Обобщённые симметрические пространства, формула Ю. П. Соловьёва и обобщённая эрмитова геометрия

В. В. БАЛАЩЕНКО
Белорусский государственный университет
e-mail: balashchenko@bsu.by, vitbal@tut.by

УДК 514.765

Ключевые слова: однородные Ф-пространства, регулярные Ф-пространства, аффинорные структуры, формула Соловьёва.

Аннотация

В статье приведены некоторые основополагающие результаты о канонических аффинорных структурах классических типов на обобщённых симметрических пространствах. Показано стимулирующее влияние Ю. П. Соловьёва на развитие этого направления в его начальной стадии. На основе специальных канонических f-структур на однородных k-симметрических пространствах предъявлен новый класс однородных эрмитовых f-многообразий.

Abstract

V. V. Balashchenko, Generalized symmetric spaces, Yu. P. Solovyov's formula, and the generalized Hermitian geometry, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 8, pp. 43—60.

We collect some basic results on canonical affinor structures of classical types on generalized symmetric spaces. Yu. P. Solovyov's stimulating influence on this topic during its first stage is illustrated. Using special canonical f-structures on homogeneous k-symmetric spaces, we also present a new collection of homogeneous Hermitian f-manifolds.

Светлой памяти Ю. П. Соловьёва посвящается

1. Введение

Важное место среди однородных многообразий групп Ли занимают *однородные* Ф-*пространства*, т. е. однородные пространства, порождённые автоморфизмами Ф групп Ли (см. [9, 20, 23, 25, 42, 58]). Особую роль играют *регулярные* Ф-*пространства*, впервые введённые в [23]. Как известно [23], такие Ф-пространства включают все *однородные k-симметрические пространства* ($\Phi^k = \mathrm{id}$) [20] и входят, в свою очередь, в известный класс однородных редуктивных пространств. В то же время отличительной чертой регулярных Ф-пространств является то обстоятельство, что каждое такое пространство обладает естественным присоединённым объектом — коммутативной алгеброй $\mathcal{A}(\theta)$ [9]

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 8, с. 43—60.

канонических аффинорных структур. Эта алгебра содержит известные классические структуры: почти комплексные структуры, структуры почти произведения, f-структуры К. Яно ($f^3 + f = 0$), h-структуры ($h^3 - h = 0$) (см. [1, 9]). Первым примером в этом направлении была каноническая почти комплексная структура на однородных 3-симметрических пространствах (см. [24, 38, 58]). Отметим, что эта структура эффективно применялась в дифференциальной геометрии и глобальном анализе (см. раздел 2). Особо выделим тот факт, что каноническая почти комплексная структура J на однородных 3-симметрических пространствах обеспечила замечательный класс инвариантных примеров в теории *почти эрмитовых структур*, в частности *приближённо келеровых структур* (см. [14, 38, 58] и др.). Оказалось, что канонические f-структуры на однородных k-симметрических пространствах играют аналогичную роль для *обобщённой эрмитовой геометрии*, возникшей в начале 1980-х годов (см., например, [15, 17]) и интенсивно изучаемой в дифференциальной геометрии.

Остановимся кратко на содержании данной статьи.

В разделах 2—4 мы приводим ряд основных понятий и результатов, относящихся к однородным регулярным Φ-пространствам, в особенности к однородным k-симметрическим пространствам. Мы напоминаем первые обнадеживающие примеры канонических структур, а также отмечаем стимулирующее влияние Ю. П. Соловьёва на это направление на начальной его стадии. В этих разделах содержится также полное описание всех канонических структур классических типов на однородных k-симметрических пространствах.

В разделах 5 и 6 мы рассматриваем специальные канонические f-структуры на регулярных Φ-пространствах и устанавливаем важное свойство для инвариантных распределений, порождаемых этими f-структурами. В краткой форме приведены некоторые основные понятия из обобщённой эрмитовой геометрии, включая описание важных классов метрических f-структур. Основной результат состоит в том, что специальные канонические f-структуры на однородных k-симметрических пространствах ($k = 4n$, $n \geqslant 1$) позволяют предъявить новое семейство инвариантных эрмитовых f-структур. Более детально рассмотрены некоторые частные случаи.

2. Однородные регулярные Φ-пространства

Здесь мы кратко сформулируем некоторые основные определения и результаты, относящиеся к регулярным Φ-пространствам и некоторым каноническим структурам на них. Более подробную информацию можно найти в [9, 20, 23—25, 34, 58].

Пусть G — связная группа Ли, Φ — её (аналитический) автоморфизм. Обозначим через G^Φ подгруппу всех неподвижных точек автоморфизма Φ, а через G^Φ_o — связную компоненту единицы подгруппы G^Φ. Предположим, что замкнутая подгруппа H группы G удовлетворяет условию $G^\Phi_o \subset H \subset G^\Phi$. Тогда G/H называется *однородным* Φ-*пространством*.

Однородные Ф-пространства содержат однородные симметрические пространства ($\Phi^2 = \mathrm{id}$) и, более общо, *однородные Ф-пространства порядка k* ($\Phi^k = \mathrm{id}$), или, в иной терминологии, *однородные k-симметрические пространства* (см. [20]).

Для любого однородного Ф-пространства G/H можно определить отображение

$$S_o = D\colon G/H \to G/H, \quad xH \to \Phi(x)H.$$

Известно [23], что S_o является аналитическим диффеоморфизмом G/H. Обычно S_o называют «симметрией» многообразия G/H в точке $o = H$. Очевидно, что в силу однородности можно определить «симметрию» S_p в произвольной точке $p \in G/H$. Более точно, для любых $p = \tau(x)o = xH$, $q = \tau(y)o = yH$ положим

$$S_p = \tau(x) \circ S_o \circ \tau(x^{-1}).$$

Легко показать, что

$$S_p(yH) = x\Phi(x^{-1})\Phi(y)H.$$

Таким образом, любое однородное Ф-пространство обладает семейством симметрий $\{S_p \mid p \in G/H\}$, причём каждое отображение S_p является аналитическим диффеоморфизмом многообразия G/H (см. [23]).

Заметим, что имеются однородные Ф-пространства, которые не редуктивны. Вот почему так называемые регулярные Ф-пространства, введённые впервые Н. А. Степановым [23], представляют особый интерес.

