Универсальные характеристические классы Каруби ядерных алгебр

И. М. НИКОНОВ
*Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова*

УДК 514.745.5

Ключевые слова: классы Каруби, характер Черна, K-теория, ядерная C^*-алгебра.

Аннотация

Основной результат статьи — вычисление ядра характера Черна и универсальных классов Каруби для ядерных C^*-алгебр. Показано, что ядро характера Черна совпадает с подгруппой бесконечно малых элементов в K_0-группе, а ядро универсальных классов Каруби совпадает с подгруппой приближённо скалярных элементов в K_0-группе.

Abstract

I. M. Nikonov, Universal Karoubi's characteristic classes of nuclear C^*-algebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 8, pp. 133—169.

The main result of this paper is the evaluation of kernels for the Chern character and the universal Karoubi classes of nuclear C^*-algebras. It is shown that the kernel of the Chern character coincides with the subgroup of infinitely small elements of the K_0-group and the kernel of the universal Karoubi classes coincides with the subgroup of approximately scalar elements of the K_0-group.

Введение

Появление конструкции некоммутативных характеристических классов в начале 80-х гг. прошлого века стало одним из первых крупных достижений зарождающейся некоммутативной геометрии. Из многочисленных определений характеристических классов векторных расслоений наиболее полезным оказался дифференциально-геометрический подход Черна—Вейля, который допускал простую переформулировку на языке алгебры с заменой геометрических объектов (многообразие, расслоение) на алгебраические (соответственно алгебра функций, проективный модуль сечений расслоения). Первая конструкция в духе такого подхода была предложена А. Конном в связи с его исследованиями C^*-динамических систем. Характеристические классы, построенные Конном, принимали значения в когомологиях алгебры Ли векторных полей, задающих динамическую систему, и не покрывали классический случай. Развитие идей Конна нашло своё выражение в конструкции А. С. Мищенко, Ю. П. Соловьёва,

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 8, с. 133—169.

Ю. Й. Жураева и, в полной общности, в конструкции М. Каруби. Конструкции различаются в определении некоммутативных дифференциальных форм, в когомологиях которых должны лежать характеристические классы. Определение характеристических классов Жураева—Мищенко—Соловьёва исходит из того, что аналогом векторных полей на многообразии в некоммутативном случае может служить алгебра Ли дифференцирований на алгебре «функций», далее формы де Рама, как и в дифференциальной геометрии, определяются как кососимметричные полилинейные функции на некоммутативных векторных полях. Конструкция Каруби опирается на достаточно размытое понятие дифференциального исчисления. Носителем характеристических классов в этом случае являются когомологии абелинизации дифференциального исчисления. За двадцать лет, прошедших после появления некоммутативных характеристических классов, накопилось не так много методов и примеров их вычисления (см. [17]). Настоящая работа вслед за диссертацией [6] призвана заполнить этот пробел.

Содержание работы следующее. Первый раздел посвящён описанию конструкции некоммутативных характеристических классов. В первых двух пунктах мы напоминаем описание конструкции характеристических классов Каруби, изложению которого (см. [27]) мы следуем.

В подразделе 1.3 мы рассматриваем альтернативную конструкцию характеристических классов, предложенную А. С. Мищенко, Ю. П. Соловьёвым и Ю. Й. Жураевым в [2—4]. Её построение развёртывается параллельно рассуждениям Каруби, и на каждом этапе мы устанавливаем связь между этими двумя конструкциями. На уровне связности и кривизны эта связь сформулирована в предложении 1.6, где строится биекция между связностями (кривизнами) в смысле Жураева—Мищенко—Соловьёва и связностями (кривизнами) Каруби для дифференциального исчисления $\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, A)$, на уровне цепных комплексов, в когомологиях которых лежат характеристические классы, — в лемме 1.2. Установленное соответствие позволяет построить отображение, переводящее характеристические классы Каруби в классы Жураева—Мищенко—Соловьёва (теорема 1.3). В подразделе 1.4 определяется характер Конна—Черна и формулируется теорема Каруби, которая позволяет сводить исследование характеристических классов к изучению следов на алгебре.

Во втором разделе изучаются характеристические классы конечномерных полупростых алгебр. Оказывается, что универсальные характеристические классы осуществляют мономорфизм приведённой K-теории алгебры по модулю кручения в когомологии $\mathrm{H}^*(\widetilde{\Omega}^*_{\mathrm{univ}}(A))$. Однако для характеристических классов Жураева—Мищенко—Соловьёва характеристическое отображение тривиально (предложение 2.3). Заметим, что тривиальность характеристических классов Жураева—Мищенко—Соловьёва для комплексных полупростых алгебр была доказана в [6]. Подраздел 2.2 посвящён рассмотрению случая, когда характеристика поля не равна нулю. Хотя все построения предыдущего раздела проводились в предположении, что характеристика основного поля равна нулю, при ненулевой характеристике поля также возможно с некоторыми ограничениями определить характеристические классы конечно порождённого проективного модуля.

Эти ограничения касаются размерности определяемых классов: она должна быть меньше, чем характеристика поля. Мы рассматриваем характеристические классы $c_n(E,\Omega^*)$ в «стабильной» размерности $2n < \operatorname{char}\Bbbk$ и доказываем теоремы, аналогичные теоремам раздела 2.1. Как и ранее, универсальные характеристические классы оказываются в определённом смысле мономорфными (теорема 2.2). Новой по сравнению со случаем нулевой характеристики является необходимость учитывать индексы алгебр с делением (определение 2.1), отвечающих простым компонентам изучаемой алгебры A, и рассматривать только регулярную часть алгебры и модуля. Характеристические классы, соответствующие другим дифференциальным исчислениям, неожиданно оказываются не равными нулю тождественно (предложения 2.4, 2.5).

Основной результат работы сформулирован в третьем разделе, где вычисляется ядро характера Конна—Черна для ядерных C^*-алгебр:

$$\ker \operatorname{ch}_n = K_{\inf}(A).$$

В четвёртом разделе доказывается инъективность характера Конна—Черна и тривиальность характеристических классов Жураева—Мищенко—Соловьёва для алгебр фон Неймана.

1. Основные конструкции

1.1. Дифференциальные исчисления

Пусть A — ассоциативная алгебра с единицей над полем $\Bbbk$ характеристики нуль.

Введём понятие, которое в настоящее время играет в некоммутативной геометрии роль обычных дифференциальных форм де Рама.

Определение 1.1. *Дифференциальным исчислением* над алгеброй A называется дифференциальная градуированная алгебра $\Omega^* = \bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} \Omega^n$, такая что $\Omega^0 = A$.

На сегодняшний день известны, по сути, всего две конструкции дифференциальных исчислений (см. [21]), не требующих от алгебры A никаких специальных свойств: универсальное исчисление и комплекс Кошуля, строящийся на основе дифференцирований алгебры. Начнём с универсального исчисления, которое, в основном, и будет использоваться ниже.

Пример 1.1 (универсальное дифференциальное исчисление). Рассмотрим градуированное линейное пространство

$$\Omega^*_{\mathrm{univ}}(A) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Omega^n_{\mathrm{univ}}(A),$$
$$\Omega^n_{\mathrm{univ}}(A) = A \otimes \bar{A}^{\otimes n}, \quad \text{где} \quad \bar{A} = A/\Bbbk 1.$$

Для элементов пространства $\Omega^n_{\mathrm{univ}}(A)$ мы будем использовать распространённые обозначения $a_0 \otimes \bar{a}_1 \otimes \ldots \otimes \bar{a}_n$ или $a_0 da_1 \ldots da_n$. Формулы для умножения и дифференциала d_u имеют вид

$$d_u(a_0 da_1 \ldots da_n) = 1\, da_0 da_1 \ldots da_n, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} a_0 da_1 \ldots da_n \cdot b_0 db_1 \ldots db_m &= a_0 da_1 \ldots d(a_n b_0) db_1 \ldots db_m + \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{n-k} a_0 da_1 \ldots da_{k-1} d(a_k a_{k+1}) da_{k+2} \ldots da_n db_0 \ldots db_m + \\ &+ (-1)^n a_0 a_1 da_2 \ldots da_n db_0 \ldots db_m. \end{aligned} \tag{2}$$

Заметим, что выражение для умножения получается формальным применением тождества Лейбница.

Дифференциальное исчисление $\Omega^*_{\mathrm{univ}}(A)$ с точностью до изоморфизма характеризуется следующим универсальным свойством (см. [21]).

Предложение 1.1. *Пусть (Ω^*, d) — некоторое дифференциальное исчисление над алгеброй A. Тогда существует единственный морфизм дифференциальных исчислений $\psi\colon \Omega^*_{\mathrm{univ}}(A) \to \Omega^*$, т. е. гомоморфизм дифференциальных градуированных алгебр, такой что отображение $\psi_0\colon \Omega^0_{\mathrm{univ}}(A) \to \Omega^0$ есть тождественное отображение алгебры $A = \Omega^0_{\mathrm{univ}}(A) = \Omega^0$.* □

Кроме $\Omega^*_{\mathrm{univ}}(A)$, существуют и другие дифференциальные исчисления, обладающие тем или иным универсальным свойством [21]. Приведём ещё один пример подобного исчисления.

Определение 1.2. Назовём дифференциальное исчисление Ω^* *центральным*, если для каждого элемента $c \in \mathcal{Z}(A)$ из центра алгебры A и произвольной формы $\omega \in \Omega$ коммутатор $[c, \omega] = c\omega - \omega c$ равен нулю.

Пример 1.2 (универсальное центральное исчисление). Определим дифференциальное исчисление $\Omega^*_{\mathcal{Z}}(A)$ как дифференциальную алгебру, получающуюся при факторизации $\Omega^*_{\mathrm{univ}}(A)$ по дифференциальному идеалу, порождённому коммутаторами с элементами центра алгебры A:

$$\Omega^*_{\mathcal{Z}}(A) = \Omega^*_{\mathrm{univ}}(A)/I, \quad I = ([c, \omega],\, d[c, \omega]), \quad c \in \mathcal{Z}(A), \quad \omega \in \Omega^*_{\mathrm{univ}}(A).$$

Из универсальности исчисления $\Omega^*_{\mathrm{univ}}(A)$ непосредственно следует предложение 1.2.

Предложение 1.2. *Пусть (Ω^*, d) — некоторое центральное дифференциальное исчисление над алгеброй A. Тогда существует единственный морфизм дифференциальных исчислений $\psi\colon \Omega^*_{\mathcal{Z}}(A) \to \Omega^*$.* □

Вторая серия известных дифференциальных исчислений определяется с помощью дифференцирований алгебры A. Эти исчисления, как будет показано в разделе 1.3, находятся в тесной связи с характеристическими классами Журавева—Мищенко—Соловьёва.

