Необходимое и достаточное условие для существования глобальных по времени решений стохастических дифференциальных и параболических уравнений на многообразиях*

Ю. Е. ГЛИКЛИХ
Воронежский государственный университет
e-mail: yeg@alg.vsu.ru

УДК 515.168

Ключевые слова: стохастический поток, полугруппа диффузии, параболическое уравнение, многообразие.

Аннотация

Найдено необходимое и достаточное условие одностороннего типа для полноты стохастического потока и соответствующей полугруппы диффузии на многообразии M в предположении инвариантности пространства функций $C_0(M)$.

Abstract

Yu. E. Gliklikh, A necessary and sufficient condition for the global-in-time existence of solutions to stochastic differential and parabolic equations on manifolds, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 8, pp. 69—76.

A necessary and sufficient condition of one-sided type for the completeness of a stochastic flow and the corresponding diffusion semigroup on a manifold M is found under the assumption that the space $C_0(M)$ of functions is invariant.

В настоящей работе мы найдём необходимое и достаточное условие одностороннего типа для полноты стохастического потока и соответствующей полугруппы диффузии в предположении, что они удовлетворяют так называемому C_0-свойству. Это означает, что мы получим необходимое и достаточное условие для глобальных по времени существования решений стохастических дифференциальных и параболических уравнений на многообразиях, описывая вышеупомянутые поток и полугруппу соответственно. Мы используем стохастический подход к параболическим уравнениям, так что обе теоремы существования доказываются посредством сходных конструкций, основанных на идеях геометрии и топологии многообразий. Предварительная версия была опубликована в [5].

*Исследование частично поддержано грантом INTAS 99-00559, грантами РФФИ 03-01-00112 и 04-01-00081 и премией VZ-010-0 Американского фонда гражданских исследований и развития и Министерства образования РФ.

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 8, с. 69—76.

Данный результат является обобщением необходимого и достаточного условия для полноты обычного потока, управляемого векторным полем на многообразии, которое было получено в [6].

Автор благодарен К. Д. Элворти за очень полезные обсуждения и содействие.

1. Введение

Пусть M — конечномерное, вообще говоря некомпактное, многообразие. Рассмотрим на M параболическое уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}u = \mathcal{A}u \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u(0,x) = u_0(x), \tag{2}$$

где $\mathcal{A}$ — автономный строго эллиптический оператор с C^∞-коэффициентами без постоянного члена (т. е. оператор, удовлетворяющий свойству $\mathcal{A}1 = 0$), u_0 и u — достаточно гладкие вещественнозначные ограниченные функции.

В локальных координатах на M оператор $\mathcal{A}$ представлен в виде

$$\sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \sum_{i=1}^n b^i(\sigma^{kl})\frac{\partial}{\partial q^i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \sigma^{ij}\frac{\partial^2}{\partial q^i \partial q^j}.$$

Здесь

$$b_x(\sigma) = \sum_{i=1}^n b^i(\sigma^{kl})\frac{\partial}{\partial q^i} -$$

так называемый компенсирующий член, зависящий от (σ^{kl}), который гарантирует ковариантное преобразование формулы при заменах координат.

Легко видеть, что матрица $\big(\sigma^{ij}(x)\big)$ есть координатное выражение гладкого симметричного $(2,0)$-тензорного поля на M. Так как $\mathcal{A}$ — строго эллиптический оператор, эта матрица невырожденна, и, беря в каждой точке $x \in M$ обратную матрицу $\big(\sigma_{ij}(x)\big)$, получаем гладкое $(0,2)$-тензорное поле. Обозначим это поле через σ_x. Таким образом, σ_x для каждой точки $x \in M$ есть симметричная билинейная форма на касательном пространстве T_xM. Так как $\mathcal{A}$ — строго эллиптический оператор, эта форма в каждой точке $x \in M$ является положительно определённой, и следовательно, поле σ_x — риманов метрический тензор на M. По теореме Нэша мы можем вложить M с этой метрикой изометрично в некоторое евклидово пространство $\mathbb{R}^k$ для достаточно большого k. Тогда поле ортогональных проекторов $A_x\colon \mathbb{R}^k \to T_xM$ будет гладким и даст нам представление σ_x в виде

$$\sigma_x = A_x A_x^*,$$

где через A_x^* обозначен сопряжённый оператор.

