформулировано понятие $(\mathbb{Z}/2\oplus\mathbb{Z}/4)$-структуры (или $\mathbf{I}_4$-структуры, или циклической структуры) для $\mathbf{D}_4$-оснащённого погружения. Далее в разделе 5 формулируется второй основной результат работы (теорема 2). Мы доказываем, что при естественных размерностных ограничениях класс регулярной гомотопии произвольного $\mathbf{D}_4$-оснащённого $\mathbf{I}_b$-контролируемого погружения допускает в классе регулярной гомотопии погружение с циклической структурой. Для такого погружения инвариант Кервера выражается через $(\mathbb{Z}/2\oplus\mathbb{Z}/4)$-характеристический класс многообразия самопересечения.

Автор благодарит профессора М. Мейхоуолда (2005) и профессора Р. Коэна (2007) за обсуждения, профессора А. А. Воронова за приглашение с докладом в Университет Миннесоты (2005).

Работа была начата на семинаре М. М. Постникова в 1998 году. Работа посвящается памяти профессора Ю. П. Соловьёва.

2. Геометрический контроль многообразия самопересечения скошенно-оснащённых погружений

В этом и в последующих разделах через $\operatorname{Imm}^{\mathrm{sf}}(n-k,k)$, $\operatorname{Imm}^{\mathbf{D}_4}(n-2k,2k)$, $\operatorname{Imm}^{\mathbb{Z}/2\wr\mathbf{D}_4}(n-4k,4k)$ и т. д. будут обозначаться не сами группы кобордизма, а их 2-компоненты. Если первый аргумент в скобках, обозначающий размерность погружённого многообразия, строго положителен, то указанные группы являются конечными 2-группами.

Вспомним, что диэдральная группа $\mathbf{D}_4$ определяется своим копредставлением $\{a,b \mid a^4 = b^2 = e,\ [a,b] = a^2\}$. Эта группа является подгруппой в группе движений плоскости $O(2)$, т. е. группой преобразований стандартной плоскости, сохраняющей пару направляющих прямых, порождённых базисными векторами $\{f_1, f_2\}$. Элемент a представлен вращением плоскости на угол $\frac{\pi}{2}$. Элемент b соответствует отражению плоскости относительно прямой с образующим вектором $f_1 + f_2$.

Рассмотрим подгруппу $\mathbf{I}_b(\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2) = \mathbf{I}_b \subset \mathbf{D}_4$ диэдральной группы, порождённую элементами $\{a^2, b\}$. Заметим, что это элементарная 2-группа ранга 2. Это группа движений, сохраняющих по отдельности каждую из прямых l_1, l_2 с направляющими векторами $f_1 + f_2$, $f_1 - f_2$ соответственно. Группа когомологий $H^1(K(\mathbf{I}_b, 1); \mathbb{Z}/2)$ также является элементарной 2-группой с двумя образующими. Первая (вторая) образующая этой группы отвечает за преобразование прямой l_2 (прямой l_1 соответственно). Образующие группы когомологий обозначаются через τ_1, τ_2 соответственно.

Определение 3. Скажем, что скошенно-оснащённое погружение (f, Ξ), $f\colon M^{n-k} \looparrowright \mathbb{R}^n$, имеет $\mathbf{I}_b$-тип самопересечения, если многообразие двойных точек самопересечения N^{n-2k} погружения f является $\mathbf{D}_4$-оснащённым многообразием, причём структурная группа $\mathbf{D}_4$ нормального расслоения редуцируется к подгруппе $\mathbf{I}_b \subset \mathbf{D}_4$.

Сформулируем следующую гипотезу.

Гипотеза. Для произвольного $q > 0$, $q = 2 \pmod 4$, существует положительное целое $l_0 = l_0(q)$, такое что для произвольного $n = 2^l - 2$, $l > l_0$, произвольный элемент $a \in \mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}}(\frac{3n+q}{4}, \frac{n-q}{4})$ стабильно регулярно кобордантен стабильно скошенно-оснащённому погружению, которое имеет многообразие самопересечения типа $\mathbf{I}_b$ (определение стабильного оснащения имеется в [9], о стабильном скошенном оснащении см. [1,2]).

Сформулируем и докажем результат, который является ослаблением сформулированной гипотезы. Начнём с соответствующих определений.

Пусть $\omega\colon \mathbb{Z}/2 \wr \mathbf{D}_4 \to \mathbb{Z}/2$ — эпиморфизм, определённый композицией

$$\mathbb{Z}/2 \wr \mathbf{D}_4 \subset \mathbb{Z}/2 \wr \Sigma_4 \to \Sigma_4 \to \mathbb{Z}/2,$$

где $\Sigma_4 \to \mathbb{Z}/2$ — чётность подстановки. Обозначим через

$$\omega^!\colon \mathrm{Imm}^{\mathbb{Z}/2 \wr \mathbf{D}_4}(n-4k, 4k) \to \mathrm{Imm}^{\mathrm{Ker}\,\omega}(n-4k, 4k)$$

гомоморфизм трансфера относительно ядра эпиморфизма ω.

Пусть P — полиэдр, $\dim(P) < 2k-1$, $Q \subset P$ — подполиэдр, $\dim(Q) = \dim(P) - 1$, и пусть $P \subset \mathbb{R}^n$ — произвольное вложение. Обозначим через U_P регулярную окрестность вложенного полиэдра $P \subset \mathbb{R}^n$ радиуса r_P, а через U'_Q регулярную окрестность вложенного подполиэдра $Q \subset \mathbb{R}^n$ радиуса r_Q, где $r_Q > r_P$. Положим $U_Q = U_P \cap U'_Q$.

Граница ∂U_P окрестности U_P является подмногообразием коразмерности 1 в $\mathbb{R}^n$. Многообразие ∂U_P является объединением двух многообразий с границами $V_Q \cup_\partial V_P$, $V_Q = U_Q \cap \partial U_P$, $V_P = \partial U_P \setminus U_Q$, вдоль общей границы $\partial V_Q = \partial V_P$.

Предположим, что заданы два класса когомологий $\tau_{Q,1} \in H^1(Q;\mathbb{Z}/2)$, $\tau_{Q,2} \in$ $\in H^1(Q;\mathbb{Z}/2)$. Отображение проекции окрестности на центральное подмногообразие $U_Q \to Q$ определяет когомологические классы $\tau_{U_Q,1}, \tau_{U_Q,2} \in H^1(U_Q;\mathbb{Z}/2)$ как обратные образы классов $\tau_{Q,1}$, $\tau_{Q,2}$ соответственно.

Рассмотрим $\mathbf{D}_4$-оснащённое погружение (g, Ξ_N, η), $\dim(N) = n - 2k$, $n - 4k > 0$, и пусть $g(N^{n-2k}) \cap \partial U_P$ является погружённым подмногообразием в $U_Q \subset \partial U_P$. Обозначим многообразие $g(N^{n-2k}) \setminus (g(N^{n-2k}) \cap U_P)$ через N^{n-2k}_{int}. Дополнение $N^{n-2k} \setminus N^{n-2k}_{\mathrm{int}}$ обозначим через N^{n-2k}_{ext}. Многообразия N^{n-2k}_{ext}, N^{n-2k}_{int} являются подмногообразиями в N^{n-2k} коразмерности 0 с общей границей, которую обозначим через N_Q^{n-2k-1}. Многообразие самопересечения погружения g обозначим через L^{n-4k}. По размерностным соображениям (так как $n - 4k = q \ll n$) L^{n-4k} является подмногообразием в $\mathbb{R}^n$, которое параметризовано вложением h, это подмногообразие является $(\mathbb{Z}/2 \wr \mathbf{D}_4)$-оснащённым посредством оснащения (Ψ, ζ). Тройка (h, Ψ, ζ) определяет элемент в группе кобордизма $\mathrm{Imm}^{\mathbb{Z}/2 \wr \mathbf{D}_4}(n-4k, 4k)$.

Определение 4. Скажем, что $\mathbf{D}_4$-оснащённое погружение g является $\mathbf{I}_b$-контролируемым погружением, если выполнены следующие условия:

1) структурная группа $\mathbf{D}_4$-оснащения Ξ_N, ограниченного на подмногообразие (с границей) $g(N^{n-2k}_{\mathrm{ext}})$, редуцируется к подгруппе $\mathbf{I}_b \subset \mathbf{D}_4$ и когомологические классы $\tau_{U_Q,1}, \tau_{U_Q,2} \in H^1(U_Q;\mathbb{Z}/2)$ отображаются в образующие $\tau_1, \tau_2 \in H^1(N_Q^{n-2k-1};\mathbb{Z}/2)$ когомологий структурной группы этого $\mathbf{I}_b$-оснащения посредством погружения $g|_{N_Q^{n-2k-1}} \colon N_Q^{n-2k-1} \looparrowright \partial(U_Q) \subset U_Q$;

2) ограничение погружения g на подмногообразие $N_Q^{n-2k-1} \subset N^{n-2k}$ является вложением $g|_{N_Q^{n-2k-1}} \colon N_Q^{n-2k-1} \subset \partial U_Q$, причём определено разложение $L^{n-4k} = L^{n-4k}_{\mathrm{int}} \cup L^{n-4k}_{\mathrm{ext}} \subset (U_P \cup \mathbb{R}^n \setminus U_P)$ многообразия самопересечения погружения g в объединение двух (возможно, несвязных) $\mathbb{Z}/2 \wr \mathbf{D}_4$-оснащённых замкнутых подмногообразия. Компонента L^{n-4k}_{int} является подмногообразием в U_P, и тройка $(L^{n-4k}_{\mathrm{int}}, \Psi_{\mathrm{int}}, \zeta_{\mathrm{int}})$ представляет элемент в группе $\mathrm{Imm}^{\mathrm{Ker}\,\omega}(n-4k, 4k)$, который лежит в образе гомоморфизма трансфера $\omega^! \colon \mathrm{Imm}^{\mathbb{Z}/2 \wr \mathbf{D}_4}(n-4k, 4k) \to \mathrm{Imm}^{\mathrm{Ker}\,\omega}(n-4k, 4k)$.

Определение 5. Пусть $(f, \Xi_M, \kappa) \in \mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}}(n-k, k)$ — произвольный элемент, где $f \colon M^{n-k} \looparrowright \mathbb{R}^n$ — погружение коразмерности k с характеристическими классами $\kappa \in H^1(M^{n-k};\mathbb{Z}/2)$ скошенного оснащения Ξ_M. Скажем, что пара (M^{n-k}, κ) допускает ретракцию порядка q, если отображение $\kappa \colon M^{n-k} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$ представлено композицией $\kappa = I \circ \bar{\kappa} \colon M^{n-k} \to \mathbb{R}\mathrm{P}^{n-k-q-1} \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^\infty$. Скажем, что элемент $[(f,\Xi_M,\kappa)]$ допускает ретракцию порядка q, если в классе кобордизма скошенно-оснащённого погружения существует тройка $(M'^{n-k},\Xi_{M'},\kappa')$, допускающая ретракцию порядка q.

Теорема 1. *Пусть $q=q(l)$ — положительное целое, причём $q=2 \pmod 4$. Предположим, что элемент $\alpha \in \mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}}\left(\frac{3n+q}{4},\frac{n-q}{4}\right)$ допускает ретракцию порядка q, причём $3n-12k-4>0$. Тогда элемент $\delta(\alpha) \in \mathrm{Imm}^{\mathbf{D}_4}(n-2k,2k)$, $k=\frac{n-q}{4}$, представлен $\mathbf{D}_4$-оснащённым погружением $[(g,\Psi_N,\eta)]$, допускающим $\mathbf{I}_b$-контроль.*

3. Доказательство теоремы 1

Обозначим $n-k-q-1=3k-1$ через s. Пусть $d\colon \mathbb{R}\mathrm{P}^s \to \mathbb{R}^n$ — произвольное отображение общего положения. Обозначим точки самопересечения отображения d (в пространстве-образе) через $\Delta(d)$ и критические точки отображения d через $\Sigma(d)$.

