D_∞-дифференциальные E_∞-алгебры и спектральные последовательности D_∞-дифференциальных модулей

С. В. ЛАПИН
Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва

УДК 515.14

Ключевые слова: спектральная последовательность расслоения, D_∞-дифференциальная A_∞-алгебра, фильтрация.

Аннотация

В работа вводится понятие E_∞-алгебры с фильтрацией и выстраивается аппарат спектральных последовательностей для таких алгебр, который затем применяется к мультипликативным когомологическим спектральным последовательностям расслоений. Доказано существование структуры D_∞-дифференциальной A_∞-алгебры в членах когомологической спектральной последовательности расслоения над полем и вычислена начальная мультипликативная компонента этой структуры на втором члене спектральной последовательности.

Abstract

S. V. Lapin, D_∞-differential E_∞-algebras and spectral sequences of D_∞-differential modules, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 8, pp. 105—125.

In the present paper, we introduce the concept of a filtered E_∞-algebra, construct spectral sequences for such algebras, and apply them to multiplicative cohomological spectral sequences of bundles. The existence of the structure of D_∞-differential A_∞-algebra in cohomological spectral sequences of bundles over fields is proved and the initial multiplicative component of this structure at the second term of the spectral sequence is calculated.

В [1] мы ввели понятие D_∞-дифференциального модуля — квантового аналога понятия возмущения дифференциального модуля в теории возмущений Гугенхайма—Лэмба—Сташеффа в гомологической алгебре [10—14]. В [3] мы также показали, что структура D_∞-дифференциального модуля гомотопически инвариантна, и установили связь между теорией спектральных последовательностей и конструкцией D_∞-дифференциального модуля. В частности, мы показали, что произвольная спектральная последовательность над полем является спектральной последовательностью некоторого D_∞-дифференциального модуля.

С другой стороны, В. А. Смирнов [5] ввёл понятие E_∞-алгебры в категории дифференциальных градуированных модулей. Одним из основных свойств

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 8, с. 105—125.

структуры E_∞-алгебры является её гомотопическая инвариантность, показанная в [7]. А именно, в каждом дифференциальном градуированном модуле, гомотопически эквивалентном некоторой E_∞-алгебре, можно ввести структуру E_∞-алгебры.

В данной статье мы вводим понятие D_∞-дифференциальной E_∞-алгебры — квантовый аналог понятия E_∞-алгебры. Мы также доказываем гомотопическую инвариантность структуры D_∞-дифференциальной E_∞-алгебры. Мы исследуем основные гомотопические свойства D_∞-дифференциальных E_∞-алгебр и изучаем связи между конструкцией D_∞-дифференциальной E_∞-алгебры и спектральными последовательностями D_∞-дифференциальных модулей.

1. D_∞-дифференциальные модули и спектральные последовательности D_∞-дифференциальных модулей

В этом разделе напоминаются необходимые определения и утверждения из [1—4], связанные с понятием D_∞-дифференциального модуля.

Пусть K — коммутативное кольцо с единицей. Все рассматриваемые в этом разделе модули и отображения модулей являются соответственно K-модулями и K-линейными отображениями модулей.

Напомним сначала, что дифференциальным градуированным модулем или, более кратко, просто дифференциальным модулем (X, d) называется произвольный градуированный модуль $X = \{X_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, снабжённый дифференциалом $d\colon X_\bullet \to X_{\bullet-1}$, который является отображением градуированных модулей степени -1 и для которого выполнено условие $d^2 = 0$. Отображением дифференциальных модулей $f\colon (X, d) \to (Y, d)$ называется отображение градуированных модулей $f\colon X_\bullet \to Y_\bullet$ степени 0, удовлетворяющее условию $df = fd$. Гомотопией $h\colon X \to Y$ между отображениями $f, g\colon (X, d) \to (Y, d)$ дифференциальных модулей называется отображение градуированных модулей $h\colon X_\bullet \to Y_{\bullet+1}$ степени 1, для которого выполнено условие $dh + hd = f - g$.

Пусть заданы отображения дифференциальных модулей $\eta\colon X \rightleftarrows Y : \xi$, удовлетворяющие условию $\eta\xi = 1_Y$, и задана гомотопия $h\colon X \to X$ между отображениями дифференциальных модулей $\xi\eta$ и 1_X, для которой выполнены условия $\eta h = 0$, $\xi h = 0$, $hh = 0$. Любая указанная выше тройка $(\eta\colon X \rightleftarrows Y : \xi,\ h)$ называется SDR-ситуацией дифференциальных модулей.

Один из источников появления SDR-ситуаций дифференциальных модулей — гомологии заданных над полем дифференциальных модулей. Действительно, пусть $H(X) = \operatorname{Ker} d / \operatorname{Im} d$ — гомологический модуль произвольного заданного над полем дифференциального модуля (X, d). Если градуированный модуль $H(X)$ рассмотреть как дифференциальный модуль с нулевым дифференциалом, то при помощи фиксированного разложения в прямую сумму $\operatorname{Ker} d = H(X) \oplus \operatorname{Im} d$ получим SDR-ситуацию $(\eta\colon X \rightleftarrows H(X) : \xi,\ h)$ дифференциальных модулей. Полученную SDR-ситуацию дифференциальных модулей далее будем называть гомологической SDR-ситуацией дифференциального модуля (X, d).

D_∞-дифференциалом градуированного модуля $X = \{X_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, называется семейство гомоморфизмов $\{d^i \colon X_\bullet \to X_{\bullet-1} \mid i \geqslant 0\}$, которые для каждого целого числа $k \geqslant 0$ удовлетворяют соотношению

$$\sum_{i+j=k} d^i d^j = 0.$$

D_∞-дифференциальным модулем или, более кратко, D_∞-модулем (X, d^i) называется произвольный градуированный модуль X, рассматриваемый вместе с некоторым фиксированным D_∞-дифференциалом $\{d^i \colon X_\bullet \to X_{\bullet-1} \mid i \geqslant 0\}$ этого градуированного модуля.

Для любого D_∞-модуля (X, d^i) при $k = 0$ имеем

$$d^0 d^0 = 0.$$

Следовательно, (X, d^0) является дифференциальным модулем. При $k = 1$ имеем

$$d^1 d^0 + d^0 d^1 = 0.$$

Другими словами, отображения d^0 и d^1 являются антикоммутирующими. Из этого следует, что композиция $d^1 d^1 \colon X \to X$ является эндоморфизмом дифференциального модуля (X, d^0). При $k = 2$ получаем

$$d^0 d^2 + d^2 d^0 = 0 - d^1 d^1.$$

Это означает, что отображение $d^2 \colon X \to X$ является гомотопией между нулевым отображением и отображением дифференциальных модулей $d^1 d^1 \colon (X, d^0) \to (X, d^0)$. Таким образом, отображение $d^1 \colon X \to X$ является дифференциалом с точностью до гомотопии.

Морфизмом D_∞-модулей $f \colon (X, d^i) \to (Y, d^i)$ называется семейство гомоморфизмов $f = \{f^i \colon X_\bullet \to Y_\bullet \mid i \geqslant 0\}$, удовлетворяющих для каждого целого числа $k \geqslant 0$ соотношению

$$\sum_{i+j=k} f^i d^j = \sum_{i+j=k} d^i f^j.$$

Для любого морфизма D_∞-модулей $f = \{f^i\} \colon (X, d^i) \to (Y, d^i\}$ при $k = 0$ имеем

$$f^0 d^0 = d^0 f^0.$$

Следовательно, определено отображение дифференциальных модулей $f^0 \colon (X, d^0) \to (Y, d^0)$. При $k = 1$ имеем

$$f^0 d^1 - d^1 f^0 = d^0 f^1 - f^1 d^0.$$

Следовательно, $f^1 \colon X \to Y$ является гомотопией между нулевым отображением и отображением $f^0 d^1 - d^1 f^0 \colon (X, d^0) \to (Y, d^0)$. Другими словами, отображение f^0 относительно d^1 является с точностью до гомотопии отображением дифференциальных модулей.

Для любых морфизмов D_∞-модулей $f = \{f^i\}\colon X \to Y$ и $g = \{g^i\}\colon Y \to Z$ определим их композицию $gf = \{(gf)^i\}\colon X \to Z$, полагая

$$(gf)^i = \sum_{s+t=i} g^s f^t, \quad i \geqslant 0.$$

Легко убедиться, что тождественным морфизмом $1_X = \{1_X^i\}$ для D_∞-модуля (X, d^i) служит семейство отображений модулей $1_X = \{1_X^i\colon X \to X\}$, где $1_X^i = 0$, $i > 0$, а 1_X^0 — тождественное отображение модуля X. Таким образом, определена категория D_∞-модулей.

D_∞-модуль (X, d^i) называется $D_\infty^{(s)}$-дифференциальным модулем или, более кратко, $D_\infty^{(s)}$-модулем, если найдётся такое целое число $s \geqslant 0$, для которого выполнены условия $d^i = 0$, $i < s$. В этом случае D_∞-дифференциал $\{d^i\}$ будем называть $D_\infty^{(s)}$-дифференциалом. Морфизмами $D_\infty^{(s)}$-модулей считаются морфизмы D_∞-модулей. Для $D_\infty^{(s)}$-модуля (X, d^i) будем использовать запись (X, d^{i+s}), где $i \geqslant 0$.

Очевидно, что при $s = 0$ категория $D_\infty^{(s)}$-модулей совпадает с указанной выше категорией D_∞-модулей, а для каждого фиксированного числа $s \geqslant 0$ категория $D_\infty^{(s+1)}$-модулей является полной подкатегорией категории $D_\infty^{(s)}$-модулей.

Отметим, что для произвольного $D_\infty^{(s)}$-модуля (X, d^{i+s}) имеет место равенство $d^s d^s = 0$, т. е. определён дифференциальный модуль (X, d^s).

Гомотопией между морфизмами $D_\infty^{(s)}$-модулей $f, g\colon (X, d^{i+s}) \to (Y, d^{i+s})$ называется семейство гомоморфизмов $h = \{h^{i-s}\colon X_\bullet \to Y_{\bullet+1} \mid i \geqslant 0\}$, удовлетворяющих для каждого целого числа $k \geqslant 0$ соотношению

$$\sum_{i+j=k} d^{i+s} h^{j-s} + h^{j-s} d^{i+s} = f^k - g^k.$$

Для любой гомотопии $h = \{h^{i-s}\colon X_\bullet \to Y_{\bullet+1}\}$ между морфизмами $D_\infty^{(s)}$-модулей $f, g\colon (X, d^{i+s}) \to (Y, d^{i+s})$ при $k = 0$ имеем

$$d^s h^{-s} + h^{-s} d^s = f^0 - g^0.$$

Следовательно, $h^{-s}\colon X_\bullet \to Y_{\bullet+1}$ — гомотопия между отображениями f^0, $g^0\colon (X, d^s) \to (Y, d^s)$ дифференциальных модулей.

