Теории расслоений с дополнительными структурами*

А. В. ЕРШОВ
Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

УДК 515.165

Ключевые слова: симплициальные расслоения, классифицирующее расслоение, матричный грассманиан, препятствие к вложению.

Аннотация

В работе рассматриваются теории расслоений, возникающие при добавлении гомотопий, в частности симплициальные n-расслоения. Показывается, что (при некотором дополнительном условии) классифицирующее пространство 1-расслоений есть пространство двойных смежных классов некоторой конечномерной группы Ли.

Abstract

A. V. Ershov, Theories of bundles with additional structures, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 8, pp. 77—98.

In the present paper, we study bundles equipped with extra homotopy conditions, in particular, so-called n-bundles. It is shown that (under some condition) the classifying space of 1-bundles is the double coset space of some finite-dimensional Lie group.

Введение

В данной работе мы определяем симплициальное n-расслоение над пространством X как объект, «живущий» на произведении $X\times\Delta_n$ пространства на n-мерный симплекс, вершины которого отвечают расслоениям ξ_i над X, $\dim(\xi_i)=d_i$, $i=0,\ldots,n$, рёбра — $\frac{n(n+1)}{2}$ гомотопиям между $\xi_i\otimes[d_j]$ и $[d_i]\otimes\xi_j$, $i\neq j$ (где $[m]$ обозначает тривиальное $\mathbb{C}^m$-расслоение), двумерные грани — гомотопиям между гомотопиями и т. д., вплоть до старшей клетки, отвечающей гомотопии «n-го порядка». Соответствующий функтор в гомотопической категории оказывается представимым: легко строится его классифицирующее пространство.

Во втором разделе мы более подробно изучаем случай $n=1$ в предположении, что числа $k=d_0$ и $l=d_1$ взаимно просты и структурные группы расслоений редуцируются к соответствующим специальным группам. Мы доказываем,

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 07-01-00046-а) и РФФИ-ДФГ (грант 07-01-91555).

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 8, с. 77—98.

что классифицирующее пространство BSU_k^l соответствующих 1-расслоений имеет гомотопический тип конечного CW-комплекса. Точнее, мы показываем, что гомотопическое расслоённое произведение

$$\mathrm{BSU}(k) \overset{h}{\underset{\mathrm{BSU}(kl)}{\times}} \mathrm{BSU}(l),$$

определённое при помощи отображений

$$\mathrm{BSU}(k) \to \mathrm{BSU}(kl) \quad \text{и} \quad \mathrm{BSU}(l) \to \mathrm{BSU}(kl),$$

индуцированных гомоморфизмами

$$\mathrm{SU}(k) \to \mathrm{SU}(kl), \quad A \mapsto A \otimes E_l, \quad \text{и} \quad \mathrm{SU}(l) \to \mathrm{SU}(kl), \quad B \mapsto E_k \otimes B$$

(E_m обозначает единичную $(m \times m)$-матрицу, а символ $\otimes$ здесь обозначает кронекерово произведение матриц), при $(k, l) = 1$ гомотопически эквивалентно пространству двойных смежных классов

$$\mathrm{Gr}_k^l := \big((\mathrm{SU}(k) \otimes E_l) \backslash \mathrm{SU}(kl)\big) / \big(E_k \otimes \mathrm{SU}(l)\big).$$

С другой стороны, данное расслоённое произведение есть BSU_k^l.

В следующем разделе нами показано, что так называемые «матричные грассманианы» являются классифицирующими пространствами некоторых топологических групп, точнее групп путей в группах Ли, удовлетворяющих некоторым «граничным» условиям. Это позволяет такую дополнительную структуру, как вложение данного расслоения в тривиальное, свести к задаче редукции структурной группы расслоения. Вкратце обсуждается также интерпретация полученных результатов в терминах расслоений C^*-алгебр.

Наконец, в разделе 5 мы кратко рассматриваем объекты, получающиеся склеиванием расслоений разных размерностей над элементами, к примеру, открытого покрытия некоторого многообразия. Склейка над пересечением n открытых множеств определяется как структура симплициального n-расслоения над данным пересечением с естественными условиями согласования соответствующих n-расслоений (с различными n) над всевозможными пересечениями элементов покрытия. Возможно, эти объекты связаны с теорией некоммутативных снопов расслоений. В отличие от коммутативного случая, здесь требуются так называемые «бирасслоения», которые одновременно являются и левыми, и правыми главными расслоениями [1]. В нашей работе такие объекты появляются, например, как классифицирующие пространства 1-расслоений Gr_k^l, определённые ниже. Отметим также наличие частично определённой операции $\mathrm{Gr}_l^m \times \mathrm{Gr}_k^l \to \mathrm{Gr}_k^m$, связанной с композицией путей, что указывает также на связь с группоидами (или их обобщениями). Во всяком случае идея симплициальных n-расслоений хорошо укладывается в контекст так называемых «данных спуска» и снопов линейных расслоений [6].

Автор глубоко благодарен своему научному руководителю Е. В. Троицкому за внимание к работе и всестороннюю поддержку, а также Л. А. Алании, В. М. Мануйлову и А. С. Мищенко за полезные обсуждения. Данная работа была завершена во время пребывания в Гёттингене при поддержке гранта РФФИ-ДФГ, и автор хочет выразить свою признательность Томасу Шику за гостеприимство и полезные обсуждения.

1. Симплициальные n-расслоения

Пусть k, l, m — натуральные числа, бо́льшие 1. Индекс k в обозначении векторного расслоения ξ_k указывает на его размерность. Мы рассматриваем только *комплексные* векторные расслоения.

Введём некоторые обозначения. Через

$$\theta_k{}^l\colon \mathrm{BU}(k) \to \mathrm{BU}(kl), \quad \theta^k{}_l\colon \mathrm{BU}(l) \to \mathrm{BU}(kl) \tag{1}$$

обозначим отображения классифицирующих пространств, индуцированные гомоморфизмами групп $\mathrm{U}(k) \to \mathrm{U}(kl)$, $A \mapsto A \otimes E_l$, $A \in \mathrm{U}(k)$, и $\mathrm{U}(l) \to \mathrm{U}(kl)$, $B \mapsto E_k \otimes B$, $B \in \mathrm{U}(l)$, соответственно, где E_n — единичная $(n \times n)$-матрица, а символ $\otimes$ обозначает здесь кронекерово произведение матриц.

Нам также понадобятся более сложно определяемые отображения, например

$$\theta_k{}^l{}_m\colon \mathrm{BU}(km) \to \mathrm{BU}(klm),$$

которое задаётся гомоморфизмом групп $\mathrm{U}(km) \to \mathrm{U}(klm)$, соответствующим гомоморфизму алгебр

$$\mathrm{M}_{km}(\mathbb{C}) = \mathrm{M}_k(\mathbb{C}) \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathrm{M}_m(\mathbb{C}) \to \mathrm{M}_{klm}(\mathbb{C}), \tag{2}$$

$A \otimes B \mapsto A \otimes E_l \otimes B$ для разложимых тензоров и далее по линейности, где $A \in \mathrm{M}_k(\mathbb{C})$, $B \in \mathrm{M}_m(\mathbb{C})$. Образ этого гомоморфизма алгебр в точности централизатор подалгебры

$$\mathbb{C}E_k \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathrm{M}_l(\mathbb{C}) \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathbb{C}E_m \subset \mathrm{M}_{klm}(\mathbb{C}).$$

Определение 1. *Гомотопией* $h\colon \zeta_0 \simeq \zeta_1$ между расслоениями ζ_0, ζ_1 над X с одним и тем же слоем мы будем называть расслоение Z над $X \times I$ $(I = [0,1])$ с тем же слоем, такое что $Z|_{X \times \{i\}} = \zeta_i$, $i = 0, 1$.

Определение 2. (*Симплициальным*) 0-*расслоением* над пространством X назовём «обычное» векторное расслоение ξ_k. 1-*расслоением* над X назовём тройку $\{\xi_k, \xi_l, t_{k,l}\}$, состоящую из пары векторных расслоений ξ_k, ξ_l и гомотопии $t_{k,l}\colon \xi_k \otimes [l] \simeq [k] \otimes \xi_l$, т. е. тройку $\{\psi_k, \psi_l, h_{k,l}\}$, состоящую из классифицирующих для ξ_k, ξ_l отображений $\psi_k\colon X \to \mathrm{BU}(k)$, $\psi_l\colon X \to \mathrm{BU}(l)$ и гомотопии $h_{k,l}\colon X \times \Delta_1 \to \mathrm{BU}(kl)$, такой что

$$h_{k,l}|_{X \times \{0\}} = \theta_k{}^l \circ \psi_k, \quad h_{k,l}|_{X \times \{1\}} = \theta^k{}_l \circ \psi_l,$$

где через Δ_1 обозначен 1-симплекс $k \longrightarrow l$ с вершинами 0, 1, отвечающими k, l соответственно.

Мы объявляем 1-расслоения *эквивалентными*, если входящие в их определение расслоения попарно изоморфны, а гомотопии гомотопны.

Прежде чем перейти к определению 2-расслоений, отметим, что в качестве классифицирующего пространства BU_k^l (это обозначение связано с тем, что данное пространство — классифицирующее пространство соответствующей группы путей $\mathrm{U}_k^l := \Omega_{\mathrm{U}(k)}^{\mathrm{U}(l)}\big(\mathrm{U}(kl)\big)$) 2-расслоений вида $\{\xi_k, \xi_l, t_{k,l}\}$ можно взять пространство $\Omega_{\mathrm{BU}(k)}^{\mathrm{BU}(l)}\big(\mathrm{BU}(kl)\big)$ путей в $\mathrm{BU}(kl)$ с началом в подпространстве $\mathrm{BU}(k) \subset \mathrm{BU}(kl)$ (вложенном с помощью $\theta_k{}^l$) и концом в $\mathrm{BU}(l) \subset \mathrm{BU}(kl)$ (вложенном с помощью $\theta^k{}_l$). Ниже (см. предложение 8) мы покажем, что аналогичное пространство BSU_k^l при $(k,l)=1$ есть

$$\mathrm{Gr}_k^l = (\mathrm{SU}(k) \otimes E_l) \backslash \mathrm{SU}(kl) / \big(E_k \otimes \mathrm{SU}(l)\big).$$

Определение 3. 2-*расслоением* над X назовём семёрку, состоящую из трёх расслоений ξ_k, ξ_l, ξ_m над X, трёх гомотопий

$$t_{k,l}\colon \xi_k \otimes [l] \simeq [k] \otimes \xi_l, \quad t_{l,m}\colon \xi_l \otimes [m] \simeq [l] \otimes \xi_m, \quad t_{k,m}\colon \xi_k \otimes [m] \simeq [k] \otimes \xi_m$$

и ещё одной гомотопии между композицией

$$\xi_k \otimes [l] \otimes [m] \xrightarrow{t_{k,l} \otimes \mathrm{id}_{[m]}} [k] \otimes \xi_l \otimes [m] \xrightarrow{\mathrm{id}_{[k]} \otimes t_{l,m}} [k] \otimes [l] \otimes \xi_m$$

и композицией

$$\xi_k \otimes [l] \otimes [m] \xrightarrow{\mathrm{id}_{\xi_k} \otimes \tau_{l,m}} \xi_k \otimes [m] \otimes [l] \xrightarrow{t_{k,m} \otimes \mathrm{id}_{[l]}} [k] \otimes \xi_m \otimes [l] \xrightarrow{\mathrm{id}_{[k]} \otimes \tau'_{m,l}} [k] \otimes [l] \otimes \xi_m,$$

где $\tau_{l,m}$, $\tau'_{m,l}$ — канонические изоморфизмы, индуцированные перестановками соответствующих тензорных множителей.