Пусть G/H — однородное Ф-пространство, $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ — соответствующие алгебры Ли для G и H, $\varphi = d\Phi_e$ — автоморфизм $\mathfrak{g}$. Рассмотрим линейный оператор $A = \varphi - \mathrm{id}$ и разложение Фиттинга $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ относительно A, где $\mathfrak{g}_0$ и $\mathfrak{g}_1$ обозначают 0- и 1-компоненту этого разложения соответственно. Пусть $\varphi = \varphi_s\varphi_u$ — разложение Жордана, где φ_s и φ_u — полупростая и унипотентная компоненты φ соответственно, $\varphi_s\varphi_u = \varphi_u\varphi_s$. Обозначим через $\mathfrak{g}^\gamma$ подпространство всех неподвижных точек линейного эндоморфизма γ в $\mathfrak{g}$. Ясно, что $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^\varphi = \operatorname{Ker} A$, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}^{\varphi_s}$.

Определение 1 [9, 23, 25, 34]. Однородное Ф-пространство G/H называется *регулярным Ф-пространством*, если выполняется одно из следующих эквивалентных условий:

1) $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0$;
2) $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus A\mathfrak{g}$;
3) сужение оператора A на $A\mathfrak{g}$ невырожденно;
4) $A^2X = 0 \implies AX = 0$ для всех $X \in \mathfrak{g}$;
5) матрица автоморфизма φ может быть представлена в виде

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

где матрица B не допускает собственного значения 1;

6) $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^{\varphi_s}$.

Напомним два основополагающих результата.

Теорема 1 [23].

1. *Любое однородное* Φ*-пространство порядка* k ($\Phi^k = \mathrm{id}$) *является регулярным* Φ*-пространством.*
2. *Любое регулярное* Φ*-пространство редуктивно. Более точно, разложение Фиттинга*
$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}, \quad \mathfrak{m} = A\mathfrak{g}, \tag{1}$$
является редуктивным разложением.

Разложение (1) называется *каноническим редуктивным разложением*, соответствующим регулярному Φ-пространству G/H, а $\mathfrak{m}$ называют *каноническим редуктивным дополнением*.

Отметим также, что в любом регулярном Φ-пространстве G/H каждая точка $p = xH \in G/H$ является изолированной неподвижной точкой симметрии S_p (см. [23]).

Очевидно, что разложение (1) φ-инвариантно. Обозначим через θ ограничение φ на $\mathfrak{m}$. Как обычно, отождествим $\mathfrak{m}$ с касательным пространством $T_o(G/H)$ в точке $o = H$. Важно отметить, что оператор θ коммутирует с каждым элементом линейной группы изотропии $\mathrm{Ad}(H)$ (см. [23]). Также заметим (см. [23]), что
$$(dS_o)_o = \theta.$$

Перейдём к рассмотрению замечательных инвариантных структур на однородных k-симметрических пространствах, но прежде отметим, что для любого однородного k-симметрического пространства G/H справедливо тождество
$$\theta^{k-1} + \theta^{k-2} + \ldots + \theta + \mathrm{id} = 0.$$

В конце 1960-х годов было обнаружено, что любое однородное 3-симметрическое пространство G/H обладает канонической почти комплексной структурой J (см. [24, 58]). Эта структура порождается линейным эндоморфизмом
$$J_o = \frac{1}{\sqrt{3}}(\theta^2 - \theta)$$
на $\mathfrak{m}$, поскольку $J_o^2 = -\mathrm{id}$ (см. [24]). Отсюда следует, что структура J инвариантна как относительно группы Ли G, так и симметрий S_p. Заметим, что каноническая почти комплексная структура на таких пространствах стала эффективным инструментом и замечательным примером во многих конструкциях дифференциальной геометрии и глобального анализа, а именно в исследованиях почти эрмитовых структур ([14, 38, 39, 58]), однородных структур (см. [16, 29, 36, 49, 52, 57] и др.), эйнштейновых метрик (см. [53, 54]), голоморфных и минимальных подмногообразий (см. [50, 51]), вещественных киллинговых спиноров (см. [35, 41, 45]).

В 1990 г. была построена ещё одна структура такого типа. Ею оказалась каноническая структура почти произведения P на произвольном однородном

5-симметрическом пространстве G/H, определяемая формулой (см. [10])

$$P_o = \frac{1}{\sqrt{5}}(\theta^4 - \theta^3 - \theta^2 + \theta).$$

Это позволило получить впоследствии ряд общих результатов о таких пространствах (см. [10, 26—28]).

3. Формула Ю. П. Соловьёва

Зная о формулах для канонических структур J и P на однородных 3- и 5-симметрических пространствах соответственно (см. раздел 2), Ю. П. Соловьёв предложил их обобщение на случай произвольного однородного p-симметрического пространства, где p — простое нечётное число. В этом случае ситуацию можно описать чисто алгебраическим путём.

Предложение 1. *Круговое поле $\mathbb{Q}(\varepsilon_p)$ содержит квадратный корень из элемента $p* = (-1)^{\frac{p-1}{2}}p$, где p — простое нечётное число.*

Доказательство (1990 г., рукопись Ю. П. Соловьёва, переданная автору). Имеем очевидное равенство

$$p = \prod_{i=1}^{p-1}(1 - \varepsilon_p^i).$$

Скомбинируем множители, соответствующие i и $p - i$, следующим образом:

$$(1 - \varepsilon_p^i)(1 - \varepsilon_p^{p-i}) = (1 - \varepsilon_p^i)(1 - \varepsilon_p^{-i}) = -\varepsilon_p^{-i}(1 - \varepsilon_p^i)^2.$$

Следовательно,

$$p = (-1)^{\frac{p-1}{2}}\varepsilon_p^b \prod_{i=1}^{\frac{p-1}{2}}(1 - \varepsilon_p^i)^2,$$

где $b = -(1 + 2 + \ldots + (p - 1)/2)$. Пусть $c \in \mathbb{Z}$ таково, что $2c \equiv 1 \pmod{p}$. Тогда $\varepsilon_p^b = (\varepsilon_p^{bc})^2$. Значит, предыдущая формула может быть записана в виде

$$p = (-1)^{\frac{p-1}{2}}(\varepsilon_p^{bc})^2 \prod_{i=1}^{\frac{p-1}{2}}(1 - \varepsilon_p^i)^2.$$

Окончательно имеем

$$p* = (-1)^{\frac{p-1}{2}}p = \left(\varepsilon_p^{bc} \prod_{i=1}^{\frac{p-1}{2}}(1 - \varepsilon_p^i)\right)^2. \qquad (2)$$

Отсюда получаем требуемое утверждение. □

Применяя полученный результат, приходим к следующему утверждению.