Легко проверяется, что отношение между морфизмами $D_\infty^{(s)}$-модулей, определяемое наличием гомотопии между ними, является отношением эквивалентности. При помощи этого отношения эквивалентности стандартно определяется понятие гомотопической эквивалентности между $D_\infty^{(s)}$-модулями.

Напомним теперь основные гомотопические свойства $D_\infty^{(s)}$-модулей. Пусть заданы произвольные $D_\infty^{(s)}$-модули (X, d^{i+s}) и (Y, d^{i+s}). Кроме того, пусть заданы произвольные морфизмы $D_\infty^{(s)}$-модулей $\eta = \{\eta^i\}\colon (X, d^{i+s}) \rightleftarrows (Y, d^{i+s}) :\{\xi^i\} = \xi$ и некоторая гомотопия $h = \{h^{i-s}\}\colon X \to X$ между морфизмами $D_\infty^{(s)}$-модулей $\xi\eta$ и 1_X, для которых выполнены следующие условия:

$$\sum_{i+j=k}\eta^i\xi^j=(1_Y)^k,\quad \sum_{i+j=k}d^{i+s}h^{j-s}+h^{i-s}d^{j+s}=\sum_{i+j=k}\xi^i\eta^j-(1_X)^k,\quad k\geqslant 0.$$

Рассмотренная ситуация записывается в виде $(\eta\colon X\rightleftarrows Y:\xi,\,h)$ и называется сильной деформационной ретракцией $D_\infty^{(s)}$-модулей. При выполнении дополнительных условий

$$\sum_{i+j=k}\eta^i h^{j-s}=0,\quad \sum_{i+j=k}h^{i-s}\xi^j=0,\quad \sum_{i+j=k}h^{i-s}h^{j-s}=0,\quad k\geqslant 0,$$

указанная выше сильная деформационная ретракция $D_\infty^{(s)}$-модулей называется SDR-ситуацией $D_\infty^{(s)}$-модулей.

Теорема 1.1. *Пусть заданы произвольные $D_\infty^{(s)}$-модуль (X,d^{i+s}) и дифференциальный модуль (Y,d). Кроме того, пусть задана любая сильная деформационная ретракция $(\eta\colon (X,d^s)\rightleftarrows (Y,d):\xi,\,h)$ дифференциальных модулей. Тогда набор гомоморфизмов $\{d^{i+s}\colon Y_\bullet\to Y_{\bullet-1}\}$, определяемых формулами*

$$d^s=d,\quad d^{i+s}=\eta\Bigg(\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant i\\ i_1+\ldots+i_k=i\\ i_1\geqslant 1,\ldots,i_k\geqslant 1}}d^{i_1+s}\underbrace{(hd^{i_2+s})\ldots(hd^{i_k+s})}_{k-1}\Bigg)\xi,\quad i\geqslant 1,\tag{1}$$

является $D_\infty^{(s)}$-дифференциалом модуля Y. Более того, имеется сильная деформационная ретракция $D_\infty^{(s)}$-модулей $(\tilde\eta\colon X\rightleftarrows Y:\tilde\xi,\,\tilde h)$, определяемая формулами

$$\tilde\xi^0=\xi,\quad \tilde\xi^i=h\Bigg(\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant i\\ i_1+\ldots+i_k=i\\ i_1\geqslant 1,\ldots,i_k\geqslant 1}}d^{i_1+s}\underbrace{(hd^{i_2+s})\ldots(hd^{i_k+s})}_{k-1}\Bigg)\xi,\quad i\geqslant 1,\tag{2}$$

$$\tilde\eta^0=\eta,\quad \tilde\eta^i=\eta\Bigg(\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant i\\ i_1+\ldots+i_k=i\\ i_1\geqslant 1,\ldots,i_k\geqslant 1}}d^{i_1+s}\underbrace{(hd^{i_2+s})\ldots(hd^{i_k+s})}_{k-1}\Bigg)h,\quad i\geqslant 1,\tag{3}$$

$$\tilde h^{-s}=h,\quad \tilde h^{i-s}=h\Bigg(\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant i\\ i_1+\ldots+i_k=i\\ i_1\geqslant 1,\ldots,i_k\geqslant 1}}d^{i_1+s}\underbrace{(hd^{i_2+s})\ldots(hd^{i_k+s})}_{k-1}\Bigg)h,\quad i\geqslant 1.\tag{4}$$

Если сильная деформационная ретракция $(\eta\colon (X,d^s)\rightleftarrows (Y,d):\xi,\,h)$ является SDR-ситуацией дифференциальных модулей, то сильная деформационная ретракция $(\tilde\eta\colon X\rightleftarrows Y:\tilde\xi,\,\tilde h)$, получаемая по формулам (1)—(4), *является SDR-ситуацией $D_\infty^{(s)}$-модулей.* □

Пусть над произвольным полем задан $D_\infty^{(s)}$-модуль (X,d^{i+s}). Тогда, как было отмечено в начале раздела, определена гомологическая SDR-ситуация $(\eta\colon X\rightleftarrows H(X):\xi,\,h)$ дифференциального модуля (X,d^s). Если применить к этой SDR-ситуации теорему 1.1, получим следующее утверждение.

Следствие 1.1. *Пусть над произвольным полем задан $D_\infty^{(s)}$-модуль (X, d^{i+s}), и пусть $H(X)$ — гомологический модуль дифференциального модуля (X, d^s). Тогда формулы* (1)—(4) *задают на $H(X)$ структуру $D_\infty^{(s)}$-модуля $\{d^{i+s}\colon H_\bullet(X) \to H_{\bullet-1}(X)\}$, где $d^s = 0$, и определяют SDR-ситуацию $D_\infty^{(s)}$-модулей $(\tilde{\eta}\colon X \rightleftarrows H(X) : \tilde{\xi}, \tilde{h})$.* □

Так как для $D_\infty^{(s)}$-модуля $(H(X), d^{i+s})$ из следствия 1.1 выполнено условие $d^s = 0$, то модуль гомологий $H(X)$ является $D_\infty^{(s+1)}$-модулем $\big(H(X), d^{i+(s+1)}\big)$. В частности, определён дифференциальный модуль $(H(X), d^{s+1})$, к которому можно снова применять следствие 1.1. Итерация применения следствия 1.1 к заданному над полем $D_\infty^{(1)}$-модулю приводит к следующему утверждению.

Теорема 1.2. *Любой заданный над полем $D_\infty^{(1)}$-модуль (X, d^{i+1}) определяет спектральную последовательность $\{(X_s, d_s)\}_{s\geqslant 1}$, где $(X_1, d_1) = (X, d^1)$. Для каждого $s \geqslant 1$ член (X_s, d_s) этой спектральной последовательности имеет структуру $D_\infty^{(s)}$-модуля (X_s, d_s^{i+s}), где $d_s^s = d_s$. Структура $D_\infty^{(s+1)}$-модуля в члене X_{s+1} индуцирована по следствию 1.1 структурой $D_\infty^{(s)}$-модуля в члене X_s, и, в частности, $D_\infty^{(s+1)}$-модуль X_{s+1}, если рассматривать его как $D_\infty^{(s)}$-модуль, является гомотопически эквивалентным $D_\infty^{(s)}$-модулю X_s.* □

$D_\infty^{(s)}$-модуль (X, d^{i+s}) называется стабильным, если для каждого $x \in X$ найдётся номер $k \geqslant 0$, зависящий от элемента x, для которого выполнены условия $d^{i+s}(x) = 0$, $i > k$. Модулем гомологий $H(X)$ стабильного $D_\infty^{(s)}$-модуля X называется модуль гомологий $\operatorname{Ker} D_s / \operatorname{Im} D_s$ модуля X относительно суммарного дифференциала

$$D_s = (d^s + d^{1+s} + \ldots + d^{i+s} + \ldots)\colon X_\bullet \to X_{\bullet-1}.$$

Отметим, что суммарный дифференциал корректно определен только в случае стабильных $D_\infty^{(s)}$-модулей.

Легко видеть, что если в условиях теоремы 1.1 данный $D_\infty^{(s)}$-модуль (X, d^{i+s}) является стабильным, то получаемый в этой теореме $D_\infty^{(s)}$-модуль (Y, d^{i+s}) также является стабильным. Применяя это наблюдение к спектральной последовательности стабильного $D_\infty^{(1)}$-модуля, получаем следующее утверждение.

Теорема 1.3. *Если заданный над полем $D_\infty^{(1)}$-модуль X является стабильным, то спектральная последовательность $\{(X_s, d_s)\}_{s\geqslant}$ этого $D_\infty^{(1)}$-модуля сходится к модулю его гомологий $H(X) = \operatorname{Ker} D_1 / \operatorname{Im} D_1$. Все члены X_s, $s \geqslant 1$, этой спектральной последовательности, если их рассматривать как дифференциальные модули с суммарными дифференциалами $D_s\colon (X_s)_\bullet \to (X_s)_{\bullet-1}$, гомотопически эквивалентны между собой и гомотопически эквивалентны дифференциальному модулю $(H(X), d = 0)$.* □

2. Дифференциальные модули с (1)-фильтрациями над полями и стабильные $D_\infty^{(1)}$-дифференциальные модули

В этом разделе рассматриваются дифференциальные модули с (1)-фильтрациями и устанавливается связь между заданными над полями дифференциальными модулями с (1)-фильтрациями и стабильными $D_\infty^{(1)}$-дифференциальными модулями.