Для тройки чисел k, l, m через Δ_2 обозначим 2-симплекс

$$\begin{tikzcd} & l \arrow[dr] & \\ k \arrow[ur] \arrow[rr] & & m. \end{tikzcd} \tag{3}$$

С гомотопической точки зрения 2-расслоение — это семёрка, состоящая из отображений

$$\psi_k\colon X \to \mathrm{BU}(k), \quad \psi_l\colon X \to \mathrm{BU}(l), \quad \psi_m\colon X \to \mathrm{BU}(m)$$

(классифицирующих для ξ_k, ξ_l, ξ_m), отображений

$$h_{k,l}\colon X \times \Delta_1^{(0)} \to \mathrm{BU}(kl), \quad h_{l,m}\colon X \times \Delta_1^{(1)} \to \mathrm{BU}(lm),$$
$$h_{k,m}\colon X \times \Delta_1^{(2)} \to \mathrm{BU}(km)$$

(где $\Delta_1^{(0)}$, $\Delta_1^{(1)}$, $\Delta_1^{(2)}$ — 1-грани симплекса Δ_2 с вершинами (k,l), (l,m), (k,m) соответственно), таких что

$$
\begin{aligned}
h_{k,l}|_{X\times\{k\}} &= \theta_k{}^l \circ \psi_k, & h_{k,l}|_{X\times\{l\}} &= \theta^k{}_l \circ \psi_l,\\
h_{l,m}|_{X\times\{l\}} &= \theta_l{}^m \circ \psi_l, & h_{l,m}|_{X\times\{m\}} &= \theta^l{}_m \circ \psi_m,\\
h_{k,m}|_{X\times\{k\}} &= \theta_k{}^m \circ \psi_k, & h_{k,m}|_{X\times\{m\}} &= \theta^k{}_m \circ \psi_m,
\end{aligned}
$$

и отображения

$$h_{k,l,m}\colon X \times \Delta_2 \to \mathrm{BU}(klm),$$

такого что

$$h_{k,l,m}\big|_{X\times\Delta_1^{(0)}} = \theta_{kl}{}^m \circ h_{k,l}, \quad h_{k,l,m}\big|_{X\times\Delta_1^{(1)}} = \theta^k{}_{lm} \circ h_{l,m},$$
$$h_{k,l,m}\big|_{X\times\Delta_1^{(2)}} = \theta_k{}^l{}_m \circ h_{k,m}.$$

Для построения классифицирующего пространства $\mathrm{BU}_k{}^l{}_m$ 2-расслоений, отвечающих тройке чисел k, l, m, рассмотрим коммутативную диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{BU}(l) \arrow[dl, "\theta^k{}_l"'] \arrow[dr, "\theta_l{}^m"] & & \\
 & \mathrm{BU}(kl) \arrow[r, "\theta_{kl}{}^m"] & \mathrm{BU}(klm) & \mathrm{BSU}(lm) \arrow[l, "\theta^k{}_{lm}"'] & \\
\mathrm{BU}(k) \arrow[ur, "\theta_k{}^l"] \arrow[rr, "\theta_k{}^m"'] & & \mathrm{BU}(km) \arrow[u, "\theta_k{}^l{}_m"'] & & \mathrm{BU}(m). \arrow[ul, "\theta^l{}_m"'] \arrow[ll, "\theta^k{}_m"]
\end{tikzcd}
\tag{4}
$$

Пространство $\mathrm{BU}_k{}^l{}_m$ описывается как пространство (с компактно-открытой топологией) отображений

$$\Phi\colon \Delta_2 \to \mathrm{BU}(klm)$$

симплекса (3) в $\mathrm{BU}(klm)$, таких что для вершин $\Phi(\{k\}) \in \mathrm{BU}(k)$, $\Phi(\{l\}) \in \mathrm{BU}(l)$, $\Phi(\{m\}) \in \mathrm{BU}(m)$, для рёбер $\Phi(\Delta_1^{(0)}) \subset \mathrm{BU}(kl)$, $\Phi(\Delta_1^{(1)}) \subset \mathrm{BU}(lm)$, $\Phi(\Delta_1^{(2)}) \subset \mathrm{BU}(km)$, где $\mathrm{BU}(r)$, $\mathrm{BU}(rs)$ отождествляются (с использованием отображений θ) с соответствующими подпространствами в $\mathrm{BU}(klm)$.

Теперь определение симплициального n-расслоения для произвольного n должно быть очевидно. По-видимому, n-расслоения над X определяют симплициальные объекты некоторой категории. Например, операторы граней отвечают стрелкам в коммутативной диаграмме (ср. (4))

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{BU}(l) & & \\
 & \mathrm{BU}_k^l \arrow[ur] \arrow[dl] & \mathrm{BU}_k{}^l{}_m \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{BU}_l^m \arrow[ul] \arrow[dr] & \\
\mathrm{BU}(k) & & \mathrm{BU}_k^m \arrow[ll] \arrow[rr] & & \mathrm{BU}(m),
\end{tikzcd}
$$

в которой каждый (под)симплекс является расслоённым произведением в гомотопической категории. Мы, однако, не будем углубляться в общую теорию симплициальных расслоений, а сосредоточимся в следующем разделе на частных случаях 1- и 2-расслоений.

2. Классифицирующие пространства 1- и 2-расслоений

Лемма 4. *Пусть G — группа, $K, L \subset G$ — её подгруппы. Тогда левое действие группы K на однородном пространстве G/L свободно тогда и только тогда, когда $K \cap \Big(\bigcup\limits_{g\in G} gLg^{-1}\Big) = \{e\}$.*

Доказательство. Для стабилизатора St смежного класса gL имеем $\mathrm{St}(gL) = gLg^{-1}$. □

Лемма 5. *Пусть $G = \mathrm{U}(kl),\ K = \mathrm{U}(k) \otimes E_l,\ L = E_k \otimes \mathrm{U}(l) \subset \mathrm{U}(kl)$. Тогда*

$$K \cap \Big(\bigcup_{g\in G} gLg^{-1}\Big) = \{\lambda E_{kl}\},\ \lambda \in \mathbb{C}^* \iff (k,l) = 1.$$

Доказательство. Пусть $(k,l) = 1$. Тогда для всякого $g \in G$ $K \cap gLg^{-1} = \{\lambda E_{kl}\}$. Действительно, каждая унитарная матрица диагонализируется в некотором базисе, причём каждое собственное значение произвольной матрицы из подгруппы K имеет кратность, делящуюся на l, а каждое собственное значение произвольной матрицы из подгруппы gLg^{-1} имеет кратность, делящуюся на k. Значит, элементы, лежащие в $K \cap gLg^{-1}$, являются скалярными матрицами. Обратное теперь очевидно. □

Следствие 6. *При $(k,l) = 1$ левое действие группы $\mathrm{SU}(k) \otimes E_l$ на пространстве левых смежных классов $\mathrm{SU}(kl)/\big(E_k \otimes \mathrm{SU}(l)\big)$ является свободным и аналогично правое действие группы $E_k \otimes \mathrm{SU}(l)$ на пространстве правых смежных классов $(\mathrm{SU}(k) \otimes E_l)\backslash \mathrm{SU}(kl)$ является свободным.*

Ниже мы будем считать числа k, l взаимно простыми, если не оговорено противное. Исключительность случая взаимно простых чисел ранее уже проявлялась в близких задачах (см., например, [3, 4]).

Положим

$$\mathrm{Gr}_k^l := \big((\mathrm{SU}(k) \otimes E_l)\backslash \mathrm{SU}(kl)\big)/\big(E_k \otimes \mathrm{SU}(l)\big)$$

(расстановка скобок, отвечающих порядку факторизации по левому и правому действию, очевидно, неважна). Через $\overset{h}{\times}$ будем обозначать расслоённое произведение в гомотопической категории.

По аналогии с (1) определим отображения

$$\vartheta_k{}^l\colon\ \mathrm{BSU}(k) \to \mathrm{BSU}(kl), \quad \vartheta^k{}_l\colon\ \mathrm{BSU}(l) \to \mathrm{BSU}(kl).$$

Теорема 7. *Имеет место гомотопическая эквивалентность*

$$\mathrm{Gr}_k^l \simeq \mathrm{BSU}(k) \underset{\mathrm{BSU}(kl)}{\overset{h}{\times}} \mathrm{BSU}(l),$$

т. е. для некоторых отображений φ_k, φ_l (определённых однозначно с точностью до гомотопии) квадрат

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Gr}_k^l \arrow[dl, "\varphi_k"'] \arrow[dr, "\varphi_l"] & \\ \mathrm{BSU}(k) \arrow[dr, "\vartheta_k{}^l"'] & & \mathrm{BSU}(l) \arrow[dl, "\vartheta^k{}_l"] \\ & \mathrm{BSU}(kl) & \end{tikzcd} \tag{5}$$

является декартовым (в гомотопической категории).