Вспомним классификацию особых точек отображений общего положения $\mathbb{R}\mathrm{P}^s \to \mathbb{R}^n$ в предположении $4s<3n$ (более детальное изложение имеется в [11]). В этой размерности отображения общего положения не имеют точек четырёхкратного самопересечения. Критические значения отображения (в образе) имеют следующие два типа:

— замкнутое многообразие $\Sigma^{1,1,0}$;
— особые точки $\Sigma^{1,0}$ (это подмногообразие с особенностями в точках $\Sigma^{1,1,0}$).

Кратные точки самопересечения имеют кратности 2 и 3. Тройные точки самопересечения образуют многообразие с границей и углами на границе. Углами этого многообразия служит многообразие критических значений типа $\Sigma^{1,1,0}$. Регулярная часть границы образована критическими значениями типа $\Sigma^{1,0}$.

Двойные точки самопересечения образуют подмногообразие в $\mathbb{R}^n$ с особенностями. Это подмногообразие не является многообразием общего положения. При сколь угодно малой деформации общего положения это подмногообразие становится вложенным подмногообразием с границей и с углами на границе, которые образованы точками типа $\Sigma^{1,1,0}$.

Обозначим через U_Σ регулярную окрестность малого радиуса ε_1 подмногообразия с особенностями $\Sigma^{1,0}$. Обозначим через U_Δ регулярную окрестность того же радиуса подмногообразия $\Delta(d)$ (это подмногообразие является погружённым и имеет особенности на границе). Определено отображение включения $U_\Sigma \subset U_\Delta$.

Рассмотрим регулярное подмногообразие в Δ, определённое в результате удаления малой регулярной окрестности границы. Это подмногообразие с регулярной границей погружено в $\mathbb{R}^n$, обозначим его через Δ^{reg}. Граница этого погружённого многообразия сама является погружённым многообразием, которое мы обозначим через Σ^{reg}. Рассмотрим пару регулярных окрестностей $U_\Sigma^{\mathrm{reg}} \subset U_\Delta^{\mathrm{reg}}$ пары погружённых многообразий $\Sigma^{\mathrm{reg}} \subset \Delta^{\mathrm{reg}}$ радиуса ε_2, $\varepsilon_2 \ll \varepsilon_1$. По условию

$2\dim(\Delta^{\mathrm{reg}}) < n$, и после малой деформации общего положения многообразие Δ^{reg} становится регулярным подмногообразием в $U_{\Delta}^{\mathrm{reg}}$.

Рассмотрим скошенно-оснащённое погружение (f_0, Ξ_0, κ), $f_0\colon M^{n-k} \looparrowright \mathbb{R}^n$, $n-k = \frac{3n+q}{4}$, в классе кобордизма α. Определим погружение $f\colon M^{n-k} \looparrowright \mathbb{R}^n$ в классе регулярной гомотопии погружения f_0 в соответствии со следующей конструкцией.

Рассмотрим отображение $\kappa_0\colon M^{n-k} \to \mathbb{RP}^s$ ретракции порядка q. Рассмотрим погружение $f\colon M \looparrowright \mathbb{R}^n$ в классе регулярной гомотопии погружения f_0, удовлетворяющее условию $\mathrm{dist}(d \circ \kappa_0, f_0) < \varepsilon_3$. Калибр ε_3 этой аппроксимации определён неравенством $\varepsilon_3 \ll \varepsilon_2$.

Обозначим через $g_1\colon N^{n-2k} \looparrowright \mathbb{R}^n$ погружение, параметризующее точки самопересечения погружения f. Погружение g_1 не является, вообще говоря, погружением общего положения. В результате малой деформации погружения g_1 общего положения калибра ε_3 получим погружение общего положения $g_2\colon N^{n-2k} \looparrowright \mathbb{R}^n$.

Погружённое подмногообразие $g_2(N^{n-2k})$ можно представить в виде объединения двух подмногообразий с краем $g_2(N_{\mathrm{int}}^{n-2k})$, $g_2(N_{\mathrm{ext}}^{n-2k})$ по общему погружённому краю $g_2(\partial N_{\mathrm{int}}^{n-2k}) = g_2(\partial N_{\mathrm{ext}}^{n-2k})$, который мы обозначим через $g_2(N_Q^{n-2k-1})$. Многообразие $g_2(N_{\mathrm{int}}^{n-2k})$ определено как пересечение погружённого многообразия $g_2(N^{n-2k})$ с окрестностью $U_{\Delta}^{\mathrm{reg}}$. Многообразие $g_2(N_{\mathrm{ext}}^{n-2k})$ определено как пересечение погружённого многообразия $g_2(N^{n-2k})$ с дополнением к рассматриваемой окрестности $\mathbb{R}^n \setminus (U_{\Delta}^{\mathrm{reg}})$. Предположим, что погружение g_2 является регулярным вдоль $\partial U_{\Delta}^{\mathrm{reg}}$. Тогда $g_2(N_Q^{n-2k})$ является погружённым многообразием в $\partial U_{\Delta}^{\mathrm{reg}}$. По построению структурная группа $\mathbf{D}_4$ нормального расслоения погружённого многообразия $g_2(N_{\mathrm{ext}}^{n-2k})$ допускает редукцию к подгруппе $\mathbf{I}_b \subset \mathbf{D}_4$.

Обозначим через L^{n-4k} многообразие самопересечения погружения g_2. Параметризующее вложение этого подмногообразия обозначим через $h\colon L^{n-4k} \subset \mathbb{R}^n$. Нормальное расслоение этого вложения h снабжено $(\mathbb{Z}/2 \wr \mathbf{D}_4)$-оснащением, которое обозначим через Ψ_L, характеристическое отображение этого оснащение обозначим через ζ_L. Аналогично многообразие L^{n-4k} можно представить в виде объединения двух многообразий вдоль общей границы, которую обозначим через Λ. В соответствии с этим имеем $L^{n-4k} = L_{\mathrm{ext}}^{n-4k} \cup_{\Lambda} L_{\mathrm{int}}^{n-4k}$. Многообразие (с границей) L_{int}^{n-4k} вкладывается посредством h в окрестность $U_{\Delta}^{\mathrm{reg}}$, многообразие L_{ext}^{n-4k} (с той же границей) вкладывается в дополнение $\mathbb{R}^n \setminus U_{\Delta}^{\mathrm{reg}}$. Общая граница Λ вкладывается в $\partial U_{\Delta}^{\mathrm{reg}}$.

Многообразие L^{n-4k} является $(\mathbb{Z}/2 \wr \mathbf{D}_4)$-оснащённым многообразием, погружённым в $\mathbb{R}^n$. Опишем редукцию структурной группы этого погружённого многообразия к соответствующей подгруппе в группе $\mathbb{Z}/2 \wr \mathbf{D}_4$. Для этого определим подгруппы $\mathbf{I}_{2,j}(\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbf{D}_4) \subset \mathbb{Z}/2 \wr \mathbf{D}_4$, $j = x, y, z$, при помощи действия образующих каждой группы в базисе пространства $\mathbb{R}^4$.

Рассмотрим подгруппу $\mathbf{I}_{2,x}$. Образующая c_x (каждая образующая снабжена нижнем индексом в соответствии с определяемой подгруппой) определяет преобразование пространства согласно следующей формуле:

$$c_x(f_1)=f_3,\quad c_x(f_3)=f_1,\quad c_x(f_2)=f_4,\quad c_x(f_4)=f_2.$$

Для образующей a_x (порядка 4) преобразование пространства задано формулой

$$a_x(f_1)=f_2,\quad a_x(f_2)=-f_1,\quad a_x(f_3)=f_4,\quad a_x(f_4)=-f_3.$$

Образующая b_x (порядка 2) определяет преобразование пространства в соответствии с формулой

$$b_x(f_1)=f_2,\quad b_x(f_2)=f_1,\quad b_x(f_3)=f_4,\quad b_x(f_4)=f_3.$$

Из этого вытекает, что подгруппа $\mathbf{D}_4\subset\mathbf{D}_4\oplus\mathbb{Z}/2$ представлена преобразованиями с инвариантными подпространствами (f_1,f_2), (f_3,f_4)). Образующая циклической подгруппы второго сомножителя $\mathbb{Z}/2\subset\mathbf{D}_4\oplus\mathbb{Z}/2$ переставляет эти подпространства.

Подгруппы $\mathbf{I}_{2,y}$ и $\mathbf{I}_{2,x}$ сопряжены автоморфизмом $OP\colon\mathbb{Z}/2\wr\mathbf{D}_4\to\mathbb{Z}/2\wr\mathbf{D}_4$, определённым в базисе по формуле

$$f_1\to f_1,\quad f_2\to f_3,\quad f_3\to f_2,\quad f_4\to f_4.$$

Отсюда вытекает, что образующая $c_y\in\mathbf{I}_{2,y}$ задана преобразованием

$$c_y(f_1)=f_2,\quad c_y(f_2)=f_1,\quad c_y(f_3)=f_4,\quad c_y(f_4)=f_3.$$

Образующая a_y (порядка 4) определяет преобразование по формуле

$$a_y(f_1)=f_3,\quad a_y(f_3)=-f_1,\quad a_y(f_2)=f_4,\quad a_y(f_4)=-f_2.$$

Образующая b_y (порядка 2) определяет преобразование по формуле

$$b_y(f_1)=f_3,\quad b_y(f_3)=f_1,\quad b_y(f_2)=f_4,\quad b_y(f_4)=f_2.$$

Опишем подгруппу $\mathbf{I}_{2,z}$. Образующая c_z определяет преобразование по формуле $c_z(f_i)=-f_i$, $i=1,2,3,4$. Для образующей a_z (порядка 4) преобразование определено по формуле

$$a_z(f_1)=f_2,\quad a_z(f_2)=f_3,\quad a_z(f_3)=f_4,\quad a_z(f_4)=f_1.$$

Образующая b_x (порядка 2) определяет преобразование по формуле

$$b_z(f_1)=f_2,\quad b_z(f_2)=f_1,\quad b_z(f_3)=f_4,\quad b_z(f_4)=f_3.$$

Очевидно, что ограничение эпиморфизма $\omega\colon\mathbb{Z}/2\wr\mathbf{D}_4\to\mathbb{Z}/2$ на подгруппы $\mathbf{I}_{2,x},\mathbf{I}_{2,y}\subset\mathbb{Z}/2\wr\mathbf{D}_4$ является тривиальным, а ограничение этого эпиморфизма на подгруппу $\mathbf{I}_{2,z}$ является нетривиальным.

Подгруппа $\mathbf{I}_3\subset\mathbf{I}_{2,x}$ определена как подгруппа с образующими c_x, b_x, a_x^2. Это подгруппа индекса 2 изоморфная группе $\mathbb{Z}/2^3$. Образ этой подгруппы в группе $\mathbb{Z}/2\wr\mathbf{D}_4$ совпадает с пересечением произвольной пары подгрупп $\mathbf{I}_{2,x}$, $\mathbf{I}_{2,y}$, $\mathbf{I}_{2,z}$. Подгруппа $\mathbf{I}_3\subset\mathbf{I}_{2,y}$ определена образующими c_y, b_y, a_y^2. Кроме того, выполнены соотношения $c_y=b_x$, $b_y=c_x$, $a_y^2=a_x^2$. Легко проверить, что выполнены соотношения $c_z=a_x^2$, $a_z^2=c_x=b_y$, $b_z=b_x=c_y$. Следовательно, $\mathrm{Ker}(\omega|_{\mathbf{I}_{2,z}})$ совпадает с подгруппой $\mathbf{I}_3\subset\mathbf{I}_{2,z}$.

Подгруппы $\mathbf{I}_{2,x}$, $\mathbf{I}_{2,y}$, $\mathbf{I}_{2,z}$, $\mathbf{I}_3$ в $\mathbb{Z}/2 \wr \mathbf{D}_4$ корректно определены. Имеется гомоморфизм проекции $\pi_b \colon \mathbf{I}_3 \to \mathbf{I}_b$.

Рассмотрим также подгруппу $\mathbf{I}_{2,x\downarrow} \subset \mathbb{Z}/2 \wr \mathbf{D}_4$. Эта подгруппа является квадратичным расширением подгруппы $\mathbf{I}_{2,x}$, при этом выполнено соотношение $\mathbf{I}_{2,x} = \operatorname{Ker} \omega|_{\mathbf{I}_{2,x\downarrow}} \subset \mathbf{I}_{2,x\downarrow}$. Алгебраическое определение этой группы нам не понадобится.