Вышеизложенная конструкция доказывает существование гладкой стохастической динамической системы на M (см. [3]) с инфинитезимальным порождающим $\mathcal{A}$. В локальных координатах она описывается в терминах стохастического дифференциального уравнения с C^∞-гладкими коэффициентами в форме Ито или в форме Стратоновича с членом диффузии A_x. В форме Ито её смещение равно $a+b$. Так как коэффициенты гладкие, мы можем переходить от формы Ито к форме Стратоновича и обратно.

Обозначим через $\xi(s)$, $s\in[0,T]$, стохастический поток стохастической динамической системы. Для любой точки $x\in M$ и времени t орбита $\xi_{t,x}(s)$, $s\in[t,T]$, этого потока является единственным решением вышеупомянутого уравнения с начальными условиями $\xi_{t,x}(t)=x$. Поскольку коэффициенты уравнения гладкие, она будет представлять собой строгое решение и марковский процесс диффузии, заданный на некотором случайном временно́м интервале. Далее мы будем обозначать вероятностное пространство, где определён поток, через $(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$ и предполагать, что оно полное. Мы также будем работать с сепарабельными реализациями всех процессов.

Определение 1. Поток $\xi(s)$ полон на $[0,T]$, если $\xi_{t,x}(s)$ существует для любой пары (t,x) с $t\in[0,T]$, $x\in M$ и для всех $s\in[t,T]$.

Определение 2. Поток $\xi(s)$ полон, если он полон на любом интервале $[0,T]\subset R$.

Если поток полный, то на пространстве ограниченных измеримых функций на M существует операторная полугруппа $S(t,s)$, задаваемая для функции $f(x)$ формулой

$$[S(t,s)f](x)=\mathsf{E}\,f\bigl(\xi_{t,x}(s)\bigr), \tag{3}$$

где E — математическое ожидание. Это полугруппа Феллера, т. е. для любых $t\geqslant 0$, $s\geqslant t$ операторы $S(t,s)$ сжимающие и переводят любую непрерывную положительную ограниченную функцию в функцию с такими же свойствами. Также хорошо известно, что для непрерывной и ограниченной функции $u_0(x)$ непрерывная и ограниченная функция

$$u(s,x)=[S(0,s)u_0](x)=\mathsf{E}\,u_0\bigl(\xi_{0,x}(s)\bigr)$$

является обобщённым решением (1), (2). Если $u(s,x)$ достаточно гладкая, то это будет классическое решение. Аналитическими методами показано, что это решение единственно в классе ограниченных измеримых функций.

Таким образом, полнота стохастического потока (т. е. глобальное по времени существование решений вышеупомянутого стохастического дифференциального уравнения) эквивалентна глобальному по времени существованию решения (1), (2).

Имея в виду понятие собственного отображения, мы дадим следующее определение.

Определение 3. Функция $f\colon N\to R$ на некотором многообразии N называется собственной, если прообраз $f^{-1}(A)$ любого компактного множества $A\subset R$ компактен в N.

К примеру, в $\mathbb{R}^n$ положительная функция f будет собственной тогда и только тогда, когда $f(x) \to +\infty$ при $\|x\| \to +\infty$. На гладком многообразии риманово расстояние для любой полной римановой метрики является собственной функцией. Далее мы не будем выделять риманову метрику на M, и в этом случае строгий математический смысл для $x_n \to \infty$ при $x_n \in M$ будет таков: $f(x_n) \to \infty$ для любой собственной функции f на M, т. е. x_n покидает любой компакт, когда n стремится к ∞.