Пример 1.3 (дифференциальное исчисление $\Omega(D, A)$). Обозначим через D множество дифференцирований $\mathrm{Der}(A)$ алгебры A, т. е. совокупность $\Bbbk$-линейных отображений $X\colon A \to A$ со свойством Лейбница

$$X(ab) = aX(b) + X(a)b$$

для всех $a, b \in A$. Тогда D есть алгебра Ли относительно коммутатора дифференцирований, а алгебра A оказывается модулем над этой алгеброй Ли. Рассмотрим соответствующий коцепной комплекс Кошуля [12]

$$\Omega^*(D, A) = \bigoplus_n \Omega^n(D, A),$$

где $\Omega^0(D, A) = A$ и $\Omega^n(D, A) = \mathrm{Hom}_\Bbbk(\Lambda^n_\Bbbk D, A)$ — пространство всех кососимметричных n-линейных отображений из D в A. Дифференциал формы $\omega \in \in \Omega^n(D, A)$ имеет вид

$$\begin{aligned}(d\omega)(X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}) &= \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}X_i\big(\omega(X_1, \ldots, X_{i-1}, \hat{X}_i, X_{i+1}, \ldots, X_{n+1})\big) + \\ &+ \frac{1}{n+1}\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i, X_j], X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_n).\end{aligned} \tag{3}$$

Тождество Лейбница позволяет ввести согласованное умножение на комплексе $\Omega^*(D, A)$:

$$\begin{aligned}(\omega \wedge \eta)(X_1, \ldots, X_{m+n}) &= \\ &= \frac{1}{(m+n)!}\sum_{\sigma \in \Sigma_{m+n}}(-1)^\sigma \omega(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(m)})\,\eta(X_{\sigma(m+1)}, \ldots, X_{\sigma(m+n)}),\end{aligned} \tag{4}$$

где $\omega \in \Omega^m(D, A)$, $\eta \in \Omega^n(D, A)$. Операция умножения и дифференциал делают $\Omega^*(D, A)$ дифференциальной градуированной алгеброй [5, 12], которая, очевидно, является дифференциальным исчислением.

Рассмотрим ещё один пример дифференциального исчисления, связанного с алгеброй Ли $\mathrm{Der}(A)$.

Пример 1.4. Пусть, как и в примере выше, D — множество дифференцирований алгебры A, $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(A)$ — центр алгебры A. Тогда D является $\mathcal{Z}$-модулем относительно естественного действия

$$(zX)(a) = z \cdot X(a) \quad \text{для всех} \quad z \in \mathcal{Z}, \quad a \in A, \quad X \in D.$$

Рассмотрим градуированное векторное подпространство

$$\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, A) = \bigoplus_n \Omega^n_{\mathcal{Z}}(D, A)$$

в $\Omega^*(D,A)$, $\Omega^0_{\mathcal{Z}}(D,A) = A$, $\Omega^n_{\mathcal{Z}}(D,A) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^n_{\mathcal{Z}} D, A)$, состоящее из $\mathcal{Z}$-полилинейных кососимметрических отображений из D в A, т. е. из форм $\omega \in \Omega^n(D,A)$, удовлетворяющих тождеству

$$\omega(X_1,\ldots,zX_i,\ldots,X_n) = z\cdot\omega(X_1,\ldots,X_i,\ldots,X_n)$$

при всех $z \in \mathcal{Z}$, $X_1,\ldots,X_n \in D$, $1 \leqslant i \leqslant n$. В [2] показано, что $\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D,A)$ является дифференциальной подалгеброй в $\Omega^*(D,A)$, и поэтому оно также представляет собой дифференциальное исчисление.

Замечание 1.1. Возьмём в качестве алгебры A алгебру гладких функций $C^\infty(M)$ на многообразии M. Тогда $\mathcal{Z}(A) = C^\infty(M)$, $\mathrm{Der}(A) = \mathrm{Vect}^\infty(M)$. Среди четырёх перечисленных выше дифференциальных исчислений только $\Omega^*_{\mathcal{Z}}(A)$ и $\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D,A)$ дают ожидаемую алгебру форм де Рама $\Omega^*_{dR}(M)$ (см. [21]). Для $\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D,A)$ этот факт также установлен в [2].

Предложение 1.3. *Определённые в примерах* 1.1—1.4 *дифференциальные исчисления связаны между собой последовательностью морфизмов*

$$\Omega^*_{\mathrm{univ}}(A) \xrightarrow{\pi_1} \Omega^*_{\mathcal{Z}}(A) \xrightarrow{\pi_2} \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D,A) \overset{j}{\hookrightarrow} \Omega^*(D,A),$$

где π_1, π_2 — проекции, а j — вложение.

Доказательство. Существование и единственность отображений π_1 и π_2 следует из универсальных свойств исчислений $\Omega^*_{\mathrm{univ}}(A)$ и $\Omega^*_{\mathcal{Z}}(A)$. Существование вложения j обеспечивается самим определением дифференциального исчисления $\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D,A)$. □

1.2. Конструкция Каруби

Пусть A — ассоциативная алгебра с единицей, Ω^* — некоторое дифференциальное исчисление над A и E — конечно порождённый проективный правый A-модуль. Следуя [27], определим понятие связности.

Определение 1.3. *Ковариантным дифференцированием*, или *связностью*, на модуле E называется $\Bbbk$-линейное отображение $\nabla\colon E \to E\otimes_A \Omega^1$, обладающее свойством

$$\nabla(sa) = \nabla s\cdot a + s\otimes da$$

для всех $s \in E$, $a \in A$.

Пример 1.5 (связности на свободном модуле). Пусть $E = A^{\oplus n}$ — свободный модуль, элементы которого — столбцы высоты n. Из тождества Лейбница для дифференциала d в Ω^* следует, что отображение $\nabla_0 = d^{\oplus n}$, задаваемое формулой

$$\nabla_0 \begin{pmatrix} a_1\\ \ldots\\ a_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} da_1\\ \ldots\\ da_n\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1\\ \ldots\\ a_n\end{pmatrix} \in A^{\oplus n},$$

является связностью. Тогда произвольная связность на $A^{\oplus n}$ имеет вид

$$\nabla = \nabla_0 + \varphi, \quad \varphi \in \mathrm{Hom}_A(A^{\oplus n}, A^{\oplus n}\otimes_A \Omega^1).$$

Отображение φ относительно естественных базисов в $A^{\oplus n}$ и $A^{\oplus n}\otimes\Omega^1 = (\Omega^1)^{\oplus n}$ задаётся матрицей $\Gamma = (\gamma_{ij})_{i,j=1}^n$, $\gamma_{ij} \in \Omega^1$. Отсюда получаем формулу для связности ∇:

$$\nabla\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} da_1 \\ \dots \\ da_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \dots & \gamma_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{n1} & \dots & \gamma_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix} \in A^{\oplus n},$$

или, в матричной форме, $\nabla a = da + \Gamma a$.

Пример 1.6 (грассманова связность). На любом конечно порождённом проективном модуле E, который оператор проектирования $p \in \mathrm{End}_A(A^{\oplus n})$, $p^2 = p$, выделяет как прямое слагаемое $E = \mathrm{Im}\, p$ в свободном модуле $A^{\oplus n}$, можно задать *грассманову связность* ∇_G с помощью диаграммы

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\nabla_G"] \arrow[d] & E \otimes_A \Omega^1 \\ A^{\oplus n} \arrow[r, "d^{\oplus n}"] & (\Omega^1)^{\oplus n} = A^{\oplus n} \otimes_A \Omega^1. \arrow[u, "p\otimes\mathrm{id}"'] \end{tikzcd}$$

Поэтому на проективном модуле всегда существует связность.

Каждую связность ∇ можно однозначно продолжить до отображения

$$\nabla\colon E \otimes_A \Omega^* \to E \otimes_A \Omega^{*+1}$$

с помощью формулы

$$\nabla(s \otimes \omega) = (\nabla s)\omega + s \otimes d\omega,$$

где $s \in E$, $\omega \in \Omega^*$. Полученное отображение будет удовлетворять тождеству Лейбница

$$\nabla(\varphi\omega) = \nabla\varphi \cdot \omega + (-1)^{|\varphi|}\varphi \cdot d\omega, \quad \varphi \in E \otimes_A \Omega^*, \quad \omega \in \Omega^*. \tag{5}$$

Теперь мы можем ввести понятие кривизны.

Определение 1.4. Отображение

$$R = \nabla^2\colon E \otimes_A \Omega^* \to E \otimes_A \Omega^{*+2}$$

называется *кривизной* связности ∇.

Из тождества Лейбница (5) вытекает, что отображение кривизны R связности ∇ является эндоморфизмом правого Ω^*-модуля $E \otimes_A \Omega^*$, т. е. для всех $\varphi \in E \otimes_A \Omega^*$, $\omega \in \Omega^*$ выполняется соотношение $R(\varphi\omega) = R(\varphi)\omega$. Следовательно, любая степень R^n отображения кривизны тоже является эндоморфизмом Ω^*-модуля $E \otimes_A \Omega^*$, который повышает градуировку на $2n$.

Пусть

$$[\,,\,]\colon \Omega^* \otimes \Omega^* \to \Omega^*,$$
$$[\omega_1, \omega_2] = \omega_1\omega_2 - (-1)^{|\omega_1|\,|\omega_2|}\omega_2\omega_1, \quad \omega_1, \omega_2 \in \Omega^*, \text{ —}$$

операция градуированного коммутирования. Введём обозначения $[\Omega^*, \Omega^*] = \mathrm{Im}[\,,\,]$ и $\tilde{\Omega}^* = \Omega^*/[\Omega^*, \Omega^*]$. Так как модуль $E \otimes_A \Omega^*$ проективен и конечно порождён над Ω^*, то для каждого n определён след $\mathrm{Tr}(R^n)$ эндоморфизма R^n, являющийся элементом фактор-комплекса $\tilde{\Omega}^*$.

Следующая теорема завершает конструкцию характеристических классов Каруби (см. [27]).

Теорема 1.1. *Пусть E — конечно порождённый проективный правый модуль ассоциативной алгебры с единицей A, Ω^* — дифференциальное исчисление на A. Пусть ∇ — связность на E и R — соответствующее ей отображение кривизны. Тогда для любого натурального n*

1) *элемент $\mathrm{Tr}(R^n) \in \tilde{\Omega}^{2n}$ является коциклом;*
2) *класс когомологий $[\mathrm{Tr}(R^n)] \in \mathrm{H}^{2n}(\tilde{\Omega}^*)$ не зависит от выбора связности.* □

Определение 1.5 (см. [27]). *Характеристическими классами* конечно порождённого проективного модуля E со значениями в дифференциальном исчислении Ω^* называются элементы $c_n(E, \Omega^*) = [\mathrm{Tr}\, R^n] \in \mathrm{H}^{2n}(\tilde{\Omega}^*)$.

Замечание 1.2. Характеристические классы модуля, заданного проектором P, можно вычислить с помощью формулы (см. [27])

$$c_n(\mathrm{Im}\, P, \Omega^*) = [\mathrm{Tr}(P(dP)^{2n})]. \tag{6}$$

Следующее предложение непосредственно выводится из определения характеристических классов.

Предложение 1.4. *Пусть A — ассоциативная алгебра с единицей, Ω^* — дифференциальное исчисление на ней. Тогда*

1) *для любых конечно порождённых проективных правых модулей E и F*
$$c_n(E \oplus F, \Omega^*) = c_n(E, \Omega^*) + c_n(F, \Omega^*);$$
2) $c_n(A^{\oplus m}, \Omega^*) = 0$ *для любого n и m;*
3) *если Ω_1^* — другое дифференциальные исчисления на A и $\varphi\colon \Omega^* \to \Omega_1^*$ — морфизм дифференциальных исчислений, то для любого n справедливо равенство*
$$c_n(E, \Omega_1^*) = \varphi_* c_n(E, \Omega^*),$$
где отображение $\varphi_*\colon \mathrm{H}^*(\tilde{\Omega}^*) \to \mathrm{H}^*(\tilde{\Omega}_1^*)$ индуцировано φ. □

Замечание 1.3. Из первых двух утверждений предложения следует, что конструкция Каруби на самом деле определяет гомоморфизм

$$c_n(\cdot, \Omega^*)\colon \tilde{K}_0(A) \to \mathrm{H}^{2n}(\tilde{\Omega}^*)$$

из приведённой K-теории алгебры A в когомологии абелинизации дифференциального исчисления Ω^*.