В следующей лемме мы опишем структурную группу оснащения триады $(L^{n-4k}_{\mathrm{int}} \cup_\Lambda L^{n-4k}_{\mathrm{ext}})$. Оснащения пространств этой триады будут обозначаться через $(\Psi_{\mathrm{int}} \cup_{\Psi_\Lambda} \cup \Psi_{\mathrm{ext}}, \zeta_{\mathrm{int}} \cup_{\zeta_\Lambda} \cup \zeta_{\mathrm{ext}})$.

Лемма 1. *Существует деформация общего положения $g_1 \to g_2$ калибра $3\varepsilon_3$, такая что погружённое многообразие $g_2(N^{n-2k}_{\mathrm{ext}})$ допускает редукцию структурной группы $\mathbf{D}_4$-оснащения к подгруппе $\mathbf{I}_b \subset \mathbf{D}_4$. Многообразие L^{n-4k}_{int} представлено дизъюнктным объединением двух подмногообразий (с границей), которые обозначены через $(L^{n-4k}_{\mathrm{int},x\downarrow}, \Lambda_{x\downarrow})$, $(L^{n-4k}_{\mathrm{int},y}, \Lambda_y)$, по общей границе.*

1. *Структурная группа оснащения $(\Psi_{\mathrm{int},x\downarrow}, \Psi_{\Lambda_{x\downarrow}})$ подмногообразия (с границей) $(L^{n-4k}_{\mathrm{int},x\downarrow}, \Lambda_{x\downarrow})$ редуцируется к паре подгрупп $(\mathbf{I}_{2,x\downarrow}, \mathbf{I}_{2,z})$. (В частности, двулистное накрытие над $L^{n-4k}_{\mathrm{int},x\downarrow}$, классифицируемое гомоморфизмом ω (которое обозначается через $\tilde{L}^{n-4k}_{\mathrm{int},x} \to L^{n-4k}_{\mathrm{int},x\downarrow}$) является, вообще говоря, нетривиальным.)*
2. *Структурная группа оснащения $(\Psi_{\mathrm{int},y}, \Psi_\Lambda)$ для подмногообразия (с границей) $(L^{n-4k}_{\mathrm{int},y}, \Lambda_y)$ редуцируется к паре подгрупп $(\mathbf{I}_{2,y}, \mathbf{I}_3)$. (В частности, двулистное накрытие $\tilde{L}^{n-4k}_{\mathrm{int},y} \to L^{n-4k}_{\mathrm{int},y}$, построенное по гомоморфизму ω, является тривиальным.) Кроме того, двулистное накрытие $\tilde{L}^{n-4k}_x$ над компонентой $L^{n-4k}_{x\downarrow}$ естественно диффеоморфно многообразию $\tilde{L}^{n-4k}_y$, причём указанный диффеоморфизм согласован с ограничением автоморфизма $OP \colon \mathbb{Z}/2 \wr \mathbf{D}_4 \to \mathbb{Z}/2 \wr \mathbf{D}_4$ на подгруппу $\mathbf{I}_{2,x}$, $OP(\mathbf{I}_{2,x}) = \mathbf{I}_{2,y}$.*
3. *Структурная группа оснащения $(\Psi_{\mathrm{ext}}, \zeta_{\mathrm{ext}})$ для многообразия (с краем) $h(L^{n-4k}_{\mathrm{ext}}, \Lambda^{n-4k}) \subset \left(\mathbb{R}^n \setminus U^{\mathrm{reg}}_\Delta, \partial(U^{\mathrm{reg}}_\Delta)\right)$ редуцируется к подгруппе $\mathbf{I}_{2,z}$. (В частности, двулистное накрытие $\tilde{L}^{n-4k}_{\mathrm{ext}} \to L^{n-4k}_{\mathrm{ext}}$, классифицируемое ω, является, вообще говоря, нетривиальным накрытием.)*

Доказательство. Компоненты многообразия самопересечения $g_1(N^{n-2k}) \setminus \setminus (g_1(N^{n-2k}) \cap U_\Sigma)$ (это многообразие образовано точками самопересечения $x \in g_1(N^{n-2k})$, $x \neq U_\Sigma$ с прообразами $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in M^{n-k}$) классифицируется следующими двумя типами.

Тип 1. Точки $\kappa(\bar{x}_1)$, $\kappa(\bar{x}_2)$ на $\mathbb{R}\mathrm{P}^s$ являются ε_2-близкими.

Тип 2. Расстояние между точками $\kappa(\bar{x}_1)$, $\kappa(\bar{x}_2)$ в $\mathbb{R}\mathrm{P}^s$ больше, чем калибр ε_2 регулярной аппроксимации. Точки этого типа принадлежат регулярной окрестности U_Δ (радиуса ε_1).

Расклассифицируем компоненты многообразия $\Delta_3(f)$ тройных точек самопересечения погружения f. Априорная классификация компонент этого многообразия следующая.

Точка $x \in \Delta_3(f)$ имеет прообразы $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$ в M^{n-k}.

Тип 1. Образы $\kappa(\bar{x}_1)$, $\kappa(\bar{x}_2)$, $\kappa(\bar{x}_3)$ являются ε_2-близкими на $\mathbb{R}\mathrm{P}^s$.

Тип 2. Образы $\kappa(\bar{x}_1)$, $\kappa(\bar{x}_2)$ являются ε_2-близкими на $\mathbb{R}\mathrm{P}^s$ и расстояние между образами $\kappa(\bar{x}_3)$ and $\kappa(\bar{x}_1)$ (или $\kappa(\bar{x}_2)$) превышает калибр ε_2 аппроксимации.

Тип 3. Расстояния между парами точек $\kappa(\bar{x}_1)$, $\kappa(\bar{x}_2)$, $\kappa(\bar{x}_3)$ превышают калибр ε_2 аппроксимации.

В силу условий общего положения компонента типа 3 не пересекается с $d(\mathbb{R}\mathrm{P}^s)$. Следовательно, погружение f может быть продеформировано посредством ε_2-малой регулярной гомотопии внутрь трубчатой окрестности радиуса ε_3 регулярной части значений $d(\mathbb{R}\mathrm{P}^s)$ таким образом, что после этой регулярной гомотопии компонента $\Delta_3(f)$ целиком содержится в дополнении U_Δ^{reg}. Коразмерность подмногообразия $\bar{\Delta}_2(d) \subset \mathbb{R}\mathrm{P}^s$ равна $n-3k+1=q+k+1$ и больше чем $\dim\bigl(\Delta_3(f)\bigr)=n-3k$. По аналогичным соображениям компонента тройных точек самопересечения типа 1 целиком расположена вне окрестности U_Δ^{reg}.

Расклассифицируем компоненты многообразия $\Delta_4(f)$ точек четырёхкратного самопересечения погружения f. Точка $x \in \Delta_4(f)$ имеет образы, обозначаемые через $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$, $\bar{x}_4$, в M^{n-k}. Априорная классификация имеет следующий вид.

Тип 1. Образы $\kappa(\bar{x}_1)$, $\kappa(\bar{x}_2)$ являются ε_2-близкими на $\mathbb{R}\mathrm{P}^s$, и попарные расстояния между образами $\kappa(\bar{x}_1)$ (или $\kappa(\bar{x}_2)$), $\kappa(\bar{x}_3)$ и $\kappa(\bar{x}_4)$ достаточно велики по сравнению с калибром аппроксимации ε_2.

Тип 2. Две пары $\bigl(\kappa(\bar{x}_1),\,\kappa(\bar{x}_2)\bigr)$ и $\bigl(\kappa(\bar{x}_3),\,\kappa(\bar{x}_4)\bigr)$ образов являются ε_2-близкими на $\mathbb{R}\mathrm{P}^s$, причём расстояния между образами $\kappa(\bar{x}_1)$ (или $\kappa(\bar{x}_2)$) и $\kappa(\bar{x}_3)$ (или $\kappa(\bar{x}_4)$) достаточно велики по сравнению с калибром ε_2 аппроксимации. (Описанная компонента является регулярной компонентой в дополнении к трубчатой окрестности регулярных значений $d(\mathbb{R}\mathrm{P}^s)$ радиуса ε_2.)

Тип 3. Образы $\kappa(\bar{x}_1)$, $\kappa(\bar{x}_2)$ и $\kappa(\bar{x}_3)$ на $\mathbb{R}\mathrm{P}^s$ являются попарно ε_2-близкими на $\mathbb{R}\mathrm{P}^s$, и расстояния между образами $\kappa(\bar{x}_1)$ (или $\kappa(\bar{x}_2)$, или $\kappa(\bar{x}_3)$) и $\kappa(\bar{x}_4)$ достаточно велики по сравнению с калибром ε_2 аппроксимации.

Тип 4. Все образы $\kappa(\bar{x}_1)$, $\kappa(\bar{x}_2)$, $\kappa(\bar{x}_3)$ и $\kappa(\bar{x}_4)$ являются попарно ε_2-близкими на $\mathbb{R}\mathrm{P}^s$.

Докажем, что существует погружение общего положения f, для которого компоненты типа 1 и типа 3 пусты. Для компонент типов 3 и 1 доказательства аналогичны.

Докажем, что существует деформация общего положения $g_1 \to g_2$ калибра $3\varepsilon_3$, такая что в результате этой деформации в окрестности U_Δ^{reg} не окажется точек самопересечения погружения g_2, которые были получены в результате разрешения общего положения самопересечений в окрестности компоненты тройного самопересечения типов 1 и 2. Начнём доказательство для компоненты типа 1.

Для деформации общего положения погружения g_2 внутри U_Δ^{reg} точки на компоненте типа 1 многообразия $\Delta_3(f)$ преобразуются в компоненту на многообразии L^{n-4k}. Эта компонента классифицируется следующими двумя подтипами:

— подтип (a): прообразы точки представлены парами $(\bar{x}_2,\bar{x}_1)$, $(\bar{x}_2,\bar{x}'_1)$;
— подтип (b): прообразы точки представлены парами $(\bar{x}_1,\bar{x}'_1)$, $(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$.

В предыдущей формуле точки с одинаковыми индексами имеют ε_3-близкие проекции на соответствующие листы погружения $d(\mathbb{R}\mathrm{P}^s)$. Две точки в паре определяют точку N^{n-2k}, и две пары определяют точку на компоненте L^{n-4k}.

Докажем, что существует $2\varepsilon_3$-малая регулярная деформация $g_1 \to g_2$, при которой компонента $h(L^{n-4k}) \cap U_\Delta^{\mathrm{reg}}$ точек подтипа (a) оказывается пустой. Пусть K^{s-k} — многообразие самопересечения погружённого многообразия $f(M^{n-k})$ с образом $d(\mathbb{R}\mathrm{P}^s)$ (это многообразие можно рассматривать как погружённое в регулярную область $\mathbb{R}\mathrm{P}^s$). Пользуясь условиями общего положения, поскольку $2s < n-2k$, получаем, что деформация $r \to r'$ общего положения погружения $r\colon K^{s-k} \looparrowright \mathbb{R}\mathrm{P}^s \to \mathbb{R}^n$ является вложением. Следовательно, существует $2\varepsilon_2$-малая деформация погружённых многообразий $r(K^{s-k}) \to r'(K^{s-k})$ в $\mathbb{R}^n$, такая что ε_2-окрестность подмногообразия $r'(K^{s-k})$ не имеет самопересечения. Деформация $K^{s-k} \to K'^{s-k}$ продолжается до деформации $g_1(N^{n-2k})$ при регулярной гомотопии окрестностей построенного семейства погружённых многообразий. После описанной регулярной деформации погружённое многообразие $g_2(N^{n-2k})$ не имеет точек самопересечения подтипа (a). Случай точек самопересечения подтипа (b) рассматривается аналогично.

Опишем деформацию $g_1 \to g_2$ общего положения с носителем в U_Δ^{reg}, которая разрешает особенности самопересечения, соответствующие компоненте точек четырёхкратного самопересечения погружения f типа 2. Калибр этой деформации можно выбрать сколь угодно малым. После разрешения особенностей на компоненте $\Delta_4(f)$ типа 2 образуются две компоненты многообразия L^{n-4k} различных подтипов. Эти две компоненты обозначим через L_x^{n-4k}, L_y^{n-4k}.