Доказательство. Пусть $\mathrm{ESU}(n)$ — тотальное пространство универсального главного $\mathrm{SU}(n)$-расслоения. Рассмотрим декартов квадрат

$$\begin{tikzcd} \mathrm{ESU}(k) \underset{\mathrm{SU}(k)}{\times} \mathrm{SU}(kl) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{ESU}(kl) \arrow[d] \\ \mathrm{BSU}(k) \arrow[r, "\vartheta_k{}^l"] & \mathrm{BSU}(kl), \end{tikzcd} \tag{6}$$

в котором $\mathrm{ESU}(k) \underset{\mathrm{SU}(k)}{\times} \mathrm{SU}(kl)$ — $\mathrm{SU}(kl)$-расслоение, ассоциированное с универсальным $\mathrm{SU}(k)$-расслоением относительно действия $\mathrm{SU}(k) = \mathrm{SU}(k) \otimes E_l \subset \subset \mathrm{SU}(kl)$ на $\mathrm{SU}(kl)$ левыми сдвигами. Пространство $\mathrm{ESU}(k) \underset{\mathrm{SU}(k)}{\times} \mathrm{SU}(kl)$ гомотопически эквивалентно однородному пространству правых смежных классов $(\mathrm{SU}(k) \otimes E_l) \backslash \mathrm{SU}(kl)$. Действительно, отображение

$$\mathrm{ESU}(k) \underset{\mathrm{SU}(k)}{\times} \mathrm{SU}(kl) \to (\mathrm{SU}(k) \otimes E_l) \backslash \mathrm{SU}(kl), \quad [e, g] \mapsto [g],$$

где

$$[e, g] \in \mathrm{ESU}(k) \underset{\mathrm{SU}(k)}{\times} \mathrm{SU}(kl)$$

обозначает класс эквивалентности

$$\{(e, g) \mid (e, g) \sim (e\alpha^{-1}, \alpha g),\ e \in \mathrm{ESU}(k),\ g \in \mathrm{SU}(kl), \\ \alpha \in \mathrm{SU}(k) = \mathrm{SU}(k) \otimes E_l \subset \mathrm{SU}(kl)\},$$

а $[g]$ — правый смежный класс $(\mathrm{SU}(k) \otimes E_l) \cdot g$, корректно определено и его слой $\mathrm{ESU}(k)$ стягиваем. Используя следствие 6, получаем, что факторизация верхней строки диаграммы (6) по правому свободному действию группы $E_k \otimes \mathrm{SU}(l)$ даёт диаграмму, эквивалентную (5), причём являющуюся, очевидно, декартовым квадратом. □

Дадим теперь теоретико-гомотопическое описание полученного результата. Во-первых, рассмотрим диаграмму (6). Универсальное главное расслоение с гомотопической точки зрения — то же, что и расслоение путей. Поэтому пространство $\mathrm{ESU}(kl)$ есть пространство путей в $\mathrm{BSU}(kl)$ с концом в отмеченной точке $*\in \mathrm{BSU}(kl)$, а проекция ставит в соответствие пути его начало. Отображение

$$\mathrm{BSU}(k) \xrightarrow{{\vartheta_k}^l} \mathrm{BSU}(kl) \tag{7}$$

можно рассматривать как вложение. Таким образом, тотальное пространство $\mathrm{ESU}(k) \underset{\mathrm{SU}(k)}{\times} \mathrm{SU}(kl)$ индуцированного расслоения можно рассматривать как множество пар, состоящих из точки в $\mathrm{BSU}(k)\subset \mathrm{BSU}(kl)$ и пути в $\mathrm{BSU}(kl)$, соединяющего данную точку с отмеченной $*\in \mathrm{BSU}(kl)$. Поэтому отображение

$$X\to \mathrm{ESU}(k) \underset{\mathrm{SU}(k)}{\times} \mathrm{SU}(kl) \,—$$

это пара, состоящая из отображения $X\to \mathrm{BSU}(k)$ и гомотопии его композиции с отображением (7) к отображению в отмеченную точку. На языке расслоений это $\mathrm{SU}(k)$-расслоение над X вместе с тривиализацией $\mathrm{SU}(kl)$-расслоения, полученного из него расширением структурной группы с помощью гомоморфизма $\mathrm{SU}(k)\to \mathrm{SU}(kl)$, $A\mapsto A\otimes E_l$.

Предложение 8. *Отображение $X\to \mathrm{Gr}_k^l$ (см. диаграмма (5)) — это тройка $\{\xi_k,\xi_l,t_{k,l}\}$, состоящая из векторных $\mathbb{C}^k$- и $\mathbb{C}^l$-расслоений ξ_k, ξ_l со структурными группами $\mathrm{SU}(k)$ и $\mathrm{SU}(l)$ соответственно и гомотопии $t_{k,l}\colon \xi_k\otimes[l]\simeq[k]\otimes\xi_l$ (ср. определение 1-расслоения в определении 2).*

Доказательство. Применим рассуждение, аналогичное только что приведённому, к диаграмме, получающейся факторизацией верхней строки диаграммы (6) по правому свободному действию группы $E_k\otimes \mathrm{SU}(l)$. Заменим её на эквивалентную диаграмму расслоений путей. Для подпространств $K,L\subset M$ через $\Omega_K^L(M)$ будем обозначать пространство путей в M, начинающихся в K и заканчивающихся в L. Нетрудно убедиться, что стоящее справа в нашей диаграмме расслоение

$$\mathrm{ESU}(kl)/\bigl(E_k\otimes \mathrm{SU}(l)\bigr)\to \mathrm{BSU}(kl)$$

эквивалентно расслоению

$$\Omega^{\mathrm{BSU}(l)}_{\mathrm{BSU}(kl)}\bigl(\mathrm{BSU}(kl)\bigr)\to \mathrm{BSU}(kl), \tag{8}$$

ставящему в соответствие пути его начало, со слоем $\Omega_*^{\mathrm{BSU}(l)}\bigl(\mathrm{BSU}(kl)\bigr)$, гомотопически эквивалентным однородному пространству $\mathrm{SU}(kl)/\bigl(E_k\otimes \mathrm{SU}(l)\bigr)$. Другое очевидное расслоение

$$\Omega^{\mathrm{BSU}(l)}_{\mathrm{BSU}(kl)}\bigl(\mathrm{BSU}(kl)\bigr)\to \mathrm{BSU}(l),$$

ставящее в соответствие пути его конец, является гомотопической эквивалентностью, так как его слой $\Omega^{*}_{\mathrm{BSU}(kl)}\big(\mathrm{BSU}(kl)\big)$ стягиваем. Поэтому вложение

$$\Omega^{\mathrm{BSU}(l)}_{\mathrm{BSU}(k)}\big(\mathrm{BSU}(kl)\big) \to \Omega^{\mathrm{BSU}(l)}_{\mathrm{BSU}(kl)}\big(\mathrm{BSU}(kl)\big)$$

можно заменить гомотопически эквивалентной проекцией

$$\Omega^{\mathrm{BSU}(l)}_{\mathrm{BSU}(k)}\big(\mathrm{BSU}(kl)\big) \to \mathrm{BSU}(l),$$

ставящей в соответствие пути его конец.

Мы получаем следующую интерпретацию расслоения

$$\Omega^{\mathrm{BSU}(l)}_{\mathrm{BSU}(k)}\big(\mathrm{BSU}(kl)\big) \to \mathrm{BSU}(k),$$

индуцированного из (8) отображением (7), и соответствующего декартова квадрата

$$\begin{tikzcd}
\Omega^{\mathrm{BSU}(l)}_{\mathrm{BSU}(k)}\big(\mathrm{BSU}(kl)\big) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{BSU}(l) \arrow[d, "\vartheta^{k}{}_{l}"] \\
\mathrm{BSU}(k) \arrow[r, "\vartheta_{k}{}^{l}"] & \mathrm{BSU}(kl),
\end{tikzcd}$$

эквивалентного (5). Отображение

$$X \to \Omega^{\mathrm{BSU}(l)}_{\mathrm{BSU}(k)}\big(\mathrm{BSU}(kl)\big) -$$

это тройка, состоящая из отображений

$$X \xrightarrow{\psi_k} \mathrm{BSU}(k), \quad X \xrightarrow{\psi_l} \mathrm{BSU}(l)$$

и гомотопии, соединяющей $\vartheta_{k}{}^{l} \circ \psi_k$ и $\vartheta^{k}{}_{l} \circ \psi_l$, а это как раз то, что утверждается в формулировке предложения. ☐

Заметим, что имеется очевидное отображение $\mathrm{Gr}^{l}_{k} \to \mathrm{Gr}^{k}_{l}$, соответствующее перестановке множителей расслоённого произведения (см. диаграмма (5)), или, эквивалентно, обращению направления путей.

Опишем теперь явную конструкцию классифицирующего пространства для 2-расслоений, в случае когда k, l и m попарно взаимно просты. После диаграммы (4) утверждалось, что пространство $\mathrm{BSU}_{k}{}^{l}{}_{m}$ описывается как пространство отображений

$$\Phi\colon \Delta_2 \to \mathrm{BSU}(klm)$$

2-симплекса (3) в $\mathrm{BSU}(klm)$, таких что для вершин мы имеем условия $\Phi(\{k\}) \in \mathrm{BSU}(k)$, $\Phi(\{l\}) \in \mathrm{BU}(l)$, $\Phi(\{m\}) \in \mathrm{BSU}(m)$, а для рёбер — условия $\Phi\big(\Delta_1^{(0)}\big) \subset \mathrm{BSU}(kl)$, $\Phi\big(\Delta_1^{(1)}\big) \subset \mathrm{BSU}(lm)$, $\Phi\big(\Delta_1^{(2)}\big) \subset \mathrm{BSU}(km)$.

