# Мера Лебега в бесконечномерных пространствах как бесконечномерное распределение

**Р. ЛЕАНДР**
*Университет Бургундии, Дижон*
e-mail: Remi.leandre@u-bourgogne.fr

УДК 517.518

**Ключевые слова:** пространство гладких отображений, мера Лебега, распределение, пространство Фока.

**Аннотация**

В физической литературе на пространстве гладких отображений одного многообразия в другое рассматривается формальная лебегова мера. Цель данной работы — дать определение этой меры как распределения двумя способами: используя функциональные пространства некоммутативной геометрии и теории белого шума.

**Abstract**

*R. Léandre, Lebesgue measure in infinite dimension as an infinite-dimensional distribution*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 8, pp. 127—132.

Physicists deal with the formal Lebesgue measure on the space of smooth maps from one manifold to another. The aim of the present paper is to give two definitions of this measure as a distribution: using functional spaces of noncommutative geometry and those of the white noise theory.

## 1. Введение

Пусть $M$ и $N$ — компактные римановы многообразия. Рассмотрим пространство $C^\infty(M;N)$ гладких отображений $x\colon M \to N$, снабжённое естественной топологией пространства Фреше. Физики рассматривают на этом пространстве формальную лебегову меру $dD\big(x(\cdot)\big)$. Хорошо известно, что она не является настоящей счётно-аддитивной мерой.

В частности, функции Грина оператора Шрёдингера задаются фейнмановским интегралом по пространству путей. Мы отсылаем читателя к обзору [3], где описан строгий подход к его определению, а также к различным физическим работам по этому вопросу (см. [5, 9, 18, 27]). Один из вариантов строгого определения основан на теории белого шума. Хандреккар и Стрейт [19] определяют фейнмановский интеграл по путям в плоском пространстве как распределение на пространстве белого шума; в [21] для построения фейнмановского интеграла


© 2007 *Центр новых информационных технологий МГУ,*
*Издательский дом «Открытые системы»*

по путям на многообразии использованы методы теории белого шума в сочетании с некоммутативной дифференциальной геометрией. Этот подход связан с так называемым методом Хида—Стрейта в теории интегрирования по путям.

Наша цель — определить меру $dD\big(x(\cdot)\big)$ как распределение двумя способами:

— используя функциональные пространства некоммутативной геометрии [6],
— используя функциональные пространства теории белого шума, а именно пространства Фока.

Мы отсылаем читателя к работе [23], в которой одновременно используется аппарат некоммутативной геометрии и теории белого шума.

Автор благодарен Институту математики Китайской академии (Academia Sinica) в Тайбэе (Тайвань), где была выполнена эта работа, за гостеприимство.

## 2. «Мера Лебега» как цилиндрическая мера

Пусть $S \in M$. Рассмотрим вычисляющее отображение $e_S$, ставящее в соответствие отображению $x(\cdot)$ его значение $x(S)$ в точке $S$. Пусть $S_1, \ldots, S_r$ — различные точки пространства $M$. Мы хотим, чтобы мера на $M^r$ — формальный образ меры $dD\big(x(\cdot)\big)$ при вычисляющем отображении $e_{S_1} \times \ldots \times e_{S_r}$ — совпадала с произведением нормированных лебеговых мер на $M$. Так как $M$ компактно, эти меры удовлетворяют условию согласованности Колмогорова. Это объясняет, почему мера $dD\big(x(\cdot)\big)$ цилиндрическая.

## 3. «Мера Лебега» как распределение в рамках подхода Конна

Рассмотрим множество отображений $\varphi(S, x)$ из $M \times N$ в $\mathbb{R}$. Пусть $\Delta_{M,N}$ — оператор Лапласа. Определим гильбертово пространство $H_k$ отображений $\varphi$, таких что

$$\int\limits_{M \times N} \varphi(\Delta_{M,N} + 2)^k \varphi \, dm_{M,N} = \|\varphi\|^2_{H_k} < \infty.$$

Пусть $\varphi_l$ — ортогональный базис пространства $H_0$, порождённый собственными функциями лапласиана $\Delta_{M,N}$ с собственными значениями $\lambda_l$. Тогда $H_k$ состоит из рядов $\sum a_l \varphi_l$, таких что

$$\sum a_l^2 (\lambda_l + 2)^k < \infty.$$

Пусть $\varphi_L = \varphi_{l_1} \otimes \ldots \otimes \varphi_{l_n}$ — соответствующий базис пространства $H_k^{\otimes n}$. (Мы обозначили $L = (l_1, \ldots, l_n)$.)