Напомним сначала, что фильтрацией $\{X^n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, дифференциального модуля (X, d) называется семейство градуированных подмодулей $X^n_\bullet \subseteq X_\bullet$, для которых выполнены следующие условия:

$$\ldots \subseteq X^n_\bullet \subseteq X^{n+1}_\bullet \subseteq \ldots, \quad \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} X^n = X, \quad \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} X^n = 0, \quad d(X^n) \subseteq X^n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Отображением $f\colon (X, \{X^n\}) \to (Y, \{Y^n\})$ дифференциальных модулей с фильтрациями называется отображение $f\colon X \to Y$ дифференциальных модулей, для которого выполнено условие $f(X^n) \subseteq Y^n$, $n \in \mathbb{Z}$. Гомотопией h между отображениями $f, g\colon (X, \{X^n\}) \to (Y, \{Y^n\})$ дифференциальных модулей с фильтрациями называется гомотопия $h\colon X \to Y$ между отображениями $f, g\colon X \to Y$ дифференциальных модулей, для которой выполнено условие $h(X^n) \subseteq Y^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

(1)-фильтрацией дифференциального модуля (X, d) будем называть произвольную фильтрацию $\{X^n\}$ этого дифференциального модуля, удовлетворяющую условию $d(X^n) \subseteq X^{n-1}$, $n \in \mathbb{Z}$. Отображениями дифференциальных модулей с (1)-фильтрациями будем считать отображения дифференциальных модулей с фильтрациями. Гомотопией h между отображениями $f, g\colon (X, \{X^n\}) \to (Y, \{Y^n\})$ дифференциальных модулей с (1)-фильтрациями будем называть любую гомотопию $h\colon X \to Y$ между отображениями $f, g\colon X \to Y$ дифференциальных модулей, для которой выполнено условие $h(X^n) \subseteq Y^{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Под SDR-ситуацией дифференциальных модулей с (1)-фильтрациями будем понимать SDR-ситуацию $(\eta\colon X \rightleftarrows Y : \xi,\, h)$ дифференциальных модулей, в которой отображения $\eta\colon X \to Y$, $\xi\colon Y \to X$ являются морфизмами дифференциальных модулей с (1)-фильтрациями и гомотопия $h\colon X \to X$ является гомотопией между морфизмами дифференциальных модулей с (1)-фильтрациями.

Пусть задан произвольный дифференциальный модуль X с (1)-фильтрацией $\{X^n\}$, и пусть $i^n\colon H(X^n) \to H(X)$ — отображение модулей гомологий, индуцированное вложением $X^n \subseteq X$. Тогда семейство подмодулей $H(X)^n \subseteq H(X)$, $n \in \mathbb{Z}$, где $H(X)^n = \mathrm{Im}(i^n)$, является фильтрацией $\{H(X)^n\}$ гомологического модуля $H(X)$, которую можно считать (1)-фильтрацией. Легко убедиться, что если дифференциальный модуль X с (1)-фильтрацией $\{X^n\}$ задан над полем, то гомологическая SDR-ситуация $(\eta\colon X \rightleftarrows H(X) : \xi,\, h)$ является SDR-ситуацией дифференциальных модулей с (1)-фильтрациями $\{X^n\}$ и $\{H(X)^n\}$. Эту SDR-ситуацию дифференциальных модулей с (1)-фильтрациями далее будем называть гомологической SDR-ситуацией дифференциального модуля (X, d) с (1)-фильтрацией $\{X^n\}$.

Сопряжённым дифференциальным модулем к заданному дифференциальному модулю (X, d) называется дифференциальный модуль (X^*, d^*), для которого $X^* = \{X^*_{-n}\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $X^*_{-n} = (X_n)^*$, $d^*_{-\bullet} = (d_{\bullet+1})^* \colon X^*_{-\bullet} \to X^*_{-\bullet-1}$, где $*$ — операция сопряжения модулей. Легко убедиться, что произвольная (1)-фильтрация $\{X^n\}$ дифференциального модуля X индуцирует на сопряжённом дифференциальном модуле X^* (1)-фильтрацию $\{(X^*)^{-n}\}$, где $(X^*)^{-n} = (X/X^n)^*$. Ясно, что каждая SDR-ситуация $(\eta\colon X \rightleftarrows Y : \xi,\, h)$ дифференциальных модулей с (1)-фильтрациями определяет SDR-ситуацию $(\xi^*\colon X^* \rightleftarrows Y^* : \eta^*,\, h^*)$ дифференциальных модулей с (1)-фильтрациями.

Примеры дифференциальных модулей с (1)-фильтрациями можно получить при помощи конструкции нормализованного (ко)цепного комплекса симплициального множества [16]. Действительно, если рассмотреть фильтрацию $\{X^n\}$ симплициального множества X его остовами, то нормализованный цепной комплекс $N(X)$ и нормализованный коцепной комплекс $N^*(X)$ этого симплициального множества являются дифференциальными модулями соответственно с (1)-фильтрациями $\{N(X)^n\}$ и $\{N^*(X)^{-n}\}$, где $N(X)^n = N(X^n)$, $N^*(X)^{-n} = \big(N(X)/N(X^n)\big)^*$, $n \geqslant 0$. В частности, если для произвольного топологического пространства X рассмотреть симплициальное множество $S(X)$ его сингулярных симплексов [16], то получим, что дифференциальные модули $N(X) = N\big(S(X)\big)$ и $N^*(X) = N^*\big(S(X)\big)$ имеют соответственно (1)-фильтрации $\{N(X)^n\}$ и $\{N^*(X)^{-n}\}$, которые индуцированы фильтрацией остовами $\{S(X)^n\}$ симплициального множества $S(X)$.

Рассмотрим один из способов введения (1)-фильтраций на дифференциальных модулях. Легко проверяется, что справедливо следующее утверждение.

Предложение 2.1. *Пусть задано отображение дифференциальных модулей $f\colon X \to Y$, и, кроме того, пусть задана произвольная* (1)*-фильтрация $\{Y^n\}$ дифференциального модуля Y. Тогда на дифференциальном модуле X имеется* (1)*-фильтрация $\{X^n\}$, где $X^n = f^{-1}(Y^n)$, $n \in \mathbb{Z}$.* □

Следствие 2.1. *Пусть задано произвольное отображение симплициальных множеств $f\colon X \to Y$, и пусть $\{Y^n\}$ — фильтрация симплициального множества Y его остовами. Тогда нормализованные цепной комплекс $N(X)$ и коцепной комплекс $N^*(X)$ являются дифференциальными модулями соответственно с* (1)*-фильтрациями $\{N(X)^n\}$ и $\{N^*(X)^{-n}\}$, где $N(X)^n = N\big(f^{-1}(Y^n)\big)$ и $N^*(X)^{-n} = (N(X)/N(X)^n)^*$.* □

Следствие 2.2. *Пусть задано произвольное расслоение Серра $p\colon E \to B$, и пусть $\{S(B)^n\}$ — фильтрация остовами симплициального множества $S(B)$ сингулярных симплексов базы B этого расслоения. Тогда нормализованный цепной комплекс $N(E)$ и нормализованный коцепной комплекс $N^*(E)$ являются дифференциальными модулями соответственно с* (1)*-фильтрациями $\{N(E)^n\}$ и $\{N^*(E)^{-n}\}$, где $N(E)^n = N\big(S(f)^{-1}(S(B)^n)\big)$ и $N^*(E)^{-n} = (N(E)/N(E)^n)^*$.* □

Рассмотрим теперь связь между заданными над полем дифференциальными модулями с (1)-фильтрациями и стабильными $D_\infty^{(1)}$-модулями.

Пусть над полем задан произвольный дифференциальный модуль (X, d) с (1)-фильтрацией $\{X^n\}$. Обозначим через Z_X^k подмодуль градуированного модуля X^k, для которого $X^k = Z_X^k \oplus X^{k-1}$. При помощи условия $d(X_\bullet^k) \subseteq X_{\bullet-1}^{k-1}$ определим стабильный $D_\infty^{(1)}$-модуль (X, d^{i+1}), полагая

$$d^{i+1} = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} d_k^{i+1}\colon X_\bullet \to X_{\bullet-1}, \quad i \geqslant 0,$$

где отображение $d_k^{i+1}\colon (Z_X^k)_\bullet \to \big(Z_X^{k-(i+1)}\big)_{\bullet-1}$ является компонентой отображения модулей

$$d\colon (Z_X^k)_\bullet \to X_{\bullet-1}^{k-1} = \big((Z_X^{k-1})_{\bullet-1} \oplus \ldots \oplus (Z_X^{k-(i+1)})_{\bullet-1} \oplus \ldots\big).$$

Ясно, что $D_\infty^{(1)}$-модуль (X, d^{i+1}) является стабильным $D_\infty^{(1)}$-модулем, для которого выполнено условие $(X, D_1) = (X, d)$, где D_1 — суммарный дифференциал $D_\infty^{(1)}$-модуля (X, d^{i+1}).

Пусть теперь над полем задано произвольное отображение

$$f\colon (X, \{X^n\}) \to (Y, \{Y^n\})$$

дифференциальных модулей с (1)-фильтрациями. При помощи условия $f(X_\bullet^k) \subseteq Y_\bullet^k$ определим отображение стабильных $D_\infty^{(1)}$-модулей

$$\{f^i\}\colon (X, d^{i+1}) \to (Y, d^{i+1}),$$

полагая

$$f^i = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} f_k^i\colon X_\bullet \to Y_\bullet, \quad i \geqslant 0,$$

где отображение $f_k^i\colon (Z_X^k)_\bullet \to (Z_Y^{k-i})_\bullet$ является компонентой отображения модулей

$$f\colon (Z_X^k)_\bullet \to Y_\bullet^k = \big((Z_Y^k)_\bullet \oplus \ldots \oplus (Z_Y^{k-i})_\bullet \oplus \ldots\big).$$

Ясно, что по построению $f = (f^0 + f^1 + \ldots + f^i + \ldots)$. Аналогично показывается, что любая гомотопия между отображениями заданных над полем дифференциальных модулей с (1)-фильтрациями однозначно определяет гомотопию между соответствующими отображениями $D_\infty^{(1)}$-модулей. Таким образом, имеем следующее утверждение.