Пусть $\gamma(s)$ — это (необязательно полный) стохастический поток.

Определение 4 (см. [2]). Поток $\gamma(s)$ и соответствующая полугруппа S обладают C_0-свойством, если для любого компакта $K \subset M$ имеет место соотношение

$$\lim_{x\to+\infty} \mathsf{P}(T_K(\gamma_{t,x}) < T) = 0,$$

где $T_K(\gamma_{t,x})$ — время первого входа $\gamma_{t,x}$ в K.

Хорошо известно, что C_0-свойство эквивалентно факту, что полугруппа S, соответствующая γ, оставляет инвариантным пространство $C_0(M)$ непрерывных функций, стремящихся к нулю на бесконечности (о подробностях см., например, [2, 4, 9]). Некоторые условия, при которых C_0-свойство выполнено, могут быть найдены в [2].

Определение 5. Поток $\gamma(s)$ непрерывен на бесконечности, если для всех $T > 0$ и любого компакта $K \subset M$

$$\lim_{x\to+\infty} \mathsf{P}(\gamma_{t,x}(T) \in K) = 0.$$

Предложение 6. *Любой поток с C_0-свойством непрерывен на бесконечности.*

Предложение 6 следует из очевидного факта, что

$$\mathsf{P}(T_K(\gamma_{t,x}) < T) \geqslant \mathsf{P}(\gamma_{t,x}(T) \in K).$$

Мы отсылаем читателя к [7—9] относительно некоторых деталей о поведении стохастического потока на бесконечности и соотношениях между C_0-свойством и непрерывностью на бесконечности.

2. Основной результат

Основной результат этой работы состоит в том, что если решения уравнения (1), (2) класса C_0, тогда для глобального по времени существования необходимо и достаточно, чтобы для любого $T > 0$ на $[0, T] \times M$ существовала достаточно гладкая собственная функция v^T, такая что $(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{A})v^T$ является равномерно ограниченной. Это утверждение будет выведено из аналогичного факта для стохастических потоков, непрерывных на бесконечности.

Нашей первой задачей будет построить специальную собственную функцию, ассоциированную с полным стохастическим потоком $\xi(s)$.

Рассмотрим такую расширяющуюся последовательность компактных множеств M_i, что $M_i \subset M_{i+1}$ для всех i и $\bigcup\limits_i M_i = M$. Через T_i мы обозначим увеличивающуюся последовательность вещественных чисел, стремящуюся к $+\infty$.

Для $(t,x) \in [0,T_i] \times M_i$ функция распределения $\mu_{t,x,s}$ случайных элементов $\xi_{t,x}(s)$, $s \in [0,T_i]$, на M образует слабо компактное множество мер. Действительно, возьмём произвольную последовательность мер, соответствующую $\xi_{t_k,x_k}(s_k)$. Так как $[0,T_i] \times M_i \times [0,T_i]$ компактно, возможно выбрать подпоследовательность t_{k_q}, x_{k_q}, s_{k_q} последовательности t_k, x_k, s_k, сходящуюся к некоторому элементу t_0, x_0, s_0. Хорошо известно, что функция $\mathsf{E} f\big(\xi_{t,x}(s)\big)$ непрерывна по совокупности переменных t, x, s для любой ограниченной непрерывной функции $f\colon M \to R$. Тогда мы получим, что

$$\mathsf{E}\Big(f\big(\xi_{t_{k_q},x_{k_q}}(s_{k_q})\big)\Big) \to \mathsf{E}\Big(f\big(\xi_{t_0,x_0}(s_0)\big)\Big),$$

т. е. из любой вышеупомянутой последовательности мер можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность.

Возьмём такую монотонно убывающую последовательность положительных чисел $\varepsilon_i \to 0$, что ряды $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \sqrt{\varepsilon_i}$ сходятся. Из теоремы Прохорова следует, что для мер, соответствующих вышеупомянутым $\xi_{t,x}(s)$, $s \in [0,T_i]$, $(t,x) \in [0,T_i] \times M_i$, существует компакт $\Xi_i \subset M$, такой что для всех $\mu_{t,x,s}$ имеет место неравенство $\mu_{t,x,s}(M \setminus \Xi_i) < \varepsilon_i$.

