О теореме Коэна—Ласка*

А. Ю. ВОЛОВИКОВ
*Московский государственный институт
радиотехники, электроники и автоматики
(технический университет)*
e-mail: a_volov@list.ru

УДК 515.14

Ключевые слова: множество точек частичного совпадения, когомологический индекс, многообразие k-равенств.

Аннотация

Пусть G — конечная группа, X — G-пространство. Для отображения $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ множеством $A(f,k)$, $k \leqslant |G|$, точек частичных совпадений называется множество точек $x \in X$, для которых найдётся k таких элементов $g_1, \ldots, g_k$ группы G, что $f(g_1x) = \ldots = f(g_kx)$. Для случая $G = \mathbb{Z}_p^n$ при дополнительных предположениях доказано, что число точек частичных совпадений отлично от нуля.

Abstract

A. Yu. Volovikov, On the Cohen–Lusk theorem, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 8, pp. 61—67.

Let G be a finite group and X be a G-space. For a map $f\colon X \to \mathbb{R}^m$, the partial coincidence set $A(f,k)$, $k \leqslant |G|$, is the set of points $x \in X$ such that there exist k elements $g_1, \ldots, g_k$ of the group G, for which $f(g_1x) = \cdots = f(g_kx)$ hold. We prove that the partial coincidence set is nonempty for $G = \mathbb{Z}_p^n$ under some additional assumptions.

1. Введение

Пусть X — G-пространство, где G — конечная группа, и $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение. Для $2 \leqslant k \leqslant |G|$ положим

$$A(f,k) := \{x \in X \mid f(g_1x) = \ldots = f(g_kx) \text{ для некоторых попарно различных элементов } g_1, \ldots, g_k \in G\}.$$

Положим $A(f) = A(f, |G|)$. Это множество точек совпадения для семейства отображений $\{f \circ g\}_{g\in G}$. При $k < |G|$ множество $A(f,k)$ называется множеством точек частичных совпадений.

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 06-01-00463.

Теорема 1. *Пусть X — G-пространство, где $G = \mathbb{Z}_p^n = \mathbb{Z}_p \times \ldots \times \mathbb{Z}_p$ — p-тор, и $2 \leqslant k \leqslant p^n$, $k \neq 3$. Предположим, что X связно и ациклично над полем $\mathbb{Z}_p$ в размерностях, меньших $(m-1)(p^n-1)+k-1$. Тогда для любого непрерывного отображения $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ имеем $A(f,k) \neq \varnothing$.*

В случае $G = \mathbb{Z}_p$, $k \geqslant (p+1)/2$ или $k = 2$ эта теорема доказана Коэном и Ласком [7]. В [7] была высказана гипотеза, что результат верен для любого k. Д. В. Болотов [1] доказал эту гипотезу для $k = (p-1)/2$.

Для $G = \mathbb{Z}_p^n$ и $k \geqslant (p^n+1)/2$ или $k = 2$ это утверждение было доказано автором в [3] с помощью результата Коэна и Ласка [7] об ацикличности конфигурационных пространств в старших размерностях.

Доказательства опирается на свойства когомологического индекса, введённого в [3].

Все рассматриваемые ниже пространства предполагаются паракомпактными, а отображения непрерывными. Мы используем когомологии Чеха с коэффициентами в поле $\mathbb{Z}_p$ (коэффициенты, как правило, исключаются из обозначений).

2. Когомологический индекс

Говоря коротко, (числовой) индекс — это «функция», относящая G-пространству целое число или ∞ и обладающая следующим основным свойством: она не убывает при отображениях G-пространств.

В [3] был введён числовой индекс $i(X)$, принимающий целые положительные значения или ∞.

Индекс $i(X)$ определяется с помощью спектральной последовательности расслоения $X_G := E_G \times_G X \to B_G$ со слоем X (конструкция Бореля). Здесь B_G — классифицирующее пространство, $E_G \to B_G$ — универсальное главное G-расслоение. Спектральная последовательность сходится к эквивариантным когомологиям $H_G^*(X) := H^*(X_G)$ (см. [8]). Алгебру $H_G^*(\mathrm{pt}) = H^*(B_G)$ эквивариантных когомологий точки обозначим через Λ^*. В интересующем нас случае (т. е. для $G = \mathbb{Z}_p^n$) при $p > 2$ алгебра Λ^* есть тензорное произведение алгебры многочленов от n двумерных образующих на внешнюю алгебру от n одномерных образующих, а при $p = 2$ — алгебра многочленов от n одномерных образующих.