Предложение 2.2. *Каждый заданный над полем дифференциальный модуль (X, d) с (1)-фильтрацией однозначно определяет на градуированном модуле X структуру стабильного $D_\infty^{(1)}$-модуля (X, d^{i+1}), для которого $(X, D_1) = (X, d)$, где D_1 — суммарный дифференциал $D_\infty^{(1)}$-модуля (X, d^{i+1}). Более того, каждая заданная над полем SDR-ситуация дифференциальных модулей с (1)-фильтрациями однозначно определяет SDR-ситуацию стабильных $D_\infty^{(1)}$-модулей, для которой суммарная SDR-ситуация дифференциальных модулей совпадает с исходной SDR-ситуацией дифференциальных модулей.* □

Если рассмотреть спектральную последовательность дифференциального модуля с (1)-фильтрацией [15, 17] и сравнить её с указанной в теореме 1.2 спектральной последовательностью $D_\infty^{(1)}$-модуля, определяемого данным дифференциальным модулем с (1)-фильтрацией, то получим следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Пусть* $\{(X_s, d_s)\}_{s\geqslant 1}$ — *спектральная последовательность произвольного заданного над полем дифференциального модуля* (X, d) *с (1)-фильтрацией. Тогда на каждом члене* (X_s, d_s) *этой спектральной последовательности имеется структура стабильного* $D_\infty^{(s)}$*-модуля* (X_s, d_s^{i+s})*, которая связана с дифференциалом* d_s *в этом члене равенством* $d_s^s = d_s$*. Если (1)-фильтрация дифференциального модуля* X *является ограниченной снизу, то для каждого* $s \geqslant 1$ *модуль гомологий* $H(X_s) = \operatorname{Ker} D_s / \operatorname{Im} D_s$ *стабильного* $D_\infty^{(s)}$*-модуля* (X_s, d_s^{i+s}) *изоморфен предельному члену* X_∞ *спектральной последовательности* $\{(X_s, d_s)\}_{s\geqslant 1}$ *и, следовательно, изоморфен модулю гомологий* $H(X) = \operatorname{Ker} d / \operatorname{Im} d$. $\square$

Следствие 2.3. *Пусть* $\{(X_s, d_s)\}_{s\geqslant 1}$ — *заданная над полем (ко)гомологическая спектральная последовательность произвольного расслоения Серра* $p\colon E \to B$*. Тогда на каждом члене* (X_s, d_s) *этой спектральной последовательности имеется структура стабильного* $D_\infty^{(s)}$*-модуля* (X_s, d_s^{i+s})*, которая связана с дифференциалом* d_s *в этом члене равенством* $d_s^s = d_s$*. Для каждого* $s \geqslant 1$ *модуль гомологий* $H(X_s) = \operatorname{Ker} D_s / \operatorname{Im} D_s$ *стабильного* $D_\infty^{(s)}$*-модуля* (X_s, d_s^{i+s}) *изоморфен модулю (ко)гомологий* $H(E)$ *тотального пространства данного расслоения.* $\square$

3. Операды и алгебры над операдами

В этом разделе напоминаются основные определения и конструкции из [5—9], связанные с понятиями операды и алгебры над операдой в категории дифференциальных модулей.

Пусть K — коммутативное кольцо с единицей. Все рассматриваемые в этом разделе модули и отображения модулей являются соответственно K-модулями и K-линейными отображениями модулей.

Симметрическим семейством $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}(j)\}_{j\geqslant 1}$ называется семейство дифференциальных модулей $\mathcal{E}(j)$, на которых справа действуют симметрические группы Σ_j, $j \geqslant 1$. Симметрическое семейство $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}(j)\}_{j\geqslant 1}$ называется Σ-свободным, если для любого номера $j \geqslant 1$ дифференциальный модуль $\mathcal{E}(j)$ является Σ_j-свободным.

Морфизмом симметрических семейств $f\colon \mathcal{E}' \to \mathcal{E}''$ называется любое семейство Σ_j-эквивариантных отображений дифференциальных модулей $f = \{f(j)\colon \mathcal{E}'(j) \to \mathcal{E}'(j)\}_{j\geqslant 1}$. Гомотопией $h\colon \mathcal{E}' \to \mathcal{E}''$ между морфизмами симметрических семейств $f, g\colon \mathcal{E}' \to \mathcal{E}''$ называется произвольное семейство Σ_j-эквивариантных гомотопий $h = \{h(j)\colon \mathcal{E}'(j) \to \mathcal{E}''(j)\}_{j\geqslant 1}$ между Σ_j-эквивариантными отображениями дифференциальных модулей $f(j)$ и $g(j)$.

При помощи понятия гомотопии между морфизмами стандартно определяется понятие гомотопической эквивалентности симметрических семейств.

Для заданных симметрических семейств $\mathcal{E}'$ и $\mathcal{E}''$ рассмотрим симметрическое семейство $\mathcal{E}' \times \mathcal{E}'' = \{(\mathcal{E}' \times \mathcal{E}'')(j)\}_{j\geqslant 1}$, где $(\mathcal{E}' \times \mathcal{E}'')(j)$ — фактор-модуль Σ_j-свободного дифференциального модуля, порождённого дифференциальным модулем

$$\sum_{j_1+\ldots+j_k=j} \mathcal{E}'(k) \otimes \mathcal{E}''(j_1) \otimes \ldots \otimes \mathcal{E}''(j_k),$$

по отношению эквивалентности $\sim$, определённому соотношениями

$$e\sigma \otimes e_1 \otimes \ldots \otimes e_k \sim (e \otimes e_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \ldots \otimes e_{\sigma^{-1}(k)})\sigma(j_1, \ldots, j_k),$$
$$e \otimes e_1\sigma_1 \otimes \ldots \otimes e_k\sigma_k \sim (e \otimes e_1 \otimes \ldots \otimes e_k)(\sigma_1 \times \ldots \times \sigma_k).$$

Здесь $\sigma(j_1, \ldots, j_k) \in \Sigma_j$ — перестановка j элементов, полученная после разбиения множества из j элементов на k блоков мощности $j_1, \ldots, j_k$ и действия перестановкой σ на этих блоках; $(\sigma_1 \times \ldots \times \sigma_k) \in \Sigma_j$ — образ элемента $(\sigma_1, \ldots, \sigma_k) \in \Sigma_{j_1} \times \ldots \times \Sigma_{j_k}$ при вложении $\Sigma_{j_1} \times \ldots \times \Sigma_{j_k} \to \Sigma_j$. Отметим, что указанное $\times$-произведение ассоциативно, т. е. для произвольных симметрических семейств $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}''$ имеется изоморфизм $\mathcal{E} \times (\mathcal{E}' \times \mathcal{E}'') \approx (\mathcal{E} \times \mathcal{E}') \times \mathcal{E}''$ в категории симметрических семейств.

Операдой $(\mathcal{E}, \pi)$ называется симметрическое семейство $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}(j)\}_{j\geqslant 1}$, рассматриваемое вместе с морфизмом симметрических семейств $\pi\colon \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, для которого выполнено условие $\pi(\pi \times 1) = \pi(1 \times \pi)$. Операда называется Σ-свободной, если она Σ-свободна как симметрическое семейство. Морфизм симметрических семейств $\pi\colon \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ называется умножением операды $(\mathcal{E}, \pi)$. Единицей операды $(\mathcal{E}, \pi)$ называется элемент $1 \in \mathcal{E}(1)_0$, который для каждого элемента $e_j \in \mathcal{E}(j)$, $j \geqslant 1$, удовлетворяет равенствам $\pi(1 \otimes e_j) = e_j$ и $\pi(e_j \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1) = e_j$. Морфизмом операд $f\colon (\mathcal{E}', \pi') \to (\mathcal{E}'', \pi'')$ называется морфизм симметрических семейств $f\colon \mathcal{E}' \to \mathcal{E}''$, для которого выполнено условие $f\pi' = \pi''(f \times f)$.

Рассмотрим симметрическое семейство $\mathcal{K} = \{\mathcal{K}(j)\}_{j\geqslant 1}$, где $\mathcal{K}(j) = 0$, $j > 1$, и $\mathcal{K}(1) = K$. Отметим, что для любого симметрического семейства $\mathcal{E}$ имеется изоморфизм симметрических семейств $\mathcal{E}\times\mathcal{K} \approx \mathcal{K}\times\mathcal{E}$. Задание единицы в операде $(\mathcal{E}, \pi)$ равносильно заданию морфизма симметрических семейств $i\colon \mathcal{K} \to \mathcal{E}$, для которого выполнено условие $\pi(1 \times i) = \pi(i \times 1)$.

Простейшим примером операды служит операда (C, π), где $C(j)$ является свободным модулем с одной образующей $c(j) \in C(j)_0$ и тривиальным действием группы Σ_j. Умножение $\pi\colon C \times C \to C$ этой операды определяется формулой

$$\pi\bigl(c(k) \otimes c(j_1) \otimes \ldots \otimes c(j_k)\bigr) = c(j), \quad j = j_1 + \ldots + j_k.$$

Каноническим примером операды является операда $(\mathcal{E}_X, \pi)$, определяемая для любого дифференциального модуля X. Напомним конструкцию этой операды. Пусть $X^{\otimes j}$ — это j-я тензорная степень над K дифференциального модуля X. Определим дифференциальный модуль $\mathcal{E}_X(j)$, полагая $\mathcal{E}_X(j) = \mathrm{Hom}_K(X^{\otimes j}; X)$, где $\mathrm{Hom}_K(X^{\otimes j}; X)$ является дифференциальным градуированным модулем всех K-модульных отображений из $X^{\otimes j}$ в X. Действие симметрической группы Σ_j на $\mathcal{E}_X(j)$ определяется действием Σ_j на $X^{\otimes j}$ перестановкой сомножителей. Структура операды на симметрическом семействе $\mathcal{E}_X$, т. е. умножение $\pi\colon \mathcal{E}_X \times \mathcal{E}_X \to \mathcal{E}_X$, задаётся формулой

$$\pi(g \otimes g_1 \otimes \ldots \otimes g_k) = g \circ (g_1 \otimes \ldots \otimes g_k), \quad g_i \in \mathcal{E}_X(j_i), \quad 1 \leqslant i \leqslant k, \quad g \in \mathcal{E}_X(k).$$

Единицей $1 \in \mathcal{E}_X(1)_0$ операды $(\mathcal{E}_X, \pi)$ является тождественное отображение дифференциального модуля X. Аналогично определяется операда $(\mathcal{E}^X, \pi)$, структура которой задаётся следующими равенствами:

$$\mathcal{E}^X(j) = \mathrm{Hom}_K(X; X^{\otimes j}), \quad \pi(g \otimes g_1 \otimes \ldots \otimes g_k) = (g_1 \otimes \ldots \otimes g_k) \circ g.$$