Следствие 1. *Пусть G/H — однородное p-симметрическое пространство, где p — простое нечётное число. Тогда G/H допускает*:

— *каноническую почти комплексную структуру J, если $p \equiv 3 \pmod 4$;*
— *каноническую структуру почти произведения P, если $p \equiv 1 \pmod 4$.*

Заметим, что формула (2) даёт алгоритм для вычисления многочленов от θ для вышеупомянутых канонических структур J и P. Более того, формулу для этих структур можно записать в явном виде:

$$F(\theta) = \frac{1}{\sqrt{p}}(\theta + \theta^4 + \ldots + \theta^{p^2}). \tag{3}$$

В частности, для $p = 3$ и $p = 5$ получаем (с точностью до знака) структуры J и P (см. раздел 2). В качестве примера для $p = 7$ можем вычислить J:

$$J = \frac{1}{\sqrt{7}}(\theta + \theta^2 - \theta^3 + \theta^4 - \theta^5 - \theta^6).$$

Замечание 1. Отметим, что утверждение предложения 1 известно (см., например, [21, гл. 8]). Тем не менее приведённое выше доказательство весьма оригинально и просто. Помимо этого, как уже отмечалось, оно обеспечивает простой способ для точного вычисления $\sqrt{p*}$.

4. Канонические аффинорные структуры на регулярных Φ-пространствах

В 1990 г., воодушевлённые интересом Ю. П. Соловьёва к этой задаче и находясь под его стимулирующим влиянием, мы пытались рассмотреть ситуацию в общем виде. Оказалось, что с использованием иной техники можно описать все канонические классические структуры для произвольного однородного регулярного Φ-пространства. Более того, для всех однородных k-симметрических пространств были получены точные вычислительные формулы для этих структур. Приведём краткое описание этого общего подхода и полученных результатов.

Как известно, *аффинорной структурой* на многообразии называется тензорное поле типа $(1,1)$ или, что эквивалентно, поле эндоморфизмов, действующих в его касательном расслоении. Пусть F — инвариантная аффинорная структура на однородном многообразии G/H. Тогда F вполне определяется своим значением F_o в точке o, где F_o инвариантно относительно $\mathrm{Ad}(H)$. Для удобства всюду в дальнейшем мы будем обозначать одинаково любую инвариантную структуру на G/H и её значение в точке o.

Определение 2 [8, 9]. Инвариантная аффинорная структура F на регулярном Φ-пространстве G/H называется *канонической*, если её значение в точке $o = H$ является полиномом от θ.

Обозначим через $\mathcal{A}(\theta)$ множество всех канонических аффинорных структур на регулярном Ф-пространстве G/H. Легко заметить, что $\mathcal{A}(\theta)$ является коммутативной подалгеброй в алгебре $\mathcal{A}$ всех инвариантных аффинорных структур на G/H. Более того,

$$\dim \mathcal{A}(\theta) = \deg \nu \leqslant \dim G/H,$$

где ν — минимальный многочлен оператора θ. Очевидно, что алгебра $\mathcal{A}(\theta)$ для любого симметрического Ф-пространства ($\Phi^2 = \mathrm{id}$) состоит только из скалярных структур, т. е. она изоморфна $\mathbb{R}$. Алгебраическое строение коммутативной алгебры $\mathcal{A}(\theta)$ произвольного регулярного Ф-пространства $(G/H, \Phi)$ также полностью описано (см. [5]).

Важно заметить, что все канонические структуры инвариантны также относительно всех «симметрий» $\{S_p\}$ многообразия G/H (см. [23]). Кроме того, из равенства $(dS_o)_o = \theta$ следует, что инвариантная аффинорная структура $F_p = (dS_p)_p$, $p \in G/H$, порождённая симметриями $\{S_p\}$, принадлежит алгебре $\mathcal{A}(\theta)$.

Наиболее известным примером канонических структур является каноническая почти комплексная структура $J = \frac{1}{\sqrt{3}}(\theta^2 - \theta)$ на однородном 3-симметрическом пространстве (см. раздел 2). Мы уже видели, что такой пример не является исключением. Более того, можно показать, что алгебра $\mathcal{A}(\theta)$ содержит богатый запас классических аффинорных структур.

Будем рассматривать в дальнейшем следующие аффинорные структуры классических типов:

— *почти комплексные структуры* J ($J^2 = -1$);
— *структуры почти произведения* P ($P^2 = 1$);
— *f-структуры* ($f^3 + f = 0$) [59];
— f-структуры гиперболического типа, или, кратко, *h-структуры* ($h^3 - h = 0$) [17].

Ясно, что f-структуры и h-структуры являются обобщениями структур J и P соответственно.

Все канонические структуры классического типа на регулярных Ф-пространствах полностью описаны [1, 8, 9]. В частности, для однородных k-симметрических пространств предъявлены точные вычислительные формулы. Приведём здесь некоторые результаты, используемые в дальнейшем.

Обозначим через $\tilde{s}$ (s) количество различных неприводимых множителей (соответственно различных неприводимых квадратичных множителей) над $\mathbb{R}$ минимального многочлена ν.

Теорема 2 [1, 8, 9]. *Пусть G/H — регулярное Ф-пространство.*

1. *Алгебра $\mathcal{A}(\theta)$ содержит ровно $2^{\tilde{s}}$ структур P.*
2. *G/H допускает каноническую структуру J тогда и только тогда, когда $s = \tilde{s}$. В этом случае $\mathcal{A}(\theta)$ содержит 2^s различных структур J.*

3. *G/H допускает каноническую f-структуру тогда и только тогда, когда $s \neq 0$. В этом случае $\mathcal{A}(\theta)$ содержит $3^s - 1$ различных f-структур. Предположим, что $s = \tilde{s}$. Тогда 2^s f-структур являются почти комплексными, а остальные $3^s - 2^s - 1$ имеют нетривиальное ядро.*
4. *Алгебра $\mathcal{A}(\theta)$ содержит $3^{\tilde{s}}$ различных h-структур. Все эти структуры образуют (коммутативную) полугруппу в $\mathcal{A}(\theta)$, включающую подгруппу порядка $2^{\tilde{s}}$ канонических структур P.*

Пусть далее G/H — однородное k-симметрическое пространство. Тогда $\tilde{s} = s+1$, если $-1 \in \operatorname{spec}\theta$, и $\tilde{s} = s$ в противном случае. Укажем точные формулы, позволяющие вычислить все канонические f-структуры и h-структуры. Будем использовать ниже обозначение

$$u = \begin{cases} n, & \text{если } k = 2n+1, \\ n-1, & \text{если } k = 2n. \end{cases}$$

Теорема 3 [1, 8, 9]. *Пусть G/H — однородное Φ-пространство порядка k.*

1. *Все нетривиальные канонические f-структуры на G/H могут быть заданы операторами*

$$f = \frac{2}{k}\sum_{m=1}^{u}\left(\sum_{j=1}^{u}\zeta_j \sin\frac{2\pi mj}{k}\right)(\theta^m - \theta^{k-m}),$$

где $\zeta_j \in \{-1;0;1\}$, $j = 1,2,\ldots,u$, причём не все коэффициенты ζ_j равны нулю. В частности, пусть $-1 \notin \operatorname{spec}\theta$. Тогда полиномы f определяют канонические почти комплексные структуры J тогда и только тогда, когда $\zeta_j \in \{-1;1\}$ для всех j.