Следствие 1.1. *Пусть A — ассоциативная алгебра с единицей, E — конечно порождённый проективный модуль на A, Ω^* — дифференциальное исчисление на A. Тогда для любого n справедливо равенство*

$$c_n(E, \Omega^*) = \psi_* c_n\big(E, \Omega^*_{\mathrm{univ}}(A)\big),$$

где $\psi\colon \Omega^*_{\mathrm{univ}}(A) \to \Omega^*$ — *единственный морфизм дифференциальных исчислений. Следовательно, равенство* $c_n\bigl(E, \Omega^*_{\mathrm{univ}}(A)\bigr) = 0$ *влечёт равенство* $c_n(E, \Omega^*) = 0$ *для каждого дифференциального исчисления* Ω^*. □

Определение 1.6. Характеристические классы конечно порождённого проективного модуля E над ассоциативной алгеброй с единицей A с коэффициентами в универсальном дифференциальном исчислении $\Omega^*_{\mathrm{univ}}(A)$ называются *универсальными характеристическими классами* модуля E и будут обозначаться в дальнейшем $c_n(E) = c_n\bigl(E, \Omega^*_{\mathrm{univ}}(A)\bigr)$.

Следствие 1.1, таким образом, показывает, что среди всех характеристических классов универсальные являются максимальным инвариантом проективных модулей. Принимая во внимание это соображение, в последующем мы сосредоточим основное внимание на универсальных характеристических классах.

Замечание 1.4. Формула $c_n(E, \Omega^*) = [\mathrm{Tr}(P(dP)^{2n})]$ приводит нас к следующему определению. Пусть E — конечно порождённый проективный A-модуль. Определим нулевой характеристический класс модуля E

$$c_0(E) = \mathrm{Tr}(\mathrm{id}_E) \in A/([A, A] + \Bbbk 1).$$

Класс c_0 является аддитивным ($c_0(E \oplus F) = c_0(E) + c_0(F)$) и приведённым ($c_0(A) = 0$), очевидно, не зависит от выбора связности и дифференциального исчисления. На самом деле несложно показать, что

$$c_0(E) \in \bar{\mathrm{H}}^0(\tilde{\Omega}^*) = \mathrm{H}^0(\tilde{\Omega}^*)/\Bbbk 1 \subset A/([A, A] + \Bbbk 1)$$

для каждого дифференциального исчисления Ω, так что можно считать, что $c_0(E) = c_0(E, \Omega^*)$ для любого Ω^*.

1.3. Характеристические классы Жураева—Мищенко—Соловьёва

В середине 80-х годов прошлого века были предложены две различные конструкции, обобщающие характеристические классы Чженя—Вейля на случай некоммутативных алгебр и их проективных модулей. Одну из них, принадлежащую Каруби, мы описали в предыдущем подразделе. Другая конструкция возникла в серии совместных работ [2—4] А. С. Мищенко, Ю. П. Соловьёва и Ю. Й. Жураева. Нашей ближайшей целью будет установление связи между характеристическими классами Каруби и Жураева—Мищенко—Соловьёва. Напомним вкратце основные элементы конструкции, принадлежащей последним трём авторам (см. также [6]).

Пусть A — ассоциативная алгебра с единицей, $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(A)$ — её центр, $D = \mathrm{Der}(A)$ — множество дифференцирований на A. Тогда, как было указано в разделе 1.1, D является алгеброй Ли и $\mathcal{Z}$-модулем, а $\mathcal{Z}$ — инвариантная относительно действия D центральная подалгебра в A. Зафиксируем некоторый конечно порождённый проективный правый A-модуль E.

Определение 1.7. *Связностью в смысле Жураева—Мищенко—Соловьёва* на модуле E называется произвольное $\Bbbk$-линейное отображение

$$\nabla\colon E \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{Z}}(D, E),$$

удовлетворяющее тождеству Лейбница

$$\nabla_X(sa) = \nabla_X(s)a + sX(a) \quad \text{для любых} \quad s \in E, \quad a \in A, \quad X \in D,$$

где $\nabla_X(s) = \nabla(s)(X)$.

Определение 1.8. *Кривизной в смысле Жураева—Мищенко—Соловьёва* связности ∇ на модуле E называется билинейное отображение Θ из D в $\operatorname{End}_{\Bbbk}(E)$, определённое формулой

$$\Theta(X, Y)(s) = \nabla_X\nabla_Y(s) - \nabla_Y\nabla_X(s) - \nabla_{[X,Y]}(s), \quad X, Y \in D, \quad s \in E.$$

Заметим, что кривизна Θ $\mathcal{Z}$-линейна и кососимметрична и потому лежит в $\operatorname{Hom}_{\mathcal{Z}}\bigl(\Lambda^2_{\mathcal{Z}}D, \operatorname{End}_{\Bbbk}(E)\bigr)$. Кроме того, равенство

$$\begin{aligned}
&\Theta(X,Y)(sa)\nabla_X\nabla_Y(sa) - \nabla_Y\nabla_X(sa) - \nabla_{[X,Y]}(sa) = \\
&\quad = \nabla_X\bigl(\nabla_Y(s)a + sY(a)\bigr) - \nabla_Y\bigl(\nabla_X(s)a + sX(a)\bigr) - \nabla_{[X,Y]}(s)a - s[X,Y](a) = \\
&\quad = \bigl(\nabla_X\nabla_Y(s)\bigr)a + \nabla_Y(s)\cdot X(a) + \nabla_X(s)\cdot Y(a) + s\cdot(XY)(a) - \\
&\quad - \bigl(\nabla_Y\nabla_X(s)\bigr)a - \nabla_X(s)\cdot Y(a) - \nabla_Y(s)\cdot X(a) - s\cdot(YX)(a) - \\
&\quad - \nabla_{[X,Y]}(s)a - s\cdot(XY - YX)(a) = \\
&\quad = \bigl(\nabla_X\nabla_Y(s)\bigr)a - \bigl(\nabla_Y\nabla_X(s)\bigr)a - \nabla_{[X,Y]}(s)a = \Theta(X,Y)(s)a
\end{aligned}$$

при всех $s \in E$, $a \in A$, $X, Y \in D$ показывает, что Θ является элементом пространства $\operatorname{Hom}_{\mathcal{Z}}\bigl(\Lambda^2_{\mathcal{Z}}D, \operatorname{End}_A(E)\bigr)$.

Конструкция характеристических классов Жураева—Мищенко—Соловьёва по сравнению с конструкцией Каруби имеет дополнительный параметр — следовой модуль.

Определение 1.9. Линейное пространство V называется *следовым модулем*, если V — модуль над $\mathcal{Z}$ и D, причём

$$(zX)(v) = z\cdot X(v), \quad X(z\cdot v) = X(z)\cdot v + z\cdot X(v)$$

для всех $X \in D$, $z \in \mathcal{Z}$, $v \in V$, и, кроме того, имеется линейное отображение (*след*) $\tau\colon A \to V$, являющееся гомоморфизмом $\mathcal{Z}$- и D-модулей и удовлетворяющее соотношению

$$\tau(ab) = \tau(ba) \quad \text{для любых} \quad a, b \in A.$$

Каждая алгебра обладает хотя бы одним следовым модулем (см. пример 1.7).

Как и обычный след, следовой модуль (V, τ) можно использовать для вычисления инвариантов эндоморфизмов проективных модулей. Более точно, справедливо следующее утверждение.

Предложение 1.5. *Пусть (V, τ) — следовой модуль. Тогда существует расширение следа τ до семейства отображений $\bar\tau_E\colon \operatorname{End}_A(E) \to V$, где E — конечно порождённый проективный A-модуль, такого что*

1) *для каждого конечного проективного модуля* E $\bar{\tau}_E$ *является* $\Bbbk$*-линейным отображением* (*линейность*);
2) *для любых конечных проективных* A*-модулей* E, F *и любых морфизмов* $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(E, F)$, $\psi \in \mathrm{Hom}_A(F, E)$ $\bar{\tau}_E(\psi\varphi) = \bar{\tau}_F(\varphi\psi)$ (*коммутативность*);
3) *для любых конечных проективных* A*-модулей* E, F *и любых морфизмов* $\varphi \in \mathrm{End}_A(E)$, $\psi \in \mathrm{End}_A(F)$ $\bar{\tau}_{E\oplus F}(\varphi \oplus \psi) = \bar{\tau}_E(\varphi) + \bar{\tau}_F(\psi)$ (*аддитивность*);
4) *для* $E = A$ *отображение* $\bar{\tau}_A\colon \mathrm{End}_A(A) = A \to V$ *совпадает с* τ (*нормировка*).

Итак, пусть имеются конечно порождённый проективный A-модуль E, на котором выбрана некоторая связность в смысле Жураева—Мищенко—Соловьёва ∇ с кривизной Θ и следовой модуль V со следом τ. Приступим к построению характеристических классов Жураева—Мищенко—Соловьёва.

Рассмотрим градуированное линейное пространство

$$\Omega^*(D, V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\Lambda^n_{\Bbbk} D, V).$$

Дифференциал, задаваемый формулой (3), определяет на $\Omega^*(D, V)$ структуру комплекса. В $\Omega^*(D, V)$ можно выделить подпространство

$$\Omega_{\mathcal{Z}}(D, V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^n_{\mathcal{Z}} D, V),$$

которое на самом деле есть подкомплекс (см. [2, 6]).

Рассмотрим также пространство

$$\Omega^*_{\mathcal{Z}}\big(D, \mathrm{End}_A(E)\big) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathrm{Hom}_{\mathcal{Z}}\big(\Lambda^n_{\mathcal{Z}} D, \mathrm{End}_A(E)\big),$$

которое с умножением (4) является градуированной алгеброй. Тогда $\Theta \in \Omega^2_{\mathcal{Z}}\big(D, \mathrm{End}_A(E)\big)$. След $\bar{\tau}_E\colon \mathrm{End}_A(E) \to V$ индуцирует линейное отображение

$$(\bar{\tau}_E)_*\colon \Omega^*_{\mathcal{Z}}\big(D, \mathrm{End}_A(E)\big) \to \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, V).$$

Определим элемент $\sigma_n(E, \nabla) \in \Omega^{2n}_{\mathcal{Z}}(D, V)$ равенством

$$\sigma_n(E, \nabla) = (\bar{\tau}_E)_*(\Theta^n).$$

Теорема 1.2. *Для каждого натурального* n *справедливы следующие утверждения*:
1) *элемент* $\sigma_n(E, \nabla)$ *является коциклом в комплексе* $\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, V)$;
2) *класс когомологий* $[\sigma_n(E, \nabla)] \in \mathrm{H}^{2n}\big(\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, V)\big)$ *не зависит от выбора связности* ∇.

Определение 1.10. Элемент $\mathrm{Ch}_n(E, V) = [\sigma_n(E, \nabla)]$ группы $2n$-мерных когомологий комплекса $\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, V)$ называется *n-м характеристическим классом Жураева—Мищенко—Соловьёва* модуля E с коэффициентами в модуле следов V.