Рассмотрим построенную в [5] операду (E_∞, π). По построению операда E_∞ является свободной и Σ-свободной операдой, для которой имеется морфизм операд $E_\infty \to C$, являющийся гомотопической эквивалентностью симметрических семейств. В частности, для каждого $j \geqslant 1$ дифференциальный модуль $E_\infty(j)$ является свободной резольвентой тривиального $K[\Sigma_j]$-модуля K, где $K[\Sigma_j]$ — групповая K-алгебра симметрической группы Σ_j. Например, дифференциальный модуль $E_\infty(2)$ является $K[\mathbb{Z}_2]$-свободным ацикличным цепным комплексом с образующими $U_i \in E_\infty(2)$ размерности $i \geqslant 0$ и граничным оператором

$$d(U_i) = U_{i-1} + (-1)^i U_{i-1} T, \quad T \in \Sigma_2 = \mathbb{Z}_2.$$

Рассмотрим построенную в [6] операду (E, π). Обозначим через $\bar{\Delta}[n]$ нормализованный цепной комплекс $N(\Delta[n])$ стандартного n-мерного симплициального симплекса $\Delta[n]$. Семейство цепных комплексов $\bar{\Delta}[*] = \{\bar{\Delta}[n]\}_{n \geqslant 0}$ является косимплициальным объектом в категории цепных комплексов. Обозначим через $\bar{\Delta}[*]^{\otimes j}$ косимплициальный цепной комплекс, являющийся j-й тензорной степенью косимплициального цепного комплекса $\bar{\Delta}[*]$. Рассмотрим симметрическое семейство $E = \{E(j)\}_{j \geqslant 1}$, для которого $E(j)$ является дифференциальным градуированным модулем $\mathrm{Hom}(\bar{\Delta}[*]; \bar{\Delta}[*]^{\otimes j})$ косимплициальных гомоморфизмов вида $\bar{\Delta}[*] \to \bar{\Delta}[*]^{\otimes j}$. Действие симметрической группы Σ_j на $E(j)$ определяется действием Σ_j на $\bar{\Delta}[*]^{\otimes j}$ перестановкой сомножителей в тензорном произведении. Умножение $\pi\colon E \times E \to E$ операды (E, π) определяется правилом

$$\pi(e \otimes e_1 \otimes \ldots \otimes e_k) = (e_1 \otimes \ldots \otimes e_k) \circ e, \quad e_i \in E(j_i), \quad 1 \leqslant i \leqslant k, \quad e \in E(k).$$

Отметим, что имеется морфизм операд $\varphi_\infty\colon E_\infty \to E$, определяемый при помощи свойства универсальности операды E, для которого выполнено условие $\varphi_\infty(U_0) = \nabla$, где $\nabla\colon \bar{\Delta}[*] \to \bar{\Delta}[*] \otimes \bar{\Delta}[*]$ — стандартное ассоциативное коумножение на косимплициальном цепном комплексе $\bar{\Delta}[*]$ (см. [6]).

Коопeрадой $(\mathcal{L}, \nabla)$ называется симметрическое семейство $\mathcal{L} = \{\mathcal{L}(j)\}_{j \geqslant 1}$, рассматриваемое вместе с морфизмом симметрических семейств $\nabla\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L} \times \mathcal{L}$, для которого выполнено условие $(\nabla \times 1)\nabla = (1 \times \nabla)\nabla$. Морфизм симметрических семейств $\nabla\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L} \times \mathcal{L}$ называется коумножением кооперады $(\mathcal{L}, \nabla)$.

Морфизмом кооперад $f\colon (\mathcal{L}', \nabla') \to (\mathcal{L}'', \nabla'')$ называется морфизм симметрических семейств $f\colon \mathcal{L}' \to \mathcal{L}''$, для которого выполнено условие $(f \times f)\nabla' = \nabla'' f$.

Простые примеры кооперад можно получить при помощи операции сопряжения модулей. В самом деле, пусть задана произвольная операда $(\mathcal{E}, \pi)$, у которой для любого номера $j \geqslant 1$ градуированный модуль $\mathcal{E}(j)$ в каждой размерности является конечно порождённым проективным K-модулем. Тогда симметрическое семейство $\mathcal{E}^* = \{\mathcal{E}(j)^*\}_{j\geqslant 1}$, где $\mathcal{E}(j)^* = \operatorname{Hom}_K(\mathcal{E}(j); K)$, является кооперадой относительно коумножения

$$\nabla = \pi^*\colon \mathcal{E}^* \to (\mathcal{E} \times \mathcal{E})^* = \mathcal{E}^* \times \mathcal{E}^*.$$

Кооперада $(\mathcal{E}^*, \nabla)$ называется кооперадой, сопряжённой к операде $(\mathcal{E}, \pi)$.

Пусть заданы произвольные дифференциальный модуль X и симметрическое семейство $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}(j)\}_{j\geqslant 1}$. Рассмотрим дифференциальный модуль

$$\mathcal{E} \times X = \bigoplus_{j\geqslant 1} \mathcal{E}(j) \otimes_{K[\Sigma_j]} X^{\otimes j},$$

где $K[\Sigma_j]$ — групповая K-алгебра симметрической группы Σ_j. Легко убедиться, что для любых симметрических семейств $\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}''$ и любого дифференциального модуля X имеет место изоморфизм $\mathcal{E}' \times (\mathcal{E}'' \times X) \approx (\mathcal{E}' \times \mathcal{E}'') \times X$ в категории дифференциальных модулей.

Алгеброй над операдой $(\mathcal{E}, \pi)$ или просто $\mathcal{E}$-алгеброй называется дифференциальный модуль X, рассматриваемый вместе с отображением дифференциальных модулей $\mu\colon \mathcal{E} \times X \to X$, для которого выполнено условие $\mu(\pi \times 1) = \mu(1 \times \mu)$.

Отметим, что введение структуры $\mathcal{E}$-алгебры на дифференциальном модуле X равносильно заданию морфизма операд $\mathcal{E} \to \mathcal{E}_X$.

Легко убедиться, что задание на дифференциальном модуле X структуры алгебры над рассмотренной выше операдой (C, π) равносильно введению на X структуры ассоциативной и коммутативной дифференциальной алгебры.

Коалгеброй над кооперадой $(\mathcal{L}, \nabla)$ или просто $\mathcal{L}$-коалгеброй называется дифференциальный модуль X, рассматриваемый вместе с фиксированным отображением дифференциальных модулей $\tau\colon X \to \mathcal{L} \times X$, для которого выполнено условие $(\nabla \times 1)\tau = (1 \times \tau)\tau$. Коалгебры над кооперадой $(\mathcal{E}^*, \nabla)$, сопряжённой к операде $(\mathcal{E}, \pi)$, называются $\mathcal{E}$-коалгебрами.

Ясно, что введение на дифференциальном модуле X структуры $\mathcal{E}$-коалгебры равносильно заданию некоторого морфизма операд $\mathcal{E} \to \mathcal{E}^X$.

В [6] было показано, что на нормализованном сингулярном цепном комплексе $N(X)$ топологического пространства X имеется естественная структура E-коалгебры. Эта структура определяется морфизмом операд $\alpha\colon E \to \mathcal{E}^{N(X)}$, который для произвольного элемента $e \in E(j) = \operatorname{Hom}(\bar{\Delta}[*]; \bar{\Delta}[*]^{\otimes j})$ и каждой образующей $x \in N_n(X)$ задаётся формулой

$$\alpha(e)(x) = \big(N(\bar{x}) \otimes \ldots \otimes N(\bar{x})\big)e(i_n),$$

где $N(\bar{x})\colon \bar{\Delta}[n] \to N(X)$ — цепное отображение, индуцированное симплициальным отображением $\bar{x}\colon \Delta[n] \to X$, $\bar{x}(i_n) = x$, и $i_n \in \bar{\Delta}[n]_n$ — образующая стандартного симплициального симплекса $\Delta[n]$.

Следствием структуры E-коалгебры на нормализованном сингулярном цепном комплексе $N(X)$ топологического пространства X является наличие на этом цепном комплексе $N(X)$ естественной структуры E_∞-коалгебры, структурный морфизм operad $E_\infty \to \mathcal{E}^{N(X)}$ которой определяется как композиция указанных выше морфизмов операд $\varphi_\infty\colon E_\infty \to E$ и $\alpha\colon E \to \mathcal{E}^{N(X)}$.

Пусть заданы произвольные симметрические семейства $\mathcal{E}'$ и $\mathcal{E}''$. Обозначим через $\mathcal{E}' \odot \mathcal{E}''$ симметрическое подсемейство симметрического семейства $\mathcal{E}' \times \mathcal{E}''$, для которого дифференциальный Σ_j-модуль $(\mathcal{E}' \odot \mathcal{E}'')(j)$ порождается тензорными произведениями

$$\mathcal{E}'(k_1) \otimes \mathcal{E}''(1) \otimes \ldots \otimes \mathcal{E}''(1) \otimes \mathcal{E}''(k_2) \otimes \mathcal{E}''(1) \otimes \ldots \otimes \mathcal{E}''(1), \quad j = k_1 + k_2 - 1.$$

Таким образом, симметрическое семейство $\mathcal{E}' \odot \mathcal{E}''$ порождается элементами вида

$$a \odot_i b = a \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1 \otimes b \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1,$$

где $a \in \mathcal{E}'(k_1)$, $1 \in \mathcal{E}''(1)$, $b \in \mathcal{E}''(k_2)$, $1 \leqslant i \leqslant k_1$ и элемент b стоит в тензорном произведении $1 \otimes \ldots \otimes 1 \otimes b \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1$ на месте с номером i. Легко убедиться, что для любых симметрических семейств $\mathcal{E}'$, $\mathcal{E}''$, $\mathcal{E}'''$ симметрическое семейство $\mathcal{E}' \odot (\mathcal{E}'' \odot \mathcal{E}''')$ изоморфно прямому слагаемому симметрического семейства $(\mathcal{E}' \odot \mathcal{E}'') \odot \mathcal{E}'''$.