Пусть пространство X связно. Тогда $E_2^{*,0} = \Lambda^*$. Предположим, что $E_2^{*,0} = \ldots = E_s^{*,0} \neq E_{s+1}^{*,0}$. В этом случае по определению $i(X) = s$. Через $i'(X)$ обозначим наименьшее r, такое что ядро естественного гомоморфизма $\Lambda^* \to E_{r+1}^{*,0}$ содержит элемент, не являющийся делителем нуля в Λ^*. Из определений следует, что $i(X) \leqslant i'(X)$. Для конечного дизъюнктного объединения однородных пространств, т. е. G-пространств вида G/H, где $H \neq G$, считаем, что $i(X) = 1$.

В следующей теореме собраны свойства индекса.

Теорема 2.

1. *Если существует эквивариантное отображение G-пространств $X \to Y$, то $i(X) \leqslant i(Y)$.*
2. *Если X компактно или конечномерно и G действует без неподвижных точек, то $i(X) < \infty$.*
3. *Если $G = \mathbb{Z}_2$ и X — свободное G-пространство, то $i(X)$ на 1 больше гомологического индекса Янга, введённого в* [9].
4. *Если $\tilde{H}^j(X) = 0$ для $j \leqslant n-1$, то $i(X) \geqslant n+1$.*
5. *Если $i(Z) < \infty$ и $H^j(Z) = 0$ для $j \geqslant n+1$, то $i(Z) \leqslant n+1$.*
6. *Если $H^d(X) = 0$, то $i(X) \neq d+1$.*
7. *Если X — компактная или конечномерная когомологическая сфера* (*над полем $\mathbb{Z}_p$*), *т. е. $H^*(X) = H^*(S^n)$, и G действует без неподвижных точек на X, то $i(X) = i'(X) = n+1$.*
8. *Если $X = A \cup B$, где A и B замкнутые* (*или открытые*) *G-инвариантные подпространства, то $i(X) \leqslant i'(A) + i(B)$. В частности, $i(X * Y) \leqslant i'(X) + i(Y)$.*
9. *Индекс $i(\cdot)$ непрерывен, т. е. у замкнутого инвариантного подпространства $A \subset X$ имеется инвариантная окрестность U, такая что $i(A) = i(U)$. Аналогичное верно и для $i'(\cdot)$.*

Утверждение 6 следует непосредственно из определения индекса $i(\cdot)$. Остальные утверждения доказаны в [3].

3. Предварительные рассмотрения

Положим $q = p^n = |G|$ и для пространства Y определим

$$\Delta_k(Y) = \{(y_1, \ldots, y_q) \in Y^q \mid y_{i_1} = \ldots = y_{i_k} \text{ для некоторых } 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant q\}.$$

По отображению $f\colon X \to Y$ из G-пространства X можно определить эквивариантное отображение $\hat{f}\colon X \to Y^q$, такое что $A(f,k) = \hat{f}^{-1}\big(\Delta_k(Y)\big)$ (см. [2, 4]). Такая конструкция рассматривалась Янгом [9] и Шварцем [5] для $G = \mathbb{Z}_2$ и $G = \mathbb{Z}_p$ соответственно. Это отображение использовалось также Коэном и Ласком [7] для $G = \mathbb{Z}_p$.

Пусть $G = \mathbb{Z}_p$ с образующей T. Тогда $q = p = |G|$. В этом случае мы можем определить $\hat{f}\colon X \to Y^q$ формулой $\hat{f}(x) = \big(f(x), f(Tx), \ldots, f(T^{q-1}x)\big)$. Это отображение является эквивариантным, если G-действие на Y^q определяется как $T(y_1, \ldots, y_q) = (y_2, y_3, \ldots, y_q, y_1)$. Кроме того, $\hat{f} = f^q \circ s$ — композиция двух эквивариантных отображений $s\colon X \to X^q$ и $f^q\colon X^q \to Y^q$, определённых формулами $s(x) = (x, Tx, \ldots, T^{q-1}x)$, $f^q(x_1, \ldots, x_q) = \big(f(x_1), \ldots, f(x_q)\big)$. Легко убедиться, что $A(f,k) = \hat{f}^{-1}\Delta_k(Y)$.