Погружённое многообразие $g_2(N^{n-2k}) \cap U_\Delta^{\mathrm{reg}}$ разделено на две компоненты. Первая компонента образована парами точек $(\bar{x}, \bar{x}')$, образы которых $\kappa(\bar{x})$, $\kappa(\bar{x}')$ являются $3\varepsilon_3$-близкими на $\mathbb{R}\mathrm{P}^s$. Эта компонента обозначена через $g_2(N_x^{n-2k})$. Оставшаяся компонента $g_2(N^{n-2k}) \cap U_\Delta^{\mathrm{reg}}$ обозначена через $g_2(N_y^{n-2k})$. Эта компонента образована парами точек $(\bar{x}, \bar{x}')$, проекции которых $\bigl(\kappa(\bar{x}), \kappa(\bar{x}')\bigr)$ лежат на разных листах многообразия $\mathbb{R}\mathrm{P}^s$.

Компонента $L_{x\downarrow}^{n-4k}$ определена парами $(\bar{x}_1, \bar{x}_1')$, $(\bar{x}_2, \bar{x}_2')$. Компонента L_y^{n-4k} определена парами $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, $(\bar{x}_1', \bar{x}_2')$. Общий индекс точек означает, что образы этих точек являются ε_3-близкими точками на $\mathbb{R}\mathrm{P}^s$. Каждая пара точек определяет точку на N^{n-2k} с одинаковыми образами при g_2. Легко проверить, что $L_{x\downarrow}^{n-4k}$ является самопересечением погружённого многообразия $g_2(N_x^{n-2k})$, а компонента L_y^{n-4k} является самопересечением погружённого многообразия $g_2(N_y^{n-2k})$.

Легко проверить, что структурные группы компонент действительно соответствуют структурным группам, описанным в лемме. Компонента $L_{x\downarrow}^{n-4k}$ допускает редукцию структурной группы к подгруппе $\mathbf{I}_{2,x\downarrow} \subset \mathbb{Z}/2 \wr \mathbf{D}_4$. Компонента L_y^{n-4k} допускает редукцию структурной группы к подгруппе $\mathbf{I}_{2,y}$. Кроме того, легко проверить, что накрытие $\tilde{L}^{n-4k}_{x\downarrow}$ над L^{n-4k}_x, индуцированное посредством эпиморфизма $\omega\colon \mathbb{Z}/2\wr\mathbf{D}_4\to\mathbb{Z}/2$ с ядром $\mathbf{I}_{2,x}\subset\mathbb{Z}/2\wr\mathbf{D}_4$, естественно диффеоморфно L^{n-4k}_y. Кроме того, легко проверить, что этот диффеоморфизм согласован с преобразованием OP структурных групп оснащений рассматриваемых компонент.

Оставшаяся компонента L^{n-4k}, обозначенная через L^{n-4k}_z, погружена в ε_2-окрестность $d(\mathbb{R}\mathrm{P}^s)$ и в дополнение к окрестности $U^{\mathrm{reg}}_{\Delta}$ и будет обозначена через L^{n-4k}_z. Структурная группа оснащения этой компоненты редуцируется к группе $\mathbf{I}_{2,z}$. Лемма 1 доказана. □

Окончание доказательства теоремы 1. Определим пару полиэдров

$$(P',Q')\subset\mathbb{R}^n,\quad \dim(P')=2s-n=n-2k-q-2,\quad \dim(Q')=\dim(P')-1.$$

Очевидно, что $\dim(P')<2k-1$. Рассмотрим отображение общего положения $d'\colon\mathbb{R}\mathrm{P}^s\to\mathbb{R}^n$. Рассмотрим подмногообразие с границей $(\Delta'^{\mathrm{reg}},\partial\Delta'^{\mathrm{reg}})\subset\mathbb{R}^n$ (см. обозначения леммы 1). Рассмотрим классифицирующее отображение $\eta_{\Delta'^{\mathrm{reg}}}\colon(\Delta'^{\mathrm{reg}},\partial\Delta'^{\mathrm{reg}})\to\bigl(K(\mathbf{D}_4,1),K(\mathbf{I}_b,1)\bigr)$ для многообразия самопересечения отображения d.

По стандартным аргументам можно продеформировать отображение d в такое d', что отображение $\eta_{\Delta^{\mathrm{reg}}}$ является гомотопической эквивалентностью до размерности $q+1$. После модификации $d'\to d$ мы определим $(P,Q)=(\Delta^{\mathrm{reg}},\partial\Delta^{\mathrm{reg}})\subset\mathbb{R}^n$, отображение $\eta_{\Delta^{\mathrm{reg}}}$ является гомотопической $(q+1)$-эквивалентностью.

Подполиэдр Q снабжён двумя когомологическими классами $\kappa_{Q,1},\kappa_{Q,2}\in H^1(Q;\mathbb{Z}/2)$. Поскольку Σ является подмногообразием в $\mathbb{R}\mathrm{P}^s$, ограничение характеристического класса $\kappa\in H^1(\mathbb{R}\mathrm{P}^s;\mathbb{Z}/2)$ на $H^1(\Sigma;\mathbb{Z}/2)$ корректно определено. Включение $i_Q\colon Q\subset U_\Sigma$ определяет когомологический класс $(i_Q)^*(\kappa)\in H^1(Q;\mathbb{Z}/2)$. Когомологический класс $\kappa_{Q,1}$ определён как характеристический класс на каноническом двулистном накрывающем над Σ. Класс $\kappa_{Q,2}$ определён по формуле $\kappa_{Q,2}=(i_Q)^*(\kappa)+\kappa_{Q,1}$.

Погружённое многообразие (с границей) $(N^{n-2k}\cap U_\Sigma)\looparrowright U_\Sigma$ снабжено $\mathbf{I}_b$-оснащением. Очевидно, что ограничения классов когомологий $\kappa_{Q,1},\kappa_{Q,2}\in H^1(U_\Sigma;\mathbb{Z}/2)=H^1(Q;\mathbb{Z}/2)$ на группу $H^1(g_2(N^{n-2k}_{\mathrm{ext}});\mathbb{Z}/2)$ (вспомним, что $g_2(N^{n-2k}_{\mathrm{ext}})=g_2(N^{n-2k})\cap(\mathbb{R}^n\setminus U_\Delta)$) согласованы с двумя образующими когомологическими классами ρ_1, ρ_2 $\mathbf{I}_b$-оснащения соответственно.

Определим погружение $g\colon N^{n-2k}\looparrowright\mathbb{R}^n$ с $\mathbf{I}_b$-контролем над (P,Q). Рассмотрим погружение $g_2\colon N^{n-2k}\looparrowright\mathbb{R}^n$, построенное в лемме 1. Посредством $2\varepsilon_2$-малой деформации общего положения мы можем продеформировать погружение g_2 в g_3, причём эта деформация выталкивает компоненту $g_2(N^{n-2k}_x)$ во внешность $U^{\mathrm{reg}}_{\Delta}$. Следовательно, компонента $L^{n-4k}_{x\downarrow}\subset L^{n-4k}$ самопересечения погружения g_2 также деформируется во внешность $U^{\mathrm{reg}}_{\Delta}$.

Погружённое многообразие (с границей) $g_3(N^{n-2k})\cap(\mathbb{R}^n\setminus U^{\mathrm{reg}}_{\Delta})$ снабжено $\mathbf{I}_b$-оснащением нормального расслоения. Очевидно, что классы $\kappa_{Q,1},\kappa_{Q,2}\in H^1(U_\Sigma;\mathbb{Z}/2)=H^1(Q;\mathbb{Z}/2)$, ограниченные на $H^1(g_2(N^{n-2k})\cap U_\Delta;\mathbb{Z}/2)$, согласованы с образующими когомологическими классами этого $\mathbf{I}_b$-оснащения. Погружённое многообразие $g_3(N^{n-2k}) \cap U_\Delta^{\mathrm{reg}}$ совпадает с $g_2(N_y^{n-2k})$ и имеет общую структурную группу нормального оснащения. Это погружённое многообразие самопересекается вдоль многообразия (с границей) $h(L^{n-4k}) \cap U_\Delta^{\mathrm{reg}}$, которое допускает редукцию структурной группы оснащения к паре подгрупп $(\mathbf{I}_{2,y}, \mathbf{I}_3)$.

Докажем, что погружённое многообразие (с границей) $h(L^{n-4k}) \cap U_\Delta^{\mathrm{reg}}$ является $(\mathbb{Z}/2 \wr \mathbf{D}_4)$-оснащённо кобордантным (относительно границы) некоторому $(\mathbb{Z}/2 \wr \mathbf{D}_4)$-оснащённому многообразию, которое представлено в виде несвязного объединения замкнутого $(\mathbb{Z}/2 \wr \mathbf{D}_4)$-оснащённого многообразия, которое определяет элемент в группе кобордизма, лежащий в образе гомоморфизма $\omega^!$ трансфера (т. е. при переходе к двулистному накрывающему), с относительным $\mathbf{I}_3$-оснащённым многообразием.

Рассмотрим $(\mathbb{Z}/2 \wr \mathbf{D}_4)$-оснащённое многообразие $(\tilde{L}^{n-4k}, \tilde{\Psi}, \tilde{\zeta})$, которое определено как образ $(\mathbb{Z}/2 \wr \mathbf{D}_4)$-оснащённого многообразия (L^{n-4k}, Ψ, ζ) посредством гомоморфизма трансфера относительно когомологического класса $\omega \in H^1(\mathbb{Z}/2 \wr \mathbf{D}_4; \mathbb{Z}/2)$. Вспомним, что многообразие $\tilde{L}^{n-4k}$ получено посредством заклеивания границы $\tilde{\Lambda}^{n-4k-1}$ многообразия $\tilde{L}_x^{n-4k} \cup \tilde{L}_y^{n-4k}$ многообразием $\tilde{L}_z^{n-4k}$ с той же границей. Заметим, что структурная группа оснащения многообразия $\tilde{\Lambda}_z^{n-4k-1}$ редуцируется к подгруппе $\mathbf{I}_3 \subset \mathbb{Z}/2 \wr \mathbf{D}_4$.

Обозначим через $OP\alpha$ $(\mathbb{Z}/2 \wr \mathbf{D}_4)$-оснащённое погружение, полученное из произвольного $(\mathbb{Z}/2 \wr \mathbf{D}_4)$-оснащённого погружения α посредством замены структурной группы оснащения с помощью преобразования OP. Заметим, что $(\mathbb{Z}/2 \wr \mathbf{D}_4)$-оснащённое многообразие (с границей) $(\tilde{L}_y^{n-4k}, \tilde{\Psi}_y, \tilde{\zeta}_y)$ совпадает с двумя дизъюнктными копиями $(\mathbb{Z}/2 \wr \mathbf{D}_4)$-оснащённых многообразий (с границей) $OP(\tilde{L}_y^{n-4k}, \tilde{\Psi}_y, \tilde{\zeta}_y)$.

Введём обозначение

$$\alpha_1 = -OP(\tilde{L}^{n-4k}, \tilde{\Psi}, \tilde{\zeta}).$$

Определим последовательность $(\mathbb{Z}/2 \wr \mathbf{D}_4)$-оснащённых погружений

$$\alpha_2 = -2OP\alpha_1, \quad \alpha_3 = -2OP\alpha_2, \dots, \quad \alpha_j = -2OP\alpha_{j-1}.$$

Очевидно, что $(\mathbf{D}/4 \wr \mathbb{Z}/2)$-оснащённое погружение $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_1 + 2OP\alpha_1^{-1}$ представлено тремя копиями многообразия $\tilde{L}^{n-4k}$. Вторая и третья копии получены из первой копии посредством зеркального образа и замены структурной группы оснащения. Многообразие $-OP[\tilde{L}^{n-4k}] \cup 2[\tilde{L}^{n-4k}]$ содержит, в частности, копию $-OP[\tilde{L}_x^{n-4k}]$ внутри первой компоненты и объединение $[\tilde{L}_y^{n-4k} \cup L_y^{n-4k}]$ зеркальных копий $-OP[\tilde{L}_x^{n-4k}]$ внутри второй и третьей компонент. Следовательно, многообразие $-OP[\tilde{L}^{n-4k}] \cup 2[\tilde{L}^{n-4k}]$ является $(\mathbb{Z}/2 \wr \mathbf{D}_4)$-оснащённо кобордантным $(\mathbb{Z}/2 \wr \mathbf{D}_4)$-оснащённому многообразию, полученному в результате склеивания двух экземпляров многообразия $-OP[\tilde{L}_x^{n-4k}]$ и четырёх экземпляров многообразия $\tilde{L}_y^{n-4k}$ посредством $\mathbf{I}_3$-оснащённого многообразия границы. Этот кобордизм является относительным вдоль подмногообразия $-OP[\tilde{L}_z^{n-4k}] \cup \cup 2[L_z^{n-4k}] \subset -OP[L^{n-4k}] \cup 2L^{n-4k}$.