Как видно из вышеизложенного, теория характеристических классов Жураева—Мищенко—Соловьёва во многом параллельна теории Каруби. В оставшейся части этого подраздела мы выявим связи, которые имеются между этими двумя конструкциями.

Лемма 1.1. *Для любого конечно порождённого проективного A-модуля E имеют место изоморфизмы линейных пространств*

$$\Phi\colon \operatorname{Hom}_{\Bbbk}\bigl(E, \operatorname{Hom}_{\mathcal{Z}}(D,E)\bigr) \simeq \operatorname{Hom}_{\Bbbk}\bigl(E, E\otimes_A \Omega^1_{\mathcal{Z}}(D,A)\bigr),$$
$$\Psi_*\colon \Omega^*_{\mathcal{Z}}\bigl(D, \operatorname{End}_A(E)\bigr) \simeq \operatorname{End}_{\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D,A)}\bigl(E\otimes_A \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D,A)\bigr),$$

причём Ψ_* является гомоморфизмом градуированных алгебр.

Доказательство. Определим Φ как композицию изоморфизмов

$$\operatorname{Hom}_{\Bbbk}\bigl(E, \operatorname{Hom}_{\mathcal{Z}}(D,E)\bigr) \simeq \operatorname{Hom}_{\Bbbk}\bigl(E, \operatorname{Hom}_{\mathcal{Z}}(D, E\otimes_A A)\bigr) \simeq$$
$$\simeq \operatorname{Hom}_{\Bbbk}\bigl(E, E\otimes_A \operatorname{Hom}_{\mathcal{Z}}(D,A)\bigr) = \operatorname{Hom}_{\Bbbk}\bigl(E, E\otimes_A \Omega^1_{\mathcal{Z}}(D,A)\bigr),$$

а Ψ_* — как композицию

$$\begin{aligned}
&\Omega^*_{\mathcal{Z}}\bigl(D, \operatorname{End}_A(E)\bigr) = \\
&\quad = \operatorname{Hom}_{\mathcal{Z}}\bigl(\Lambda^*_{\mathcal{Z}} D, \operatorname{End}_A(E)\bigr) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{Z}}\bigl(\Lambda^*_{\mathcal{Z}} D, \operatorname{Hom}_A(E,E)\bigr) \simeq \\
&\quad \simeq \operatorname{Hom}_A(\Lambda^*_{\mathcal{Z}} D \otimes_{\mathcal{Z}} E, E) \simeq \operatorname{Hom}_A\bigl(E, \operatorname{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^*_{\mathcal{Z}} D, E)\bigr) = \\
&\quad = \operatorname{Hom}_A\bigl(E, \operatorname{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^*_{\mathcal{Z}} D, E\otimes_A A)\bigr) \simeq \operatorname{Hom}_A\bigl(E, E\otimes_A \operatorname{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^*_{\mathcal{Z}} D, A)\bigr) = \\
&\quad = \operatorname{Hom}_A\bigl(E, E\otimes_A \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D,A)\bigr) \simeq \\
&\quad \simeq \operatorname{Hom}_A\Bigl(E, \operatorname{Hom}_{\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D,A)}\bigl(\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D,A), E\otimes_A \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D,A)\bigr)\Bigr) \simeq \\
&\quad \simeq \operatorname{Hom}_{\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D,A)}\bigl(E\otimes_A \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D,A), E\otimes_A \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D,A)\bigr) = \\
&\quad = \operatorname{End}_{\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D,A)}\bigl(E\otimes_A \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D,A)\bigr).
\end{aligned}$$

Покажем, что Ψ_* — гомоморфизм. Для этого посмотрим на конкретный вид этого отображения. Пусть $\varphi \in \Omega^m_{\mathcal{Z}}\bigl(D, \operatorname{End}_A(E)\bigr)$, $s\in E$, $\omega \in \Omega^n_{\mathcal{Z}}(D,A)$. Тогда $\Psi_*(\varphi)$ — эндоморфизм модуля $E\otimes_A \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D,A)$, повышающий градуировку на n. Отождествляя пространства $E\otimes_A \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D,A) = E\otimes_A \operatorname{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^*_{\mathcal{Z}} D, A)$ и $\operatorname{Hom}_{\mathcal{Z}}(\Lambda^*_{\mathcal{Z}} D, E)$, имеем для всех $X_1,\ldots,X_{m+n}\in D$

$$\begin{aligned}
&[\Psi_*(\varphi)(s\otimes\omega)](X_1,\ldots,X_{m+n}) = \\
&\quad = \frac{1}{(m+n)!}\sum_{\sigma\in\Sigma_{m+n}} (-1)^\sigma \bigl[\varphi\bigl(X_{\sigma(1)},\ldots,X_{\sigma(m)}\bigr)\bigr](s)\cdot \omega\bigl(X_{\sigma(m+1)},\ldots,X_{\sigma(m+1)}\bigr).
\end{aligned}$$

В частности,

$$[\Psi_*(\varphi)(s\otimes 1)](X_1,\ldots,X_m) = [\varphi(X_1,\ldots,X_m)](s).$$

Пусть $\varphi_1 \in \Omega^m_{\mathcal{Z}}\bigl(D, \operatorname{End}_A(E)\bigr)$, $\varphi_2 \in \Omega^n_{\mathcal{Z}}\bigl(D, \operatorname{End}_A(E)\bigr)$. Проверку достаточно производить на элементах вида $s\otimes_A 1 \in E\otimes_A \Omega^0_{\mathcal{Z}}(D,A)$. Пусть $\Psi_*(\varphi_2)(s\otimes 1) = \sum_i s_i\otimes\omega_i$, $s_i\in E$, $\omega_i\in\Omega^n_{\mathcal{Z}}(D,A)$. Тогда для любых $X_1,\ldots,X_{m+n}\in D$

$$
\begin{aligned}
&[\Psi_*(\varphi_1)\Psi_*(\varphi_2)(s\otimes 1)](X_1,\dots,X_{m+n}) = \sum_i [\Psi_*(\varphi_1)(s_i\otimes\omega_i)](X_1,\dots,X_{m+n}) = \\
&\quad = \frac{1}{(m+n)!}\times \\
&\quad \times \sum_i \sum_{\sigma\in\Sigma_{m+n}} (-1)^\sigma \Big(\varphi_1\big(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(m)}\big)\Big)(s_i)\cdot\omega_i\big(X_{\sigma(m+1)},\dots,X_{\sigma(m+n)}\big) = \\
&\quad = \frac{1}{(m+n)!}\times \\
&\quad \times \sum_{\sigma\in\Sigma_{m+n}} (-1)^\sigma \Big(\varphi_1\big(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(m)}\big)\Big)\Big(\sum_i s_i\cdot\omega_i\big(X_{\sigma(m+1)},\dots,X_{\sigma(m+n)}\big)\Big) = \\
&\quad = \frac{1}{(m+n)!}\times \\
&\quad \times \sum_{\sigma\in\Sigma_{m+n}} (-1)^\sigma \Big(\varphi_1\big(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(m)}\big)\Big)\big(\big[\varphi_2\big(X_{\sigma(m+1)},\dots,X_{\sigma(m+n)}\big)\big](s)\big) = \\
&\quad = [(\varphi_1\varphi_2)(X_1,\dots,X_{m+n})](s) = [\Psi_*(\varphi_1\varphi_2)(s\otimes 1)](X_1,\dots,X_{m+n}).
\end{aligned}
$$

Следовательно, $\Psi_*(\varphi_1)\Psi_*(\varphi_2) = \Psi_*(\varphi_1\varphi_2)$, так что Ψ_* — гомоморфизм. □

Покажем теперь, как соотносятся только что введённые определения связности и кривизны с понятиями связности и кривизны в конструкции Каруби.

Предложение 1.6. *Для любого конечного проективного A-модуля E выполнены следующие утверждения*:

1) *изоморфизм Φ из леммы 1.1 устанавливает биекцию между связностями в смысле Жураева—Мищенко—Соловьёва и связностями Каруби в дифференциальном исчислении $\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D,A)$*;
2) *изоморфизм Ψ_2 устанавливает биекцию между кривизнами в смысле Жураева—Мищенко—Соловьёва и кривизнами Каруби в дифференциальном исчислении $\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D,A)$. При этом если ∇ есть некоторая связность Жураева—Мищенко—Соловьёва и Θ — её кривизна, то $\Psi_2(\Theta)$ есть удвоенная кривизна связности Каруби $\Phi(\nabla)$* (*ср.* [5, § III.5]).

Доказательство.

1. Пусть ∇ — связность Жураева—Мищенко—Соловьёва на E, и пусть $\hat\nabla = \Phi(\nabla)$. Тогда для любых $s\in E$, $a\in A$, $X\in D$

$$
\begin{aligned}
\hat\nabla(sa)(X) = \nabla_X(sa) = \nabla_X(s)a + sX(a) = \nabla_X(s)a + s\cdot da(X) = \\
= (\hat\nabla(s)a)(X) + (s\otimes_A da)(X),
\end{aligned}
$$

т. е. отображение $\hat\nabla$ удовлетворяет тождеству Лейбница и, таким образом, является связностью.

Обратно, пусть $\hat\nabla$ — связность Каруби и $\nabla = \Phi^{-1}(\hat\nabla)$. Тогда

$$
\nabla_X(sa) = \hat\nabla(sa)(X) = (\hat\nabla(s)a + s\otimes_A da)(X) = \nabla_X(s)a + sX(a),
$$

следовательно, ∇ — связность в смысле Жураева—Мищенко—Соловьёва.

2. Пусть ∇ — связность Жураева—Мищенко—Соловьёва, Θ — её кривизна, а $\hat\nabla = \Phi(\nabla)$ — соответствующая ей связность Каруби.

Пусть $s \in E$ и $\hat\nabla(s) = \sum\limits_i s_i \otimes \omega_i$, где $s_i \in E$, $\omega_i \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(D, \Bbbk)$. Тогда для любых $X, Y \in D$

$$\nabla_X\nabla_Y(s) = \nabla_X\big(\hat\nabla(s)(Y)\big) = \nabla_X\left(\sum_i s_i\omega_i(Y)\right) = \sum_i \nabla_X(s_i)\omega_i(Y) = \\ = \sum_i \big(\hat\nabla(s_i)\big)(X)\omega_i(Y) = \sum_i (\hat\nabla(s_i) \otimes \omega_i)(X, Y).$$

Аналогично

$$\nabla_Y\nabla_X(s) = \sum_i (\hat\nabla(s_i) \otimes \omega_i)(Y, X),$$

так что

$$\nabla_X\nabla_Y(s) - \nabla_Y\nabla_X(s) = 2\sum_i (\hat\nabla(s_i) \wedge \omega_i)(Y, X). \tag{7}$$

С другой стороны, так как $\omega_i(Y) \in \Bbbk$, то $X\big(\omega_i(Y)\big) = 0$. Аналогично $Y\big(\omega_i(X)\big) = 0$, и мы получаем равенство

$$\nabla_{[X,Y]}(s) = \sum_i s_i\omega_i([X, Y]) = \sum_i s_i\Big(-2(d\omega_i)(X, Y) + X\big(\omega_i(Y)\big) + Y\big(\omega_i(X)\big)\Big) = \\ = -2\sum_i (s_i \otimes d\omega_i)(X, Y). \tag{8}$$

Вычитая из равенства (7) равенство (8), получим

$$\big(\psi_2(\Theta)(s)\big)(X, Y) = \big(\Theta(X, Y)\big)(s) = \nabla_X\nabla_Y(s) - \nabla_Y\nabla_X(s) - \nabla_{[X,Y]}(s) = \\ = 2\sum_i (\hat\nabla(s_i) \wedge \omega_i)(X, Y) + 2\sum_i (s_i \otimes d\omega_i)(X, Y) = \\ = 2\sum_i (\hat\nabla(s_i) \wedge \omega_i + s_i \otimes d\omega_i)(X, Y) = 2\sum_i \big(\hat\nabla(s_i \otimes \omega_i)\big)(X, Y) = \\ = 2\big(\hat\nabla \circ \widehat\nabla(s)\big)(X, Y).$$

Следовательно, $\psi_2(\Theta) = 2\hat\nabla^2$ — удвоенная кривизна связности $\hat\nabla$, и Ψ_2, таким образом, устанавливает биекцию между кривизнами в смысле Жураева—Мищенко—Соловьёва и кривизнами Каруби. □

Как следствие получаем, что на проективном модуле всегда имеется связность в смысле Жураева—Мищенко—Соловьёва.