Отображения $\hat{f}$, s и f^q и G-действия на X^q, Y^q могут быть определены для любой конечной группы G (не обязательно абелевой). А именно, обозначим через $X(G)$ пространство отображений $\mathrm{Map}(G,X)$, где G рассматривается с дискретной топологией. Группа G естественным образом действует на $X(G)$: если $\eta \in \mathrm{Map}(G,X)$, то $(h\eta)(g) = \eta(h^{-1}g)$, $h,g \in G$. Фиксация порядка элементов группы G определяет гомеоморфизмы $X^q \approx X(G)$, $Y^q \approx Y(G)$ и тем самым определяет G-действия на X^q и Y^q. Отображение f определяет $f_\natural\colon X(G) \to Y(G)$ согласно формуле $f_\natural \eta = f \circ \eta$. После отождествления $X(G)$ и $Y(G)$ с X^q и Y^q соответственно отображение $f_\natural$ превращается в $f^q\colon X^q \to Y^q$. Определим отображения $\hat{f}\colon X \to Y(G)$ и $s\colon X \to X(G)$ как $\hat{f}(x)(g) = f(g^{-1}x)$ и $s(x)(g) = g^{-1}x$. Тогда $\hat{f} = f_\natural \circ s$. Легко убедиться, что $\hat{f}$ и s эквивариантны. Обозначим через $\Delta(Y) = \Delta_q(Y) \subset Y(G)$ подпространство постоянных отображений. Тогда $A(f) = A(f,q) = \hat{f}^{-1}\Delta(Y)$. Аналогично $A(f,k) = \hat{f}^{-1}\Delta_k(Y)$, где $\Delta_k(Y)$ — пространство таких отображений η, что $\eta(g_1) = \ldots = \eta(g_k)$ для некоторых попарно различных $g_1, \ldots, g_k \in G$.

Отметим, что G действует на $Y^q \setminus \Delta_k(Y)$ без неподвижных точек.

Положим $N(Y,q,k) = i\bigl(Y^q \setminus \Delta_k(Y)\bigr)$. В случае когда Y — конечномерный CW-комплекс или топологическое многообразие, это конечное число.

Теорема 3. *Если $i(X) > N(Y,q,k)$, то $A(f,k) \neq \varnothing$ для любого отображения $f\colon X \to Y$.*

Доказательство. Если $A(f,k) = \varnothing$, то $\hat{f}$ доставляет эквивариантное отображение $X \to Y^q \setminus \Delta_k(Y)$, что противоречит утверждению 1 теоремы 2. □

4. Индекс конфигурационных пространств и обобщение теоремы 1

Обозначим через $V(m,q,k)$ конфигурационное пространство $Y^q \setminus \Delta_k(Y)$, где $Y = \mathbb{R}^m$. Нам нужно найти верхнюю оценку индекса $N(\mathbb{R}^m,q,k) = i\bigl(V(1,q,k)\bigr)$.

Пространство $V(1,q,k)$ называется многообразием k-равенств в [6]. В [6] показано, что целочисленные когомологии этого пространства свободны и $H^d(V(1,q,k);\mathbb{Z}) \neq 0$ в том и только в том случае, когда $d = (k-2)t$, где $0 \leqslant t \leqslant [q/k]$. В частности, $V(1,q,k)$ ациклично в размерностях, меньших $k-2$ (нетрудно доказать, что $V(1,q,k)$ является $(k-3)$-связным), поэтому из утверждения 4 теоремы 2 получаем $N(\mathbb{R},q,k) = i\bigl(V(1,q,k)\bigr) \geqslant k-1$.

Предложение 1. *Пусть $2 \leqslant k \leqslant q$ и $k \neq 3$. Тогда $N(\mathbb{R},q,k) = k-1$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $k > 3$. Воспользуемся индукцией по убывающему k. При $k = q$ утверждение справедливо, поскольку пространство $V(1,q,q)$ является гомотопической сферой S^{q-2} (см. свойство 7 индекса в теореме 2). Предположим, что для $k+1$ равенство $i\bigl(V(1,q,k+1)\bigr) = k$ уже установлено. Имеем $i\bigl(V(1,q,k)\bigr) \geqslant k-1$. Поскольку $V(1,q,k) \subset V(1,q,k+1)$, получаем $i\big(V(1,q,k)\big) \leqslant i\big(V(1,q,k+1)\big)$ по свойству 1 индекса. Следовательно, $i\big(V(1,q,k)\big)$ равен $k-1$ или k. Из [6] следует, что $H^d(V(1,q,k);\mathbb{Z}_p) \neq 0$ в том и только в том случае, когда $d=(k-2)t$, где $0 \leqslant t \leqslant [q/k]$. Следовательно, (для $k>3$) имеем $H^{k-1}(V(1,q,k);\mathbb{Z}_p)=0$ и из свойства 6 получаем $i\big(V(1,q,k)\big) \neq k$.