2. *Все канонические h-структуры на G/H могут быть заданы полиномами $h = \sum\limits_{m=0}^{k-1} a_m\theta^m$, где*

   а) *если $k = 2n+1$, то*

$$a_m = a_{k-m} = \frac{2}{k}\sum_{j=1}^{u}\xi_j\cos\frac{2\pi mj}{k};$$

   б) *если $k = 2n$, то*

$$a_m = a_{k-m} = \frac{1}{k}\left(2\sum_{j=1}^{u}\xi_j\cos\frac{2\pi mj}{k} + (-1)^m\xi_n\right).$$

Здесь числа ξ_j принимают значения из множества $\{-1;0;1\}$, причём полиномы h определяют канонические структуры P тогда и только тогда, когда $\xi_j \in \{-1;1\}$ для всех j.

Детализируем теперь полученные результаты для однородных Φ-пространств малых порядков 3, 4 и 5. Заметим, что нет принципиальных трудностей и в рассмотрении более высоких порядков k.

Следствие 2 [1, 8, 9]. *Пусть G/H — однородное Φ-пространство порядка 3. Имеются (с точностью до знака) только следующие канонические структуры классического типа на G/H:*

$$J = \frac{1}{\sqrt{3}}(\theta - \theta^2), \quad P = 1.$$

Заметим, что существование и свойства структуры J хорошо известны (см. [14, 24, 38, 58]).

Следствие 3 [1, 8, 9]. *На однородном Φ-пространстве порядка 4 имеются (с точностью до знака) следующие канонические классические структуры:*

$$P = \theta^2, \quad f = \frac{1}{2}(\theta - \theta^3), \quad h_1 = \frac{1}{2}(1 - \theta^2), \quad h_2 = \frac{1}{2}(1 + \theta^2).$$

Операторы h_1 и h_2 образуют пару дополнительных проекторов: $h_1 + h_2 = 1$, $h_1^2 = h_1$, $h_2^2 = h_2$. При этом следующие условия эквивалентны:

1) $-1 \notin \operatorname{spec}\theta$;
2) *структура P тривиальна ($P = -1$);*
3) *f-структура является почти комплексной;*
4) *структура h_1 тривиальна ($h_1 = 1$);*
5) *структура h_2 нулевая.*

Общие свойства канонических структур P и f на однородных 4-симметрических пространствах были исследованы в [7].

Следствие 4 [1, 8, 9]. *На однородном Φ-пространстве порядка 5 имеются (с точностью до знака) следующие канонические структуры классического типа:*

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}}(\theta - \theta^2 - \theta^3 + \theta^4),$$
$$J_1 = \alpha(\theta - \theta^4) - \beta(\theta^2 - \theta^3), \quad J_2 = \beta(\theta - \theta^4) + \alpha(\theta^2 - \theta^3),$$
$$f_1 = \gamma(\theta - \theta^4) + \delta(\theta^2 - \theta^3), \quad f_2 = \delta(\theta - \theta^4) - \gamma(\theta^2 - \theta^3),$$
$$h_1 = \frac{1}{2}(1 + P), \quad h_2 = \frac{1}{2}(1 - P),$$

где

$$\alpha = \frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{5}, \quad \beta = \frac{\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}}{5}, \quad \gamma = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{10}, \quad \delta = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{10}.$$

При этом выполняются следующие соотношения:

$$J_1 P = J_2, \quad f_1 P = J_1 h_1 = J_2 h_1 = f_1, \quad h_1 P = h_1, \quad h_2 P = -h_2,$$
$$f_2 P = J_2 h_2 = -J_1 h_2 = -f_2, \quad f_1 f_2 = h_1 h_2 = 0, \quad h_1 + h_2 = P.$$

Кроме того, следующие условия эквивалентны:

1) $\operatorname{spec}\theta$ *состоит из двух элементов;*
2) *структура P тривиальна;*

3) *структуры* J_1 *и* J_2 *совпадают* (*с точностью до знака*);
4) *одна из структур* f_1 *или* f_2 *нулевая, а другая является почти комплексной и совпадает с одной из структур* J_1 *или* J_2;
5) *одна из структур* h_1 *или* h_2 *тривиальна, а другая равна нулю.*

Мы уже отмечали (см. раздел 2), что впервые каноническая структура P на однородных 5-симметрических пространствах была указана и изучена в [10]. Другие канонические структуры на этих пространствах изучались впоследствии в [26—28].

Заметим также, что в частном случае однородных Ф-пространств нечётного порядка $k = 2n+1$ метод построения инвариантных почти комплексных структур был описан в [20]. Нетрудно убедиться, что все такие структуры являются каноническими в указанном выше смысле.

5. Специальные канонические f-структуры

Далее мы будем рассматривать специальные канонические f-структуры на однородных регулярных Ф-пространствах.

Напомним, что f-структурой на многообразии M называется поле эндоморфизмов f, действующих в его касательном расслоении и удовлетворяющих условию $f^3 + f = 0$ (см. [59]). Число $r = \dim \mathrm{Im}\, f$ постоянно для всех точек из M (см. [56]) и называется *рангом* f-структуры. Кроме того, число $\dim \mathrm{Ker}\, f = \dim M - r$ обычно называют *дефектом* f-структуры и обозначают $\mathrm{def}\, f$. Легко видеть, что частные случаи $\mathrm{def}\, f = 0$ и $\mathrm{def}\, f = 1$ для f-структур приводят к почти комплексным и почти контактным структурам соответственно.

Пусть M — f-многообразие. Тогда $\mathfrak{X}(M) = \mathcal{L} \oplus \mathcal{M}$, где $\mathcal{L} = \mathrm{Im}\, f$ и $\mathcal{M} = \mathrm{Ker}\, f$ — взаимно дополнительные распределения, которые обычно называют *первым* и *вторым фундаментальным распределением* f-структуры соответственно. Ясно, что эндоморфизмы $l = -f^2$ и $m = \mathrm{id} + f^2$ являются взаимно дополнительными проекторами на распределениях $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ соответственно. Заметим, что сужение F заданной f-структуры на $\mathcal{L}$ есть почти комплексная структура, т. е. $F^2 = -\mathrm{id}$.