Построим расширяющуюся систему компактов $\Theta_i \supset \bigcup\limits_{k=0}^{i} \Xi_k$ для всех i, являющихся замыканиями открытых областей в M с гладкой границей и таких, что $\Theta_i \subset \Theta_{i+1}$ для всех i и $\bigcup\limits_i \Theta_i = M$. Согласно конструкции для $s \in [0,T_i]$, $(t,x) \in [0,T_i] \times M_i$ имеет место отношение $\mu_{t,x,s}(M \setminus \Theta_i) < \varepsilon_i$. В частности, $\mu_{t,x,s}(\Theta_{i+1} \setminus \Theta_i) < \varepsilon_i$.

Выберем окрестности $U_i \subset \tilde{U}_i$ множества Θ_i, которые полностью лежат в Θ_{i+1}, и рассмотрим гладкую функцию ψ_i, которая равна 0 на U_i, равна 1 на $\Theta_{i+1} \setminus U_i$ и принимает значения между 0 и 1 на $\tilde{U}_i \setminus U_i$. Построим функцию θ на M, положив её значение на $\Theta_{i+1} \setminus \Theta_i$ равным $\psi_i \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_i}} + (1-\psi_i)\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{i-1}}}$. Заметим, что на $\Theta_{i+1} \setminus \Theta_i$ значения θ не больше, чем $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_i}}$.

Непосредственно из конструкции вытекает следующая лемма.

Лемма 7. *Если поток $\xi(s)$ полон, то функция θ, построенная выше, является гладкой, положительной и собственной.*

Теорема 8. *Если поток $\xi(t)$ полон, то для любой пары (t,x) и любого интервала $[0,T]$ имеет место неравенство $\mathsf{E}\,\theta\big(\xi_{t,x}(s)\big) < \infty$ для каждого $s \in [t,T]$.*

Доказательство. Возьмём такое i, что $[0,T] \subset [0,T_i]$, $t \in [0,T_i]$ и $x \in M_i$. Тогда $\mu_{t,x,s}(M \setminus \Theta_i) < \varepsilon_i$ или $\mu_{t,x,s}(\Theta_i) > (1-\varepsilon_i)$. Согласно конструкции значения непрерывной функции θ на компакте Θ_i ограничены константой $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{i-1}}}$. Тогда, также согласно конструкции,

$$\mathsf{E}\,\theta\big(\xi_{t,x}(s)\big) \leqslant \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{i-1}}} + \sum_{k=i}^{\infty} \varepsilon_k \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_k}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{i-1}}} + \sum_{k=i}^{\infty} \sqrt{\varepsilon_k} < C < +\infty \tag{4}$$

для некоторой положительной постоянной C, так как по определению ряды $\sum\limits_{k=i+1}^{\infty} \sqrt{\varepsilon_k}$ сходятся. □

Следствие 9. *Функция* $\mathsf{E}\,\theta\big(\xi_{t,x}(s)\big)$ *интегрируема на* $s \in [t,T]$.

Доказательство. Из конструкции теоремы 8 следует, что для данных t, x оценка (4) справедлива с тем же C для всех $s \in [t,T]$. □

Зададимся любым $T > 0$ и рассмотрим прямое произведение $M^T = [0,T]\times M$. Обозначим через $\pi^T\colon M^T \to M$ естественную проекцию: $\pi^T(t,x) = x$.