По определению пространство Конна состоит из рядов $\sum\limits_{n\geqslant 0}\varphi^n=\sigma$, где $\varphi^n\in H_k^{\otimes n}$. Это пространство наделено семейством норм

$$\sum C^n\|\varphi^n\|_k=\|\sigma\|_{k,C}<\infty, \tag{3.1}$$

где $\|\cdot\|_k$ — гильбертова норма в $H_k^{\otimes n}$, индуцированная нормой в $H_k$.

Пусть $\varphi^n=\sum\limits_{|L|=n}a_L\varphi_L$ и $\|L\|_k=\prod(\lambda_{l_i}+2)^k$. Тогда условие (3.1) эквивалентно тому, что суммы

$$\sum C^n\sqrt{\sum_{|L|=n}a_L^2\|L\|_k^2}<\infty$$

конечны при всех $k$.

Обозначим $C_{\infty-}$ множество всех таких $\sigma$, что норма $\|\sigma\|_{k,C}$ конечна при всех положительных $k$ и $C$. Пусть $C_{-\infty}$ — его топологическое двойственное. Мы хотим показать, что «мера Лебега» на $C^\infty(M;N)$ — элемент пространства $C_{-\infty}$.

Определим функционал $F$, ставящий в соответствие $\varphi_L$ произведение

$$F(\varphi_L)=\prod_{j=1}^{|L|}\int\limits_M\varphi_{l_j}\bigl(S,x(S)\bigr)\,dS.$$

**Теорема 3.1.** *Функционал $F$ допускает такое продолжение на $C_{\infty-}$, что $F(\sigma)$ — ограниченная непрерывная функция на $C^\infty(M;N)$.*

**Доказательство.** $F(\varphi_L)$ — ограниченная непрерывная функция на пространстве отображений с топологией равномерной сходимости, причём её равномерная норма ограничена числом $\prod\limits_{j=1}^{|L|}\sup\limits_{M\times N}|\varphi_{l_j}|$. По теореме вложения Соболева это число можно оценить сверху величиной $C^{|L|}\|L\|_k$ для некоторого $k$, где $k$ не зависит от $L$. Ряд $\sum\limits_L C^{|L|}|a_L|\,\|L\|_k$ сходится. Более точно, имеем

$$\sum_{|L|=n}|a_L|\,\|L\|_k\leqslant\biggl(\sum_{|L|=n}a_L^2\|L\|_{k'}^2\biggr)^{1/2}\biggl(\sum_{|L|=n}\frac{1}{\|L\|_{k''}^2}\biggr)^{1/2}$$

для достаточно больших $k'$ и $k''$. Но $\lambda_l\sim Cl^r$ для некоторого положительного $r$, и поэтому ряд $\sum\frac{1}{(\lambda_l+2)^{k''}}$ сходится для достаточно больших $k''$. Тогда

$$\sum C^{|L|}|a_L|\,\|L\|_k\leqslant K\|\sigma\|_{C',k'}$$

для некоторых $C'$ и $k'$. Поэтому ряд $F(\sigma)=\sum a_LF(\varphi_L)$ абсолютно сходится. □

Очевидно, формально мы имеем

$$\int F(\varphi_L)\,dD\bigl(x(\cdot)\bigr)=\prod_{l_j\in L}\int\limits_{M\times N}\varphi_{l_j}(S,x)\,dm_{M,N}(x).$$

**Теорема 3.2.** *Пусть* $\sigma = \sum_L a_L \varphi_L$. *Определим* $F(\sigma)$, *полагая по определению*

$$F(\sigma) = \sum a_L \int F(\varphi_L)\, dD\big(x(\cdot)\big).$$

*Эта конструкция задаёт элемент пространства* $C_{-\infty}$.