При помощи аналогичных рассуждений легко показать, что элемент $\aleph = \sum_{j=1}^{j_0} \alpha_j$ является $(\mathbb{Z}/2 \wr \mathbf{D}_4)$-оснащённо кобордантным многообразию, полученному посредством склеивания объединения $-OP[\tilde{L}_x^{n-4k}] \cup 2^j(-OP)^{j-1}[\tilde{L}_y^{n-4k}]$ и некоторого $\mathbf{I}_3$-оснащённого многообразия вдоль общей границы. Кроме того, этот кобордизм является относительным вдоль подмногообразия, полученного объединением нескольких копий $\tilde{L}_z^{n-4k}$ (с различными ориентациями). При этом, если j_0 достаточно велико, многообразие (с $\mathbf{I}_3$-оснащённой границей) $2^j(-OP)^{j_0-1}[\tilde{L}_y^{n-4k}]$ является кобордантным относительно границы некоторому $\mathbf{I}_3$-оснащённому многообразию.

Следовательно, многообразие L_y^{n-4k} является $(\mathbb{Z}/2 \wr \mathbf{D}_4)$-оснащённо кобордантным относительно границы объединению некоторого $\mathbf{I}_3$-оснащённого многообразия с той же самой границей и некоторого замкнутого $(\mathbb{Z}/2 \wr \mathbf{D}_4)$-оснащённого многообразия, полученного при переходе к двулистному накрытию относительно эпиморфизма ω структурной группы оснащения. Этот кобордизм реализован как кобордизм самопересечения $\mathbf{D}_4$-оснащённого погружения с носителем внутри U_Δ^{reg}, связывающий $\mathbf{D}_4$-оснащённое погружение g_3 с $\mathbf{D}_4$-оснащённым погружением g_4. После дополнительной деформации погружения g_4 внутри большей окрестности Δ^{reg} относительное $\mathbf{I}_b$-подмногообразие самопересечения погружения g_4 деформируется во внешность U_Δ^{reg}. Искомое $\mathbf{D}_4$-оснащённое погружение получено в результате рассматриваемого кобордизма, оно допускает $\mathbf{I}_b$-контроль. Теорема 1 доказана. □

4. I_4-структура (циклическая структура) D_4-оснащённых погружений

Опишем подгруппу $\mathbf{I}_4 \subset \mathbb{Z}/2 \wr \mathbf{D}_4$. Она изоморфна группе $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/4$. Вспомним, что группа $\mathbb{Z}/2 \wr \mathbf{D}_4$ является группой движений пространства $\mathbb{R}^4$, переводящих четвёрку базисных прямых в себя и инвариантно преобразующих пару плоскостей, которые в базисе (f_1, f_2, f_3, f_4) порождены парами базисных векторов (f_1, f_2), (f_3, f_4) (при этом плоскости могут преобразовываться инвариантно либо переставляться).

Обозначим образующие группы $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/4$ через l и r. Опишем преобразования $\mathbb{R}^4$, которые соответствуют каждой образующей. Рассмотрим новый базис (e_1, e_2, e_3, e_4), определённый формулами

$$e_1 = f_1 + f_2, \quad e_2 = f_1 - f_2, \quad e_3 = f_3 + f_4, \quad e_4 = f_3 - f_4.$$

Образующая r порядка 4 представлена поворотом плоскости (e_2, e_4) на угол $\frac{\pi}{2}$ и одновременной симметрией в плоскости (e_1, e_3) относительно прямой $e_1 + e_3$. Образующая l порядка 2 представлена центральной симметрией в плоскости (e_1, e_3) (или, что эквивалентно, в плоскости (f_1, f_3)).

Очевидно, что описанное преобразование $\mathbf{I}_4$ имеет инвариантные $(1, 1, 2)$-мерные подпространства. Эти подпространства мы обозначим через λ_1, λ_2, τ.

Линейные подпространства λ_1, λ_2 порождены векторами e_1+e_3, e_1-e_3 соответственно. Подпространство τ порождено векторами e_2, e_4. Образующая r действует симметрией в прямой λ_2 и поворотом в плоскости τ на угол $\frac{\pi}{2}$. Образующая l действует симметрией в каждой прямой λ_1, λ_2. В частности, если структурная группа $\mathbb{Z}/2\wr\mathbf{D}_4$ некоторого четырёхмерного расслоения $\zeta\colon E(\zeta)\to L$ допускает редукцию к подгруппе $\mathbf{I}_4$, то это расслоение представлено прямой суммой $\zeta=\lambda_1\oplus\lambda_2\oplus\tau$ подрасслоений размерностей 1, 1, 2.

Определение 6. Пусть $(g\colon N^{n-2k}\looparrowright\mathbb{R}^n,\Xi_N,\eta)$ — произвольное $\mathbf{D}_4$-оснащённое погружение. Скажем, что это погружение является $\mathbf{I}_4$-погружением, или циклическим погружением, если структурная группа $\mathbb{Z}/2\wr\mathbf{D}_4$ нормального расслоения многообразия L^{n-4k} точек самопересечения этого погружения допускает редукцию к подгруппе $\mathbf{I}_4\subset\mathbb{Z}/2\wr\mathbf{D}_4$. В этом определении мы предполагаем, что плоскости (f_1,f_2), (f_3,f_4) с выделенными базисными векторами, соответствующие слоям нормального расслоения к двум листам погружённого многообразия в окрестности точки самопересечения, согласованы с векторами оснащения многообразия самопересечения L^{n-4k}.

В частности, для $\mathbf{I}_b$-оснащённого погружения существуют такие отображения $\kappa_a\colon L^{n-4k}\to K(\mathbb{Z}/2,1)$, $\mu_a\colon L^{n-4k}\to K(\mathbb{Z}/4,1)$, что характеристическое отображение $\zeta\colon L^{n-4k}\to K(\mathbb{Z}/2\wr\mathbf{D}/4,1)$ $(\mathbb{Z}/2\wr\mathbf{D}_4)$-оснащения нормального расслоения над L^{n-4k} редуцируется к отображению с образом $K(\mathbf{I}_b,1)$ и выполняется условие $\zeta=i(\kappa_a\oplus\mu_a)$, где $i\colon\mathbb{Z}/2\oplus\mathbb{Z}/4\to\mathbf{I}_4$ — описанный выше изоморфизм.

Следующее предложение доказывается прямым вычислением.

Предложение 1. *Рассмотрим $\mathbf{D}_4$-оснащённое погружение (g,Ψ_N,η), которое является циклическим. Тогда инвариант Кервера, определённой диаграммой* (4), *можно вычислить по формуле*

$$\Theta_a=\left\langle\kappa_a^{\frac{n-4k}{2}}\mu_a^*(\tau)^{\frac{n-4k-2}{4}}\mu_a^*(\rho);[L]\right\rangle,\tag{5}$$

где $\tau\in H^2(\mathbb{Z}/4;\mathbb{Z}/2)$, $\rho\in H^1(\mathbb{Z}/4;\mathbb{Z}/2)$ — образующие.

Доказательство. Рассмотрим подгруппу индекса 2 $\mathbf{I}_b\subset\mathbf{I}_4$. Она совпадает с ядром эпиморфизма $\chi'\colon\mathbf{I}_4\to\mathbb{Z}/2$, который является ограничением характеристического гомоморфизма $\chi\colon\mathbb{Z}/2\wr\mathbf{D}_4\to\mathbb{Z}/2$, классифицирующего каноническое двулистное накрытие $\bar{L}\to L$, на подгруппу $\mathbf{I}_4\subset\mathbb{Z}/2\wr\mathbf{D}_4$. Очевидно, что характеристическое число (5) вычисляется по формуле

$$\Theta_a=\left\langle\hat{\kappa}_a^{\frac{n-4k}{2}}\hat{\rho}_a^{\frac{n-4k}{2}};\bar{L}\right\rangle,\tag{6}$$

где характеристический класс $\hat{\kappa}_a\in H^1(\bar{L};\mathbb{Z}/2)$ индуцирован из класса $\kappa_a\in H^1(L;\mathbb{Z}/2)$ посредством канонического накрытия $\bar{L}\to L$ и класс $\hat{\rho}_a\in H^1(\bar{L};\mathbb{Z}/2)$ получен из класса $\rho\in H^1(L;\mathbb{Z}/4)$ в результате применения гомоморфизма трансфера.

Заметим, что $\hat{\kappa}_a=\tau_1$, $\hat{\rho}_a=\tau_2$, где τ_1, τ_2 — два образующих характеристических $\mathbf{I}_b$-класса. Следовательно, $\hat{\kappa}_a\hat{\rho}_a=\tau_1\tau_2=w_2(\eta)$, где η — двумерное расслоение со структурной группой $\mathbf{D}_4$, которое определяет $\mathbf{D}_4$-оснащение погружения $g(N^{n-2k})$. При этом над подмногообразием $\bar{L}^{n-4k} \subset N^{n-2k}$ указанное оснащение редуцируется к $\mathbf{I}_b$-оснащению.

Следовательно, характеристическое число, определённое по формуле (5), в предположении, что $(\mathbb{Z}/2 \wr \mathbf{D}_4)$-оснащение над L^{n-4k} редуцируется к $\mathbf{I}_4$-оснащению, совпадает с характеристическим числом, определённым по формуле (6). Предложение 1 доказано. □

Определение 7. Скажем, что $\mathbf{D}_4$-оснащённое погружение (g, Ξ_N, η) допускает $\mathbf{I}_4$-структуру (циклическую структуру), если на многообразии L^{n-4k} точек самопересечения погружения g определены отображения $\kappa_a\colon L^{n-4k} \to K(\mathbb{Z}/2, 1)$, $\mu_a\colon L^{n-4k} \to K(\mathbb{Z}/4, 1)$, такие что характеристическое число (5) совпадает с инвариантом Кервера в определении 2.

Теорема 2. *Пусть* (g, Ξ, η), $g\colon N^{n-2k} \looparrowright \mathbb{R}^n$, *— $\mathbf{D}_4$-оснащённое погружение, которое представляет регулярный класс кобордизма в образе гомоморфизма* $\delta\colon \mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}}(n-k, k) \to \mathrm{Imm}^{\mathbf{D}_4}(n-2k, 2k)$, $n - 4k = 62$, $n = 2^l - 2$, $l \geqslant 13$, *при этом выполнены условия теоремы* 1, *т. е. смежный класс* $\delta^{-1}\bigl(\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}}(n-k,k)\bigr)$ *(напомним, что мы рассматриваем лишь* 2*-компоненты групп кобордизма, т. е. предполагаем, что каждый класс кобордизма определён с точностью до прибавления нечётного кратного) содержит $\mathbf{D}_4$-оснащённое погружение, которое допускает ретракцию порядка* 62. *Тогда в классе скошенно-оснащённого кобордизма* $(g, \Xi, \eta) = \delta[(f, \Xi, \kappa)] \in \mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}}(n-k, k)$ *существует скошенно-оснащённое погружение, которое допускает* $(\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/4)$*-структуру.*

5. Доказательство теоремы 2

Сформулируем принцип геометрического контроля для $\mathbf{I}_b$-контролируемых погружений.