Теорема 10. *Функция* $v(t,x) = \mathsf{E}\,\theta\big(\xi_{t,x}(T)\big)$ *на* M^T *является* C^1*-гладкой по* $t \in [0,T]$, C^2*-гладкой по* $x \in M$ *и удовлетворяет уравнению*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{A}\right) v = 0,$$

где $\mathcal{A}$ *— инфинитезимальный порождающий потока.*

Доказательство. Так как M локально компактно и паракомпактно, мы можем выбрать счётное локально-конечное открытое покрытие $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ множества M, такое что все V_i имеют компактные замыкания. Рассмотрим разбиение единицы $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ для этого покрытия. Тогда в каждой точке $x \in M$ имеет место равенство $\theta(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x)\theta(x)$.

Введём функцию $v_i(x) = \varphi_i(x)\theta(x)$ и рассмотрим функции $u_i(t,x) = \mathsf{E}\,v_i\big(\xi_{t,x}(T)\big)$ и $\theta_k(t,x) = \sum\limits_{i=0}^{k} u_i(t,x)$. Заметим, что все функции $v_i(x)$ гладкие и ограниченные. Тогда любая функция $v_i(t,x)$ удовлетворяет условиям теоремы 4 из [1, глава VIII], и следовательно, любая функция $u_i(t,x)$ будет C^1-гладкой по t, C^2-гладкой по x и будет удовлетворять соотношению

$$\frac{\partial}{\partial t} u_i + \mathcal{A} u_i = 0.$$

Следовательно, все функции $\theta_k(t,x)$, являясь конечными суммами функций $u_i(t,x)$, также C^1-гладкие по t, C^2-гладкие по x и удовлетворяют соотношению

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta_k + \mathcal{A}\theta_k = 0.$$

Кроме того, очевидно, что $\theta(t,x)$ есть предел $\theta_k(t,x)$ при $k \to \infty$ и функции $\theta_k(t,x)$ образуют убывающую локально-ограниченную последовательность. Тогда утверждение теоремы следует из [2, лемма 1.8]. □

Теорема 11. *Если полный поток $\xi(s)$ непрерывен на бесконечности, то функция $v(t,x) = \mathsf{E}\,\theta\big(\xi_{t,x}(T)\big)$ на M^T является собственной.*

Доказательство. Пусть поток $\xi(s)$ непрерывен на бесконечности. Чтобы доказать, что функция $v(t,x)$ является собственной, достаточно показать, что $v(t,x) \to \infty$ при $\theta(x) \to \infty$, т. е. что для всех $C > 0$ существует такое $\Xi > 0$, что $\theta(x) > \Xi$ влечёт $v(t,x) > C$ для всех $t \in [0,T]$. Так как функция θ собственная, то прообраз $K = \theta^{-1}([0,2C])$ компактен. Из определения 5 следует, что для всех $t \in [0,T]$ существует Ξ, такое что $\mathsf{P}(\xi_{t,x}(T) \notin K) > \frac{1}{2}$ для $\theta(x) > \Xi$. Тогда $v(t,x) = \mathsf{E}\,\theta\big(\xi_{t,x}(T)\big) > 2C \cdot \frac{1}{2} = C$. Для завершения доказательства заметим, что t принадлежит компактному множеству $[0,T]$ и $v(t,x)$ непрерывна по t. $\square$

Учитывая предложение 6, мы получаем следствие 12.

Следствие 12. *Если полный поток $\xi(s)$ принадлежит классу C_0, то функция $v(t,x) = \mathsf{E}\,\theta\big(\xi_{t,x}(T)\big)$ на M^T является собственной.*

На многообразии M^T рассмотрим поток $\eta(s) = \big(s, \xi(s)\big)$. Очевидно, что для $(t,x) \in M^T$ траектория $\eta_{(t,x)}(s)$ удовлетворяет соотношению $\pi^T\big(\eta_{(t,x)}(s)\big) = \xi_{t,x}(s)$. Ясно, что $\eta(s)$ — поток, порождённый стохастической динамической системой с инфинитезимальным порождающим $\mathcal{A}^T$, определённым по формуле

$$\mathcal{A}^T_{(t,x)} = \mathcal{A}(x) + \frac{\partial}{\partial t}.$$

Теорема 13. *Поток $\xi(s)$ на M, непрерывный на бесконечности, полон на $[0,T]$ тогда и только тогда, когда существует положительная собственная функция $v^T\colon M^T \to R$ на M^T, которая является C^1-гладкой по $t \in [0,T]$, C^2-гладкой по $x \in M$ и удовлетворяет условию $\mathcal{A}^T v^T < C$ для некоторой константы $C > 0$ для всех точек $(t,x) \in M^T$.*