Ясно, что $\mathrm{BSU}_{k}{}^{l}{}_{m}$ — классифицирующее пространство топологической группы $\mathrm{SU}_{k}{}^{l}{}_{m}$, состоящей из отображений 2-симплекса (3) в $\mathrm{SU}(klm)$ с аналогичными «граничными» условиями. Кроме того, положим

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{TSU}_{k\ m}^{\ l}:= \\
&\quad := \bigl\{\Psi\colon \partial\Delta_2 \to \operatorname{SU}(klm) \mid \Psi(\{k\}) \in \operatorname{SU}(k), \dots,\ \Psi\bigl(\Delta_1^{(0)}\bigr) \subset \operatorname{SU}(kl), \dots\bigr\},
\end{aligned} \tag{9}
$$

где $\partial\Delta_2$ обозначает границу 2-симплекса (3). Мы получаем точную последовательность групп

$$
\Omega^2 \operatorname{SU}(klm) \to \operatorname{SU}_{k\ m}^{\ l} \to \operatorname{TSU}_{k\ m}^{\ l}, \tag{10}
$$

в которой Ω^2 обозначает двукратное пространство петель (в качестве отмеченной точки в $\operatorname{SU}(klm)$ рассматривается единичный элемент), а последнее отображение индуцировано постановкой в соответствие отображению 2-симплекса Δ_2 его ограничения на границу $\partial\Delta_2$. Точной последовательности групп отвечает точная последовательность классифицирующих пространств

$$
\Omega \operatorname{SU}(klm) \to \operatorname{BSU}_{k\ m}^{\ l} \to \operatorname{BTSU}_{k\ m}^{\ l}.
$$

Для начала опишем $\operatorname{BTSU}_{k\ m}^{\ l}$. Рассмотрим следующее пространство, «склеенное» из «блоков» вида $\operatorname{ESU}(k) \underset{\operatorname{SU}(k)\otimes E_l}{\times} \operatorname{SU}(kl) \underset{E_k\otimes \operatorname{SU}(l)}{\times} \operatorname{ESU}(l)$:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & \operatorname{SU}(kl) & & \\
 & \underset{\operatorname{SU}(k)\otimes E_l}{\times} & & \underset{E_k\otimes\operatorname{SU}(l)}{\times} & \\
\operatorname{ESU}(k) & & & & \operatorname{ESU}(l) \\
\times_{\operatorname{SU}(k)\otimes E_m} & & & & {}_{\operatorname{SU}(l)\otimes E_m}\times \\
\operatorname{SU}(km) & & & & \operatorname{SU}(lm) \\
 & \underset{E_k\otimes\operatorname{SU}(m)}{\times} & & \underset{E_l\otimes\operatorname{SU}(m)}{\times} & \\
 & & \operatorname{ESU}(m) & &
\end{array}
\quad . \tag{11}
$$

Предложение 9. *Пространство* $\operatorname{BTSU}_{k\ m}^{\ l}$ *гомотопически эквивалентно* (11).

Доказательство. Заметим, что пространство (11) имеет очевидную структуру расслоения над $\operatorname{BSU}(k)\times\operatorname{BSU}(l)\times\operatorname{BSU}(m)$ со слоем $\operatorname{SU}(kl)\times\operatorname{SU}(lm)\times\operatorname{SU}(km)$. Она отвечает постановке в соответствие отображениям $\Phi\colon \partial\Delta_2 \to \operatorname{BSU}(klm)$, удовлетворяющим условиям, аналогичным (9), набора их значений в вершинах $\{\Phi(\{k\}),\, \Phi(\{l\}),\, \Phi(\{m\})\} \in \operatorname{BSU}(k) \times \operatorname{BSU}(l) \times \operatorname{BSU}(m)$. Слой тогда отождествляется с пространством петель в $\operatorname{BSU}(kl) \times \operatorname{BSU}(lm) \times \operatorname{BSU}(km)$, т. е. с $\operatorname{SU}(kl) \times \operatorname{SU}(lm) \times \operatorname{SU}(km)$. $\square$

Замечание 10. Заметим ещё, что пространство (11) имеет также очевидную структуру расслоения над $\operatorname{Gr}_k^l \times \operatorname{Gr}_l^m \times \operatorname{Gr}_k^m$ со слоем $\operatorname{SU}(k) \times \operatorname{SU}(l) \times \operatorname{SU}(m)$. Она отвечает постановке в соответствие отображениям $\Phi\colon \partial\Delta_2 \to \operatorname{BSU}(klm)$, удовлетворяющим условиям, аналогичным (9), набора их значений на рёбрах

$$
\bigl\{\Phi\bigl(\Delta_1^{(0)}\bigr),\, \Phi\bigl(\Delta_1^{(1)}\bigr),\, \Phi\bigl(\Delta_1^{(2)}\bigr)\bigr\} \subset \operatorname{Gr}_k^l \times \operatorname{Gr}_l^m \times \operatorname{Gr}_k^m.
$$

Слоем этого расслоения является $\operatorname{SU}(k) \times \operatorname{SU}(l) \times \operatorname{SU}(m)$.

Теперь заметим, что при условии попарной взаимной простоты k, l, m согласно следствию 6 пространство (11) можно заменить конечномерным фактор-пространством

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathrm{SU}(mk) & & \\ & \underset{\mathrm{SU}(k)}{\times} & & \underset{\mathrm{SU}(m)}{\times} & \\ \mathrm{SU}(kl) & & \underset{\mathrm{SU}(l)}{\times} & & \mathrm{SU}(lm) \end{array} \tag{12}$$

т. е. это набор классов эквивалентности

$$\begin{gathered} (X,\, Y,\, Z) \sim (\alpha X \beta^{-1},\, \beta Y \gamma^{-1},\, \gamma Z \alpha^{-1}), \\ X \in \mathrm{SU}(kl), \quad Y \in \mathrm{SU}(lm), \quad Z \in \mathrm{SU}(km), \\ \alpha \in \mathrm{SU}(k), \quad \beta \in \mathrm{SU}(l), \quad \gamma \in \mathrm{SU}(m). \end{gathered} \tag{13}$$

Последнее пространство можно отобразить в $\mathrm{SU}(klm)$ с помощью отображения, индуцированного произведением $(X, Y, Z) \mapsto XYZ$ элементов групп (13) как подгрупп в $\mathrm{SU}(klm)$. Окончательно, $\mathrm{BSU}_k{}^l{}_m$ гомотопически эквивалентно тотальному пространству $\Omega\big(\mathrm{SU}(klm)\big)$-расслоения, индуцированного над последним пространством из расслоения путей над $\mathrm{SU}(klm)$.

Теперь на примере 1-расслоений наметим связь с C^*-алгебрами. Пусть $C[0,1]$ обозначает C^*-алгебру непрерывных комплекснозначных функций на отрезке $[0,1]$. Рассмотрим замкнутую по норме подалгебру A_k^l в $\mathrm{M}_{kl}(C[0,1])$, определённую следующим образом:

$$A_k^l := \Big\{ f \in \mathrm{M}_{kl}(C[0,1]) \;\Big|\; f(0) \in \mathrm{M}_k(\mathbb{C}) \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathbb{C}E_l,\ f(1) \in \mathbb{C}E_k \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathrm{M}_l(\mathbb{C}) \Big\}.$$

Группа SU_k^l действует на A_k^l внутренними автоморфизмами. Мы имеем гомоморфизмы алгебр

$$\pi_k\colon A_k^l \to \mathrm{M}_k(\mathbb{C}), \quad \pi_l\colon A_k^l \to \mathrm{M}_l(\mathbb{C}), \tag{14}$$

определённые как вычисление значений матричнозначных функций соответственно в точках 0 и 1. Пусть $I_0^l := \ker(\pi_k)$ и $I_k^0 := \ker(\pi_l)$ — их ядра. Расслоения, классифицируемые пространством $\mathrm{BSU}_k^l \simeq \mathrm{Gr}_k^l$, естественно рассматривать как расслоения со слоем A_k^l. Тогда, например, отображения $\varphi_k\colon \mathrm{Gr}_k^l \to \mathrm{BSU}(k)$ и $\varphi_l\colon \mathrm{Gr}_k^l \to \mathrm{BSU}(l)$ (см. квадрат (5)) можно интерпретировать как отображения классифицирующих пространств, соответствующие гомоморфизмам слоёв π_k и π_l, а идеалы $I_0^l \subset A_k^l$ и $I_k^0 \subset A_k^l$ можно интерпретировать как слои расслоений над пространствами $\mathrm{Fr}_{k,l}$ и $\mathrm{Fr}_{l,k}$, являющихся слоями φ_k и φ_l (см. раздел 3).

Замечание 11. На расслоение A_k^l-алгебр $\mathfrak{A}_k^l \xrightarrow{A_k^l} X$, соответствующее расслоениям $A_k \xrightarrow{\mathrm{M}_k(\mathbb{C})} X$ и $B_l \xrightarrow{\mathrm{M}_l(\mathbb{C})} X$, таким что $A_k \otimes \mathrm{M}_l(\mathbb{C}) \cong \mathrm{M}_k(\mathbb{C}) \otimes B_l$ (т. е. соответствующие гомоморфизмы (14) — это $\tilde{\pi}_k\colon \mathfrak{A}_k^l \to A_k$, $\tilde{\pi}_l\colon \mathfrak{A}_k^l \to B_l$), можно смотреть как на гомотопию между алгебрами сечений расслоений A_k и B_l. Для общих n-расслоений также можно определить соответствующие C^*-алгебры.

Замечание 12. Заметим, что наш подход может быть полезным для скрученной K-теории. Более точно, как было указано в [2], скручивания, отвечающие линейным расслоениям, не являются наиболее общими. Мы надеемся, что наш подход может помочь описать скручивания, соответствующие части SFred_1 произведения $\mathrm{Fred}_1 \simeq \mathbb{C}P^\infty \times \mathrm{SFred}_1$ (см. [2]). В частности, A_k^l-расслоения (для $(k,l)=1$) могут рассматриваться как «некоммутативный» аналог линейных расслоений. Можно было бы попытаться расширить эту аналогию сказав, что $\mathrm{M}_n(A_k^l)$-расслоения должны быть аналогами расслоений матричных алгебр (над $\mathbb{C}$), но это неверно, поскольку A_k^l не является центром $\mathrm{M}_n(A_k^l)$. Кроме того, было бы интересно описать связь между C^*-алгебрами A_k^l (или $A_{k,l}$, см. раздел 3) и операторными алгебрами N_k, рассматривавшимися в [5].

3. Матричные грассманианы как пространства типа BG

В данном разделе мы обсудим расслоения, тесно связанные с 1-расслоениями. Если воспользоваться неформальной аналогией, то переход от 1-расслоений к новым расслоениям напоминает переход от (A,B)-бимодуля ${}_A\mathrm{M}_B$ к (левому) $A\otimes B^o$-модулю M.