Пусть G/H — редуктивное однородное пространство, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ — соответствующее редуктивное разложение алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Любая инвариантная f-структура на G/H задаёт разложение $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$, где подпространства $\mathfrak{m}_1 = \mathrm{Im}\, f$ и $\mathfrak{m}_2 = \mathrm{Ker}\, f$ вполне определяют первое и второе фундаментальные распределения соответственно.

Перейдём теперь к рассмотрению канонических f-структур на однородных регулярных Ф-пространствах.

Теорема 4. *Пусть* G/H — *регулярное* Ф-*пространство,* $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ — *каноническое редуктивное разложение,* f — *каноническая* f-*структура на* G/H, $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$ — *разложение* $\mathfrak{m}$ *относительно* f-*структуры. Предположим, что*

f-структура удовлетворяет условию

$$f^2 = \pm\theta f. \tag{4}$$

Тогда

$$[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_1] \subset \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{h}. \tag{5}$$

Доказательство. Заметим, что условие (4) эквивалентно условию

$$f = \mp\theta f^2. \tag{6}$$

Используя (4) и (6), для любых $X, Y \in \mathfrak{m}$ получим

$$f([fX, fY]_{\mathfrak{m}}) = f([\theta f^2 X, \theta f^2 Y]_{\mathfrak{m}}) = (f\theta)([f^2 X, f^2 Y]_{\mathfrak{m}}) = f^2([f^2 X, f^2 Y]_{\mathfrak{m}}).$$

С другой стороны, снова используя (4) и (6), можем получить

$$f^2([f^2 X, f^2 Y]_{\mathfrak{m}}) = f^2([\theta f X, \theta f Y]_{\mathfrak{m}}) = (f^2\theta)([fX, fY]_{\mathfrak{m}}) = -f([fX, fY]_{\mathfrak{m}}).$$

Сравнивая эти две формулы, можем заключить, что

$$f([fX, fY]_{\mathfrak{m}}) = 0$$

для всех $X, Y \in \mathfrak{m}$. Очевидно, что последнее условие эквивалентно условию (5). □

Важно отметить, что некоторые однородные k-симметрические пространства обладают каноническими f-структурами, удовлетворяющими условию (5). Более точно, справедливо следствие 5.

Следствие 5. *Пусть G/H — однородное Φ-пространство порядка $k = 4n$, $n \geqslant 1$, для которого $\{i, -i\} \subset \operatorname{spec}\theta$. Тогда для нетривиальной канонической f-структуры на G/H, удовлетворяющей условию* (4), *справедливо соотношение*

$$[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_1] \subset \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{h}.$$

Доказательство. Действительно, метод построения канонических структур на однородных k-симметрических пространствах носит конструктивный характер (см. [9]). С использованием этого метода в [32] была предъявлена каноническая f-структура с требуемым свойством. Остаётся применить теорему 4. □

В частности, каноническая f-структура на однородных 4-симметрических пространствах удовлетворяет условию (5). Этот результат был впервые получен в [7]. В случае $k = 8$ соответствующая каноническая f-структура может быть представлена в виде (см. [32, 34])

$$f = \frac{1}{4}(\theta - \theta^3 + \theta^5 - \theta^7).$$

Согласно теореме 4 она также удовлетворяет условию (5).

Отметим также, что обращение теоремы 4 места не имеет. Как пример общего вида можно указать обе канонические f-структуры на однородных 5-симметрических пространствах (см. следствие 4 и [26—28]), для которых включение (5) справедливо. Однако условие (4) для таких f-структур не выполняется.

6. Специальные канонические f-структуры в обобщённой эрмитовой геометрии

Здесь мы выясним роль специальных канонических f-структур, рассмотренных выше, в обобщённой эрмитовой геометрии. Точнее, будут предъявлены новые классы однородных эрмитовых f-многообразий на основе канонических f-структур, удовлетворяющих условию (4).

Напомним основные понятия из обобщённой эрмитовой геометрии. Концепция *обобщённой эрмитовой геометрии*, возникшей в 1980-х годах (см., например, [15, 17, 18]), стала естественным следствием развития эрмитовой геометрии и теории почти контактных метрических структур вместе с многочисленными приложениями. Одним из центральных объектов обобщённой эрмитовой геометрии являются метрические f-структуры, которые содержат класс почти эрмитовых структур.

Напомним, что f-структура на (псевдо)римановом многообразии $(M, g=\langle\cdot,\cdot\rangle)$ называется *метрической f-структурой*, если $\langle fX, Y\rangle + \langle X, fY\rangle = 0$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ (см. [17]). В этом случае тройка (M, g, f) называется *метрическим f-многообразием*. Ясно, что тензорное поле $\Omega(X,Y) = \langle X, fY\rangle$ кососимметрично, т. е. Ω есть 2-форма на M. Форма Ω называется *фундаментальной формой* метрической f-структуры [15,17]. Легко убедиться, что частные случаи $\operatorname{def} f = 0$ и $\operatorname{def} f = 1$ метрических f-структур приводят к *почти эрмитовым структурам* и *почти контактным метрическим структурам* соответственно.

Пусть M — метрическое f-многообразие. Тогда первое и второе фундаментальные распределения $\mathcal{L} = \operatorname{Im} f$ и $\mathcal{M} = \operatorname{Ker} f$ взаимно ортогональны. Отметим, что в случае когда ограничение метрики g на $\mathcal{L}$ невырожденно, ограничение (F, g) метрической f-структуры на $\mathcal{L}$ есть почти эрмитова структура, т. е. $F^2 = -\mathrm{id}$, $\langle FX, FY\rangle = \langle X, Y\rangle$, $X, Y \in \mathcal{L}$.

Фундаментальную роль в геометрии метрических f-многообразий играет *композиционный тензор T*, который был точно указан в [15]:

$$T(X,Y) = \frac{1}{4} f(\nabla_{fX}(f)fY - \nabla_{f^2X}(f)f^2Y), \tag{7}$$

где ∇ — связность Леви-Чивита (псевдо)риманова многообразия (M, g), $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Используя тензор T, можно задать алгебраическую структуру так называемой *присоединённой Q-алгебры* в $\mathfrak{X}(M)$ посредством формулы

$$X * Y = T(X, Y).$$

Это даёт возможность ввести некоторые классы метрических f-структур на основе естественных свойств присоединённой Q-алгебры (см. [15, 17]).