При $k=2$ пространство $V(1,q,2)$ представляет собой дизъюнктное объединение открытых конусов. Ни один из этих конусов не является инвариантным подмножеством (в противном случае он содержал бы неподвижные точки). Следовательно, существует эквивариантное отображение из $V(1,q,2)$ в дизъюнктное объединение однородных пространств G/H с $G \neq H$, и поэтому $i\big(V(1,q,2)\big)=1$. □

Предложение 2. *Пусть $2 \leqslant k \leqslant q$ и $k \neq 3$. Тогда*

$$N(\mathbb{R}^m,q,k) \leqslant (m-1)(q-1)+k-1.$$

Доказательство. Пусть V_1, V_2 — G-пространства и $P_1 \subset V_1$, $P_2 \subset V_2$ — замкнутые инвариантные подпространства. Имеем

$$V_1 \times V_2 \setminus P_1 \times P_2 = [(V_1 \setminus P_1) \times V_2] \cup [V_1 \times (V_2 \setminus P_2)].$$

Первое из подпространств эквивариантно отображается на $V_1 \setminus P_1$ (при проекции на первый сомножитель), второе — на $V_2 \setminus P_2$. Поэтому если имеется инвариантное относительно G-действия разбиение единицы, подчинённое указанному открытому покрытию, то можно построить эквивариантное отображение

$$V_1 \times V_2 \setminus P_1 \times P_2 \to (V_1 \setminus P_1) * (V_2 \setminus P_2).$$

Положим $V_1=(\mathbb{R}^{m-1})^q$, $P_1=\Delta(\mathbb{R}^{m-1})$, $V_2=\mathbb{R}^q$, $P_2=\Delta_k(\mathbb{R})$ и $E=V_1\times V_2$. Тогда можно отождествить E с $(\mathbb{R}^m)^q$. Имеем

$$V(m,q,k)=E \setminus \Delta_k(\mathbb{R}^m) \subset E \setminus [\Delta(\mathbb{R}^{m-1}) \times \Delta_k(\mathbb{R})].$$

Поэтому мы можем определить эквивариантные отображения

$$E \setminus \Delta_k(\mathbb{R}^m) \to E \setminus P_1 \times P_2 \to (V_1 \setminus P_1) * (V_2 \setminus P_2) \to S^{(m-1)(q-1)-1} * \big(\mathbb{R}^q \setminus \Delta_k(\mathbb{R})\big).$$

Здесь мы воспользовались тем, что пространство

$$V_1 \setminus P_1 = (\mathbb{R}^{m-1})^q \setminus \Delta(\mathbb{R}^{m-1}) = V(m-1,q,q)$$

эквивариантно гомотопически эквивалентно сфере $S^{(m-1)(q-1)-1}$. Следовательно, из утверждений 7 и 8 теоремы 2 и предложения 1 получаем

$$i\big(E \setminus \Delta_k(\mathbb{R}^m)\big) \leqslant (m-1)(q-1) + i\big(\mathbb{R}^q \setminus \Delta_k(\mathbb{R})\big) = (m-1)(q-1)+k-1. \quad \square$$

Замечание 1. Приведённые выше рассуждения показывают, что для $q = 3,4,5$ мы имеем $N(\mathbb{R},q,3)=2$ и $N(\mathbb{R}^m,q,3) \leqslant (m-1)(q-1)+2$.

Теорема 1 следует из утверждения 4 теоремы 2 и следующего утверждения.

Теорема 4. *Пусть X — G-пространство, где $G=\mathbb{Z}_p^n$ — p-тор ранга n, и $2 \leqslant k \leqslant p^n$, $k \neq 3$. Предположим, что X связно и $i(X) \geqslant (m-1)(p^n-1)+k$. Тогда для любого непрерывного отображения $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ имеем $A(f,k) \neq \varnothing$.*

Доказательство. Утверждение следует из теоремы 3 и предложения 2. $\square$

Замечание 2. Теорема 4 справедлива также для $k = 3$ и $q = 3, 4, 5$ (для $q = 3, 5$ это вытекает из [7], для $q = 4$ — из [3], что, очевидно, следует из замечания 1).

Замечание 3. В [4] приводится альтернативное доказательство теоремы 1 для случая $G = \mathbb{Z}_p$, основанное на использовании когомологического индекса Коннера—Флойда.