Для произвольного симметрического семейства $\mathcal{E}$ и для каждого целого числа $n \geqslant 0$ определим симметрическое семейство $\mathcal{E}^{\odot n}$, полагая

$$\mathcal{E}^{\odot n} = \big(\ldots \big(\underbrace{(\mathcal{E} \odot \mathcal{E}) \odot \mathcal{E}\big) \odot \ldots\big) \odot \mathcal{E}}_{n}, \quad n > 0, \quad \mathcal{E}^{\odot 0} = \mathcal{K},$$

Рассмотрим для любых симметрических семейств $\mathcal{E}'$ и $\mathcal{E}$ перестановочный морфизм симметрических семейств

$$T\colon (\mathcal{E}' \odot \mathcal{E}) \odot \mathcal{E} \to (\mathcal{E}' \odot \mathcal{E}) \odot \mathcal{E},$$

который на элементах $(a \odot_i b) \odot_j c$, где $a \in \mathcal{E}'(k_1)$, $b \in \mathcal{E}(k_2)$, $c \in \mathcal{E}(k_3)$, задаётся следующим правилом:

$$T\big((a \odot_i b) \odot_j c\big) = \begin{cases} (a \odot_i b) \odot_j c, & i \leqslant j \leqslant k_2 + i - 1, \\ (-1)^{\dim(b)\dim(c)}(a \odot_j c) \odot_{k_3+i-1} b, & j < i, \\ (-1)^{\dim(b)\dim(c)}(a \odot_{j-k_2+1} c) \odot_i b, & j > k_2 + i - 1. \end{cases}$$

Определим теперь действие симметрической группы Σ_{n-1} перестановок чисел $2, 3, \ldots, n$ на симметрическом семействе $\mathcal{E}^{\odot n}$. Для этого рассмотрим сначала действие произвольной транспозиции $\sigma = (k+1, k) \in \Sigma_{n-1}$ на симметрическом семействе $\mathcal{E}^{\odot n}$, которое задаётся формулой

$$\sigma(e_1 \odot \ldots \odot e_n) = T\Big(\big((e_1 \odot \ldots \odot e_{k-1}) \odot e_k\big) \odot e_{k+1}\Big) \odot \ldots \odot e_n \in \mathcal{E}^{\odot n},$$

где

$$T\colon (\mathcal{E}^{\odot(k-1)}\odot\mathcal{E})\odot\mathcal{E}\to(\mathcal{E}^{\odot(k-1)}\odot\mathcal{E})\odot\mathcal{E}\,-$$

указанный выше перестановочный морфизм симметрических семейств. Стандартная процедура разложения произвольной перестановки из Σ_{n-1} в произведение транспозиций соседних чисел определяет действие группы Σ_{n-1} на симметрическом семействе $\mathcal{E}^{\odot n}$.

Пусть задано произвольное симметрическое семейство $\mathcal{E}$. Для каждого целого числа $n\geqslant 0$ определим симметрическое семейство $\mathcal{E}^{\wedge n}$ как симметрическое фактор-семейство симметрического семейства $\mathcal{E}^{\odot n}$ по действию группы Σ_{n-1}. Двойственным образом определяется симметрическое семейство $\mathcal{E}^{\vee n}$ как симметрическое подсемейство симметрического семейства $\mathcal{E}^{\odot n}$, инвариантное относительно действия группы Σ_{n-1}.

A_∞-морфизмом $f\colon (X,\mu)\to(Y,\mu)$ алгебр над операдой $(\mathcal{E},\pi)$ называется семейство отображений

$$f=\bigl\{f_n\colon \mathcal{E}^{\vee n}\times X\to Y \mid f_n\bigl((\mathcal{E}^{\vee n}\times X)_\bullet\bigr)\subseteq Y_{\bullet+n},\ n\geqslant 0\bigr\},$$

где

$$f_0\colon \mathcal{E}^{\vee 0}\times X=\mathcal{K}\times X=X\to Y\,-$$

отображение дифференциальных модулей, которые для каждого целого числа $n\geqslant 0$ удовлетворяют соотношению

$$df_{n+1}+(-1)^n f_{n+1}d=(-1)^n\mu(1\times f_n)-f_n(1\vee\ldots\vee 1\times\mu)+\\+\sum_{t=1}^{n}(-1)^{t+n}f_n(1\vee\ldots\vee 1\vee\pi\vee 1\vee\ldots\vee 1\times 1),$$

где t — номер места, на котором стоит π. Гомотопией $h\colon X\to Y$ между A_∞-морфизмами $f,g\colon (X,\mu)\to(Y,\mu)$ алгебр над операдой $(\mathcal{E},\pi)$ называется семейство отображений

$$h=\bigl\{h_n\colon \mathcal{E}^{\vee n}\times X\to Y \mid h_n\bigl((\mathcal{E}^{\vee n}\times X)_\bullet\bigr)\subset Y_{\bullet+n+1},\ n\geqslant 0\bigr\},$$

где

$$h_0\colon (\mathcal{E}^{\vee 0}\times X)_\bullet=(\mathcal{K}\times X)_\bullet=X_\bullet\to Y_{\bullet+1}\,-$$

гомотопия между отображениями f_0 и g_0, которые для каждого целого числа $n\geqslant 0$ удовлетворяют соотношению

$$dh_{n+1}+(-1)^{n+1}h_{n+1}d=f_{n+1}-g_{n+1}+h_n(1\vee\ldots\vee 1\times\mu)+\\+(-1)^n\mu(1\times h_n)+\sum_{t=1}^{n}(-1)^{t+n+1}h_n(1\vee\ldots\vee 1\vee\pi\vee 1\vee\ldots\vee 1\times 1),$$

где t — номер места, на котором стоит π.

Пусть заданы A_∞-морфизмы $\mathcal{E}$-алгебр $\eta\colon X\rightleftarrows Y:\xi$, для которых выполнено условие $\eta\xi=1_Y$, и пусть задана некоторая гомотопия $h\colon X\to X$ между A_∞-морфизмами $\mathcal{E}$-алгебр 1_X и $\xi\eta$, удовлетворяющая условиям $h\xi=0$, $\eta h=0$,

$hh = 0$. Рассмотренную ситуацию будем записывать в виде $(\eta\colon X \rightleftarrows Y : \xi,\, h)$ и называть A_∞-SDR-ситуацией $\mathcal{E}$-алгебр.

Двойственным образом при помощи $\wedge$-произведения для симметрических семейств определяются понятия A_∞-морфизма коалгебр над кооперадой, гомотопии между A_∞-морфизмами коалгебр над кооперадой и A_∞-SDR-ситуации коалгебр над кооперадой.

4. D_∞-дифференциальные E_∞-алгебры

В этом разделе вводится понятие D_∞-дифференциальной E_∞-алгебры, являющееся квантовым аналогом понятия E_∞-алгебры, и устанавливаются связи между D_∞-дифференциальной E_∞-алгеброй и спектральными последовательностями D_∞-дифференциальных модулей.

Пусть заданы произвольные $D_\infty^{(s)}$-модули (X, d^{i+s}) и (Y, d^{i+s}). Тогда на тензорном произведении $X \otimes Y$ градуированных модулей X и Y имеется $D_\infty^{(s)}$-дифференциал $\{d^{i+s}\colon (X \otimes Y)_\bullet \to (X \otimes Y)_{\bullet-1}\}$, компоненты которого задаются формулой

$$d^{i+s}(x \otimes y) = d^{i+s}(x) \otimes y + (-1)^{\dim(x)} x \otimes d^{i+s}(y).$$

В частности, для каждого $D_\infty^{(s)}$-модуля (X, d^{i+s}) и любого целого числа $n \geqslant 1$ определён $D_\infty^{(s)}$-модуль $(X^{\otimes n}, d^{i+s})$.

Для любых $D_\infty^{(s)}$-модулей (X, d^{i+s}) и (Y, d^{i+s}) рассмотрим дифференциальный модуль

$$\hom^{(s)}(X;Y) = \{\hom^{(s)}(X;Y)_n\}_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Элементами модуля $\hom^{(s)}(X;Y)_n$ являются семейства отображений модулей $f = \{f^{-ns+i}\colon X_\bullet \to Y_{\bullet+n}\}$, $i \geqslant 0$, и дифференциал

$$d\colon \hom^{(s)}(X;Y)_n \to \hom^{(s)}(X;Y)_{n-1}$$

задаётся формулой

$$\bigl(d(f)\bigr)^{-(n-1)s+i} = \sum_{k+m=i} d^{k+s} f^{-ns+m} + (-1)^{n+1} f^{-ns+k} d^{m+s}, \quad i \geqslant 0,$$

где $f = \{f^{-ns+i}\} \in \hom^{(s)}(X;Y)_n$.

Заметим теперь, что если заданные $D_\infty^{(s)}$-модули (X, d^{i+s}) и (Y, d^{i+s}) рассматривать как $D_\infty^{(s-1)}$-модули $(X, d^{i+(s-1)})$ и $(Y, d^{i+(s-1)})$, где $d^{s-1} = 0$, то для указанных $D_\infty^{(s)}$-модулей наряду с дифференциальным модулем $\hom^{(s)}(X;Y)$ определен ещё дифференциальный модуль $\hom^{(s-1)}(X;Y)$. Легко видеть, что имеет место вложение дифференциальных модулей $\hom^{(s-1)}(X;Y) \subset \subset \hom^{(s)}(X;Y)$, которое ставит в соответствие каждому семейству отображений $\{f^{-n(s-1)+i}\} \in \hom^{(s-1)}(X;Y)_n$ семейство отображений $\{g^{-ns+i}\} \in \in \hom^{(s)}(X;Y)_n$, где $g^{-ns+i} = 0$, если $0 \leqslant i < n$, и $g^{-ns+i} = f^{-n(s-1)+(i-n)}$, если $i \geqslant n$.

Для произвольного дифференциального модуля (X,d) и любых $D_\infty^{(s)}$-модулей (Y,d^{i+s}), (Z,d^{i+s}) рассмотрим дифференциальный модуль $\hom^{(s)}(X\otimes Y;Z)$, считая дифференциальный модуль (X,d) $D_\infty^{(s)}$-модулем (X,d^{i+s}), где $d^s=d$, $d^{i+s}=0$, $i>0$, и рассмотрим дифференциальный модуль $\hom\bigl(X;\hom^{(s)}(Y;Z)\bigr)$, стандартно определяемый для дифференциальных модулей X и $\hom^{(s)}(Y;Z)$. Легко убедиться, что имеется изоморфизм дифференциальных модулей

$$\hom^{(s)}(X\otimes Y;Z)\to\hom\bigl(X;\hom^{(s)}(Y;Z)\bigr),$$

ставящий в соответствие семейству отображений $g=\{g^{-ns+i}\colon (X\otimes Y)_\bullet\to Z_{\bullet+n}\}$ отображение $f\colon X_\bullet\to\hom^{(s)}(Y;Z)_{\bullet+n}$, которое задаётся формулой

$$f(x)^{-(n+k)s+i}(y)=g^{-ns+i}(x\otimes y),\quad k=\dim(x).$$

Определим теперь для любого $D_\infty^{(s)}$-модуля (X,d^{i+s}) операду $\bigl(\mathcal{E}_X^{(s)},\pi\bigr)$, полагая $\mathcal{E}_X^{(s)}(j)=\hom^{(s)}(X^{\otimes j};X)$. Действие симметрической группы Σ_j на $\mathcal{E}_X^{(s)}(j)$ определяется действием Σ_j на $X^{\otimes j}$ перестановкой сомножителей. Структура операды на $\mathcal{E}_X^{(s)}$, т. е. умножение

$$\pi\colon \mathcal{E}_X^{(s)}\times\mathcal{E}_X^{(s)}\to\mathcal{E}_X^{(s)},$$