Перечислим ниже основные классы метрических f-структур, указав для них определяющие свойства.

Kf	*келерова f-структура*:	$\nabla f = 0$;
Hf	*эрмитова f-структура*:	$T(X,Y) = 0$, т. е. $\mathfrak{X}(M)$ — абелева Q-алгебра;
$\mathbf{G_1f}$	f-структура класса G_1, или *G_1f-структура*:	$T(X,X) = 0$, т. е. $\mathfrak{X}(M)$ — антикоммутативная Q-алгебра;
QKf	*квазикелерова f-структура*:	$\nabla_X f + T_X f = 0$;
Kill f	*киллингова f-структура*:	$\nabla_X(f)X = 0$;
NKf	*приближённо келерова f-структура,* или *NKf-структура*:	$\nabla_{fX}(f)fX = 0$.

Классы **Kf**, **Hf**, $\mathbf{G_1f}$, **QKf** (в более общей ситуации) введены в [17] (см. также [55]). Киллинговы f-многообразия **Kill f** были определены и изучались в [11, 12]. Класс **NKf** впервые определён в [30] (см. также [3, 32]).

Приведём следующие очевидные отношения включения между классами метрических f-структур:

$$\mathbf{Kf} = \mathbf{Hf} \cap \mathbf{QKf}, \quad \mathbf{Kf} \subset \mathbf{Hf} \subset \mathbf{G_1f}, \quad \mathbf{Kf} \subset \mathbf{Kill\ f} \subset \mathbf{NKf} \subset \mathbf{G_1f}.$$

Важно отметить, что в частном случае $f = J$ мы получаем соответствующие классы почти эрмитовых структур (см. [40]). Например, для $f = J$ классы **Kill f** и **NKf** совпадают с хорошо известным классом **NK** *приближённо келеровых структур*.

Перейдём теперь к рассмотрению инвариантных метрических f-структур на (псевдо)римановых однородных пространствах.

Пусть G — связная группа Ли, H — её замкнутая подгруппа, g — инвариантная (псевдо)риманова метрика на однородном пространстве G/H. Как обычно, обозначим через $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ алгебры Ли, соответствующие группам G и H. Предположим, что G/H — редуктивное однородное пространство, $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ — редуктивное разложение алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Мы также отождествим $\mathfrak{m}$ с касательным пространством $T_o(G/H)$ в точке $o = H$. Тогда инвариантная метрика g полностью определяется своим значением в точке o. Для удобства будем обозначать одинаково саму инвариантную метрику g на G/H и её значение в точке o.

Напомним, что $(G/H, g)$ называется *естественно редуктивным* пространством относительно редуктивного разложения $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ [48], если

$$g([X,Y]_{\mathfrak{m}}, Z) = g(X, [Y,Z]_{\mathfrak{m}})$$

для всех $X, Y, Z \in \mathfrak{m}$. Здесь индекс $\mathfrak{m}$ обозначает проекцию $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{m}$ относительно редуктивного разложения.

Любая инвариантная метрическая f-структура на редуктивном однородном пространстве G/H определяет ортогональное разложение $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2$, где $\mathfrak{m}_1 = \operatorname{Im} f$, $\mathfrak{m}_2 = \operatorname{Ker} f$.

Как уже отмечалось во введении, основные классы почти эрмитовых структур обладают значительным запасом инвариантных примеров. Как оказалось, основные типы метрических f-структур также содержат обширное семейство инвариантных примеров. Эти инвариантные метрические f-структуры можно реализовать на однородных k-симметрических пространствах с каноническими f-структурами. Мы отразим здесь некоторые результаты этого направления. Более подробная информация содержится в [2—4, 22, 28, 30—33].

Теорема 5 [4]. *Любая инвариантная метрическая f-структура на естественно редуктивном пространстве $(G/H, g)$ является $G_1 f$-структурой.*

Как частный случай ($\operatorname{Ker} f = 0$) получаем отсюда результат из [29] о почти эрмитовых G_1-структурах.

Теорема 6 [4]. *Пусть $(G/H, g, f)$ — естественно редуктивное пространство с инвариантной метрической f-структурой, удовлетворяющей условию $[\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_1] \subset \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{h}$. Тогда G/H является эрмитовым f-многообразием.*

Отметим, что теорема 6 справедлива также для произвольной инвариантной (псевдо)римановой метрики, согласованной с инвариантной f-структурой на редуктивном однородном пространстве G/H (см. [6]).

Теоремы 5 и 6 можно снабдить широким классом примеров. В частности, для полупростых групп G инвариантная (псевдо)риманова метрика g на любом регулярном Φ-пространстве G/H, порождаемая формой Киллинга, является естественно редуктивной относительно канонического редуктивного разложения $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ (см. [23]). Более того, все канонические структуры f и J на однородных естественно редуктивных k-симметрических пространствах с такой метрикой согласованны, т. е. f является метрической f-структурой, а J — почти эрмитовой структурой (см. [30, 34]). В дальнейшем изложении мы условимся подразумевать под естественно редуктивным разложением каноническое редуктивное разложение для регулярного Φ-пространства G/H.

Таким образом, из теоремы 5 следует (см. [4]), что любая каноническая метрическая f-структура на естественно редуктивном k-симметрическом пространстве $(G/H, g)$ есть $G_1 f$-структура, а любая каноническая почти эрмитова структура J является G_1-структурой. Тем самым получаем обширный класс инвариантных примеров таких структур в обобщённой эрмитовой геометрии и, в частности, в эрмитовой геометрии.

Приведём ещё один результат в этом направлении.

Теорема 7 [3, 32]. *Пусть G/H — регулярное Φ-пространство, g — естественно редуктивная метрика на G/H относительно канонического редуктивного разложения $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$, f — метрическая каноническая f-структура на G/H. Предположим, что f-структура удовлетворяет условию $f^2 = \pm\theta f$. Тогда $(G/H, g, f)$ является приближённо келеровым f-многообразием.*

Установим сейчас следующий результат.

Теорема 8. *Пусть G/H — однородное регулярное Φ-пространство, g — произвольная инвариантная (псевдо)риманова метрика, f — метрическая (относительно g) каноническая f-структура на G/H. Если f-структура удовлетворяет условию $f^2 = \pm\theta f$, то $(G/H, g, f)$ — эрмитово f-многообразие.*

Доказательство. По теореме 4 условие (4) влечёт включение (5). Теперь остаётся применить [6, теорема 3] (см. комментарии после теоремы 6). □

Непосредственно применяя эту теорему и следствие 5, получим следствие 6.