Изучение этих расслоений было начато в [3, 4] (там их основной частный случай был назван «плавающими» расслоениями), в частности, была построена их стабильная теория, которую можно рассматривать как некоммутативный аналог группы Пикара. Исходным пунктом было понятие «матричного грассманиана», являющегося аналогом обычного грассманиана подпространств для случая матричных алгебр. Идея состояла в том, чтобы, отталкиваясь от матричных грассманианов как классифицирующих пространств, построить отвечающую им теорию расслоений вместе с отношением эквивалентности (естественно возникающим при переходе к прямому пределу классифицирующих пространств), дающим соответствующий аналог K-теории (в общем смысле этого термина, введённого А. Гротендиком). Было показано, что интересная теория получается в случае $(k,l)=1$ (в противном случае происходит локализация при переходе к прямому пределу). Здесь же мы будем в основном интересоваться нестабильной теорией. В качестве приложения мы получаем интерпретацию «плавающих» расслоений (которые на самом деле не просто расслоения со слоем — матричной алгеброй, а пáры, состоящие из такого расслоения и вложения в тривиальное) как расслоений с определённой структурной группой.

Определение 13. *k-подалгеброй* в матричной алгебре $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ будем называть $*$-подалгебру с единицей, изоморфную $\mathrm{M}_k(\mathbb{C})$ (очевидно, что такая подалгебра существует, только если $k \mid n$).

Пусть $\mathrm{PU}(k)\otimes\mathrm{PU}(l)$ обозначает подгруппу в $\mathrm{PU}(kl)$, являющуюся образом вложения

$$\mathrm{PU}(k)\times\mathrm{PU}(l)\to\mathrm{PU}(kl),\quad (X,Y)\mapsto X\otimes Y, \tag{15}$$

индуцированного кронекеровым произведением матриц. Через $\mathrm{Gr}_{k,l}$ обозначим однородное пространство

$$\mathrm{PU}(kl)/\big(\mathrm{PU}(k)\otimes \mathrm{PU}(l)\big). \tag{16}$$

Из теоремы Нётер—Сколема непосредственно следует, что $\mathrm{Gr}_{k,l}$ параметризует множество всех k-подалгебр в $\mathrm{M}_{kl}(\mathbb{C})$, что оправдывает для него название «*матричный грассманиан*».

Замечание 14. Заметим, что пространство всех (не обязательно $*$-) подалгебр с 1 в $\mathrm{M}_{kl}(\mathbb{C})$, изоморфных $\mathrm{M}_k(\mathbb{C})$, гомотопически эквивалентно $\mathrm{Gr}_{k,l}$. Действительно, проективная унитарная группа $\mathrm{PU}(n)$ является деформационным ретрактом соответствующей проективной полной линейной группы $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})$. То, что мы ограничиваемся рассмотрением $*$-подалгебр, связано с тем, что мы хотим иметь дело с компактными пространствами.

Замечание 15. Заметим, что каждой k-подалгебре $A_k\subset \mathrm{M}_{kl}(\mathbb{C})$ соответствует единственная l-подалгебра $B_l\subset \mathrm{M}_{kl}(\mathbb{C})$, являющаяся централизатором A_k, причём $\mathrm{M}_{kl}(\mathbb{C})=A_k\underset{\mathbb{C}}{\otimes} B_l$. Таким образом, пространство $\mathrm{Gr}_{k,l}$ также параметризует множество разложений алгебры $\mathrm{M}_{kl}(\mathbb{C})$ в тензорное произведение $A_k\underset{\mathbb{C}}{\otimes} B_l$ своих k- и l-подалгебр. Отметим также следующий очевидный факт: пространство $\mathrm{Gr}_{k,l}$ является гомотопическим слоем отображения $\mathrm{BPU}(k)\times\mathrm{BPU}(l)\to\mathrm{BPU}(kl)$, индуцированного тензорным произведением расслоений (или, что то же самое, отображения классифицирующих пространств, индуцированного гомоморфизмом групп (15)).

Замечание 16. Как и выше, мы предполагаем, если не оговорено противное, что числа k, l взаимно просты (хотя некоторые факты верны и без этого предположения). Гомотопические следствия условия $(k,l)=1$ (в частности, при переходе к прямому пределу) были изучены в предыдущих работах автора (см., например, [3, 4]). Вообще, можно рассматривать условия на пáры $\{k,l\}$ вида $(k,l)=d$, где d — фиксированное натуральное число, вообще говоря большее 1.

Замечание 17. Отметим, что при условии $(k,l)=1$ матричный грассманиан $\mathrm{Gr}_{k,l}$ также может быть представлен как однородное пространство специальной унитарной группы $\mathrm{SU}(kl)/\big(\mathrm{SU}(k)\otimes\mathrm{SU}(l)\big)$. Дело в том, что в этом случае центр $\mu_{kl}\cong\mu_k\times\mu_l$ группы $\mathrm{SU}(kl)$ является произведением центров $\mathrm{SU}(k)$ и $\mathrm{SU}(l)$ (μ_n обозначает группу корней n-й степени из 1).

Напомним, что для подпространств $K,L\subset M$ через $\Omega_K^L(M)$ мы обозначаем пространство путей в M, начинающихся в K и заканчивающихся в L, снабжённое компактно-открытой топологией. Рассмотрим $\mathrm{BPU}(k)\times\mathrm{BPU}(l)$ как подпространство в $\mathrm{BPU}(kl)$, определённое как образ отображения классифицирующих пространств, индуцированного (15). Пусть $*\in\mathrm{BPU}(k)\times\mathrm{BPU}(l)\subset\mathrm{BPU}(kl)$ — отмеченная точка.

Предложение 18. $\mathrm{Gr}_{k,l}\simeq\Omega^*_{\mathrm{BPU}(k)\times\mathrm{BPU}(l)}\,\mathrm{BPU}(kl)$.

Доказательство. В гомотопической категории рассмотрим декартов квадрат

$$\begin{tikzcd} \Omega^*_{\mathrm{BPU}(k)\times\mathrm{BPU}(l)}\mathrm{BPU}(kl) \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[d] \\ \mathrm{BPU}(k)\times\mathrm{BPU}(l) \arrow[r, "\subset"] & \mathrm{BPU}(kl). \end{tikzcd} \tag{17}$$

Тогда пространство $\Omega^*_{\mathrm{BPU}(k)\times\mathrm{BPU}(l)}\mathrm{BPU}(kl)$ — слой отображения включения $\mathrm{BPU}(k)\times\mathrm{BPU}(l)\to\mathrm{BPU}(kl)$. С другой стороны, представление (16) матричного грассманиана в виде однородного пространства позволяет убедиться, что он также гомотопический слой этого отображения. □

Замечание 19. Заметим, что декартов квадрат (17) можно заменить эквивалентным квадратом

$$\begin{tikzcd} \big(\mathrm{EPU}(k)\times\mathrm{EPU}(l)\big)\underset{\mathrm{PU}(k)\otimes\mathrm{PU}(l)}{\times}\mathrm{PU}(kl) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{EPU}(kl) \arrow[d] \\ \mathrm{BPU}(k)\times\mathrm{BPU}(l) \arrow[r] & \mathrm{BPU}(kl), \end{tikzcd}$$

в котором вертикальные стрелки являются расслоениями. Тотальное пространство главного расслоения

$$\big(\mathrm{EPU}(k)\times\mathrm{EPU}(l)\big)\underset{\mathrm{PU}(k)\otimes\mathrm{PU}(l)}{\times}\mathrm{PU}(kl)$$

в последнем, как легко убедиться, гомотопически эквивалентно $\mathrm{Gr}_{k,l}$ (ср. доказательство теоремы 7).

Положим

$$\mathrm{SU}_{k,l}:=\Omega^e_{\mathrm{SU}(k)\otimes\mathrm{SU}(l)}\mathrm{SU}(kl),$$

где $e\in\mathrm{SU}(kl)$ — единичный элемент группы (рассматриваемый как отмеченная точка). Это топологическая группа относительно операции поточечного умножения путей в группе $\mathrm{SU}(kl)$.

Теорема 20. *Имеет место гомотопическая эквивалентность* $\mathrm{Gr}_{k,l}\simeq\mathrm{BSU}_{k,l}$.

Доказательство. Используя, например, конструкцию Милнора классифицирующего пространства группы, легко убедиться, что её применение к группе путей $\mathrm{SU}_{k,l}$ даёт пространство $\Omega^*_{\mathrm{BSU}(k)\times\mathrm{BSU}(l)}\mathrm{BSU}(kl)$, которое согласно предложению 18 гомотопически эквивалентно $\mathrm{Gr}_{k,l}$. □

Следствие 21. *Группа* $\mathrm{SU}_{k,l}$ *в гомотопической категории эквивалентна пространству петель матричного грассманиана* $\mathrm{Gr}_{k,l}$.

Замечание 22. В том, что пространство петель в $\Omega^*_{\mathrm{BSU}(k)\times\mathrm{BSU}(l)}\mathrm{BSU}(kl)$ есть $\mathrm{SU}_{k,l}:=\Omega^e_{\mathrm{SU}(k)\otimes\mathrm{SU}(l)}\mathrm{SU}(kl)$, легко убедиться непосредственно. Отмеченная точка в $\Omega^*_{\mathrm{BSU}(k)\times\mathrm{BSU}(l)}\mathrm{BSU}(kl)$ — постоянный путь с началом и концом в отмеченной точке $* \in \mathrm{BSU}(k) \times \mathrm{BSU}(l) \subset \mathrm{BSU}(kl)$. Ввиду гомотопической эквивалентности $\Omega\,\mathrm{BSU}(n) \simeq \mathrm{SU}(n)$ петля в $\Omega^*_{\mathrm{BSU}(k)\times\mathrm{BSU}(l)}\mathrm{BSU}(kl)$ с началом и концом в отмеченной точке — это то же, что путь в $\mathrm{SU}(kl)$, начинающийся в подгруппе $\mathrm{SU}(k) \otimes \mathrm{SU}(l)$ и заканчивающийся в единичном элементе $e \in \mathrm{SU}(kl)$.