Связь между конструкциями Каруби и Жураева—Мищенко—Соловьёва осуществляется с помощью двух объектов: с одной стороны, дифференциального исчисления $\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, A)$, введённого в примере 1.4, с другой — универсального следового модуля.

Пример 1.7 (универсальный следовой модуль). Рассмотрим пространство $\tilde A = A/[A, A]$. Поскольку для любых $a, b \in A$, $z \in \mathcal{Z}$, $X \in D$ выполнено

$$z[a, b] = [za, b] \in [A, A], \quad X[a, b] = [X(a), b] + [a, X(b)] \in [A, A],$$

то $[A,A]$ является $\mathcal{Z}$- и D-подмодулем в A, и следовательно, на $\tilde{A}$ имеются естественные согласованные между собой структуры $\mathcal{Z}$- и D-модуля. При этом естественная проекция $\pi\colon A \to \tilde{A}$ является $\mathcal{Z}$- и D-гомоморфизмом, который по определению на коммутаторах равен нулю. Поэтому π есть след, а $\tilde{A}$ — следовой модуль. Оказывается, что $\tilde{A}$ универсален в следующем смысле.

Предложение 1.7. *Пусть V — следовой модуль со следом $\tau\colon A \to V$. Тогда существует единственный морфизм $\mathcal{Z}$- и D-модулей $\rho\colon \tilde{A} \to V$, такой что $\tau = \rho \circ \pi$.*

Доказательство. Для каждого $\tilde{a} = a + [A,A] \in \tilde{A}$ положим $\rho(\tilde{a}) = \tau(a)$. Так как $\tau([a,b]) = 0$ для любых $a,b \in A$, то ρ корректно определён. Тогда ρ — морфизм, обладающий всеми свойствами из формулировки предложения. Единственность такого морфизма следует из сюръективности проекции π. □

Доказательство предложения 1.5. Пусть $\rho\colon \tilde{A} \to V$ — морфизм из предложения 1.7. Положим $\bar{\tau} = \rho \circ \mathrm{Tr}$. Тогда $\bar{\tau}$ удовлетворяет всем требованиям в формулировке предложения. □

Лемма 1.2. *Состоящая из отображений градуированных линейных пространств диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{End}_{\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D,A)}(E \otimes_A \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D,A)) \arrow[r, "\mathrm{Tr}"] & \tilde{\Omega}^*_{\mathcal{Z}}(D,A) \arrow[d, "\tilde{\pi}_*"] \\
\Omega^*_{\mathcal{Z}}\big(D, \mathrm{End}_A(E)\big) \arrow[u, "\Psi_*"] \arrow[r, "(\bar{\pi}_E)_*"] & \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D,\tilde{A}),
\end{tikzcd}$$

где $\tilde{\Omega}^*_{\mathcal{Z}}(D,A) = \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D,A)/[\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D,A), \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D,A)]$, $(\tilde{A},\pi)$ — универсальный следовой модуль, $\tilde{\pi}_*$ — отображение, индуцированное проекцией $\pi_*\colon \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D,A) \to \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D,\tilde{A})$, а Ψ_* — изоморфизм из леммы 1.1, коммутативна. При этом $\tilde{\pi}_*$ — цепное отображение.

Доказательство. Если $\omega_1 \in \Omega^m_{\mathcal{Z}}(D,A)$, $\omega_2 \in \Omega^n_{\mathcal{Z}}(D,A)$, то для любых $X_1,\ldots,X_{m+n} \in D$ имеем

$$\begin{aligned}
&[\omega_1,\omega_2](X_1,\ldots,X_{m+n}) = \\
&\quad = \frac{1}{(m+n)!}\sum_{\sigma\in\Sigma_{m+n}} (-1)^{\sigma}\big\{\omega_1\big(X_{\sigma(1)},\ldots,X_{\sigma(m)}\big)\omega_2\big(X_{\sigma(m+1)},\ldots,X_{\sigma(m+n)}\big) - \\
&\quad - (-1)^{mn}\omega_2\big(X_{\sigma(1)},\ldots,X_{\sigma(n)}\big)\omega_1\big(X_{\sigma(n+1)},\ldots,X_{\sigma(m+n)}\big)\big\} = \\
&\quad = \frac{1}{(m+n)!}\times \\
&\quad \times \sum_{\sigma\in\Sigma_{m+n}} (-1)^{\sigma}\big(\big[\omega_1\big(X_{\sigma(1)},\ldots,X_{\sigma(m)}\big), \omega_2\big(X_{\sigma(m+1)},\ldots,X_{\sigma(m+n)}\big)\big]\big) \in [A,A].
\end{aligned}$$

Следовательно, отображение $\tilde{\pi}_*$ корректно определено. $\tilde{\pi}_*$ есть цепное отображение, так как таковым является π_*.

Пусть $\varphi \in \Omega^n_{\mathcal{Z}}\big(D, \mathrm{End}_A(E)\big)$ и $X_1, \ldots, X_n \in D$. Тогда

$$[(\bar{\pi}_E)_*(\varphi)](X_1, \ldots, X_n) = \bar{\pi}_E\big(\varphi(X_1, \ldots, X_n)\big) = \mathrm{Tr}\big(\varphi(X_1, \ldots, X_n)\big),$$

поскольку $\bar{\pi}_E\colon \mathrm{End}_A(E) \to \tilde{A}$ — обычный операторный след. Отождествляя E с образом некоторого проектора $P \in \mathrm{End}_A(A^{\oplus l})$ в свободном модуле с базисом e_i, $i = 1, \ldots, l$, получим

$$[(\bar{\pi}_E)_*(\varphi)](X_1, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^{l} \varphi_{ii}(X_1, \ldots, X_n) \mod [A, A],$$

где элементы $\varphi_{ii}(X_1, \ldots, X_n) \in A$ определены равенствами

$$[\varphi(X_1, \ldots, X_n)](Pe_i) = \sum_{j=1}^{l} e_j \cdot \varphi_{ji}(X_1, \ldots, X_n)$$

для всех $1 \leqslant i \leqslant l$.

С другой стороны, модуль $E \otimes_A \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, A)$ выделяется в свободном модуле $A^{\oplus l} \otimes_A \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, A)$ проектором $P \otimes \mathrm{id}$. Тогда

$$\mathrm{Tr}\big(\Psi_*(\varphi)\big) = \sum_{i=1}^{l} \varphi'_{ii} \mod [\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, A), \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, A)],$$

где для каждого $1 \leqslant i \leqslant l$

$$[\Psi_*(\varphi)]\big((P \otimes 1)(e_i \otimes 1)\big) = \sum_{j=1}^{l} e_j \otimes \varphi'_{ji}, \quad \varphi'_{ji} \in \Omega^n_{\mathcal{Z}}(D, A),$$

и, таким образом,

$$\big[\tilde{\pi}_* \circ \mathrm{Tr}\big(\Psi_*(\varphi)\big)\big](X_1, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^{l} \varphi'_{ii}(X_1, \ldots, X_n) \mod [A, A].$$

Но из определения отображения Ψ_* следует, что для каждого $1 \leqslant i \leqslant l$

$$\sum_{j=1}^{l} e_j \cdot \varphi'_{ji}(X_1, \ldots, X_n) = [\Psi_*(\varphi)(Pe_i \otimes 1)](X_1, \ldots, X_l) = \\ = [\varphi(X_1, \ldots, X_l)](Pe_i) = \sum_{j=1}^{l} e_j \cdot \varphi_{ji}(X_1, \ldots, X_n),$$

и потому $\varphi'_{ii}(X_1, \ldots, X_n) = \varphi_{ii}(X_1, \ldots, X_n)$. Следовательно,

$$\big[\tilde{\pi}_* \circ \mathrm{Tr}\big(\Psi_*(\varphi)\big)\big](X_1, \ldots, X_n) = [(\bar{\pi}_E)_*(\varphi)](X_1, \ldots, X_n).$$

Так как выбор φ и $X_1 \ldots, X_n$ произволен, то $(\bar{\pi}_E)_* = \tilde{\pi}_* \circ \mathrm{Tr} \circ \Psi_*$. □

Замечание 1.5. Отображение $\tilde{\pi}_*$ — изоморфизм, если A коммутативна или D является конечно порождённым проективным $\mathcal{Z}$-модулем.

Связь между характеристическими классами Каруби и классами Жураева—Мищенко—Соловьёва описывается следующей теоремой.

Теорема 1.3. *Пусть A — ассоциативная алгебра с единицей, $D = \mathrm{Der}(A)$ — алгебра Ли её дифференцирований, $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(A)$ — её центр. Пусть даны также конечно порождённый проективный правый A-модуль E и следовой модуль (V, τ). Тогда характеристические классы Жураева—Мищенко—Соловьёва $\mathrm{Ch}_n(E, V)$ модуля E с коэффициентами в следовом модуле V и характеристические классы $c_n\big(E, \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, A)\big)$ модуля E с коэффициентами в дифференциальном исчислении $\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, A)$ связаны соотношением*

$$\mathrm{Ch}_n(E, V) = 2^n \rho_* \tilde{\pi}_* \Big(c_n\big(E, \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, A)\big)\Big),$$

где $\tilde{\pi}_*\colon \mathrm{H}^*\big(\tilde{\Omega}^*_{\mathcal{Z}}(D, A)\big) \to \mathrm{H}^*\big(\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, \tilde{A})\big)$ — отображение из леммы 1.2, взятое на уровне когомологий, а $\rho_*\colon \mathrm{H}^*\big(\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, \tilde{A})\big) \to \mathrm{H}^*\big(\Omega^* \mathcal{Z}(D, V)\big)$ индуцировано каноническим отображением $\rho\colon \tilde{A} \to V$ из универсального следового модуля.

Доказательство. Пусть ∇ — некоторая связность в смысле Жураева—Мищенко—Соловьёва на модуле E и Θ — её кривизна. Рассмотрим соответствующую ей связность Каруби $\hat{\nabla}$ с кривизной $R = \hat{\nabla}^2$. Тогда по лемме 1.1 $2R = \Psi_*(\Theta)$. Поскольку Ψ_* является гомоморфизмом алгебр, то для любого n справедливо $\Psi_*(\Theta^n) = 2^n R^n$.