Следствие 6. *Пусть G/H — однородное Φ-пространство порядка $k = 4n$, $n \geqslant 1$, для которого $\{i, -i\} \subset \operatorname{spec}\theta$. Рассмотрим нетривиальную каноническую f-структуру на G/H, удовлетворяющую условию $f^2 = \pm\theta f$, а также произвольную согласованную инвариантную* (*псевдо*)*риманову метрику g. Тогда* (f, g) *является инвариантной эрмитовой f-структурой на G/H.*

Как пример общего характера выделим один частный случай указанной выше ситуации.

Следствие 7. *Каноническая f-структура*

$$f = \frac{1}{4}(\theta - \theta^3 + \theta^5 - \theta^7)$$

на однородном 8-симметрическом пространстве G/H относительно любой согласованной инвариантной (*псевдо*)*римановой метрики g является инвариантной эрмитовой f-структурой.*

Например, любое флаговое многообразие $\mathrm{SU}(n)/\mathrm{T}_{\max}$ ($n \geqslant 3$, $\mathrm{T}_{\max}$ — максимальный тор) может быть рассмотрено как однородное k-симметрическое пространство для всех $k \geqslant n$ (см. [43]). Поэтому такие флаговые многообразия обеспечивают специальный класс однородных эрмитовых f-многообразий. В частности, можно рассмотреть $\mathrm{SU}(8)/\mathrm{T}^7$ как однородное 8-симметрическое пространство.

Следует отметить, что результат следствия 6 для $k = 4$ был получен ранее в [4] (для естественно редуктивной метрики) и в [6] (для общего случая). Заметим также, что римановы 4-симметрические пространства классических компактных групп Ли классифицированы в [44]. Тем самым представлен конкретный список однородных эрмитовых f-многообразий полупростого типа, для которых соответствующая f-структура, вообще говоря, не является интегрируемой. Что касается однородных пространств разрешимого типа, то 6-мерная обобщённая группа Гейзенберга (N, g), рассматриваемая как риманово однородное 4-симметрическое пространство (см. [57]), является однородным эрмитовым f-многообразием относительно канонической f-структуры $f = \frac{1}{2}(\theta - \theta^3)$ (см. [4]), причём здесь риманова метрика g не является естественно редуктивной.

Литература

[1] Балащенко В. В. Канонические f-структуры гиперболического типа на регулярных Φ-пространствах // Успехи мат. наук. — 1998. — Т. 53, № 4. — С. 213—214.

[2] Балащенко В. В. Естественно редуктивные киллинговы f-многообразия // Успехи мат. наук. — 1999. — Т. 54, № 3. — С. 151—152.

[3] Балащенко В. В. Однородные приближённо келеровы f-многообразия // Докл. РАН. — 2001. — Т. 376, № 4. — С. 439—441.

[4] Балащенко В. В. Однородные эрмитовы f-многообразия // Успехи мат. наук. — 2001. — Т. 56, № 3. — С. 159—160.

[5] Балащенко В. В. Алгебра канонических аффинорных структур и классы регулярных Ф-пространств // Докл. РАН. — 2002. — Т. 385, № 6. — С. 727—730.

[6] Балащенко В. В., Вылегжанин Д. В. Обобщённая эрмитова геометрия на однородных Ф-пространствах конечного порядка // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 2004. — № 10. — С. 33—44.

[7] Балащенко В. В., Дашевич О. В. Геометрия канонических структур на однородных Ф-пространствах порядка 4 // Успехи мат. наук. — 1994. — Т. 49, № 4. — С. 153—154.

[8] Балащенко В. В., Степанов Н. А. Канонические аффинорные структуры на регулярных Ф-пространствах // Успехи мат. наук. — 1991. — Т. 46, № 1. — С. 205—206.

[9] Балащенко В. В., Степанов Н. А. Канонические аффинорные структуры классического типа на регулярных Ф-пространствах // Мат. сб. — 1995. — Т. 186, № 11. — С. 3—34.

[10] Балащенко В. В., Чурбанов Ю. Д. Инвариантные структуры на однородных Ф-пространствах порядка 5 // Успехи мат. наук. — 1990. — Т. 45, № 1. — С. 169—170.

[11] Гриценс А. С. О геометрии киллинговых f-многообразий // Успехи мат. наук. — 1990. — Т. 45, № 4. — С. 149—150.

[12] Гриценс А. С. О строении киллинговых f-многообразий // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1992. — № 6. — С. 49—57.

[13] Кириченко В. Ф. K-пространства постоянного типа // Сиб. мат. журн. — 1976. — Т. 17, № 2. — С. 282—289.

[14] Кириченко В. Ф. О геометрии однородных K-пространств // Мат. заметки. — 1981. — Т. 30, № 4. — С. 569—582.

[15] Кириченко В. Ф. Квазиоднородные многообразия и обобщённые почти эрмитовы структуры // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1983. — Т. 47, № 6. — С. 1208—1223.

[16] Кириченко В. Ф. Эрмитово-однородные обобщённые почти эрмитовы многообразия // ДАН СССР. — 1984. — Т. 277, № 6. — С. 1310—1315.

[17] Кириченко В. Ф. Методы обобщённой эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геометрии. Вып. 18. — М.: ВИНИТИ, 1986. — С. 25—71.

[18] Кириченко В. Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. — М.: МПГУ, 2003.

[19] Кириченко В. Ф., Липагина Л. В. Киллинговы f-многообразия постоянного типа // Изв. РАН. Сер. мат. — 1999. — Т. 63, № 5. — С. 127—146.

[20] Ковальский О. Обобщённые симметрические пространства. — М.: Мир, 1984.

[21] Ленг С. Алгебра. — М.: Мир, 1968.

[22] Липагина Л. В. О строении алгебры инвариантных аффинорных структур на сфере S^5 // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1997. — № 9. — С. 17—20.

[23] Степанов Н. А. Основные факты теории φ-пространств // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1967. — № 3. — С. 88—95.

[24] Степанов Н. А. Однородные 3-циклические пространства // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1967. — № 12. — С. 65—74.

[25] Феденко А. С. Пространства с симметриями. — Минск: Белорусский гос. ун-т, 1977.

[26] Чурбанов Ю. Д. О некоторых классах однородных Ф-пространств порядка 5 // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1992. — № 2. — С. 88—90.

[27] Чурбанов Ю. Д. Канонические f-структуры однородных Ф-пространств порядка 5 // Вестн. БГУ. Сер. 1, Физика, математика, механика. — 1994. — № 1. — С. 51—54.

