Растущие полигармонические функции и задача Коши

Н. Ю. ЖУРАЕВА
Самаркандский государственный университет

УДК 517.955

Ключевые слова: задача Коши, полигармонические функции.

Аннотация

В статье показано, что при выполнении некоторых оценок роста полигармонических функций в ограниченной области такие функции определяются своими значениями на границе.

Abstract

N. Yu. Zhuraeva, Increasing polyharmonic functions and Cauchy problem, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 8, pp. 99—103.

It is shown that polyharmonic functions in a bounded domain are determined, under some estimates on their growth, by their values on the boundary.

Пусть $\mathbb{R}^3$ — трёхмерное вещественное евклидово пространство,

$$x = (x_1, x_2, x_3), \quad y = (y_1, y_2, y_3), \quad x' = (0, x_2, x_3), \quad y' = (0, y_2, y_3),$$
$$r = |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2},$$
$$s = |x' - y'|, \quad h = \frac{\pi}{\rho}, \quad \rho > 0, \quad \alpha^2 = s,$$

D — неограниченная область, лежащая в слое $\{y \in \mathbb{R}^3 \colon 0 < y_1 < \pi/\rho,\ \rho > 0\}$, с границей $\partial D = \{y \in \mathbb{R}^3 \colon y_1 = 0\} \cup \{S\}$, где S — график функции $y_1 = f(y_2, y_3)$, функция $f(y_2, y_3)$ имеет ограниченные непрерывные частные производные первого порядка, Δ — оператор Лапласа.

Задача Коши. Пусть $u(y) \in C^{2n}(D)$ и

$$\Delta^n u(y) = 0, \quad y \in D, \quad n \geqslant 1,$$
$$u(y) = F_0(y), \quad \Delta u(y) = F_1(y), \ldots, \quad \Delta^{n-1} u(y) = F_{n-1}(y), \quad y \in \partial D,$$
$$\frac{du(y)}{d\bar{n}} = G_0(y), \quad \frac{d\Delta u(y)}{d\bar{n}} = G_1(y), \ldots, \quad \frac{d\Delta^{n-1} u(y)}{d\bar{n}} = G_{n-1}(y), \quad y \in \partial D,$$

где $F_i(y)$, $G_i(y)$ — заданные на ∂D непрерывные функции, $\bar{n}$ — внешняя нормаль границы ∂D. Требуется восстановить $u(y)$ в D.

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 8, с. 99—103.

Функции $\varphi(y,x)$ и $\Phi(y,x)$ при $s>0$ определим следующими равенствами:

$$\varphi(y,x)=\frac{1}{2\bar{n}^2K(x_1)}\operatorname{Im}\int\limits_0^\infty \frac{K(\omega)}{\omega-x_1}\,\frac{du}{\sqrt{u^2+S}},\quad \omega=i\sqrt{s-u^2}+y_1,$$

$$\Phi(y,x)=C_{n,3}r^{2n-2}\varphi(y,x),$$

где $C_{n,3}=(-1)^{n-1}\big(\Gamma(3/2-n)2^{2n}\pi^{3/2}\Gamma(n)\big)^{-1}$,

$$K(\omega)=\frac{\exp(\omega-a\operatorname{ch}i\rho_3(\omega-h/2)-b\operatorname{ch}i\rho_3(\omega-h/2))}{\omega+x_1+3h}.$$

Лемма 1. *Для функции $\varphi(y,x)$ имеет место неравенство*

$$|\varphi(y,x)|\leqslant \alpha^{-1}\exp\left(y_1-a\cos\rho_3\left(y_1-\frac{h}{2}\right)\operatorname{ch}\rho_3\alpha-b\cos\rho_3\left(y_1-\frac{h}{2}\right)\operatorname{ch}\rho_3\alpha\right).$$

Введём обозначение

$$A=y_1-a\cos\rho_3\left(y_1-\frac{h}{2}\right)\operatorname{ch}\rho_3\alpha-b\cos\rho_3\left(y_1-\frac{h}{2}\right)\operatorname{ch}\rho_3\alpha.$$

Лемма 2. *Для функции $\Phi(y,x)$ справедлива оценка*

$$|\Phi(y,x)|\leqslant C_1r^{2n-2}\alpha^{-1}e^A.$$

Далее через C_i обозначаются константы.