Над $\mathrm{Gr}_{k,l}$ определим тавтологическое $\mathrm{M}_k(\mathbb{C})$-расслоение $\mathcal{A}_{k,l}$ следующим образом. Оно является подрасслоением прямого произведения $\mathrm{Gr}_{k,l} \times \mathrm{M}_{kl}(\mathbb{C})$, причём его слой $(\mathcal{A}_{k,l})_x$ над точкой $x \in \mathrm{Gr}_{k,l}$ — k-подалгебра в $\mathrm{M}_{kl}(\mathbb{C})$, соответствующая этой точке. Над $\mathrm{Gr}_{k,l}$ определяется также $\mathrm{M}_l(\mathbb{C})$-расслоение $\mathcal{B}_{k,l}$, слой которого над $x \in \mathrm{Gr}_{k,l}$ определяется как централизатор k-подалгебры $(\mathcal{A}_{k,l})_x \subset \mathrm{M}_{kl}(\mathbb{C})$ (ср. замечание 15). Поскольку для всех $x \in \mathrm{Gr}_{k,l}$ слои $(\mathcal{A}_{k,l})_x$ и $(\mathcal{B}_{k,l})_x$ отождествляются с соответствующими подалгебрами в $\mathrm{M}_{kl}(\mathbb{C})$, то мы также имеем каноническую тривиализацию

$$\mathcal{A}_{k,l} \otimes \mathcal{B}_{k,l} \cong \mathrm{Gr}_{k,l} \times \mathrm{M}_{kl}(\mathbb{C}),$$

определяющую (постоянную) гомотопию (см. определение 1)

$$H_{k,l}\colon \mathcal{A}_{k,l} \otimes \mathcal{B}_{k,l} \simeq \mathrm{Gr}_{k,l} \times \mathrm{M}_{kl}(\mathbb{C}) \tag{18}$$

тензорного произведения расслоений в тривиальное с заданной тривиализацией.

Над компактным пространством X рассмотрим пару $\mathrm{SU}(k)$- и $\mathrm{SU}(l)$-расслоений A_k, B_l (со слоями $\mathrm{M}_k(\mathbb{C})$ и $\mathrm{M}_l(\mathbb{C})$ соответственно), таких что их тензорное произведение тривиально, вместе с гомотопией $h_{k,l}\colon A_k \otimes B_l \simeq X \times \mathrm{M}_{kl}(\mathbb{C})$. Такие наборы $(A_k, B_l, h_{k,l})$ и $(A'_k, B'_l, h'_{k,l})$ назовём *эквивалентными*, если $A_k \cong A'_k$, $B_l \cong B'_l$ и $h_{k,l}$ гомотопна $h'_{k,l}$ в классе гомотопий.

Из предложения 18 легко вытекает следствие 23.

Следствие 23. *Существует естественная биекция между множеством гомотопических классов отображений $[X, \mathrm{Gr}_{k,l}]$ и только что введёнными классами эквивалентности наборов $(A_k, B_l, h_{k,l})$, причём роль универсальной тройки (для фиксированных k, l) играет $(\mathcal{A}_{k,l}, \mathcal{B}_{k,l}, H_{k,l})$.*

Замечание 24. Отображение

$$\varphi\colon X \to \Omega^*_{\mathrm{BSU}(k)\times\mathrm{BSU}(l)}\mathrm{BSU}(kl) \text{ —}$$

это то же самое, что и отображение

$$\tilde{\varphi}\colon CX \to \mathrm{BSU}(kl),$$

такое что

$$\tilde{\varphi}|_{X\times\{0\}} \subset \mathrm{BSU}(k) \times \mathrm{BSU}(l) \subset \mathrm{BSU}(kl), \quad \tilde{\varphi}(*) = *,$$

где $CX := (X \times [0,1])/(X \times \{1\})$ — конус над X. Пусть $[x,t]$ обозначает точку конуса CX, соответствующую $x \in X$, $t \in [0,1]$. Тогда явный вид соответствия задаётся формулой $\tilde{\varphi}([x,t]) = \varphi(x)(t)$, $x \in X$, $t \in [0,1]$. Очевидно, что гомотопическим классам отображений φ как выше отвечают гомотопические классы отображений $\tilde{\varphi}$, если для последних рассматривать сохраняющие отмеченные точки гомотопии, при которых образ $X \times \{0\} \subset CX$ гомотопируется внутри подпространства $\mathrm{BSU}(k) \times \mathrm{BSU}(l) \subset \mathrm{BSU}(kl)$.

Мы предлагаем следующую интерпретацию рассматриваемых топологических конструкций с точки зрения C^*-алгебр. Напомним, что унитализация C^*-алгебры $C_0[0,1)$, состоящей из функций, обращающихся в нуль в $1 \in [0,1]$, есть C^*-алгебра $C[0,1]$, которая, в свою очередь, содержит $C_0[0,1)$ в качестве существенного идеала. Таким образом, $C[0,1] \cong C_0[0,1) \oplus \mathbb{C}$, $f \mapsto \bigl(f - f(1), f(1)\bigr)$, как векторные пространства. Для матричной алгебры $\mathrm{M}_n(C[0,1])$ имеем аналогичное разложение

$$\mathrm{M}_n(C[0,1]) = \mathrm{M}_n\bigl(C_0[0,1)\bigr) \oplus \mathrm{M}_n(\mathbb{C}). \tag{19}$$

Чтобы провести аналогию с ранее рассмотренным случаем 1-расслоений более прозрачной, обозначим $\mathrm{M}_{kl}\bigl(C_0[0,1)\bigr)$ через $A_{k,l}$. Очевидно, группа $\mathrm{SU}_{k,l}$ действует на $A_{k,l}$ такими (внутренними) автоморфизмами, что из

$$x(0) \in \mathrm{M}_k(\mathbb{C}) \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathbb{C}E_l \subset \mathrm{M}_{kl}(\mathbb{C})$$

для матричнозначной функции $x \in A_{k,l}$ следует

$$(gx)(0) \in \mathrm{M}_k(\mathbb{C}) \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathbb{C}E_l \subset \mathrm{M}_{kl}(\mathbb{C})$$

для всех $g \in \mathrm{SU}_{k,l}$ и то же с заменой $\mathrm{M}_k(\mathbb{C}) \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathbb{C}E_l$ на $\mathbb{C}E_k \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathrm{M}_l(\mathbb{C})$. Легко убедиться, что тем самым мы получаем вложение $\mathrm{PU}_{k,l} \hookrightarrow \mathrm{Aut}(A_{k,l})$.

Таким образом, над пространством $\mathrm{BSU}_{k,l}$, гомотопически эквивалентным $\mathrm{Gr}_{k,l}$ по теореме 20, мы имеем $A_{k,l}$-расслоение, ассоциированное с универсальным $\mathrm{SU}_{k,l}$-расслоением, представимое над $0 \in [0,1)$ в виде тензорного произведения некоторых $\mathrm{M}_k(\mathbb{C})$- и $\mathrm{M}_l(\mathbb{C})$-расслоений (эти расслоения отвечают тавтологическому расслоению $\mathcal{A}_{k,l}$ и его расслоению централизаторов $\mathcal{B}_{k,l}$, определённым выше) и продолжающееся до тривиального расслоения (с фиксированной тривиализацией) над 1. Это продолжение можно рассматривать как аналог одноточечной компактификации (или, если мы предпочитаем язык алгебр, аналог унитализации). Действительно, если $\Gamma(\mathfrak{A}_{k,l})$ — алгебра непрерывных сечений некоторого $A_{k,l}$-расслоения $\mathfrak{A}_{k,l}$ над X, классифицируемого отображением $X \to \mathrm{BSU}_{k,l}$, то (ср. (19)) $\mathfrak{A}_{k,l} \oplus \mathrm{M}_{kl}(\mathbb{C})$ — алгебра сечений соответствующего (см. замечание 24) $\mathrm{M}_{kl}(\mathbb{C})$-расслоения над CX.

Теперь мы хотим описать пространства, которые отвечают введённым в предыдущем разделе идеалам I_0^l, I_k^0, т. е. слои расслоений $\varphi_k\colon \mathrm{Gr}_k^l \to \mathrm{BSU}(k)$, $\varphi_l\colon \mathrm{Gr}_k^l \to \mathrm{BSU}(l)$ (из представления Gr_k^l и $\mathrm{Gr}_{k,\,l}$ в виде однородных пространств следует, что они такие же, как слои отображений $\mathrm{Gr}_{k,l} \to \mathrm{BSU}(k)$, $\mathrm{Gr}_{k,l} \to \mathrm{BSU}(l)$, являющихся классифицирующими для $\mathrm{M}_k(\mathbb{C})$- и $\mathrm{M}_l(\mathbb{C})$-расслоений $\mathcal{A}_{k,l} \to \mathrm{Gr}_{k,l}$ и $\mathcal{B}_{k,l} \to \mathrm{Gr}_{k,l}$ соответственно).

Определение 25. (*Унитарным*) *k-репером* в матричной алгебре $\mathrm{M}_{kl}(\mathbb{C})$ назовём упорядоченный набор k^2 линейно независимых матриц

$$\alpha := \{\alpha_{i,j} \in \mathrm{M}_{kl}(\mathbb{C}) \mid 1 \leqslant i,j \leqslant k\},$$

такой что

$$\alpha_{i,j}\alpha_{r,s} = \delta_{jr}\alpha_{i,s}, \quad 1 \leqslant i,j,r,s \leqslant k$$

(здесь δ_{jr} — символ Кронекера),

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_{i,i} = E_{kl}, \quad (\alpha_{i,j}, \alpha_{r,s}) = \delta_{ir}\delta_{js},$$

где (,) — эрмитово скалярное произведение

$$(X,Y) := \frac{1}{l}\operatorname{tr}(X\bar{Y}^t)$$

в $\mathrm{M}_{kl}(\mathbb{C})$. Очевидно, что α, в частности, является унитарным базисом некоторой k-подалгебры в $\mathrm{M}_{kl}(\mathbb{C})$.

Легко показать, что пространство $\mathrm{Fr}_{k,l}$ всех k-реперов в $\mathrm{M}_{kl}(\mathbb{C})$ является однородным пространством $\mathrm{PU}(kl)/(E_k \otimes \mathrm{PU}(l))$ над $\mathrm{PU}(kl)$.

Отметим, что тавтологическое $\mathrm{M}_k(\mathbb{C})$-расслоение $\mathcal{A}_{k,l}$ над $\mathrm{Gr}_{k,l}$ ассоциировано с главным $\mathrm{PU}(k)$-расслоением

$$\rho_{k,l}\colon \mathrm{PU}(kl)/\big(E_k \otimes \mathrm{PU}(l)\big) \to \mathrm{Gr}_{k,l}\,.$$

Рассмотрим группу путей $\Omega^e_{E_k\otimes\mathrm{PU}(l)}\,\mathrm{PU}(kl)$. Определим гомоморфизм групп

$$\varepsilon_k\colon \mathrm{PU}_{k,l} \to \mathrm{PU}(k), \quad g(t) \mapsto \mathrm{Pr}_k\big(g(0)\big),$$

где

$$\mathrm{Pr}_k\colon \mathrm{PU}(k)\otimes\mathrm{PU}(l) \to \mathrm{PU}(k), \quad (g_k, g_l) \mapsto g_k, \text{ —}$$

гомоморфизм. Очевидно, $\Omega^e_{E_k\otimes\mathrm{PU}(l)}\,\mathrm{PU}(kl) = \ker(\varepsilon_k)$. Кроме того, справедлив следующий факт.