**Доказательство.** Так как многообразие $M \times N$ компактно, имеем

$$\Bigg| \int\limits_{M\times N} \varphi_{l_j}\, dm_{M,N} \Bigg| \leqslant 1,$$

отсюда следует, что

$$\Bigg| \int F(\sigma)\, dD\big(x(\cdot)\big) \Bigg| \leqslant \sum |a_L| \leqslant K \|\sigma\|_{C',k'}$$

для некоторых $C'$ и $k'$, что эквивалентно нашему утверждению. □

**Замечание.** Мы могли бы рассмотреть пространство $H_\infty$ гладких функций на $M \times N$, наделённое топологией Фреше, и пространство $H_\infty^{\otimes n}$ гладких функций на $(M \times N)^n$, также снабжённое топологией Фреше. Если $\varphi^n$ принадлежит пространству $H_\infty^{\otimes n}$, равномерная норма $F(\varphi^n)$ на $C^\infty(M;N)$, так же как и интеграл $\int F(\sigma)\, dD\big(x(\cdot)\big)$, ограничены сверху sup-нормой $\varphi^n$, рассматриваемой как функция на $(M \times N)^n$. Этот вариант рассуждения ближе к первоначальному подходу Конна.

## 4. «Мера Лебега» и теория белого шума

В отличие от раздела 3, в этом разделе мы будем иметь дело с пространством Фока. Вместо системы норм (3.1) мы рассмотрим систему гильбертовых структур

$$\|\sigma\|_{k,C}^2 = \sum C^{|L|} a_L^2 \|L\|_k^2 < \infty.$$

Пересечение этих фоковских пространств образует при $k \to \infty$ и $C \to \infty$ пространство пробных функционалов теории белого шума $\mathrm{W.N}_{\infty-}$. Его топологическое двойственное — пространство распределений $\mathrm{W.N}_{-\infty}$ в теории белого шума.

**Теорема 4.1.** *Если* $\sigma$ *принадлежит пространству* $\mathrm{W.N}_{\infty-}$, *то* $F(\sigma)$ — *ограниченная непрерывная функция на* $C^\infty(M;N)$.

**Доказательство.** Наше рассуждение аналогично проведённому в предыдущем разделе.

Достаточно показать, что ряд $\sum |a_L|\, \|L\|_k$ сходится при некотором $k$, если $\sigma$ принадлежит пространству $\mathrm{W.N}_{-\infty}$. Но

$$\sum C^{|L|} \|L\|_{k''}^{-1} < \infty$$

для некоторого достаточно малого $C$ и достаточно большого $k''$. Это утверждение следует из неравенства Коши—Шварца, так как

$$\|L\|_{k_1+k_2} = \|L\|_{k_1}\|L\|_{k_2}. \qquad \square$$

**Теорема 4.2.** *Формула*

$$\int F(\sigma)\,dD\big(x(\cdot)\big) = \sum a_L \int F(\varphi_L)\,dD\big(x(\cdot)\big)$$

*задаёт распределение на пространстве белого шума.*

**Доказательство.** В самом деле, имеем

$$\left|\int F(\sigma)\,dD\big(x(\cdot)\big)\right| \leqslant \sum |a_L|\,\|L\|_k,$$

как и в предыдущем доказательстве. Рассуждение завершается ссылкой на неравенство Коши—Шварца. □

**Замечание.** В действительности $F(\sigma)$ может быть равно нулю для ненулевых $\sigma$. Один из способов избежать этой трудности — рассматривать гильбертово пространство $\tilde{H} = \tilde{H}_M \otimes \tilde{H}_N$, где $\tilde{H}_M$ — гильбертово пространство функций класса $L^2$ на $M$, а $\tilde{H}_N$ — гильбертово пространство функций класса $L^2$ на $N$ с нулевым средним, и построить систему взвешенных *симметрических* фоковских пространств, связанных с $\tilde{H}$.

## Литература


[1] Accardi L., Bozejko M. Interacting Fock spaces and Gaussianization of probability measures // Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. — 1998. — Vol. 1. — P. 663—670.

[2] Accardi L., Nahmi M. Interacting Fock spaces and orthogonal polynomials in several variables // Non-Commutativity, Infinite-Dimensionality and Probability at the Crossroads / N. Obata, T. Matsui, A. Hora, eds. — World Scientific, 2003. — P. 192—205.