Лемма 3. *Если $G(y,x)$ — гармоническая функция в $\mathbb{R}^3$ по переменной y, включая и точку $y=x$, то $\Delta r^{2n-2}G(y,x)=r^{2n-4}G_0(y,x)$, где функция*

$$G_0(y,x)=2(n-1)(2n+1)G(y,x)+ \\ +4(n-1)\big((y_1-x_1)G'_{y_1}+(y_2-x_2)G'_{y_2}+(y_3-x_3)G'_{y_3}\big)$$

является гармонической функцией.

Лемма 4. *При условиях леммы 3 для функции $\Delta^k r^{2n-2}G(y,x)$ справедливо равенство $\Delta^k r^{2n-2}G(y,x)=r^{2n-2-2k}G_1(y,x)$, где $G_1(y,x)$ — гармоническая функция в $\mathbb{R}^3$ по переменной y, включая и точку $y=x$.*

Лемма 5. *Для функции $\Phi(y,x)$ имеют место оценки*

$$|\Delta\Phi|\leqslant C_2r^{2n-4}\alpha^{-1}e^A,$$
$$|\Delta^k\Phi|\leqslant C_3r^{2n-2-2k}\alpha^{-1}e^A,\quad k=1,2,3\ldots.$$

Лемма 6. *Пусть $\bar{n}$ — внешняя нормаль границы ∂D. Тогда для функции $\Phi(y,x)$ справедливы неравенства*

$$\left|\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{n}}\right|\leqslant C_4r^{2n-3}\alpha^{-1}e^A,\quad \left|\frac{\partial\Delta^k\Phi}{\partial\bar{n}}\right|\leqslant C_5r^{2(n-k-5/2)}\alpha^{-1}e^A.$$

Через $B_{\rho_1}(D)$ обозначим пространство полигармонических функций порядка n, определённых в D, имеющих непрерывные частные производные порядка $2n-1$ вплоть до границы ∂D и удовлетворяющих условию

$$\sum_{k=0}^{n-1}(|\Delta^k u(y)| + |\operatorname{grad}\Delta^{n-k-1}u(y)|) \leqslant C_6 \exp\bigl(\exp\rho_1(y')\bigr).$$

Теорема. *Пусть для функции $u \in B_{\rho_1}(D)$ в любой точке $y \in \partial D$ выполняется неравенство*

$$\sum_{k=0}^{n-1}|\Delta^k u(y)| + \left|\frac{\partial\Delta^{n-k-1}u(y)}{\partial\bar n}\right| \leqslant C_7 \exp\left(a\cos\rho_2\left(y_1 - \frac{h}{2}\right)\exp\rho_2|y'|\right),$$

где $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < \rho$. Тогда для любой точки $x_0 \in D$ имеет место равенство

$$u(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{\partial D}\left[\Delta^k u(y)\frac{\partial\Delta^{n-k-1}\Phi(y,x_0)}{\partial\bar n} - \Delta^{n-k-1}\Phi(y,x_0)\frac{\partial\Delta^k u(y)}{\partial\bar n}\right]ds.$$

Доказательство. Возьмём произвольную точку $x_0 \in D$ и такое число R_1, что $R_1 > |x_0| + 1$.

Из свойств функции $u \in B_\rho(D)$ и оценок для Φ следует, что интеграл

$$\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{\partial D}\left[\Delta^k u(y)\frac{\partial\Delta^{n-k-1}\Phi(y,x_0)}{\partial\bar n} - \Delta^{n-k-1}\Phi(y,x_0)\frac{\partial\Delta^k u(y)}{\partial\bar n}\right]ds$$

существует, поэтому для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $R_2 > 0$, что

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{\partial D}\left[\Delta^k u(y)\frac{\partial\Delta^{n-k-1}\Phi(y,x_0)}{\partial\bar n} - \Delta^{n-k-1}\Phi(y,x_0)\frac{\partial\Delta^k u(y)}{\partial\bar n}\right]ds\right| < \varepsilon.$$