Предположим, что нам дано $\mathbf{I}_b$-контролируемое погружение

$$(g, \Xi_N, \eta; (P, Q), \kappa_{Q,1}, \kappa_{Q,2}),$$

где $g\colon N \looparrowright \mathbb{R}^n$ — $\mathbf{D}_4$-оснащённое погружение, снабжённое отображением контроля над полиэдром $i_P\colon P \subset \mathbb{R}^n$, $\dim(P) = 2k-1$, $Q \subset P$, $\dim(Q) = \dim(P) - 1$ (см. определение 4). Характеристические классы $\kappa_{Q,i} \in H^1(Q; \mathbb{Z}/2)$, $i = 1, 2$, переходят в характеристические классы $\kappa_{N_Q,i} \in H^1(N_Q^{n-2k-1}; \mathbb{Z}/2)$ посредством отображения $\partial N_{\mathrm{int}}^{n-2k} = N_Q^{n-2k-1} \to Q$, где $N_{\mathrm{int}}^{n-2k} \subset N^{n-2k}$, $N_{\mathrm{int}}^{n-2k} = g^{-1}(U_P)$, $U_P \subset \mathbb{R}^n$.

Предложение 2 (принцип геометрического контроля для $\mathbf{I}_b$-контролируемых погружений). *Пусть* $j_P\colon P \subset \mathbb{R}^n$ *— произвольное вложение, которое по размерностным соображениям единственно с точностью до изотопии, так как* $2\dim(P) + 1 = 4k - 1 < n$. *Пусть* $g_1\colon N^{n-2k} \to \mathbb{R}^n$ *— произвольное отображение, для которого ограничение* $g_1|_{N_{\mathrm{int}}}\colon (N_{\mathrm{int}}^{n-2k}, N_Q^{n-2k-1}) \looparrowright (U_P, \partial U_P)$ *является погружением (заметим, что при этом ограничение* $g|_{N_Q^{n-2k-1}}$ *является вложением),* *которое сопряжено погружению* $g|_{N^{n-2k}_{\mathrm{int}}}\colon (N^{n-2k}_{\mathrm{int}}, N^{n-2k-1}_{Q}) \looparrowright (U_P, \partial U_P)$ *посредством стандартного диффеоморфизма регулярных окрестностей* $U_{i_P} = U_{j_P}$ *подполиэдров* $i(P)$ *и* $j(P)$*. (По размерностным соображениям существует стандартный диффеоморфизм* U_{i_P} *на* U_{j_P} *с точностью до изотопии.) Тогда для произвольного сколь угодно малого* $\varepsilon > 0$ *существует такое погружение* $g_\varepsilon\colon N^{n-2k} \looparrowright \mathbb{R}^n$*, что* $\mathrm{dist}_{C^0}(g_1, g_\varepsilon) < \varepsilon$*, причём* g_ε *регулярно гомотопно погружению* g *и ограничение* $g_\varepsilon|_{N^{n-2k}_{\mathrm{int}}}$ *совпадает с* $g_1|_{N^{n-2k}_{\mathrm{int}}}$*.*

Начнём доказательство теоремы 2 со следующей конструкции. Рассмотрим многообразие $Z = S^{\frac{n}{2}+64}/i \times \mathbb{R}\mathrm{P}^{\frac{n}{2}+64}$. Оно является прямым произведением стандартного линзового пространства по модулю 4 и проективного пространства. Накрытие $p_Z\colon \hat{Z} \to Z$ корректно определено, причём накрывающее пространство $\hat{Z} = \mathbb{R}\mathrm{P}^{\frac{n}{2}+64} \times \mathbb{R}\mathrm{P}^{\frac{n}{2}+64}$ является прямым произведением двух проективных пространств.

Рассмотрим в многообразии Z семейство подмногообразий X_j, $j = 0, \ldots, \frac{n+2}{64}$, коразмерности $\frac{n+2}{2}$, определённое по формуле

$$X_0 = S^{\frac{n}{2}+64}/i \times \mathbb{R}\mathrm{P}^{63}, \quad X_1 = S^{\frac{n}{2}+32}/i \times \mathbb{R}\mathrm{P}^{95}, \ldots,$$
$$X_j = S^{\frac{n}{2}-32(j-2)-1}/i \times \mathbb{R}\mathrm{P}^{32(j+2)-1}, \ldots, \quad X_{\frac{n+2}{64}} = S^{63}/i \times \mathbb{R}\mathrm{P}^{\frac{n}{2}+64}.$$

Вложение соответствующего подмногообразия семейства в многообразие Z определено в результате прямого произведения двух стандартных вложений.

Объединение указанного семейства подмногообразий $\{X_j\}$ удобно рассматривать как как стратифицированное подмногообразие $X \subset Z$ (с особенностями) размерности $\frac{n}{2} + 127$, коразмерность максимального страта в X равна 32. Определено накрытие $p_X\colon \hat{X} \to X$, индуцированное из накрытия $p_Z\colon \hat{Z} \to Z$ при помощи вложения $X \subset Z$. Накрывающее пространство $\hat{X}$, которое также является стратифицированным многообразием с особенностями, представлено в виде объединения семейства подмногообразий

$$\hat{X}_0 = \mathbb{R}\mathrm{P}^{\frac{n}{2}+64} \times \mathbb{R}\mathrm{P}^{63}, \ldots, \quad \hat{X}_j = \mathbb{R}\mathrm{P}^{\frac{n}{2}-32(j-2)} \times \mathbb{R}\mathrm{P}^{32(j+2)-1}, \ldots,$$
$$\hat{X}_{\frac{n+2}{64}} = \mathbb{R}\mathrm{P}^{63} \times \mathbb{R}\mathrm{P}^{\frac{n}{2}+64}.$$

Каждое подмногообразие $\hat{X}_j$ указанного семейства является двулистным накрывающим пространством над подмногообразием X_j вдоль первой координаты. Определим конечную последовательность натуральных чисел $d_1(j) = \frac{n}{2} - 32(j-2)$, $d_2(j) = 32(j+2) - 1$. Тогда многообразие X_j имеет вид $X_j = \mathbb{R}\mathrm{P}^{d_1(j)} \times \mathbb{R}\mathrm{P}^{d_2(j)}$.

В когомологиях пространства X определены характеристические классы $\rho_{X,1} \in H^1(X; \mathbb{Z}/4)$, $\kappa_{X,2} \in H^1(X; \mathbb{Z}/2)$. Эти классы индуцируются из образующих групп $H^1(Z; \mathbb{Z}/4)$, $H^1(Z; \mathbb{Z}/2)$. Аналогично корректно определены когомологические классы $\kappa_{\hat{X},i} \in H^1(\hat{X}; \mathbb{Z}/4)$, $i = 1, 2$. Когомологический класс $\kappa_{\hat{X},1}$ индуцируется из класса $\rho_{X,1} \in H^1(X; Z/4)$ посредством гомоморфизма трансфера, а второй когомологический класс определён по формуле $\kappa_{\hat{X},2} = (p_X)^*(\kappa_{X,2})$.

Для произвольного $j = 0, \ldots, \frac{n+2}{64}$ определим пространство J_j и отображение $\varphi_j\colon X_j \to J_j$. Обозначим через $Y_1(k)$ пространство $S^{31}/i * \ldots * S^{31}/i$ джойна k-экземпляров, $k = 2, \ldots, \frac{n+2}{64}+2$, стандартного линзового пространства S^{31}/i. Обозначим через $Y_2(k)$, $k = 2, \ldots, \frac{n+2}{64}+2$, пространство джойна $Y_2(k) = \mathbb{R}\mathrm{P}^{31} * \ldots * \mathbb{R}\mathrm{P}^{31}$ k экземпляров стандартного проективного пространства $\mathbb{R}\mathrm{P}^{31}$. Определим $J_j = Y_1\bigl(\frac{n+2}{64} - j + 2\bigr) \times Y_2(j+2)$, $Q = Y_1\bigl(\frac{n+2}{64}+2\bigr) \times Y_2\bigl(\frac{n+2}{64}+2\bigr)$. Для заданного j естественное включение $J_j \subset Q$ корректно определено. Обозначим объединение образов построенных вложений через J.

Отображение $\varphi_j\colon X_j \to J_j$ корректно определено как декартово произведение следующих отображений. По первой координате отображение определено как композиция стандартного двулистного накрытия $\mathbb{R}\mathrm{P}^{d_1(j)} \to S^{d_1(j)}/i$ и естественной проекции $S^{d_1(j)}/i \to Y_1\bigl(\frac{n+2}{64} - j + 2\bigr)$. По второй координате отображение определено как естественная проекция $\mathbb{R}\mathrm{P}^{d_2(j)} \to Y_2(j+2)$.

Заметим, что ограничения произвольных двух отображений семейства φ_j на общую подобласть определения совпадают. Следовательно, семейство φ_j определяет отображение $\varphi\colon \hat{X} \to J$.

В предположении $n+2 \geqslant 2^{13}$ пространство J вкладывается в евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ посредством $i_J\colon J \subset \mathbb{R}^n$. Действительно, каждое пространство $Y_1(k)$, $Y_2(k)$ в этом семействе вкладывается в евклидово пространство размерности $2^6k - 1 - k$. Следовательно, для произвольного j пространство J_j вкладывается в евклидово пространство размерности $n + 126 - \frac{n+2}{64}$. В частности, при $n+2 \geqslant 2^{13}$ J_j вкладывается в $\mathbb{R}^n$. Легко проверить, что семейство вложений J_j склеивается до вложения $i_J\colon J \subset \mathbb{R}^n$.

Опишем отображение $\hat{h}\colon \hat{X} \to \mathbb{R}^n$. Обозначим положительным числом ε радиус (стратифицированной) регулярной окрестности подполиэдра $i_J(J) \subset \mathbb{R}^n$. Рассмотрим малое положительное число ε_1, $\varepsilon_1 \ll \varepsilon$ (точное значение этой константы будет определено ниже при доказательстве леммы 2) и рассмотрим PL-ε_1-деформацию отображения $i_J \circ \varphi\colon \hat{X} \to J \subset \mathbb{R}^n$. В результате деформации получим PL-отображение общего положения, которое обозначим через $\hat{h}\colon \hat{X} \to \mathbb{R}^n$.

Определим значение k из уравнения $n - 4k = 62$. В заданном классе регулярной гомотопии $\mathbf{I}_b$-контролируемого погружения $f\colon N^{n-2k} \looparrowright \mathbb{R}^n$ построим ещё одно $\mathbf{I}_b$-контролируемое погружение $g\colon N^{n-2k} \looparrowright \mathbb{R}^n$, допускающее $\mathbf{I}_4$-структуру.

Предположим, что погружение f контролируется над вложенным полиэдром $\psi_P\colon P \subset \mathbb{R}^n$. Рассмотрим отображение $\psi_Q\colon Q \to \hat{X}$ общего положения, такое что $\kappa_{Q,i} = \psi_Q \circ \kappa_{\hat{X},i}$, $i = 1, 2$. В соответствии с данными выше определениями рассмотрим многообразия N^{n-2k}_{int}, N^{n-2k}_{ext} с общей границей N_Q^{n-2k-1},

$$N^{n-2k} = N^{n-2k}_{\mathrm{int}} \cup_{N_Q^{n-2k-1}} N^{n-2k}_{\mathrm{ext}}.$$

Пусть через $\eta\colon N^{n-2k}_{\mathrm{ext}} \to K(\mathbf{I}_b, 1) \subset K(\mathbf{D}_4, 1)$ обозначено характеристическое отображение для оснащения Ξ_N, которое ограничено на подмногообразие $N^{n-2k}_{\mathrm{ext}} \subset N^{n-2k}$. Ограничение этого отображения на границу $\partial N^{n-2k}_{\mathrm{ext}} =$

$= N_Q^{n-2k-1}$ задаётся композицией

$$\partial N_Q^{n-2k-1} \to Q \to K(\mathbf{I}_b, 1) \subset K(\mathbf{D}_4, 1).$$

Образом отображения η служит подпространство $K(\mathbf{I}_b, 1) \subset K(\mathbf{D}_4, 1)$. Это отображение определяется классами когомологий $\kappa_{N_{\mathrm{ext}}^{n-2k}, s} \in H^1(N_{\mathrm{ext}}^{n-2k}, Q; \mathbb{Z}/2)$, $s = 1, 2$.