[3] Albeverio S. Wiener and Feynman path integrals and their applications // Proc. Norbert Wiener Centenary Congress, East Lansing, MI, USA, November 27—December 3, 1994 / V. Mandrekar, P. R. Masani, eds. — Providence: Amer. Math. Soc., 1997. — (Proc. Symp. Appl. Math.; Vol 52). — P. 163—194.

[4] Berezansky Y. M., Kondratiev Y. O. Spectral Methods in Infinite-Dimensional Analysis. Vols. 1, 2. — Kluwer Academic, 1995.

[5] Cartier P., Dewitt-Morette C. Book in preparation.

[6] Connes A. Entire cyclic cohomology of Banach algebras and characters of $\theta$-summable Fredholm modules // K-Theory. — 1980. — Vol. 1. — P. 519—548.

[7] Gannoun R., Hachaichi R., Ouerdiane H., Rezgui A. Un théorème de dualité entre espaces de fonctions holomorphes à croissance exponentielle // J. Funct. Anal. — 2000. — Vol. 171, no. 1. — P. 1—14.

[8] Getzler E. Cyclic homology and the path integral of the Dirac operator. — Preprint. — 1988.

[9] Getzler E., Szenes A. On the Chern character of a theta-summable Fredholm module // J. Funct. Anal. — 1989. — Vol. 84. — P. 343—357.

[10] Gilkey P. Invariance Theory, the Heat Equation and the Atiyah—Singer Theorem. — CRC Press, 1995.

[11] Grosche C., Steiner F. Handbook on Feynman Path Integrals. — Springer, 1998.

[12] Hida T. Analysis of Brownian Functionals. — Ottawa: Carleton Univ., 1975. — (Carleton Math. Lect. Notes; Vol. 13).

[13] Hida T., Kuo H. H., Potthoff J., Streit L. White Noise: An Infinite Dimensional Calculus. — Kluwer Academic, 1993.

[14] Jaffe A. Quantum harmonic analysis and geometric invariants // Adv. Math. — 1999. — Vol. 143. — P. 1—110.

[15] Jaffe A., Lesniewski A., Osterwalder K. Quantum K-theory. The Chern character // Comm. Math. Phys. — 1988. — Vol. 118. — P. 1—14.

[16] Johnson G., Lapidus M. The Feynman Integral and Feynman Operational Calculus. — Oxford Univ. Press, 2000.

[17] Jones J. D. S., Léandre R. $L^p$ Chen forms on loop spaces // Stochastic Analysis / M. Barlow, N. Bingham, eds. — Cambridge Univ. Press, 1991. — P. 104—162.

[18] Kleinert H. Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics and Financial Markets. — World Scientific, 2004.

[19] Khandrekar D. C., Streit L. Constructing the Feynman integrand // Ann. Physics. — 1992. — Vol. 1. — P. 49—60.

[20] Léandre R. Cohomologie de Bismut—Nualart—Pardoux et cohomologie de Hochschild entiere // Sém. Probabilités XXX in Honour of P. A. Meyer and J. Neveu / J. Azéma, M. Emery, M. Yor, eds. — Springer, 1996. — (Lect. Notes Math.; Vol. 1626). — P. 68—100.

[21] Léandre R. Theory of distribution in the sense of Connes—Hida and Feynman path integral on a manifold // Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. — 2003. — Vol. 6. — P. 505—517

[22] Léandre R. White noise analysis, filtering equation and the index theorem for families // Infinite-Dimensional Harmonic Analysis / H. Heyer, H. Saitô, eds. — To appear.

[23] Léandre R., Ouerdiane H. Connes—Hida Calculus and Bismut—Quillen superconnections. — Preprint.

[24] Nest R., Tsygan B. Algebraic index for families // Adv. Math. — 1995. — Vol. 113. — P. 151—205.

[25] Obata N. White Noise Calculus and Fock Space. — Springer, 1994. — (Lect. Notes Math.; Vol. 1577).

[26] Ouerdiane H. Fonctionnelles analytiques avec conditions de croissance et application a l'analyse Gaussienne // Jpn. J. Math. — 1994. — Vol. 20. — P. 187—198.

[27] Roepstorff G. Path Integral Approach to Quantum Physics. An Introduction. — Springer, 1994.

[28] Schulman L. Techniques and Application of Path Integration. — Wiley, 1981.