Пусть $R = \max(R_1, R_2)$, $K_R(x)$ — шар радиуса R с центром в точке x, $CK_R(x) = \mathbb{R}^3 \setminus K_R(x)$, $D_R^+ = D \cap K_R(0)$, $D_R^- = D \cap CK_R(0)$. Фиксируем произвольную точку $x_0 \in D$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ в области $D_R^+ \setminus K_\varepsilon(x_0)$ функции $\Phi(y,x)$, $u(y)$ полигармонические:

$$\Delta^n\Phi(y,x) = 0, \quad \Delta^n u = 0.$$

Поэтому, применяя формулу Гутцмера

$$\int\limits_{D_R^+\setminus K_\varepsilon(x_0)}(\Phi\Delta^n u - u\Delta^n\Phi)\,dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{\partial(D_R^+\setminus K_\varepsilon(x_0))}\left[\Delta^k\Phi\frac{\partial\Delta^{n-k-1}\Phi(y,x_0)}{\partial\bar n} - \Delta^{n-k-1}\Phi(y,x_0)\frac{\partial\Delta^k u(y)}{\partial\bar n}\right]ds,$$

получим

$$\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{\partial D_R^+}\left[\Delta^k\Phi\frac{\partial\Delta^{n-k-1}\Phi(y,x_0)}{\partial\bar n}-\Delta^{n-k-1}\Phi(y,x_0)\frac{\partial\Delta^k u(y)}{\partial\bar n}\right]ds=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{\partial K_\varepsilon(x_0)}\left[\Delta^k\Phi\frac{\partial\Delta^{n-k-1}\Phi(y,x_0)}{\partial\bar n}-\Delta^{n-k-1}\Phi(y,x_0)\frac{\partial\Delta^k u(y)}{\partial\bar n}\right]ds.$$

Поскольку $\varphi(y,x)=c\bigl(r^{-1}+G(y,x)\bigr)$ и $\Phi(y,x)=c\bigl(r^{2n-3}+r^{2n-2}G(y,x)\bigr)$, где $G(y,x)$ гармоническая всюду в $\mathbb{R}^3$ по переменному y, включая и точку $y=x$, то при $\varepsilon\to 0$ функция

$$\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{\partial K_\varepsilon(x_0)}\left[\Delta^k\Phi\frac{\partial\Delta^{n-k-1}\Phi(y,x_0)}{\partial\bar n}-\Delta^{n-k-1}\Phi(y,x_0)\frac{\partial\Delta^k u(y)}{\partial\bar n}\right]ds$$

стремится к $u(x_0)$.

Пусть ε_2 — произвольное положительное число. Границу ∂D_R^- разобьём на части:

$$\partial D_R^-=L_1\cup L_2\cup L_3,$$
$$L_1=S\cap CK_R(0),\quad L_2=(y_1=0)\cap CK_R(0),\quad L_3=\partial K_R(0)\cap D.$$

Сначала оценим интегралы по $L_1\cup L_2$. Из вышеприведённых лемм следует, что

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{L_1\cup L_2}\left[\Delta^k\Phi\frac{\partial\Delta^{n-k-1}\Phi(y,x_0)}{\partial\bar n}-\Delta^{n-k-1}\Phi(y,x_0)\frac{\partial\Delta^k u(y)}{\partial\bar n}\right]ds\right|\leqslant$$

$$\leqslant C\int\limits_{L_1\cup L_2}\frac{r^{2n-2}|ds|}{\alpha\exp(b\cos\rho_2(y_1-h/2)\operatorname{ch}\rho\alpha)}<\frac{\varepsilon_2}{2}$$

Аналогично для L_3 получим

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{L_3}\left[\Delta^k\Phi\frac{\partial\Delta^{n-k-1}\Phi(y,x_0)}{\partial\bar n}-\Delta^{n-k-1}\Phi(y,x_0)\frac{\partial\Delta^k u(y)}{\partial\bar n}\right]ds\right|\leqslant$$

$$\leqslant C\int\limits_{L_1\cup L_2}\frac{r^{2n-2}|ds|}{\alpha\exp(b\cos\rho_2(y_1-h/2)\operatorname{ch}\rho\alpha)}<\frac{\varepsilon_2}{2}.$$

Таким образом, показано, что

$$\left|u(x_0)-\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{\partial D_R^+}\left[\Delta^k u(y)\frac{\partial\Delta^{n-k-1}\Phi(y,x_0)}{\partial\bar n}-\Delta^{n-k-1}\Phi(y,x_0)\frac{\partial\Delta^k u(y)}{\partial\bar n}\right]ds\right|<\varepsilon_2.$$

$\square$

Литература

[1] Лаврентьев М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики. — Новосибирск, 1962.

[2] Соболев С. Л. Введение в теорию кубатурных формул. — М.: Наука, 1974.

[3] Ярмухамедов Ш. Я. Задача Коши для полигармонического уравнения // Докл. РАН. — 2003. — Т. 388, № 2. — С. 162—165.