задаётся формулами

$$\pi(g_0\otimes g_1\otimes\ldots\otimes g_k)=\bigl\{\bigl(\pi(g_0\otimes g_1\otimes\ldots\otimes g_k)\bigr)^{-ns+i}\bigr\},\quad i\geqslant 0,$$
$$\bigl(\pi(g_0\otimes g_1\otimes\ldots\otimes g_k)\bigr)^{-ns+i}=\sum_{i_0+\ldots+i_k=i} g_0^{-n_0s+i_0}\circ(g_1^{-n_1s+i_1}\otimes\ldots\otimes g_k^{-n_ks+i_k}),$$

где $g_t=\{g_t^{n_ts+i}\}\in\mathcal{E}_X^{(s)}(j_t)_{n_t}$, $1\leqslant t\leqslant k$, $j_0=k$, $n_0+\ldots+n_k=n$. Таким образом, для каждого $D_\infty^{(s)}$-модуля (X,d^{i+s}) определена операда $\bigl(\mathcal{E}_X^{(s)},\pi\bigr)$. Аналогично определяется операда $\bigl(\mathcal{E}_{(s)}^X,\pi\bigr)$, структура которой задаётся равенствами

$$\mathcal{E}_{(s)}^X(j)=\hom^{(s)}(X;X^{\otimes j}),$$
$$\pi(g\otimes g_1\otimes\ldots\otimes g_k)=\bigl\{\bigl(\pi(g\otimes g_1\otimes\ldots\otimes g_k)\bigr)^{-ns+i}\bigr\},$$
$$\bigl(\pi(g_0\otimes g_1\otimes\ldots\otimes g_k)\bigr)^{-ns+i}=\sum_{i_0+\ldots+i_k=i}(g_1^{-n_1s+i_1}\otimes\ldots\otimes g_k^{-n_ks+i_k})\circ g_0^{-n_0s+i_0}.$$

Пусть задана любая операда $(\mathcal{E},\pi)$. Рассмотрим каждый дифференциальный модуль $(\mathcal{E}(j),d)$ как $D_\infty^{(s)}$-модуль $(\mathcal{E}(j),d^{i+s})$, где $d^s=d$, $d^{i+s}=0$, $i>0$. Тогда для каждого $D_\infty^{(s)}$-модуля (X,d^{i+s}) на градуированном модуле $\mathcal{E}\times X$, определённом в разделе 3, имеется структура $D_\infty^{(s)}$-модуля $(\mathcal{E}\times X,d^{i+s})$, компоненты $D_\infty^{(s)}$-дифференциала которого определяются компонентами $D_\infty^{(s)}$-дифференциалов сомножителей в тензорном произведении.

$D_\infty^{(s)}$-дифференциальный модуль (X,d^{i+s}), где $s\geqslant 1$, называется $D_\infty^{(s)}$-дифференциальной алгеброй над операдой $(\mathcal{E},\pi)$, или $D_\infty^{(s)}$-дифференциальной $\mathcal{E}$-алгеброй, или, более кратко, $D_\infty^{(s)}\mathcal{E}$-алгеброй, если задан некоторый морфизм

$D_\infty^{(s)}$-модулей $\{\mu^i\}\colon \mathcal{E}\times X\to X$, который для каждого целого числа $k\geqslant 0$ удовлетворяет условию

$$\mu^k(\pi\times 1)=\sum_{i+j=k}\mu^i(1\times\mu^j).$$

Легко убедиться, что введение на $D_\infty^{(s)}$-модуле X структуры $D_\infty^{(s)}\mathcal{E}$-алгебры равносильно заданию некоторого морфизма операд $\mathcal{E}\to\mathcal{E}_X^{(s)}$, где $\mathcal{E}_X^{(s)}$ — это рассмотренная выше операда, определяемая $D_\infty^{(s)}$-модулем X.

A_∞-морфизмом $D_\infty^{(s)}\mathcal{E}$-алгебр

$$f\colon (X,d^{i+s},\mu^i)\to(Y,d^{i+s},\mu^i)$$

называется семейство отображений

$$f=\bigl\{f_n^{-ns+i}\colon \mathcal{E}^{\vee n}\times X\to Y\mid f_n^{-ns+i}\bigl((\mathcal{E}^{\vee n}\times X)_\bullet\bigr)\subseteq Y_{\bullet+n},\ n\geqslant 0,\ i\geqslant 0\bigr\},$$

где

$$\{f_0^i\}\colon \mathcal{E}^{\vee 0}\times X=\mathcal{K}\times X=X\to Y\,—$$

морфизм $D_\infty^{(s)}$-модулей, которые для любых целых чисел $n\geqslant 0$ и $k\geqslant 0$ удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{i+j=k}d^{i+s}f_{n+1}^{-(n+1)s+j}+(-1)^n f_{n+1}^{-(n+1)s+i}d^{j+s}=\sum_{k=i+j}(-1)^n\mu^i(1\times f_n^{-ns+j})+$$
$$+\sum_{l=1}^{n}(-1)^{l+n}f_n^{-ns+k}(1\vee\ldots\vee 1\vee\pi\vee 1\vee\ldots\vee 1\times 1)-\sum_{k=i+j}f_n^{-ns+i}(1\vee\ldots\vee 1\times\mu^j),$$

где l — номер места, на котором стоит π. Гомотопией между A_∞-морфизмами $D_\infty^{(s)}\mathcal{E}$-алгебр $f,g\colon (X,d^{i+s},\mu^i)\to(Y,d^{i+s},\mu^i)$ называется семейство отображений

$$h=\bigl\{h_n^{-(n+1)s+i}\colon \mathcal{E}^{\vee n}\times X\to Y\mid h_n^{-(n+1)s+i}\bigl((\mathcal{E}^{\vee n}\times X)_\bullet\bigr)\subset Y_{\bullet+n+1},\ n\geqslant 0,\ i\geqslant 0\bigr\},$$

которые для любых целых чисел $n\geqslant 0$ и $k\geqslant 0$ удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{i+j=k}d^{i+s}h_{n+1}^{-(n+2)s+j}+(-1)^{n+1}h_{n+1}^{-(n+2)s+i}d^{j+s}=f_{n+1}^{-(n+1)s+k}-g_{n+1}^{-(n+1)s+k}+$$
$$+\sum_{k=i+j}h_n^{-(n+1)s+i}(1\vee\ldots\vee 1\times\mu^j)+\sum_{k=i+j}(-1)^n\mu^i\bigl(1\times h_n^{-(n+1)s+j}\bigr)+$$
$$+\sum_{l=1}^{n}(-1)^{l+n+1}h_n^{-(n+1)s+k}(1\vee\ldots\vee 1\vee\pi\vee 1\vee\ldots\vee 1\times 1),$$

где l — номер места, на котором стоит π.

Пусть заданы A_∞-морфизмы $D_\infty^{(s)}\mathcal{E}$-алгебр $\eta\colon X\rightleftarrows Y:\xi$, для которых выполнено условие $\eta\xi=1_Y$, и задана гомотопия $h\colon X\to X$ между A_∞-морфизмами $D_\infty^{(s)}\mathcal{E}$-алгебр 1_X и $\xi\eta$, удовлетворяющая условиям $h\xi=0$, $\eta h=0$, $hh=0$.

Рассмотренная ситуация называется A_∞-SDR-ситуацией $D_\infty^{(s)}\mathcal{E}$-алгебр и записывается в виде $(\eta\colon X \rightleftarrows Y : \xi,\, h)$.

$D_\infty^{(s)}\mathcal{E}$-алгебра (X, d^{i+s}, μ^i) называется стабильной, если $D_\infty^{(s)}$-модуль (X, d^{i+s}) является стабильным и для каждого $e \times x \in \mathcal{E} \times X$ найдётся целое число $k \geqslant 1$, зависящее от элемента $e \times x$, для которого выполнено условие $\mu^i(e \times x) = 0$, $i > k$.

Отметим, что любая стабильная $D_\infty^{(s)}\mathcal{E}$-алгебра (X, d^{i+s}, μ^i) определяет суммарную $\mathcal{E}$-алгебру (X, D_s, μ), где отображение $\mu\colon \mathcal{E}\times X \to X$ задаётся формулой $\mu = \mu^0 + \mu^1 + \ldots + \mu^i + \ldots$, а D_s — это суммарный дифференциал стабильного $D_\infty^{(s)}$-модуля (X, d^{i+s}).

Напомним теперь (см. [7]), что структура E_∞-алгебры является гомотопически инвариантной и, в частности, для любой заданной над полем E_∞-алгебры X определена E_∞-алгебра гомологий $H(X)$.

E_∞-алгеброй гомологий $H(X, d^{i+s}, \mu^i)$ для заданной над полем стабильной $D_\infty^{(s)}E_\infty$-алгебры (X, d^{i+s}, μ^i) называется E_∞-алгебра гомологий $H(X)$ её суммарной E_∞-алгебры (X, D_s, μ).