Доказательство. Пусть существует гладкая собственная положительная функция $v^T(t,x)$ на M^T, такая что $\mathcal{A}^T v^T < C$ во всех точках M^T. Тогда из теоремы IX.6A из [3] следует, что поток $\eta(s)$ полон. Таким образом, $\xi(s)$ также полон.

Пусть $\xi(s)$ полон. Рассмотрим введённую выше функцию $\theta(x)$ на M и функцию $v^T(t,x) = \mathsf{E}\,\theta\big(\xi_{t,x}(T)\big)$ на M^T. Так как поток $\xi(s)$ непрерывен на бесконечности, функция $v^T(t,x)$ будет собственной по теореме 11. По теореме 10 она является C^1-гладкой по t, C^2-гладкой по x и удовлетворяет соотношению $\big(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{A}\big)v^T = \mathcal{A}^T v^T = 0$. $\square$

Следствие 14. *Поток $\xi(s)$ на M, непрерывный на бесконечности, полон тогда и только тогда, когда для любого $T > 0$ существует положительная собственная функция $v^T\colon M^T \to R$, которая является C^1-гладкой по $t \in [0,T]$, C^2-гладкой по $x \in M$ и удовлетворяет соотношению $\mathcal{A}^T v^T(t,x) < C$ для некоторой константы $C > 0$ во всех точках $(t,x) \in M^T$.*

Из следствия 12, теоремы 13 и следствия 14 вытекает следующая теорема.

Теорема 15. *Если операторы* (3) *класса* C_0, *то решения* (1), (2) *существуют глобально по времени тогда и только тогда, когда для любого* $T > 0$ *существует положительная собственная функция* $v^T : M^T \to R$, *которая является* C^1*-гладкой по* $t \in [0, T]$, C^2*-гладкой по* $x \in M$ *и удовлетворяет соотношению* $\mathcal{A}^T v^T(t, x) < C$ *для некоторой константы* $C > 0$ *во всех точках* $(t, x) \in M^T$.

Литература

[1] Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию стохастических процессов. — М.: Наука, 1977.

[2] Azencott R. Behavior of diffusion semi-groups at infinity // Bull. Soc. Math. France. — 1974. — Vol. 102. — P. 193—240.

[3] Elworthy K. D. Stochastic Differential Equations on Manifolds. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1982. (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; Vol. 70).

[4] Elworthy K. D. Stochastic flows and the C_0-diffusion property // Stochastics. — 1982. — Vol. 6. — P. 233—238.

[5] Gliklikh Yu. E. A necessary and sufficient condition for completeness of stochastic flows continuous at infinity. — Warwick preprint, No. 8. — August 2004.

[6] Gliklikh Yu. E., Morozova L. A. Conditions for global existence of solutions of ordinary differential, stochastic differential and parabolic equations // Internat. J. Math. Math. Sci. — 2004. — No. 17. — P. 901—912.

[7] Li X.-M. Properties at infinity of diffusion semigroups and stochastic flows via weak uniform covers // Potential Anal. — 1994. — Vol. 3. — P. 339—357.

[8] Schwartz L. Processus de Markov et desintégrations régulières // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). — 1977. — Vol. 27, no. 3. — P. 211—277.

[9] Schwartz L. Le semi-groupe d'une diffusion en liaison avec les trajectoires // Sém. de Probabilités XXIII. — Springer, 1989. — (Lect. Notes Math.; Vol. 1372). — P. 326—342.