Предложение 26. *Пространство $\mathrm{Fr}_{k,l}$ гомотопически эквивалентно классифицирующему пространству $\mathrm{B}\Omega^e_{E_k\otimes\mathrm{PU}(l)}\,\mathrm{PU}(kl)$.*

Доказательство. Заметим, что точная последовательность групп

$$\Omega^e_{E_k\otimes\mathrm{PU}(l)}\,\mathrm{PU}(kl) \longrightarrow \Omega^e_{\mathrm{PU}(k)\otimes\mathrm{PU}(l)}\,\mathrm{PU}(kl) \xrightarrow{\varepsilon_k} \mathrm{PU}(k)$$

отвечает точной последовательности

$$\mathrm{Fr}_{k,l} \xrightarrow{\rho_{k,l}} \mathrm{Gr}_{k,l} \longrightarrow \mathrm{BPU}(k) \tag{20}$$

их классифицирующих пространств, и таким образом,

$$\mathrm{Fr}_{k,l} \simeq \Omega^*_{\mathrm{BPU}(l)}\,\mathrm{BPU}(kl) \simeq \mathrm{B}\Omega^e_{E_k\otimes\mathrm{PU}(l)}\,\mathrm{PU}(kl). \qquad \square$$

Ясно, что гомоморфизм ε_k определяет функтор, ставящий в соответствие $A_{k,l}$-расслоению (со структурной группой $\mathrm{PU}_{k,l}$) $\mathrm{M}_k(\mathbb{C})$-расслоение, причём в тривиальное матричное расслоение переходят $A_{k,l}$-расслоения, структурная группа которых редуцируется к $\Omega^e_{E_k\otimes\mathrm{PU}(l)}\,\mathrm{PU}(kl) \subset \mathrm{PU}_{k,l}$. Заметим, что расслоения со структурной группой $\Omega^e_{\mathrm{PU}(k)\otimes E_l}\,\mathrm{PU}(kl)$ естественно рассматривать как расслоения со слоем I_k^0, определённым на с. 87. Более подробно, определим подалгебру $I_l^0 \subset A_{k,l}$ следующим образом:

$$I_l^0 := \Big\{ f \in A_{k,l} \;\Big|\; f(0) \in \mathbb{C}E_k \underset{\mathbb{C}}{\otimes} \mathrm{M}_l(\mathbb{C}) \Big\}.$$

Тогда последовательности пространств (20) отвечает последовательность слоёв $I_l^0 \hookrightarrow A_{k,l} \to \mathrm{M}_k(\mathbb{C})$ расслоений, ими классифицируемых.

Замечание 27. Легко заметить связь между 1-расслоениями $\{\xi_k, \xi_l, t_{k,l}\}$ и расслоениями, классифицируемыми матричным грассманианом $\mathrm{Gr}_{k,l}$ (по крайней мере в случае $(k,l) = 1$). В частности, нетрудно показать, что в обоих случаях получаются эквивалентные «стабильные» теории: $\varinjlim_j \mathrm{Gr}_{k_j}^{l_j}$ и $\varinjlim_j \mathrm{Gr}_{k_j,l_j}$ изоморфны как H-пространства (более того, при выполнении сформулированных ниже условий на последовательность пар имеем $\varinjlim_j \mathrm{Gr}_{k_j,l_j} \cong \mathrm{BSU}_\otimes$ [3, 4]), причём они не зависят от выбора последовательности пар натуральных чисел $\{k_j, l_j\}$, такой что $k_j, l_j \to \infty$ при $j \to \infty$, $k_j \mid k_{j+1}$, $l_j \mid l_{j+1}$, $(k_j, l_j) = 1$ для всех $j \in \mathbb{N}$. Возникает вопрос, не являются ли пространства $(\mathrm{SU}(k) \otimes E_l) \backslash \mathrm{SU}(kl) / (E_k \otimes \mathrm{SU}(l))$ и $\mathrm{Gr}_{k,l}$ гомеоморфными? Ответ, по-видимому, отрицательный, но доказать удаётся лишь следующий факт, указывающий скорее на их близость.

Предложение 28. *Существует гомеоморфизм* $\varphi\colon \mathrm{SU}_k^l \to \mathrm{SU}_{k,l}$.

Доказательство. Зададим φ формулой

$$\big(\varphi(\gamma)\big)(t) = \gamma(t)\gamma(1)^{-1}, \quad \gamma \in \mathrm{SU}_k^l, \quad t \in [0,1].$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\big(\varphi(\gamma)\big)(0) \in \mathrm{SU}(k) \otimes \mathrm{SU}(l) \subset \mathrm{SU}(kl), \\ &\big(\varphi(\gamma)\big)(1) = e, \end{aligned}$$

т. е. действительно $\varphi(\gamma) \in \mathrm{SU}_{k,l}$. Определим отображение $\psi\colon \mathrm{SU}_{k,l} \to \mathrm{SU}_k^l$, обратное φ. Пусть $\kappa \in \mathrm{SU}_{k,l}$. Тогда по определению $\kappa(0) \in \mathrm{SU}(k) \otimes \mathrm{SU}(l) \subset \mathrm{SU}(kl)$. Положим $\kappa(0) = (\kappa_k, \kappa_l) \in \mathrm{SU}(k) \otimes \mathrm{SU}(l)$. Тогда $\big(\psi(\kappa)\big)(t) = \kappa(t)\kappa_l^{-1}$. Действительно, во-первых,

$$\begin{aligned} &\big(\psi(\kappa)\big)(0) \in \mathrm{SU}(k) \otimes E_l \subset \mathrm{SU}(kl), \\ &\big(\psi(\kappa)\big)(1) = \kappa_l^{-1} \in E_k \otimes \mathrm{SU}(l) \subset \mathrm{SU}(kl), \end{aligned}$$

т. е. $\psi(\kappa) \in \mathrm{SU}_k^l$. Во-вторых,

$$\begin{aligned} &\big((\psi \circ \varphi)(\gamma)\big)(t) = \psi\big(\big(\varphi(\gamma)\big)(t)\big) = \psi(\gamma(t)\gamma(1)^{-1}) = \gamma(t), \\ &\big((\varphi \circ \psi)(\kappa)\big)(t) = \varphi\big(\big(\psi(\kappa)\big)(t)\big) = \varphi(\kappa(t)\kappa_l^{-1}) = \kappa(t). \end{aligned}$$ □

Заметим, что построенный нами гомеоморфизм, очевидно, не является гомоморфизмом, поэтому из его существования гомотопическая эквивалентность (тем более гомеоморфизм) классифицирующих пространств Gr_k^l и $\mathrm{Gr}_{k,l}$ не следует.

Замечание 29. Заметим в дополнение к сказанному выше, что

$$\mathrm{SU}_k^l = \Omega^e_{\mathrm{SU}(k)\otimes E_l} \cdot \Omega_e^{E_k\otimes \mathrm{SU}(l)}, \quad \mathrm{SU}_{k,l} = \Omega^e_{\mathrm{SU}(k)\otimes E_l} \cdot \Omega^e_{E_k\otimes \mathrm{SU}(l)},$$

причём $\Omega_e^{E_k\otimes \mathrm{SU}(l)}$ и $\Omega^e_{E_k\otimes \mathrm{SU}(l)}$ изоморфны (отличаются только «направлением» путей). C^*-алгебры A_k^l и $A_{k,l}$ порождены изоморфными пáрами идеалов I_k^0, I_0^l и I_k^0, I_l^0 соответственно.

Замечание 30. В качестве слоёв наших расслоений мы рассматриваем матричные алгебры, но для приложений могут представлять интерес аналогичные расслоения со слоем — проективным пространством. В этом случае вместо билинейного отображения $\mathrm{M}_k(\mathbb{C}) \times \mathrm{M}_l(\mathbb{C}) \to \mathrm{M}_{kl}(\mathbb{C})$ нужно рассматривать вложение Сегре $\mathbb{C}P^{k-1} \times \mathbb{C}P^{l-1} \to \mathbb{C}P^{kl-1}$, в однородных координатах задаваемое формулой

$$([x_0 : x_1 : \ldots : x_{k-1}], [y_0 : y_1 : \ldots : y_{l-1}]) \mapsto [x_0y_0 : \ldots : x_iy_j : \ldots : x_{k-1}y_{l-1}].$$

4. Препятствия к вложению расслоения в тривиальное

В [5] рассматривались топологические препятствия к подъёму в расслоении (20). Остановимся на этом вопросе немного подробнее. Заметим, что $\mathrm{Fr}_{k,l}$ можно также интерпретировать как пространство $\mathrm{Hom}_{\mathrm{alg}}\big(\mathrm{M}_k(\mathbb{C}), \mathrm{M}_{kl}(\mathbb{C})\big)$ $*$-гомоморфизмов алгебр с 1. Действительно, если зафиксировать k-репер в $\mathrm{M}_k(\mathbb{C})$, то $*$-гомоморфизм полностью определяется указанием k-репера в $\mathrm{M}_{kl}(\mathbb{C})$, в который он отображается. Пусть $A_k^{\mathrm{univ}} \to \mathrm{BPU}(k)$ — универсальное $\mathrm{M}_k(\mathbb{C})$-расслоение. Применим к нему послойно функтор $\mathrm{Hom}_{\mathrm{alg}}\big(\ldots, \mathrm{M}_{kl}(\mathbb{C})\big)$, получим некоторое $\mathrm{Hom}_{\mathrm{alg}}\big(\mathrm{M}_k(\mathbb{C}), \mathrm{M}_{kl}(\mathbb{C})\big)$-расслоение $p_{k,l}\colon \mathrm{H}_{k,l}(A_k^{\mathrm{univ}}) \to \mathrm{BPU}(k)$, причём $\mathrm{M}_k(\mathbb{C})$-расслоение $p_{k,l}^*(A_k^{\mathrm{univ}}) \to \mathrm{H}_{k,l}(A_k^{\mathrm{univ}})$ получает каноническое вложение в тривиальное $\mathrm{H}_{k,l}(A_k^{\mathrm{univ}}) \times \mathrm{M}_{kl}(\mathbb{C})$, задаваемое формулой

$$\{a, h\} \mapsto \{h, h(a)\}, \quad a \in (A_k^{\mathrm{univ}})_x, \quad h \in \mathrm{H}_{k,l}(A_k^{\mathrm{univ}}), \quad p_{k,l}(h) = x \in \mathrm{BPU}(k).$$

Замечание 31. Это расслоение можно построить как ассоциированное с универсальным главным $\mathrm{PU}(k)$-расслоением следующим образом. Заметим, что на пространстве $\mathrm{Hom}_{\mathrm{alg}}\big(\mathrm{M}_k(\mathbb{C}), \mathrm{M}_{kl}(\mathbb{C})\big)$ группа $\mathrm{PU}(k)$ действует следующим образом:

$$(g, \varphi) \mapsto \varphi \circ g^{-1}, \quad g \in \mathrm{PU}(k), \quad \varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{alg}}\big(\mathrm{M}_k(\mathbb{C}), \mathrm{M}_{kl}(\mathbb{C})\big).$$

Теперь нужно с главным $\mathrm{PU}(k)$-расслоением $\mathrm{EPU}(k)$ ассоциировать с помощью указанного действия $\mathrm{Hom}_{\mathrm{alg}}\big(\mathrm{M}_k(\mathbb{C}), \mathrm{M}_{kl}(\mathbb{C})\big)$-расслоение.