Замечание 4. Результаты нельзя улучшить в следующих двух случаях:

1) $m = 1$ (k произвольно),
2) $k = q$ (m произвольно).

Пусть X — свободное G-пространство, где G — конечная группа порядка $q = |G|$. Предположим, кроме того, что X — CW-комплекс с клеточным действием. Чтобы построить $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ с $A(f,k) = \varnothing$, достаточно построить эквивариантное отображение $X \to V(m,q,k)$. Действительно, пусть $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ — композиция этого эквивариантного отображения с проекцией $(\mathbb{R}^m)^q \to \mathbb{R}^m$ на первый сомножитель. Тогда $A(f,k) = \varnothing$. Подобное эквивариантное отображение существует тогда и только тогда, когда существует сечение расслоения $\bigl(X \times V(m,q,k)\bigr)/G \to X/G$ со слоем $V(m,q,k)$. Из теории препятствий следует, что если размерность базы (равная размерности пространства X) не превосходит связности $V(m,q,k)$ плюс 1, то такое сечение существует.

В качестве X возьмём джойн $J^s(G) = G * \ldots * G$ с s копиями группы G (диагональное действие группы G на этом пространстве является свободным). Тогда $\dim J^s(G) = s - 1$ и $\pi_i\bigl(J^s(G)\bigr) = 0$ для $i < s - 1$. Отметим, что если G — p-тор, то $i\bigl(J^s(G)\bigr) = s$ в силу утверждений 4 и 5 теоремы 2.

В первом случае имеем $\pi_i\bigl(V(1,q,k)\bigr) = 0$ для $i < k - 2$. Поэтому существует эквивариантное отображение $J^{k-1}(G) \to V(1,q,k)$. Во втором случае имеется эквивариантное отображение $J^{m(q-1)}(G) \to V(m,q,q)$, поскольку $V(m,q,q) \simeq S^{m(q-1)-1}$. Следовательно, существуют отображения $f\colon J^{k-1}(G) \to \mathbb{R}$ и $h\colon J^{m(q-1)}(G) \to \mathbb{R}^m$ с $A(f,k) = \varnothing$ и $A(h,q) = \varnothing$. Если G — p-тор, то $i\bigl(J^{k-1}(G)\bigr) = k - 1$ и $i\bigl(J^{m(q-1)}(G)\bigr) = m(q-1)$.

Для $G = \mathbb{Z}_p$ (фактически для любой циклической группы) в приведённых рассуждениях можно заменить джойн на нечётномерную сферу и на джойн нечётномерной сферы с G (в чётной размерности), поскольку, очевидно, существуют эквивариантные отображения $S^{2d-1} \to J^{2d}(G)$, $J^{2d}(G) \to S^{2d-1}$, откуда следует, что $S^{2d-1} * G$ и $J^{2d+1}(G)$ могут быть отображены эквивариантно друг в друга.

Литература

[1] Болотов Д. В. Гипотеза Коэна—Ласка // Мат. заметки. — 2001. — Т. 70, № 1. — С. 22—26.

[2] Воловиков А. Ю. Теорема Буржена—Янга для $\mathbb{Z}_p^n$-действия // Мат. сб. — 1992. — Т. 183, № 7. — С. 115—144.

[3] Воловиков А. Ю. Об индексе G-пространств // Мат. сб. — 2000. — Т. 191, № 9. — С. 3—22.

[4] Воловиков А. Ю. Точки совпадения отображений $\mathbb{Z}_p^n$-пространств // Изв. РАН. Сер. мат. — 2005. — Т. 69, № 5. — С. 53—106.

[5] Шварц А. С. Род расслоённого пространства // Тр. ММО. — 1961. — Т. 10. — С. 217—272; 1962. — Т. 11. — С. 99—126.

[6] Björner A., Welker V. The homology of «k-equal» manifolds and related partition lattices // Adv. Math. — 1995. — Vol. 110, no. 2. — P. 277—313.

[7] Cohen F., Lusk E. L. Configuration-like spaces and the Borsuk—Ulam theorem // Proc. Amer. Math. Soc. — 1976. — Vol. 56. — P. 313—317.

[8] Hsiang W. Y. Cohomological Theory of Topological Transformation Groups. — Berlin: Springer, 1975.

[9] Yang C. T. On theorems of Borsuk—Ulam, Kakutani—Yamabe—Yujobô and Dyson. I // Ann. Math. — 1954. — Vol. 60. — P. 262—282.