Отображение следа τ следового модуля (V, τ), согласно предложению 1.7, раскладывается в композицию $\tau = \rho \circ \pi$. Следовательно, отображение

$$(\bar{\tau}_E)_*\colon \Omega^*_{\mathcal{Z}}\big(D, \mathrm{End}_A(E)\big) \to \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, V)$$

тоже представляется в виде композиции цепных отображений:

$$\Omega^*_{\mathcal{Z}}\big(D, \mathrm{End}_A(E)\big) \xrightarrow{(\bar{\pi}_E)_*} \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, \tilde{A}) \xrightarrow{\rho_*} \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, V).$$

Тогда, применяя лемму 1.2, получаем равенство

$$\sigma_n(E, \nabla) = 2^n \rho_* \tilde{\pi}_*(R^n), \quad n \in \mathbb{N}. \qquad \square$$

Замечание 1.6. Теорему 1.2 можно вывести из только что доказанного результата и теоремы 1.1. Действительно, $\sigma_n(E, \nabla)$ является коциклом как образ коцикла $2^n R^n$ при цепном отображении $\rho_* \tilde{\pi}_*$. При этом когомологический класс $[\sigma_n(E, \nabla)] \in \mathrm{H}^{2n}\big(\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, V)\big)$ не зависит от выбора связности, поскольку от её выбора не зависит уже класс $[R^n] \in \mathrm{H}^{2n}\big(\tilde{\Omega}^*_{\mathcal{Z}}(D, A)\big)$.

Следствие 1.2. *Для каждого следового модуля (V, τ) определено отображение*

$$\Pi = \rho_* \tilde{\pi}_* \psi_*\colon \mathrm{H}^*\big(\tilde{\Omega}^*_{\mathrm{univ}}(A)\big) \to \mathrm{H}^*\big(\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, V)\big),$$

где $\psi_*\colon \mathrm{H}^*\big(\tilde{\Omega}^*_{\mathrm{univ}}(A)\big) \to \mathrm{H}^*(\Omega^*_{\mathcal{Z}}\big(D, \tilde{A})\big)$ индуцировано морфизмом дифференциальных исчислений $\psi\colon \Omega^*_{\mathrm{univ}}(A) \to \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, A)$, которое переводит универсальные характеристические классы Каруби в характеристические классы Жураева—Мищенко—Соловьёва. $\square$

Замечание 1.7. Конструкция характеристических классов Жураева—Мищенко—Соловьёва имеет следующее обобщение (см. [2,6]). Пусть D обозначает не множество всех дифференцирований $\mathrm{Der}(A)$ алгебры A, как ранее, а некоторую подалгебру Ли в $\mathrm{Der}(A)$. Аналогично возьмём в качестве $\mathcal{Z}$ некоторую подалгебру в центре $\mathcal{Z}(A)$ алгебры A. Потребуем, чтобы пара $(D, \mathcal{Z})$ была совместимой, т. е. D являлось $\mathcal{Z}$-модулем, а $\mathcal{Z}$ было замкнуто в $\mathcal{Z}(A)$ относительно действия D. Тогда все конструкции и теоремы этого раздела переносятся на этот случай безо всяких изменений.

1.4. Циклические гомологии и теорема Каруби

Середина 1980-х годов, когда появились конструкции характеристических классов проективных модулей, стала временем рождения и развития теории циклических (ко)гомологий, которую традиционно связывают с именами А. Конна, Б. Цыгана, Лодэ, Квиллена. Каруби был первым, кто заметил связь между своей конструкцией характеристических классов и циклическими гомологиями. Важным проявлением этой связи является оператор периодичности S, действующий на когомологиях $\mathrm{H}^*\big(\tilde{\Omega}^*_{\mathrm{univ}}(A)\big)$ абелинизации универсального дифференциального исчисления, который переводит каждый характеристический класс в класс с меньшим номером. Это обстоятельство существенно облегчает работу с универсальными характеристическими классами.

Следуя работе [27], опишем связь между характеристическими классами $c_n(\cdot)$ и циклическими гомологиями.

Введём в рассмотрение оператор Хохшильда

$$b_{n+1}\colon \Omega^{n+1}_{\mathrm{univ}}(A) \to \Omega^n_{\mathrm{univ}}(A),$$
$$b_{n+1}(\omega da) = (-1)^n(\omega a - a\omega) = (-1)^{\omega}[\omega, a], \quad \omega \in \Omega^n_{\mathrm{univ}}(A), \quad a \in A,$$

и оператор Каруби $\sigma = 1 - (db + bd)$. Легко проверяются соотношения

$$b^2 = 0, \quad [b, \sigma] = [d, \sigma] = 0.$$

Гомологии $\mathrm{HH}_*(A)$ комплекса $(\Omega^*_{\mathrm{univ}}(A), b)$ называются *хохшильдовыми гомологиями* алгебры A. *Приведёнными циклическими гомологиями* алгебры A называются гомологии $\overline{\mathrm{HC}}_*(A)$ фактор-комплекса

$$\bar{C}^{\lambda}_* = \Omega^*_{\mathrm{univ}}(A)/(\mathrm{Im}(1-\sigma) + \mathrm{Im}\, d + \mathbb{C}1)$$

с дифференциалом b.

Хохшильдовы и циклические гомологии связаны точной последовательностью Конна [17]

$$\overline{\mathrm{HC}}_{n+2}(A) \xrightarrow{S} \overline{\mathrm{HC}}_n(A) \xrightarrow{B} \mathrm{HH}_{n+1}(A) \xrightarrow{I} \overline{\mathrm{HC}}_{n+1}(A) \xrightarrow{S} \overline{\mathrm{HC}}_{n-1}(A).$$

Теорема 1.4 (Каруби [27]).

1. *Имеется естественный изоморфизм*

$$\mathrm{H}^*\big(\tilde{\Omega}^*_{\mathrm{univ}}(A)\big) \simeq \ker B = \mathrm{Im}\, S \subset \overline{\mathrm{HC}}_*(A).$$

2. *При подходящей нормировке оператора S имеем $Sc_n(E) = c_{n-1}(E)$ для любого проективного конечно порождённого модуля E и любого натурального n.*

Композиция

$$\overline{\mathrm{ch}}_n\colon \tilde{K}_0(A) \xrightarrow{c_n} \mathrm{H}^{2n}\big(\tilde{\Omega}^*_{\mathrm{univ}}(A)\big) \hookrightarrow \overline{\mathrm{HC}}_{2n}(A)$$

называется *приведённым характером Конна—Черна*. Рассматривая унитализацию A_+ алгебры A, получаем неприведённый *характер Конна—Черна* ch_n:

$$\mathrm{ch}_n\colon K_0(A) \simeq \tilde{K}_0(A_+) \xrightarrow{\overline{\mathrm{ch}}_n} \overline{\mathrm{HC}}_{2n}(A_+),$$

который принимает значения в *циклических гомологиях* $\mathrm{HC}_*(A) \equiv \overline{\mathrm{HC}}_*(A_+)$ алгебры A.

2. Конечномерные полупростые алгебры

2.1. Случай $\mathrm{char}\,\Bbbk = 0$

С этого момента мы будем считать, что A является конечномерной полупростой алгеброй над полем $\Bbbk$ нулевой характеристики, тогда по структурной теореме Веддебарна—Артина она представляется в виде прямой суммы матричных алгебр: $A = \bigoplus\limits_{i=1}^{N} \mathrm{M}_{n_i}(F_i)$, где F_i — алгебра с делением над $\Bbbk$. Точно так же её конечно порождённый модуль E проективен и имеет вид $E = \sum\limits_{i=1}^{N} \mu_i E_i$, где для каждого i μ_i — целое неотрицательное число, а $E_i = F_i^{n_i}$ — неприводимый модуль, соответствующий i-й матричной компоненте.

На вопрос о нетривиальности характеристических классов модуля E даёт ответ следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть $A = \bigoplus\limits_{i=1}^{N} \mathrm{M}_{n_i}(F_i)$ — полупростая алгебра, $E = \sum\limits_{i=1}^{N} \mu_i E_i$ — конечномерный A-модуль. Тогда если модуль E пропорционален свободному ($E = \lambda A$), т. е. существует, вообще говоря рациональное, число λ, такое что $\mu_i = \lambda n_i$, $i = 1, \ldots, N$, то все характеристические классы $c_n(E)$ равны нулю. В противном случае $c_n(E) \neq 0$ для всех n.*

Доказательство. 1. Пусть E пропорционален свободному модулю. Это означает, что существует натуральное k, такое что модуль kE изоморфен свободному модулю, скажем lA. Тогда в силу аддитивности характеристических классов

$$kc_n(E) = c_n(kE) = c_n(lA) = lc_n(A) = l\,0 = 0,$$

откуда $c_n(E) = 0$ для любого n.

2. Пусть E не пропорционален свободному. Тогда найдётся пара индексов i, j, например $i = 1$, $j = 2$, таких что $\mu_i n_j \neq \mu_j n_i$. Согласно теореме 1.4 достаточно показать, что нетривиален нулевой характеристический класс

$$c_0(E) = \mathrm{Tr}(P) \in \tilde{A} = A/([A,A] + \Bbbk 1),$$

где $P \in \mathrm{M}_r(A)$ — проектор, определяющий проективный модуль, изоморфный E. В качестве P в данном случае можно взять элемент $\bigoplus\limits_{i=1}^{N} (e_{11}^{(i)})^{\oplus \mu_i}$, где $e_{kl}^{(i)}$, $i = 1, \ldots, N$, $k, l = 1, \ldots, n_i$, — матричные единицы алгебры A.

Рассмотрим функционал $\tau\colon A \to \Bbbk$, заданный формулой

$$\tau(a) = n_2 \operatorname{Tr}_1(a_1) - n_1 \operatorname{Tr}_2(a_2), \quad a = \sum_{i=1}^{N} a_i \in A,$$

где $\mathrm{Tr}_i\colon \mathrm{M}_{n_i}(F_i) \to \Bbbk$ — композиция обычного матричного следа $\mathrm{Tr}\colon \mathrm{M}_{n_i}(F_i) \to F_i$ и отображения нормированного следа $\mathrm{tr}_i\colon F_i \to \Bbbk$, $\mathrm{tr}_i(1) = 1$, конечного расширения F_i поля $\Bbbk$. Тогда $\tau(ab) = \tau(ba)$ для всех $a, b \in A$ согласно свойству цикличности следа. Кроме того,

$$\tau(1) = n_2 \operatorname{Tr}(1_{n_1}) - n_1 \operatorname{Tr}(1_{n_2}) = n_2 n_1 - n_1 n_2 = 0.$$

Следовательно, τ определяет отображение $\tilde{\tau}\colon \tilde{A} \to \Bbbk$. Посмотрим, чему равно значение $\tilde{\tau}$ на элементе $c_0(E)$:

$$\tilde{\tau}\bigl(c_0(E)\bigr) = \tau\Biggl(\sum_{i=1}^{N} \mu_i e_{11}^{(i)}\Biggr) = n_2 \operatorname{Tr}_1\bigl(\mu_1 e_{11}^{(1)}\bigr) - n_1 \operatorname{Tr}_2\bigl(\mu_2 e_{11}^{(2)}\bigr) = n_2 \mu_1 - n_1 \mu_2 \neq 0.$$

Таким образом, характеристический класс $c_0(E)$ не равен нулю в $\tilde{A}$, а значит, и все остальные характеристические классы модуля E отличны от нуля. □

Повторение рассуждений первой части теоремы в случае простой алгебры немедленно приводит к следствию 2.1.