Теорема 4.1. *Пусть заданы произвольная $D_\infty^{(s)}E_\infty$-алгебра X и произвольная SDR-ситуация $D_\infty^{(s)}$-модулей $(\bar\eta\colon X \rightleftarrows Y : \bar\xi,\, \bar h)$. Тогда на $D_\infty^{(s)}$-модуле (Y, d^{i+s}) имеется структура $D_\infty^{(s)}E_\infty$-алгебры и, кроме того, имеется A_∞-SDR-ситуация $D_\infty^{(s)}E_\infty$-алгебр $(\eta\colon X \rightleftarrows Y : \xi,\, h)$, для которой выполнены начальные условия $\eta_0^i = \bar\eta^i$, $\xi_0^i = \bar\xi^i$, $h_0^{i-s} = \bar h^{i-s}$, $i \geqslant 0$. Если заданная $D_\infty^{(s)}E_\infty$-алгебра X является стабильной, то указанная $D_\infty^{(s)}E_\infty$-алгебра Y также является стабильной.* □

Следствие 4.1. *Пусть заданы произвольная $D_\infty^{(s)}E_\infty$-алгебра X и произвольная SDR-ситуация $(\bar\eta\colon X \rightleftarrows Y : \bar\xi,\, \bar h)$ дифференциальных модулей. Тогда на дифференциальном модуле Y имеется структура $D_\infty^{(s)}E_\infty$-алгебры и, кроме того, имеется A_∞-SDR-ситуация $D_\infty^{(s)}E_\infty$-алгебр $(\eta\colon X \rightleftarrows Y : \xi,\, h)$, для которой выполнены начальные условия $\eta_0^0 = \bar\eta$, $\xi_0^0 = \bar\xi$, $h_0^{-s} = \bar h$. Если $D_\infty^{(s)}E_\infty$-алгебра X является стабильной, то $D_\infty^{(s)}E_\infty$-алгебра Y также является стабильной.* □

Пусть над произвольным полем задана $D_\infty^{(s)}E_\infty$-алгебра (X, d^{i+s}, μ^i). Тогда определена SDR-ситуация $(\bar\eta\colon X \rightleftarrows H(X) : \bar\xi,\, \bar h)$ дифференциальных модулей, где $H(X)$ является гомологическим модулем дифференциального модуля (X, d^s). Если применить к этой SDR-ситуации дифференциальных модулей следствие 4.1, то получим на $H(X)$ структуру $D_\infty^{(s)}E_\infty$-алгебры $(H(X), d_*^{i+s}, (\mu_*)^i)$, где $d_*^s = 0$, и A_∞-SDR-ситуацию $D_\infty^{(s)}E_\infty$-алгебр $(\eta\colon X \rightleftarrows H(X) : \xi,\, h)$, которая продолжает SDR-ситуацию дифференциальных модулей $(\bar\eta\colon X \rightleftarrows H(X) : \bar\xi,\, \bar h)$. Так как $d_*^s = 0$, то $D_\infty^{(s)}$-модуль $(H(X), d_*^{i+s})$ является $D_\infty^{(s+1)}$-модулем $(H(X), d^{i+(s+1)})$, где $d^{i+(s+1)} = d_*^{(i+1)+s}$. Учитывая, что для $D_\infty^{(s)}E_\infty$-алгебры $H(X)$ структурный морфизм $\{(\mu_*)^i\colon E_\infty \times H(X) \to H(X)\}$ взаимно-однозначно определяет морфизм операд $\mu_*\colon E_\infty \to \mathcal{E}_{H(X)}^{(s)}$, и рассматривая композицию морфизмов операд

$$E_\infty \xrightarrow{\mu_*} \mathcal{E}^{(s)}_{H(X)} \longrightarrow \mathcal{E}^{(s+1)}_{H(X)},$$

где морфизм операд $\mathcal{E}^{(s)}_{H(X)} \to \mathcal{E}^{(s+1)}_{H(X)}$ определяется указанными выше вложениями дифференциальных модулей

$$\hom^{(s)}\big(H(X)^{\otimes j}; H(X)\big) \to \hom^{(s+1)}\big(H(X)^{\otimes j}; H(X)\big), \quad j \geqslant 1,$$

получаем следующее утверждение.

Следствие 4.2. *Пусть над произвольным полем задана произвольная $D^{(s)}_\infty E_\infty$-алгебра (X, d^{i+s}, μ^i). Тогда на гомологическом модуле $H(X) = \operatorname{Ker} d^s / \operatorname{Im} d^s$ имеется структура $D^{(s)}_\infty E_\infty$-алгебры $(H(X), d^{i+s}_*, \mu^i_*)$, где $d^s_* = 0$, и, кроме того, определена A_∞-SDR-ситуация $D^{(s)}_\infty E_\infty$-алгебр $(\eta\colon X \rightleftarrows H(X) : \xi, h)$, которая продолжает SDR-ситуацию дифференциальных модулей $(\bar\eta\colon X \rightleftarrows H(X) : \bar\xi, \bar h)$. Указанная на гомологическом модуле $H(X)$ структура $D^{(s)}_\infty E_\infty$-алгебры определяет на $H(X)$ структуру $D^{(s+1)}_\infty E_\infty$-алгебры $(H(X), d^{i+(s+1)}, \mu^i)$, которая задаётся формулами*

$$d^{i+(s+1)} = d^{(i+1)+s}_*, \quad i \geqslant 0,$$

$$\mu^i(e \times x) = 0, \quad 0 \leqslant i < \dim(e), \quad \mu^i(e \times x) = \mu^{i-\dim(e)}_*(e \times x), \quad i \geqslant \dim(e),$$

где $e \times x$ — произвольный элемент из $\mathcal{E} \times H(X)$. □

Пусть теперь над полем задана произвольная $D^{(1)}_\infty E_\infty$-алгебра (X, d^{i+1}, μ^i). Тогда для этой $D^{(1)}_\infty E_\infty$-алгебры определена спектральная последовательность $D^{(1)}_\infty$-модуля (X, d^{i+1}) из теоремы 1.2. Рассмотрим вопрос о том, какая структура имеется в членах этой спектральной последовательности. Пусть $(X_1, d^{i+1}_1, \mu^i_1) = (X, d^{i+1}, \mu^i)$. Если применить к этой $D^{(1)}_\infty E_\infty$-алгебре следствие 4.2 для $s = 1$, то получим $D^{(2)}_\infty E_\infty$-алгебру $(X_2, d^{i+1}_2, \mu^i_2)$, где $X_2 = H(X_1) = \operatorname{Ker} d^1_1 / \operatorname{Im} d^1_1$. Если теперь к полученной $D^{(2)}_\infty E_\infty$-алгебре применить следствие 4.2 для $s = 2$, то получим $D^{(3)}_\infty E_\infty$-алгебру $(X_3, d^{i+3}_3, \mu^i_3)$, где $X_3 = H(X_2) = \operatorname{Ker} d^2_2 / \operatorname{Im} d^2_2$, к которой можно снова применить следствие 4.2 для $s = 3$. Итерируя рассмотренный выше процесс последовательного применения следствия 4.2, получаем следующее утверждение.

Теорема 4.2. *Пусть над полем задана произвольная $D^{(1)}_\infty E_\infty$-алгебра (X, d^{i+1}, μ^i), и пусть $\{(X_s, d_s)\}_{s \geqslant 1}$ — спектральная последовательность $D^{(1)}_\infty$-модуля (X, d^{i+1}) из теоремы 1.2. Тогда для каждого номера $s \geqslant 1$ член (X_s, d_s) этой спектральной последовательности имеет структуру $D^{(s)}_\infty E_\infty$-алгебры $(X_s, d^{i+s}_s, \mu^i_s)$, где $\mu^i_1 = \mu^i$, $d^s_s = d_s$. Структура $D^{(s+1)}_\infty E_\infty$-алгебры в члене X_{s+1} индуцирована согласно следствию 4.2 структурой $D^{(s)}_\infty E_\infty$-алгебры в члене X_s, и, в частности, $D^{(s+1)}_\infty E_\infty$-алгебра X_{s+1}, если рассматривать* *её как $D_\infty^{(s)}E_\infty$-алгебру, является гомотопически эквивалентной $D_\infty^{(s)}E_\infty$-алгебре X_s. Если $D_\infty^{(1)}E_\infty$-алгебра (X, d^{i+1}, μ^i) является стабильной, то E_∞-алгебра гомологий $H(X_s, d_s^{i+s}, \mu_s^i)$ для каждого номера $s \geqslant 1$ A_∞-изоморфна E_∞-алгебре $(X_\infty, D = 0, \mu)$, которая является суммарной E_∞-алгеброй для предельной $D_\infty^{(\infty)}E_\infty$-алгебры $(X_\infty, d^{i+\infty} = 0, \mu_\infty^i)$.* □

Литература

[1] Лапин С. В. Дифференциальные возмущения и D_∞-дифференциальные модули // Мат. сб. — 2001. — Т. 192, № 11. — С. 55—76.

[2] Лапин С. В. D_∞-дифференциальные A_∞-алгебры и спектральные последовательности // Мат. сб. — 2002. — Т. 193, № 1. — С. 119—142.

[3] Лапин С. В. $(DA)_\infty$-модули над $(DA)_\infty$-алгебрами и спектральные последовательности // Изв. РАН. Сер. мат. — 2002. — Т. 66, № 3. — С. 103—130.

[4] Лапин С. В. D_∞-дифференциалы и A_∞-структуры в спектральных последовательностях // Соврем. мат. и её прил. — 2003. — Т. 1. — С. 56—91.

[5] Смирнов В. А. О коцепном комплексе топологического пространства // Мат. сб. — 1981. — Т. 115, № 1. — С. 146—158.

[6] Смирнов В. А. Гомотопическая теория коалгебр // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1985. — Т. 49, № 6. — С. 1302—1321.

[7] Смирнов В. А. Гомологии B-конструкций и ко-B-конструкций // Изв. РАН. Сер. мат. — 1994. — Т. 58, № 4. — С. 80—96.

[8] Смирнов В. А. Алгебры Ли над операдами и их применение в теории гомотопий // Изв. РАН. Сер. мат. — 1998. — Т. 62, № 3. — С. 121—154.

[9] Смирнов В. А. Симплициальные и операдные методы в алгебраической топологии. — М.: Факториал, 2002.

[10] Gugenheim V. K. A. M., Lambe L. A. Perturbation theory in differential homological algebra. I // Illinois J. Math. — 1989. — Vol. 33, no. 4. — P. 566—582.

[11] Gugenheim V. K. A. M., Lambe L. A., Stasheff J. D. Algebraic aspects of Chen's twisting cochain // Illinois J. Math. — 1990. — Vol. 34, no. 2. — P. 485—502.

[12] Gugenheim V. K. A. M., Lambe L. A., Stasheff J. D. Perturbation theory in differential homological algebra. II // Illinois J. Math. — 1991. — Vol. 35, no. 3. — P. 357—373.

[13] Gugenheim V. K. A. M., Stasheff J. D. On perturbations and A_∞-structures // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. — 1986. — Vol. 38. — P. 237—246.

[14] Lambe L. A., Stasheff J. D. Applications of perturbation theory to iterated fibrations // Manuscripta Math. — 1987. — Vol. 58. — P. 363—376.

[15] Leray J. L'anneau spectral et l'anneau filtre d'homologie d'une espace localement compact et, d'une application continue // J. Math. Pures Appl. — 1950. — No. 29. — P. 1—139.

[16] May J. P. Simplicial Objects in Algebraic Topology. — Princeton: Van Nostrand, 1967.

[17] Serre J. P. Homologie singulière des espaces fibrés. Applications // Ann. Math. — 1951. — Vol. 54, no. 2. — P. 425—505.