Определим отображение $\lambda\colon N_{\mathrm{ext}}^{n-2k} \to \hat{X}$ следующим условием. Оно переводит когомологические классы $\kappa_{\hat{X},i}$ в классы $\kappa_i \in H^1(N_{\mathrm{ext}}^{n-2k}; \mathbb{Z}/2)$, и, кроме того, ограничение $\lambda|_{N_Q^{n-2k-1}}$ совпадает с композицией проекции $N_Q^{n-2k-1} \to Q$ и отображения $\psi_Q\colon Q \to \hat{X}$. Граничные условия для отображения ψ_Q имеют вид $\kappa_{Q,i} = \psi_Q \circ \kappa_{\hat{X},i}$, $i = 1, 2$. Многообразие с особенностями $\hat{X} \subset \hat{Z}$ содержит остов пространства $\hat{Z}$ размерности $\frac{n}{2} + 62$, поскольку $n - 2k = \frac{n}{2} + 31$, отображение λ определено.

Обозначим композицию $\hat{h} \circ \lambda\colon N_{\mathrm{ext}}^{n-2k} \to \hat{X} \to \mathbb{R}^n$ через g_1. Обозначим отображение $\hat{h} \circ \psi_Q\colon Q \to \hat{X} \to \mathbb{R}^n$ через φ_Q. По условию общего положения отображение φ_Q является вложением. Кроме того, без ограничения общности можно считать, что это вложение продолжается до вложения общего положения $\varphi_P\colon P \subset \mathbb{R}^n$, причём подполиэдр $\varphi_P\colon P \subset \mathbb{R}^n$ не имеет точек пересечения с образом отображения $g_1(N_{\mathrm{ext}}^{n-2k})$.

Обозначим через $U_\varphi(P)$ регулярную окрестность подполиэдра $\varphi_P(P) \subset \mathbb{R}^n$ (мы предполагаем, что радиус этой регулярной окрестности также равен ε). Заметим, что, поскольку регулярная окрестность $U_\varphi(P)$ не зависит от выбора вложения полиэдра P, окрестности $U_\varphi(P)$ и $U(P)$ являются диффеоморфными.

Не ограничивая общности, предположим, что при дополнительной сколь угодно малой регулярной деформации ограничение отображения g' на подмногообразие $N_{\mathrm{int}}^{n-2k} \subset N^{n-2k}$ является регулярным погружением $g'\colon N_{\mathrm{int}}^{n-2k} \subset \mathbb{R}^n$ с образом внутри $U_\varphi(P)$. В частности, ограничение отображения g' на границу $N_Q^{n-2k-1} = \partial(N_{\mathrm{int}}^{n-2k})$ является регулярным вложением $N_Q^{n-2k-1} \subset \partial U(P)$. При этом погружение $g'|_{N_{\mathrm{int}}}$ сопряжено с погружением $f|_{N_{\mathrm{int}}}$ посредством диффеоморфизма $U_\varphi(P)$ на $U(P)$.

По предложению 2 для произвольного сколь угодно малого $\varepsilon_2 > 0$, $\varepsilon_2 \ll \ll \varepsilon_1 \ll \varepsilon$, существует погружение $g\colon N^{n-2k} \looparrowright \mathbb{R}^n$ в классе регулярной гомотопии погружения f, такое что g совпадает с g_1 на подмногообразии N_{int}^{n-2k} и, кроме того, $\mathrm{dist}(g; g_1) < \varepsilon_2$.

Рассмотрим многообразие самопересечения L^{n-4k} погружения g. Это многообразие является подмногообразием в $\mathbb{R}^n$. Построим отображения $\kappa_a\colon L^{n-4k} \to K(\mathbb{Z}/2, 1)$, $\mu_a\colon L^{n-4k} \to K(\mathbb{Z}/4, 1)$. Затем проверим соотношения (5) и (6).

Многообразие L^{n-4k} естественным образом делится на две замкнутые компоненты. Первая компонента L_{int}^{n-4k} расположена внутри окрестности $U_{\varphi_P}(P)$. Вторая компонента (мы обозначим эту компоненту снова через L^{n-4k}) состоит из оставшихся точек самопересечения и целиком расположена снаружи

ε-окрестности подмногообразия (с особенностями) $h(X)$. Отображения κ_a, μ_a на компоненте L^{n-4k}_{int} определяются как тривиальные отображения. Теперь определим отображения κ_a, μ_a на компоненте L^{n-4k}.

Рассмотрим отображение $\varphi\colon \hat{X} \to J$ и полиэдр особых точек самопересечения Σ этого отображения. Этот полиэдр является подполиэдром во «взрезанном квадрате» (двухточечном конфигурационном пространстве) пространства $\hat{X}$,

$$\Sigma \subset \bigl\{\hat{X}^{(2)} = \hat{X} \times \hat{X} \setminus \Delta_{\hat{X}}/T'\bigr\},$$

где $T'\colon \hat{X}^(2) \to \hat{X}^{(2)}$ — инволюция, переставляющая координаты прямого произведения. Подполиэдр Σ, который удобно рассматривать как подмногообразие с особенностями в многообразии с особенностями, представляется естественным образом в виде объединения $\Sigma(j)$, $j = 0, \ldots, \frac{n+2}{64}$. Подполиэдр $\Sigma(j)$ является полиэдром особенностей отображения

$$\varphi(j)\colon \mathbb{R}\mathrm{P}^{d_1(j)} \times \mathbb{R}\mathrm{P}^{d_2(j)} \to S^{d_1(j)}/i \times \mathbb{R}\mathrm{P}^{d_2(j)} \to J_j.$$

Он состоит из особых точек отображения φ при ограничении на подпространство $J_j \subset J$, $(\varphi)^{-1}(J_j) = \mathbb{R}\mathrm{P}^{d_1(j)} \times \mathbb{R}\mathrm{P}^{d_2(j)}$.

Рассмотрим подпространство $\Sigma^{\text{reg}} \subset \Sigma$, состоящее из точек регулярных стратов и особых стратов глубины 1 коразмерности 32, которое получается при удалении из объединения указанных стратов регулярной ε_2-окрестности ($\varepsilon_2 \ll \varepsilon_1$) диагонали Δ^{diag} и антидиагонали Δ^{antidiag} полиэдра Σ^{reg}.

Многообразия с особенностями $\Sigma^{\text{reg}} \subset \Sigma$ допускают естественную компактификацию вблизи Δ^{diag} и Δ^{antidiag} посредством замыкания. В результате получим замкнутый полиэдр, который обозначим через K_{reg}. Через K обозначим полиэдр, полученный из Σ

Пространство RK разрешения особенностей и естественная проекция $RK \to K_{\text{reg}}$ определяется по аналогии с построениями из [1, лемма 7]. При этом корректно определены классы когомологий $\rho_{RK,1} \in H^1(RK;\mathbb{Z}/4)$, $\kappa_{RK,2} \in$ $\in H^1(RK;\mathbb{Z}/2)$. Кроме того, корректно определён когомологический класс $\kappa_{K,1} \in H^1(RK;\mathbb{Z}/2)$ и класс $\kappa_{RK,1} \in H^1(RK;\mathbb{Z}/2)$ как обратный образ когомологического характеристического класса $\kappa_{\Sigma,1} \in H^1(\Sigma;\mathbb{Z}/2)$ при вложении $K_{\text{reg}} \subset \Sigma$ и проекции $RK \to K_{\text{reg}}$. Класс $\kappa_{\Sigma,1}$ классифицирует перестановку прообразов точек на полиэдре особенностей.

Рассмотрим ограничения когомологических классов $\kappa_{K_{\text{reg}},1}$, $\kappa_{RK,1}$, $\kappa_{\Sigma,1}$ на окрестность диагонали и антидиагонали. Определена естественная проекция $\Delta^{\text{diag}} \to \hat{X}$. Ограничение классов ρ_1 и κ_2 на окрестность диагонали совпадает с ограничением классов $\rho_{\hat{X},1} \in H^1(\hat{X};\mathbb{Z}/4)$, $\kappa_{\hat{X},2} \in H^1(\hat{X};\mathbb{Z}/2)$ при расширении последних на регулярную окрестность диагонали.

Вспомним, что отображение $\hat{h}\colon \hat{X} \to \mathbb{R}^n$ определено как результат ε_1-малой регулярной PL-деформации отображения $\hat{X} \longrightarrow X \xrightarrow{h} \mathbb{R}^n$. Полиэдр особенностей отображения $\hat{h}$ обозначим через $\Sigma_{\hat{h}}$. Он имеет размерность 128, и его удобно рассматривать как многообразие с особенностями в коразмерностях 32, 64, 96, 128. Кроме того, определено включение $\Sigma_{\hat{h}} \subset \hat{X}^{(2)}$. Образ этого вложения расположен в регулярной ε_1-малой окрестности полиэдра особенностей $\Sigma \subset X^{(2)}$.

Обозначим через $\Sigma^{\mathrm{reg}}_{\hat{h}}$ часть полиэдра особенностей после удаления регулярной ε_1-окрестности особых стратов глубины 2 и точек самопересечения, лежащих на самопересечении особых стратов глубины 1. Подполиэдры, регулярные окрестности которых удаляют из полиэдра особенностей, имеют коразмерность 64. Граница $\partial\Sigma_{\hat{h}}$ является подмногообразием с особенностями в $\hat{X}$, следовательно, в силу условий общего положения можно считать, что и граница $\partial\Sigma^{\mathrm{reg}}_{\hat{h}}$ является регулярным подмногообразием с особенностями в $\hat{X}$.

В силу условий общего положения образ $\mathrm{Im}\bigl(\lambda(N^{n-2k}_{\mathrm{ext}})\bigr)$ внутри полиэдра особенностей $\Sigma_{\hat{h}}$ (он является полиэдром размерности 62) на X является ε-отделённым от проекции особого подмногообразия с особенностями (особая часть имеет коразмерность 64) в дополнении к регулярному подмногообразию с особенностями $\Sigma^{\mathrm{reg}}_{\hat{h}}$. Поэтому образ $\mathrm{Im}\bigl(\lambda(N^{n-2k}_{\mathrm{ext}})\bigr)$ целиком лежит внутри регулярной части $\Sigma^{\mathrm{reg}}_{\hat{h}} \subset \Sigma_{\hat{h}}$.

Обозначим через $L^{62}_{\mathrm{cycl}} \subset L^{62}$ подмногообразие (с границей), определённое формулой $L^{62}_{\mathrm{cycl}} = L^{62} \cap U_{\Sigma^{\mathrm{reg}}}$. Отображения κ_a, ρ_a продолжаются с $U_{\Sigma^{\mathrm{reg}}}$ на $L^{62}_{\mathrm{cycl}} \subset L^{62}$. Теперь докажем, что эти отображения продолжаются до отображений $\kappa_a\colon L^{62} \to K(\mathbb{Z}/2,1)$, $\rho_a\colon L^{62} \to K(\mathbb{Z}/4,1)$.

Обозначим дополнение подмногообразия $L^{62}_{\mathrm{cycl}} \subset L^{62}$ через $L^{62}_{\mathbf{I}_3} = L^{62} \setminus L^{62}_{\mathrm{cycl}}$. Подмногообразие $L^{62}_{\mathbf{I}_3}$ является подмногообразием в регулярной ε-окрестности подмногообразия с особенностями $h(X) \subset \mathbb{R}^n$. Очевидно, что структурная группа $(\mathbb{Z}/2 \wr \mathbf{D}_4)$-оснащения нормального расслоения к многообразию (с краем) $L^{62}_{\mathbf{I}_3}$ редуцируется к подгруппе $\mathbf{I}_3 \subset \mathbb{Z}/2 \wr \mathbf{D}_4$.