Следствие 2.1. *Если A — простая конечномерная алгебра, т. е. $A = \mathrm{M}_n(F)$, где F — конечномерное тело над $\Bbbk$, то для любого конечно порождённого модуля E и любого дифференциального исчисления Ω^* все характеристические классы $c_n(E, \Omega^*)$ равны нулю.* □

Прямым следствием теоремы 2.1 является также следующее утверждение.

Предложение 2.1. *Пусть G — конечная группа, $A = \Bbbk[G]$ — её групповая алгебра над полем $\Bbbk$ характеристики 0. Тогда любой конечномерный A-модуль, не являющийся свободным, имеет нетривиальные универсальные характеристические классы.*

Доказательство. По теореме Машке алгебра A является полупростой. Она содержит одномерный неприводимый модуль $E_1 = \Bbbk \sum\limits_{g \in G} g \subset A$, соответствующий тривиальному представлению группы G. Кратность представления E_1

в разложении регулярного представления на неприводимые равна $\dim_{\Bbbk} E_1 = 1$. Поэтому если модуль $E = \sum_i \mu_i E_i$ пропорционален свободному, т. е. $E = \lambda A$, то $\lambda = \mu_1$ — целое неотрицательное число и E является свободным модулем. Следовательно, любой несвободный модуль непропорционален свободному и, согласно доказанной выше теореме, имеет нетривиальные характеристические классы. □

Теперь рассмотрим характеристические классы для других дифференциальных исчислений, определённых в разделе 1.1. Нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Предложение 2.2. *Пусть A_1, A_2 — ассоциативные алгебры с единицей и $A = A_1 \oplus A_2$. Пусть даны также Ω^* — центральное дифференциальное исчисление на алгебре A — и E — конечно порождённый проективный A-модуль. Тогда*

1) *Ω^* раскладывается в прямую сумму дифференциальных градуированных алгебр $\Omega^* = \Omega_1^* \oplus \Omega_2^*$, где Ω_i^* — дифференциальное исчисление на алгебре A_i;*
2) *модуль E представляется в виде прямой суммы $E = E_1 \oplus E_2$, где E_i — конечный проективный A_i-модуль;*
3) *$c_n(E, \Omega^*) = c_n(E_1, \Omega_1^*) + c_n(E_2, \Omega_2^*)$ при всех n.*

Доказательство. Обозначим через e_k единицу подалгебры A_k в A. Тогда

$$e_k \in \mathcal{Z}(A), \quad e_1 + e_2 = 1, \quad e_k e_l = \delta_{kl} e_k. \tag{9}$$

Положим $\Omega_k^* = e_k \Omega^*$, $k = 1, 2$. Из (9) следует, что как линейное пространство Ω^* равно $\Omega_1^* \oplus \Omega_2^*$. Из центральности исчисления Ω^* вытекает, что Ω_k^* является градуированной подалгеброй. Кроме того, в силу той же центральности

$$de_1 = d(e_1 e_1) = e_1 de_1 + de_1 e_1 = e_1^2 de_1 + de_1 e_1^2 = 2e_1(de_1)e_1 = 0,$$

аналогично $de_2 = 0$, так что Ω_1^* и Ω_2^* — дифференциальные подалгебры. То, что Ω_k^* есть дифференциальное исчисление на A_k, следует из равенства $e_k A = A_k$.

Положим $E_k = E e_k$. Тогда, как и ранее, $E = E_1 \oplus E_2$. Так как $e_1 e_2 = 0$, то $E_1 A_2 = 0$, аналогично $E_2 A_1 = 0$. Поэтому E_k — A_k-модуль. Проективность и конечная порождённость модуля E_k — очевидное следствие аналогичных свойств модуля E.

Пусть модуль E задаётся проектором $P \in \mathrm{M}_r(A)$. Тогда $P = P_1 + P_2$, где $P_k \in \mathrm{M}_r(A_k)$ также является проектором. Заметим, что $E_k \simeq \operatorname{Im} P_k$. Так как $\omega_1 \omega_2 = 0$ для любых $\omega_1 \in \Omega_1^*$, $\omega_2 \in \Omega_2^*$, то $P(dP)^{2n} = P_1(dP_1)^{2n} + P_2(dP_2)^{2n}$. С другой стороны, имеем разложение комплексов

$$\tilde{\Omega}^* = \Omega^*/[\Omega^*, \Omega^*] = \Omega_1^*/[\Omega_1^*, \Omega_1^*] \oplus \Omega_2^*/[\Omega_2^*, \Omega_2^*] = \tilde{\Omega}_1^* \oplus \tilde{\Omega}_2^*,$$

так что

$$\mathrm{H}^*(\tilde{\Omega}^*) = \mathrm{H}^*(\tilde{\Omega}_1^*) \oplus \mathrm{H}^*(\tilde{\Omega}_2^*).$$

Следовательно, по формуле (6) получаем

$$c_n(E, \Omega^*) = [P(dP)^{2n}] = [P_1(dP_1)^{2n}] + [P_2(dP_2)^{2n}] = c_n(E_1, \Omega_1^*) + c_n(E_2, \Omega_2^*). \ \square$$

Предложение 2.3. *Пусть A — конечномерная полупростая алгебра и Ω^* — одно из дифференциальных исчислений $\Omega^*_{\mathcal{Z}}(A)$, $\Omega^*(D, A)$ или $\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, A)$. Тогда для любого конечно порождённого модуля E характеристические классы $c_n(E, \Omega^*)$ равны нулю при всех $n \in \mathbb{N}$. Как следствие, все характеристические классы Жураева—Мищенко—Соловьёва тривиальны.*

Доказательство. В силу предложений 1.3, 1.4 и теоремы 1.3 достаточно показать, что $c_n\big(E, \Omega^*_{\mathcal{Z}}(A)\big) = 0$ для любого конечного проективного модуля E и любого n.

Пусть $A = \bigoplus\limits_{k=1}^{N} A_k$, $A_k = \mathrm{M}_{n_k}(F_k)$, — разложение алгебры A в прямую сумму простых алгебр и $E = \bigoplus\limits_{k=1}^{N} E_k$ — соответствующее разложение модуля E. Поскольку $\Omega^*_{\mathcal{Z}}(A)$ — центральное дифференциальное исчисление, то по предложению 2.2

$$c_n\big(E, \Omega^*_{\mathcal{Z}}(A)\big) = \sum_{k=1}^{N} c_n\big(E_k, \Omega^*_{\mathcal{Z}}(A_k)\big).$$

Но $c_n\big(E_k, \Omega^*_{\mathcal{Z}}(A_k)\big) = 0$ при всех k согласно следствию 2.1. Следовательно, $c_n\big(E, \Omega^*_{\mathcal{Z}}(A)\big) = 0$. □

Замечание 2.1. Предложение 2.3 обобщает результат [6] о тривиальности характеристических классов Жураева—Мищенко—Соловьёва конечномерных комплексных полупростых алгебр на случай произвольных полей нулевой характеристики.

2.2. Случай $\operatorname{char}\Bbbk \neq 0$: стабильные характеристические классы

В пределах данного подраздела и только здесь предполагается, что основное поле имеет ненулевую характеристику $\operatorname{char}\Bbbk = p \neq 0$.

Все конструкции раздела 2.1 без изменений переносятся на случай ненулевой характеристики основного поля $\Bbbk$. Единственное препятствие для построения теории характеристических классов при $\operatorname{char}\Bbbk = p \neq 0$ возникает при доказательстве независимости классов от выбора связности. Доказательство Каруби для n-го характеристического класса сводится к тождеству вида (см. [27])

$$(d\Gamma + \Gamma^2)^n \equiv d\bigg(n\int_0^1 \Gamma(d\Gamma \cdot t + \Gamma^2 t^2)^{n-1}\,dt\bigg) \mod [\Omega^*_{\mathrm{univ}}(A), \Omega^*_{\mathrm{univ}}(A)]$$

и, таким образом, предполагает возможность деления на числа $2, 3, \ldots, 2n-1$. Тем не менее в «стабильном» случае $2n < p$ элементы $c_n(E, \Omega^*)$ корректно определены, и имеет смысл говорить о характеристических классах в малых размерностях. Заметим, что теорема 1.4 остаётся верной в размерности меньшей характеристики поля. Поэтому, как и в предыдущем подразделе, можно проводить редукцию к младшим характеристическим классам.

Теорема Веддебарна—Артина остаётся справедливой для поля простой характеристики, значит, как и ранее, любая полупростая алгебра A представима в виде суммы $A = \bigoplus_{k=1}^{N} A_k$, $A_k = \mathrm{M}_{n_k}(F_k)$, где F_k — алгебра с делением над полем $\Bbbk$. Точно так же любой конечно порождённый A-модуль E проективен и разлагается в прямую сумму простых модулей $E = \bigoplus_{k=1}^{N} \mu_k E_k$, $E_k = F_k^{n_k}$.

Определение 2.1. Пусть F — конечномерная алгебра с делением над полем $\Bbbk$. Тогда $F \otimes_{\Bbbk} \bar{\Bbbk} = \mathrm{M}_d(\bar{\Bbbk})$, где $\bar{\Bbbk}$ — алгебраическое замыкание поля $\Bbbk$. Число d называется *индексом* алгебры с делением F и обозначается $\mathrm{ind}(F)$.

Когда $\mathrm{char}(\Bbbk) = p \neq 0$, алгебра A распадается по отношению к индексу в прямую сумму двух подалгебр,

$$A = A_{\mathrm{deg}} \oplus A_{\mathrm{reg}}, \quad A_{\mathrm{deg}} = \bigoplus_{k\colon p \mid \mathrm{ind}(F_k)} A_k, \quad A_{\mathrm{reg}} = \bigoplus_{k\colon p \nmid \mathrm{ind}(F_k)} A_k,$$

которые мы соответственно называем *вырожденной* и *невырожденной частью* алгебры A. Аналогично имеем разложение $E = E_{\mathrm{deg}} \oplus E_{\mathrm{reg}}$ для A-модуля E.

Сформулируем теорему, аналогичную теореме 2.1, для случая поля простой характеристики.

Теорема 2.2. *Пусть* $A = \bigoplus_{i=1}^{N} \mathrm{M}_{n_i}(F_i)$ *— полупростая алгебра,* $E = \sum_{i=1}^{N} \mu_i E_i$ *— конечномерный* A*-модуль. Тогда если невырожденная часть модуля* E *пропорциональна невырожденной части регулярного модуля* A*,*

$$E_{\mathrm{reg}} \equiv \lambda A_{\mathrm{reg}} \mod p \ \ \text{для некоторого} \ \ \lambda \in \mathbb{Z}_p,$$

то все характеристические классы $c_n(E)$*,* $2n < p$*, равны нулю. В противном случае* $c_n(E) \neq 0$ *для всех* $n \leqslant \frac{p-1}{2}$*.*

Доказательство. Предположим сначала, что поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто. Тогда $F_k = \Bbbk$ для всех k и $A_{\mathrm{reg}} = A$, $E_{\mathrm{reg}} = E$. В этом случае мы можем повторить рассуждения теоремы 2.1.