[28] Чурбанов Ю. Д. Геометрия однородных Ф-пространств порядка 5 // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 2002. — № 5. — С. 70—81.

[29] Abbena E., Garbiero S. Almost Hermitian homogeneous manifolds and Lie groups // Nihonkai Math. J. — 1993. — Vol. 4. — P. 1—15.

[30] Balashchenko V. V. Riemannian geometry of canonical structures on regular Ф-spaces. — Preprint No. 174/1994. — Fakultät für Mathematik der Ruhr-Universität Bochum, 1994.

[31] Balashchenko V. V. Extending an idea of A. Gray: Homogeneous k-symmetric spaces and generalized Hermitian geometry // Int. Congr. on Differential Geometry in Memory of Alfred Gray, September 18—23, 2000, Bilbao (Spain), Abstracts. — P. 5—7.

[32] Balashchenko V. V. Invariant nearly Kähler f-structures on homogeneous spaces // Global Differential Geometry: The Mathematical Legacy of Alfred Gray. Proc. of the Int. Congr. on Differential Geometry Held in Memory of Prof. Alfred Gray, Bilbao, Spain, September 18—23, 2000 / M. Ferna'ndez, ed. — (Contemp. Math.; Vol. 288). — Providence: Amer. Math. Soc., 2001. — P. 263—267.

[33] Balashchenko V. V. Invariant nearly Kähler f-structures on homogeneous spaces. — SFB 288 Preprint No. 499. — Berlin, 2001.

[34] Balashchenko V. V. Invariant structures generated by Lie group automorphisms on homogeneous spaces // Proc. of the Workshop «Contemporary Geometry and Related Topics» (Belgrade, Yugoslavia, 15—21 May, 2002) / N. Bokan, M. Djoric, A. T. Fomenko, Z. Rakic, and J. Wess, eds. — World Scientific, 2004. — P. 1—32.

[35] Baum H., Friedrich T., Grunewald R., Kath I. Twistor and Killing Spinors on Riemannian Manifolds. — Stuttgart: Teubner, 1991. — (Teubner-Texte zur Mathematik; Vol. 124).

[36] Garbiero S., Vanhecke L. A characterization of locally 3-symmetric spaces // Riv. Mat. Univ. Parma (5). — 1993. — Vol. 2. — P. 331—335.

[37] Gray A. Nearly Kähler manifolds // J. Differential Geom. — 1970. — Vol. 4, no. 3. — P. 283—309.

[38] Gray A. Riemannian manifolds with geodesic symmetries of order 3 // J. Differential Geom. — 1972. — Vol. 7, no. 3-4. — P. 343—369.

[39] Gray A. Homogeneous almost Hermitian manifolds // Proc. of the Conf. on Differential Geometry on Homogeneous Spaces, Turin, Italy, 1983. — Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino. — 1983. — Special Issue. — P. 17—58.

[40] Gray A., Hervella L. M. The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants // Ann. Mat. Pura Appl. — 1980. — Vol. 123, no. 4. — P. 35—58.

[41] Grunewald R. Six-dimensional Riemannian manifolds with a real Killing spinor // Ann. Global Anal. Geom. — 1990. — Vol. 8, no. 1. — P. 43—59.

[42] Helgason S. Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces. — New York: Academic Press, 1978.

[43] Jimenez J. A. Existence of Hermitian n-symmetric spaces and of non-commutative naturally reductive spaces // Math. Z. — 1987. — Vol. 196, no. 2. — P. 133—139.

[44] Jimenez J. A. Riemannian 4-symmetric spaces // Trans. Amer. Math. Soc. — 1988. — Vol. 306, no. 2. — P. 715—734.

[45] Kath I. Pseudo-Riemannian T-duals of compact Riemannian homogeneous spaces // Transform. Groups. — 2000. — Vol. 5, no. 2. — P. 157—179.

[46] Kirichenko V. F. Sur la geometrie des varietes approximativement cosymplectiques // C. R. Acad. Sci. Paris, Sèr. 1. — 1982. — Vol. 295, no. 12. — P. 673—676.

[47] Kirichenko V. F. Generalized quasi-Kählerian manifolds and axioms of CR-submanifolds in generalized Hermitian geometry. I // Geom. Dedicata. — 1994. — Vol. 51. — P. 75—104.

[48] Kobayashi S., Nomizu K. Foundations of Differential Geometry. Vol. 2. — New York: Interscience—Wiley, 1969.

[49] Ledger A. J., Vanhecke L. On a theorem of Kiričenko relating to 3-symmetric spaces // Riv. Mat. Univ. Parma (4). — 1987. — Vol. 13. — P. 367—372.

[50] Salamon S. Harmonic and holomorphic maps // Geometry Seminar «Luigi Bianchi» II — 1984. — Berlin: Springer, 1985. — (Lect. Notes Math.; Vol. 1164). — P. 161—224.

[51] Salamon S. Minimal surfaces and symmetric spaces // Differential Geometry. Proc. 5th Int. Colloq., Santiago de Compostela/Spain, 1984. — Res. Notes Math. — 1985. — Vol. 131. — P. 103—114.

[52] Sato T. Riemannian 3-symmetric spaces and homogeneous K-spaces // Mem. Fac. Technology, Kanazawa Univ. — 1979. — Vol. 12, no. 2. — P. 137—143.

[53] Sekigawa K., Watanabe J. On some compact Riemannian 3-symmetric spaces // Sci. Rep. Niigata Univ. Ser. A. — 1983. — No. 19. — P. 1—17.

[54] Sekigawa K., Yoshida H. Riemannian 3-symmetric spaces defined by some outer automorphisms of compact Lie groups // Tensor. — 1983. — Vol. 40, no. 3. — P. 261—268.

[55] Singh K. D., Singh R. Some $f(3,\varepsilon)$-structure manifolds // Demonstratio Math. — 1977. — Vol. 10, no. 3-4. — P. 637—645.

[56] Stong R. E. The rank of an f-structure // Kodai Math. Sem. Rep. — 1977. — Vol. 29. — P. 207—209.

[57] Tricerri F., Vanhecke L. Homogeneous Structures on Riemannian Manifolds. — Cambridge Univ. Press, 1983. — (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; Vol. 83).

[58] Wolf J. A., Gray A. Homogeneous spaces defined by Lie group automorphisms // J. Differential Geom. — 1968. — Vol. 2, no. 1-2. — P. 77—159.

[59] Yano K. On a structure defined by a tensor field f of type $(1,1)$ satisfying $f^3+f=0$ // Tensor. — 1963. — Vol. 14. — P. 99—109.