Рассмотрим отображение пар

$$\mu_a \times \kappa_a\colon (L^{62}_{\mathrm{cycl}}, \partial L^{62}_{\mathrm{cycl}}) \to \bigl(K(\mathbb{Z}/4,1) \times K(\mathbb{Z}/2,1),\, K(\mathbb{Z}/2,1) \times K(\mathbb{Z}/2,1)\bigr).$$

Рассмотрим естественную проекцию $\pi_b\colon \mathbf{I}_3 \to \mathbf{I}_b$. Продолжение отображения $\mu_a \times \kappa_a$ до требуемого отображения $L^{62} \to K(\mathbb{Z}/4,1) \times K(\mathbb{Z}/2,1)$ определяется композицией

$$L^{62}_{\mathbf{I}_3} \longrightarrow K(\mathbf{I}_3,1) \xrightarrow{\pi_{b,*}} K(\mathbf{I}_b,1) \subset K(\mathbb{Z}/4,1) \times K(\mathbb{Z}/2,1),$$

где когомологический класс $\kappa_1 \in K(\mathbf{I}_b;\mathbb{Z}/2)$ определён включением

$$K(\mathbf{I}_b,1) \subset K(\mathbb{Z}/2,1) \subset K(\mathbb{Z}/4,1).$$

Сформулируем полученный результат в следующей лемме.

Лемма 2.

1. *Предположим, что $n \geqslant 2^{13}-2$ и k, удовлетворяющее уравнению $n-4k = 62$, таково, что выполнено условие теоремы* 1 *(в частности, произвольный элемент в группе кобордизма $\mathrm{Imm}^{\mathrm{sf}}(n-k,k)$ допускает ретракцию порядка* 62*). Тогда для произвольных малых положительных чисел ε_1, ε_2, $\varepsilon_1 \gg \varepsilon_2$ (числа ε_1, ε_2 определяют калибр регулярных деформаций при*

построении PL-отображения $\hat{h}\colon \hat{X} \to \mathbb{R}^n$ *и погружения* $g\colon N^{n-2k} \looparrowright \mathbb{R}^n$ *соответственно) существует отображение*

$$m_a = (\kappa_a \times \mu_a)\colon \Sigma_h^{\mathrm{reg}} \to K(\mathbb{Z}/4,1) \times K(\mathbb{Z}/2,1),$$

удовлетворяющее следующему условию. Ограничение $m_a|_{\partial\Sigma_h^{\mathrm{reg}}}$ *(здесь через* $\partial\Sigma_h^{\mathrm{reg}}$ *обозначена часть полиэдра особенностей, состоящая из точек диагонали) имеет образ, лежащий в*

$$K(\mathbb{Z}/2,1) \times K(\mathbb{Z}/2,1) \subset K(\mathbb{Z}/4,1) \times K(\mathbb{Z}/2,1),$$

который определяется классами когомологий $\kappa_{\hat{X},1}$, $\kappa_{\hat{X},2}$.

2. *Отображения* κ_a, μ_a *индуцируют отображение*

$$(\mu_a \times \kappa_a)\colon L^{62} \to K(\mathbb{Z}/4,1) \times K(\mathbb{Z}/2,1)$$

на многообразии самопересечения погружения g.

Теперь докажем, что отображение $(\mu_a \times \kappa_a)$, построенное в лемме 2, определяет $(\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/4)$-структуру $\mathbf{D}_4$-оснащённого погружения g. Для этого докажем, что выполнено уравнение (6).

Вспомним, что компонента L^{62}_{int} многообразия самопересечения погружения g является $(\mathbb{Z}/2 \wr \mathbf{D}_4)$-оснащённым многообразием, имеющим тривиальный инвариант Кервера. Действительно, соответствующий элемент в группе $\mathrm{Imm}^{\mathbb{Z}/2\wr\mathbf{D}_4}(62, n-62)$ лежит в образе гомоморфизма трансфера. Следовательно, достаточно проверить соотношение

$$\langle m_a^*(\rho\tau^{15}t^{31}); [L^{62}]\rangle = \Theta,$$

или, что эквивалентно, соотношение

$$\langle(\hat{\rho}_a^{31}\hat{\kappa}_a^{31}); [\hat{L}^{62}]\rangle = \Theta, \tag{7}$$

где $\hat{L} \to L$ — каноническое накрытие над многообразием точек самопересечения, $\hat{L} \subset N^{n-2k}_{\mathrm{ext}}$ — каноническое погружение (по соображениям размерности вложение) двулистного накрывающего пространства в погружаемое многообразие.

По теореме Герберта (см. [1,2] по поводу аналогичной конструкции) можно посчитать правую часть равенства по формуле

$$\Big\langle \eta^*\big(w_2(\mathbf{I}_b)\big)^{\frac{n-2k}{2}}; [N^{n-2k}_{\mathrm{ext}}/{\sim}]\Big\rangle. \tag{8}$$

В этой формуле через $N^{n-2k}_{\mathrm{ext}}/{\sim}$ обозначено фактор-пространство границы $\partial N^{n-2k}_{\mathrm{ext}} = N_Q^{n-2k-1}$, которая стягивается на полиэдр Q с потерей размерности.

Заметим, что отображение $m_a|_{N_Q^{n-2k-1}}$ получено в результате композиции сдавливания $p_Q\colon N^{n-2k-1} \to Q$ с отображением $Q \to K(\mathbf{I}_b,1)$, причём последнее отображение определено при помощи когомологических классов $\kappa_{i,Q} \in H^1(Q;\mathbb{Z}/2)$, $i = 1,2$. Следовательно, $m_{a*}([N^{n-2k}_{\mathrm{ext}}/{\sim}]) \in H_{n-2k}(\mathbf{I}_b;\mathbb{Z}/2)$ является абсолютным циклом и интегрирование по циклу $[N^{n-2k}_{\mathrm{ext}}/{\sim}]$ обратного образа универсального класса когомологий в формуле (8) корректно определено.

Удобно рассматривать характеристическое число Θ_a как значение гомоморфизма $H_{n-2k}(X;\mathbb{Z}/2) \to \mathbb{Z}/2$ на цикле $\lambda_*[N^{n-2k}_{\mathrm{ext}}/{\sim}] \in H_{n-2k}(X;\mathbb{Z}/2)$. Этот гомоморфизм определён как результат вычисления характеристического класса $w_2(\mathbf{I}_b) \in H^2(K(\mathbf{I}_b,1);\mathbb{Z}/2)$ на предписанном цикле, а именно на образе фундаментального цикла $[N^{n-2k}_{\mathrm{ext}}/{\sim}]$ при отображении $(N^{n-2k}_{\mathrm{ext}}/\sim) \to \hat{X} \to K(\mathbf{I}_b,1)$. Цикл $\lambda_*[N^{n-2k}_{\mathrm{ext}}/{\sim}] \in H_{n-2k}(X;\mathbb{Z}/2)$ целочисленный. Следовательно, этот цикл определяется как сумма произведений фундаментальных классов двух проективных пространств нечётной размерности, причём сумма этих размерностей равна $n-2k$.

Рассмотрим произвольное подмногообразие $S^{k_1}/i \times \mathbb{R}\mathrm{P}^{k_2} \subset X$, $k_1 + k_2 = \frac{n}{2} + 31$, причём оба числа k_1, k_2 нечётные. Рассмотрим накрытие

$$\mathbb{R}\mathrm{P}^{k_1} \times \mathbb{R}\mathrm{P}^{k_2} \to S^{k_1}/i \times \mathbb{R}\mathrm{P}^{k_2}$$

и композицию

$$\mathbb{R}\mathrm{P}^{k_1} \times \mathbb{R}\mathrm{P}^{k_2} \subset \hat{X} \overset{\hat{h}}{\looparrowright} \mathbb{R}^n$$

после приведения в общее положение в результате ε_1-малой деформации общего положения. Обозначим это отображение через s_{k_1,k_2}.

Многообразие самопересечения отображения общего положения

$$s_{k_1,k_2}\colon \mathbb{R}\mathrm{P}^{k_1} \times \mathbb{R}\mathrm{P}^{k_2} \to \mathbb{R}^n$$

является многообразием с границей, обозначим её через $\Lambda^{62}_{k_1,k_2}$. Отображение

$$\mu_a \times \kappa_a\colon (\Lambda^{62}_{k_1,k_2}, \partial N^{n-2k}_{k_1,k_2}) \to \bigl(K(\mathbb{Z}/4,1) \times K(\mathbb{Z}/2,1),\ K(\mathbb{Z}/2,1) \times K(\mathbb{Z}/2,1)\bigr)$$

корректно определено. Гомологический фундаментальный класс размерности 61 $[\partial\Lambda]$ целочисленный. Следовательно, образ этого фундаментального класса

$$(\mu_a \times \kappa_a)_*([\partial\Lambda^{62}_{k_1,k_2}]) \in H_{61}(K(\mathbb{Z}/4,1) \times K(\mathbb{Z}/2,1);\mathbb{Z}/2)$$

по соображениям размерности является нулевым гомологическим классом. Следовательно, гомологический класс

$$(\mu_a \times \kappa_a)_*([\Lambda^{62}_{k_1,k_2}, \partial\Lambda^{62}_{k_1,k_2}]) \in \\ \in H_{62}(K(\mathbb{Z}/4,1) \times K(\mathbb{Z}/2,1),\ K(\mathbb{Z}/2,1) \times K(\mathbb{Z}/2,1);\mathbb{Z}/2)$$

корректно определён. Рассмотрим (абсолютный) гомологический класс

$$(\mu_a \times \kappa_a)^!_*([\bar{\Lambda}^{62}_{k_1,k_2}]) \in H_{62}(K(\mathbb{Z}/2,1) \times K(\mathbb{Z}/2,1);\mathbb{Z}/2), \tag{9}$$

полученный из рассмотренного выше относительного гомологического класса в результате гомоморфизма трансфера.

Для доказательства (7) достаточно доказать, что класс (9) переходит в характеристический класс $p_{*,b} \circ \hat{\eta}_*([\hat{\Lambda}]) \in H_{62}(K(\mathbf{I}_b,1);\mathbb{Z}/2)$ при отображении, индуцированном изоморфизмом $\mathbf{I}_b = \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$. При указанном изоморфизме образующие группы когомологий $H^1(\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2;\mathbb{Z}/2)$ отождествляются с классами когомологий $\tau_1, \tau_2 \in H^1(K(\mathbf{I}_b,1);\mathbb{Z}/2)$ (ср. [1, лемма 8]). Теорема 2 доказана.

Литература

[1] Ахметьев П. М. Геометрический подход к стабильным гомотопическим группам сфер. Инвариант Кервера. — arXiv:0710.5853[math.GT].

[2] Ахметьев П. М. Геометрический подход к стабильным гомотопическим группам сфер. Инвариант Хопфа. — arXiv:0710.5779[math.AT].

[3] Akhmet'ev P. M., Eccles P. J. The relationship between framed bordism and skew-framed bordism // Bull. London Math. Soc. — 2007. — Vol. 39, no. 3. — P. 473—481.

[4] Barratt M. G., Jones J. D. S., Mahowald M. E. The Kervaire invariant problem // Contemp. Math. — 1983. — Vol. 19. — P. 9—22.

[5] Carter J. S. Surgery on codiomension one immersions in $\mathbb{R}^{n+1}$: Removing n-tuple points // Trans. Amer. Math. Soc. — 1986. — Vol. 298, no. 1. — P. 83—101.

[6] Carter J. S. On generalizing Boy's surface: Constructing a generator of the third stable stem // Trans. Amer. Math. Soc. — 1986. — Vol. 298, no. 1. — P. 103—122.

[7] Cohen R. L., Jones J. D. S., Mahowald M. E. The Kervaire invariant of immersions // Invent. Math. — 1985. — Vol. 79. — P. 95—123.

[8] Eccles P. J. Codimension one immersions and the Kervaire invariant problem // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1981. — Vol. 90. — P. 483—493.

[9] Eccles P. J. Representing framed bordism classes by manifolds embedded in low codimension // Geom. Appl. Homotopy Theory I, Proc. Conf., Evanston 1977. — Berlin: Springer, 1978. — (Lect. Notes Math.; Vol. 657). — P. 150—155.

[10] Gromov M. Partial Differential Relations. — Berlin: Springer, 1986. — (Ergebnisse Math. ihrer Grenzgebiete 3 Folge).

[11] Szucs A. Topology of $\Sigma^{1,1}$-singular maps // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1997. — Vol. 121, no. 3. — P. 465—477.