После всего сказанного легко понять геометрический смысл гомотопической эквивалентности $\mathrm{Gr}_{k,l} \simeq \mathrm{H}_{k,l}(A_k^{\mathrm{univ}})$. Таким образом, для последовательности (20) мы нашли эквивалентное ей «настоящее» расслоение

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{Fr}_{k,l} & \longrightarrow & \mathrm{EPU}(k) \underset{\mathrm{PU}(k)}{\times} \mathrm{Fr}_{k,l} \\
 & & \Big\downarrow {\scriptstyle p_{k,l}} \\
 & & \mathrm{BPU}(k),
\end{array}
\tag{21}
$$

где $\mathrm{EPU}(k) \underset{\mathrm{PU}(k)}{\times} \mathrm{Fr}_{k,l} \simeq \mathrm{Gr}_{k,l}$.

Отображение $f\colon X \to \mathrm{BPU}(k)$ — это $\mathrm{M}_k(\mathbb{C})$-расслоение, а подъём $\tilde{f}\colon X \to \mathrm{H}_{k,l}(A_k^{\mathrm{univ}})$ можно интерпретировать как выбор вложения расслоения $f^*(A_k^{\mathrm{univ}}) \to X$ в тривиальное $X \times \mathrm{M}_{kl}(\mathbb{C})$, причём так, что каждый слой вкладывается в качестве центральной подалгебры. Нетрудно посчитать, что при $(k,l)=1$ в стабильных размерностях (в смысле периодичности Ботта для унитарных групп) $\pi_{2r-1}(\mathrm{Fr}_{k,l}) = \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$, чётномерные гомотопические группы $\mathrm{Fr}_{k,l}$ равны 0. Например, первые препятствия к существованию вложения лежат в $H^2(\mathrm{BPU}(k), \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$.

Определение 32. $\mathrm{M}_k(\mathbb{C})$-расслоение $A_k \to X$, для которого существует послойное вложение $A_k \to X \times \mathrm{M}_{kl}(\mathbb{C})$ при некотором l, $(k,l)=1$, мы назовём *вложимым*.

Замечание 33. Можно показать, что если A_k — вложимое расслоение, то вложение в тривиальное $X \times \mathrm{M}_{km}(\mathbb{C})$ существует для любого достаточно большого m.

По аналогии с группой Брауэра [2] можно ввести следующий гомотопический функтор со значениями в категории абелевых групп. Два расслоения алгебр A_k и B_l над X мы назовём *эквивалентными*, если существуют такие вложимые расслоения C_m, D_n над X, что $A_k \otimes C_m \cong B_l \otimes D_n$ (так как индекс у буквы, обозначающей матричное расслоение, обозначает корень квадратный из размерности слоя, то $km = ln$).

Переходя к прямому пределу в (21), получаем расслоение

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{K}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z},1) \times \tilde{\mathrm{Fr}} & \longrightarrow & \mathrm{Gr} \\
 & & \Big\downarrow \\
 & & \mathrm{K}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z},2) \times \prod\limits_{q>1} \mathrm{K}(\mathbb{Q},2q),
\end{array}
$$

где

$$
\tilde{\mathrm{Fr}} := \varinjlim_{(k,l)=1} \tilde{\mathrm{Fr}}_{k,l}, \quad \tilde{\mathrm{Fr}}_{k,l} := \mathrm{SU}(kl)/\big(E_k \otimes \mathrm{SU}(l)\big), \quad \mathrm{Gr} := \varinjlim_{(k,l)=1} \mathrm{Gr}_{k,l} \simeq \mathrm{BSU}
$$

(см. замечание 27), где все пределы берутся по отображениям, индуцированным тензорным произведением на тривиальные расслоения. В частности, $\mathrm{Gr} \simeq \mathrm{BSU}$, $\pi_{2r+1}(\tilde{\mathrm{Fr}}) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ для $r \geqslant 1$ и $\pi_n(\tilde{\mathrm{Fr}}) = 0$ для остальных n.

Из последнего расслоения легко видеть, что первое препятствие к вложению, фактически, то же, что и препятствие к редукции структурной группы от проективной PU до специальной унитарной SU, и что всякий класс $\alpha \in H^2(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ является первым препятствием к вложению некоторого матричного расслоения в тривиальное. Однако, в отличие от группы Брауэра (которая, напомним [2], изоморфна $H^3_{\mathrm{tors}}(X, \mathbb{Z})$), в нашей задаче первым препятствием дело не исчерпывается.

Для того чтобы определить следующее препятствие, рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Fr}_{k,l} \arrow[rr] & & \mathrm{EPU}(k) \underset{\mathrm{PU}(k)}{\times} \mathrm{Fr}_{k,l} \arrow[d] \\
\tilde{\mathrm{Fr}}_{k,l} \arrow[ur] \arrow[r] & \mathrm{ESU}(k) \underset{\mathrm{SU}(k)}{\times} \tilde{\mathrm{Fr}}_{k,l} \arrow[urr, "\simeq"] \arrow[d] & & \mathrm{BPU}(k) \\
 & \mathrm{BSU}(k). \arrow[urr] & &
\end{tikzcd} \tag{22}$$

Заметим, что гомотопическая эквивалентность $\mathrm{ESU}(k) \underset{\mathrm{SU}(k)}{\times} \tilde{\mathrm{Fr}}_{k,l} \simeq \mathrm{Gr}_{k,l}$ легко следует из замечания 17. Кроме того, существует расслоение

$$\mu_k \to \tilde{\mathrm{Fr}}_{k,l} \to \mathrm{Fr}_{k,l},$$

где μ_k — группа корней k-й степени из 1. Поэтому $\pi_n(\tilde{\mathrm{Fr}}_{k,l}) = \pi_n(\mathrm{Fr}_{k,l})$ при $n \geqslant 2$ и $\pi_1(\tilde{\mathrm{Fr}}_{k,l}) = 0$.

Вернёмся снова к классифицирующему отображению для некоторого $\mathrm{M}_k(\mathbb{C})$-расслоения $f\colon X \to \mathrm{BPU}(k)$. В силу сказанного выше, если первое препятствие обращается в нуль, то f поднимается до $\hat{f}\colon X \to \mathrm{BSU}(k)$. Теперь из диаграммы (22) легко следует, что следующее препятствие к вложению лежит в $H^4(X, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$. Очевидно, это просто второй класс Чженя c_2, приведённый по модулю k.

Заметим, что описанные препятствия являются стабильными в том смысле, что они не обнуляются при переходе к прямому пределу относительно пар $\{k, l\}$, таких как в замечании 27, удовлетворяющих условию $(k, l) = 1$.

Теперь весь подъём мы теперь можем интерпретировать как редукцию структурной группы с $\mathrm{PU}(k)$ до $\mathrm{SU}_{k,l}$ (или до группы $\mathrm{PU}_{k,l}$).

5. Заключение

В заключение мы вкратце рассмотрим один тип объектов, к которым естественно приводит понятие n-расслоения.

Пусть M, скажем, многообразие, $\{U_i\}_{i \in I}$ — его (локально конечное) открытое покрытие, d_i, $i \in I$, — набор натуральных чисел, бóльших 1. Предположим, что над каждым U_i задано векторное расслоение ξ_i, $\dim(\xi_i) = d_i$. Над каждым попарным пересечением $U_{ij} := U_i \cap U_j$ задана гомотопия

$$t_{i,j} \colon \xi_i \otimes [d_j]|_{U_{ij}} \simeq [d_i] \otimes \xi_j|_{U_{ij}},$$

т. е., фактически, структура 1-расслоения над U_{ij}; над каждым тройным пересечением U_{ijk} — структура 2-расслоения и т. д. Вообще, если у нас задана подобная структура до n-кратных пересечений включительно, то её продолжение на $(n+1)$-кратные пересечения можно рассматривать как гомотопический аналог условия n-коцикла. Связь с симплициальными n-расслоениями становится очевидной, если рассмотреть нерв рассматриваемого покрытия. Кроме того, если покрытие состоит из одного открытого множества, $U_i = X$ для всех $i \in I$, мы возвращаемся к исходному понятию n-расслоения.

Возникает естественный вопрос, появляются ли на этом пути объекты более общие, чем векторные расслоения? Ответ на него отрицательный при условии выполнения всех высших условий коцикла.

Литература

[1] Aschieri P., Cantini L., Jurčo B. Nonabelian bundle gerbes, their differential geometry and gauge theory. — 2003. — `arXiv:hep-th/0312154`.

[2] Atiyah M., Segal G. Twisted K-theory. — 2004. — `arXiv:math.KT/0407054`.

[3] Ershov A. V. Homotopy theory of bundles with fiber matrix algebra. — Preprint 01. — Max-Planck-Institut für Mathematik, 2003.

[4] Ershov A. V. Homotopy theory of bundles with fiber matrix algebra // J. Math. Sci. — 2004. — Vol. 123, no. 4. — P. 4198—4220.

[5] Ershov A. V. A generalization of the topological Brauer group // J. K-Theory.

[6] Husemöller D., Joachim M., Jurčo B., Schottenloher M. Basic Bundle Theory and K-Cohomology Invariants. — Berlin: Springer, 2008. — (Lect. Notes Phys.; Vol. 726).