Рассмотрим случай незамкнутого поля. Пусть $\bar{\Bbbk}$ — алгебраическое замыкание поля $\Bbbk$. Обозначим $\bar{A} = A \otimes_{\Bbbk} \bar{\Bbbk}$ расширение алгебры A в новом поле. Тогда по определению индекса алгебры с делением $\bar{A} = \bigoplus_{k=1}^{N} \mathrm{M}_{\nu_k n_k}(\bar{\Bbbk})$, где $\nu_k = \mathrm{ind}(F_k)$. Аналогично $\bar{E} = E \otimes_{\Bbbk} \bar{\Bbbk} = \bigoplus_{k=1}^{N} \mu_k \nu_k E'_k$, где $E'_k = \bar{\Bbbk}^{\nu_k n_k}$. Из определения универсального дифференциального исчисления следует, что $\Omega^*_{\mathrm{univ}}(\bar{A} \mid \bar{\Bbbk}) = \Omega^*_{\mathrm{univ}}(A) \otimes \bar{\Bbbk}$ и, таким образом, $\mathrm{H}^*\big(\tilde{\Omega}^*_{\mathrm{univ}}(\bar{A} \mid \bar{\Bbbk})\big) = \mathrm{H}^*\big(\tilde{\Omega}^*_{\mathrm{univ}}(A)\big) \otimes \bar{\Bbbk}$. С другой стороны, если $E \simeq \mathrm{Im}\, P$ для некоторого проектора $P \in \mathrm{M}_r(A)$, то $\bar{E} \simeq \mathrm{Im}(P \otimes 1)$, где $P \otimes 1 \in \mathrm{M}_r(\bar{A}) = \mathrm{M}_r(A) \otimes \bar{\Bbbk}$. Поэтому

$$c_n\big(\bar{E}, \Omega^*_{\mathrm{univ}}(\bar{A} \mid \bar{\Bbbk})\big) = c_n\big(E, \Omega^*_{\mathrm{univ}}(A)\big) \otimes 1.$$

В частности, условия $c_n\big(\bar E, \Omega^*_{\mathrm{univ}}(\bar A \mid \bar{\Bbbk})\big) = 0$ и $c_n\big(E, \Omega^*_{\mathrm{univ}}(A)\big) = 0$ равносильны. Отсюда для каждого $n < \frac{p}{2}$ получаем цепь эквивалентностей

$$\begin{aligned} &c_n\big(E, \Omega^*_{\mathrm{univ}}(A)\big) = 0 \iff c_n\big(\bar E, \Omega^*_{\mathrm{univ}}(\bar A \mid \bar{\Bbbk})\big) = 0 \iff \\ &\quad\iff \exists\lambda\colon \bar E \equiv \lambda \bar A \mod p \iff \exists\lambda\colon \nu_k\mu_k \equiv \lambda\nu_k n_k,\ k = 1, \ldots, N \iff \\ &\quad\iff \exists\lambda\colon \mu_k \equiv \lambda n_k \text{ для всех } k\colon p \nmid \nu_k \iff \exists\lambda\colon E_{\mathrm{reg}} \equiv \lambda A_{\mathrm{reg}}. \end{aligned}$$

Теорема доказана. □

Замечание 2.2. В отличие от случая $\operatorname{char}\Bbbk = 0$, простая конечномерная алгебра может иметь нетривиальные характеристические классы. Например, если E — неприводимый модуль алгебры $A = \mathrm{M}_p(\Bbbk)$, то условие $c_n(E) = 0$ эквивалентно равенству $1 \equiv \lambda p \mod p$ для некоторого λ, которое, очевидно, не может быть выполнено. Поэтому стабильные характеристические классы модуля E отличны от нуля.

Заметим, что по теореме Веддебарна всякое конечное тело коммутативно и, стало быть, имеет индекс 1. Поэтому если основное поле конечно, то $A_{\mathrm{reg}} = A$, и мы получаем следующее утверждение.

Следствие 2.2. *Пусть $\Bbbk = \mathbb{F}_q$, $q = p^l$, — поле Галуа. Пусть $A = \bigoplus_{i=1}^N \mathrm{M}_{n_i}(F_i)$ — полупростая алгебра, $E = \sum_{i=1}^N \mu_i E_i$ — конечномерный A-модуль. Тогда если модуль E пропорционален свободному, $E \equiv \lambda A \mod p$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{F}_p$, то все характеристические классы $c_n(E)$ равны нулю. В противном случае $c_n(E) \neq 0$ для всех $n \leqslant \frac{p-1}{2}$.* □

Для характеристических классов дифференциального исчисления $\Omega^*_{\mathcal{Z}}(A)$ имеем следующее утверждение.

Предложение 2.4. *Пусть $A = \bigoplus_{i=1}^N \mathrm{M}_{n_i}(F_i)$ — полупростая алгебра, $E = \sum_{i=1}^N \mu_i E_i$ — конечномерный A-модуль. Тогда если существует такое k, что $p \mid n_k$, $p \nmid \operatorname{ind}(F_k)$ и $p \nmid \mu_k$, то все характеристические классы $c_n\big(E, \Omega^*_{\mathcal{Z}}(A)\big)$, $2n < p$, отличны от нуля. В противном случае $c_n\big(E, \Omega^*_{\mathcal{Z}}(A)\big) = 0$ для всех натуральных $n \leqslant \frac{p-1}{2}$.*

Доказательство. Пусть $\bar{\Bbbk}$ — алгебраическое замыкание поля $\Bbbk$. Так как центр алгебры $\bar A = A \otimes_{\Bbbk} \bar{\Bbbk}$ равен $\mathcal{Z}(\bar A) = \mathcal{Z}(A) \otimes \bar{\Bbbk}$, то $\Omega^*_{\mathcal{Z}}(\bar A \mid \bar{\Bbbk}) = \Omega^*_{\mathcal{Z}}(A) \otimes \bar{\Bbbk}$ и $c_n\big(\bar E, \Omega^*_{\mathcal{Z}}(\bar A)\big) = c_n\big(E, \Omega^*_{\mathcal{Z}}(A)\big) \otimes 1$ для любого n, так что всё сводится к случаю алгебраически замкнутого поля.

Если поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, то $A = \bigoplus_{k=1}^N \mathrm{M}_{n_k}(\Bbbk)$. В этом случае доказываемое утверждение следует из предложения 2.2, теоремы 2.2 и того факта, что для простой алгебры $A_k = \mathrm{M}_{n_k}(\Bbbk)$ выполнено $\Omega^*_{\mathcal{Z}}(A_k) = \Omega^*_{\mathrm{univ}}(A_k)$. □

Утверждение, касающееся характеристических классов дифференциальных исчислений $\Omega^*(D, A)$, $\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, A)$, формулируется следующим образом.

Предложение 2.5. *Пусть* $A = \bigoplus_{i=1}^{N} \mathrm{M}_{n_i}(F_i)$ — *полупростая алгебра,* $E = \sum_{i=1}^{N} \mu_i E_i$ — *конечномерный* A*-модуль и* Ω^* — *одно из дифференциальных исчислений* $\Omega^*(D, A)$ *или* $\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, A)$. *Тогда если существует* k, *такое что* $p \mid n_k$, $p \nmid \operatorname{ind}(F_k)$ *и* $p \nmid \mu_k$, *то первый характеристический класс* $c_1(E, \Omega^*)$ *не равен нулю. В противном случае* $c_n\big(E, \Omega^*_{\mathcal{Z}}(A)\big) = 0$ *для всех натуральных* $n \leqslant \frac{p-1}{2}$.

Доказательство. Вторая часть предложения об обнулении характеристических классов следует из предложений 1.3 и 2.4.

Пусть, напротив, существует индекс k, удовлетворяющий условиям предложения. Пусть $\bar{\Bbbk}$ снова обозначает алгебраическое замыкание поля $\Bbbk$ и $\bar{A} = A \otimes_{\Bbbk} \bar{\Bbbk}$. Тождества $\operatorname{Der}(\bar{A}) = \operatorname{Der}(A) \otimes \bar{\Bbbk}$, $\mathcal{Z}(\bar{A}) = \mathcal{Z}(A) \otimes \bar{\Bbbk}$ и, следовательно, $\Omega^*(\bar{D}, \bar{A}) = \Omega^*(D, A) \otimes \bar{\Bbbk}$ и $\Omega^*_{\mathcal{Z}}(\bar{D}, \bar{A}) = \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, A) \otimes \bar{\Bbbk}$ позволяют свести ситуацию к случаю алгебраически замкнутого поля.

Итак, пусть поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, так что $A = \bigoplus_{i=1}^{N} A_i$, $A_i = \mathrm{M}_{n_i}(\Bbbk)$. Естественная проекция алгебры $p_k \colon A \to A_k$ является гомоморфизмом унитальных алгебр. Поскольку $\operatorname{Der}(A) = \bigoplus_{i=1}^{N} \operatorname{Der}(A_i)$, то проекция p_k продолжается до гомоморфизмов $(p_k)_* \colon \Omega^*(D, A) \to \Omega^*(D_k, A_k)$ и $(p_k)_* \colon \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, A) \to \Omega^*_{\mathcal{Z}}(D_k, A_k)$ дифференциальных алгебр. Поэтому, вспоминая об естественности характеристических классов, мы можем ещё более упростить ситуацию и считать, что $A = \mathrm{M}_n(\Bbbk)$, $p \mid n$, и $E = \bigoplus_{i=1}^{\mu} \Bbbk^n$, $p \nmid \mu$. Тогда $D = \operatorname{Der}(A) = \mathfrak{sl}_n$ и $\Omega^*_{\mathcal{Z}}(D, A) = \Omega^*(D, A)$. Из-за аддитивности характеристических классов достаточно показать, что $c_1\big(E_0, \Omega^*(D, A)\big) \neq 0$ для простого модуля $E_0 = \Bbbk^n$. Модуль E_0 можно отождествить с образом проектора $e_{11} \in A$, где e_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$, — матричные единицы алгебры A. Тогда

$$c_1\big(E_0, \Omega^*(D, A)\big) = [\operatorname{Tr}(e_{11} de_{11} de_{11})] \in \mathrm{H}^2\big(\Omega^*(D, \Bbbk)\big).$$

Обозначим через $\partial_{ij} = \operatorname{ad}_{e_{ij}} \in D$ внутреннее дифференцирование алгебры A. Рассмотрим элемент $\rho = 2 \sum_{j \neq 1} \partial_{1j} \wedge \partial_{j1} \in \Lambda^2 D$. Тогда для любого $\omega \in \Omega^1(D, \Bbbk)$

$$\begin{aligned}
(d\omega)(\rho) &= \sum_{j \neq 1} \omega([\partial_{1j}, \partial_{j1}]) = \sum_{j \neq 1} \omega(\partial_{11} - \partial_{jj}) = \\
&= \omega\Bigg((n-1)\partial_{11} - \sum_{j \neq 1} \partial_{jj}\Bigg) = -\omega\Bigg(\sum_{j=1}^{n} \partial_{jj}\Bigg) = -\omega\Bigg(\sum_{j=1}^{n} \operatorname{ad}_{e_{jj}}\Bigg) = -\omega(\operatorname{ad}_1) = 0.
\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr}(e_{11} de_{11} de_{11})(\rho) &= \sum_{j \neq 1} \operatorname{Tr}(e_{11}[e_{1j}, e_{11}]\,[e_{j1}, e_{11}] - e_{11}[e_{j1}, e_{11}]\,[e_{1j}, e_{11}]) = \\
&= \sum_{j \neq 1} \operatorname{Tr}(-e_{11} e_{1j} e_{j1} + e_{11} e_{j1} e_{1j}) = -(n-1) \operatorname{Tr}(e_{11}) = 1.
\end{aligned}$$

Таким образом, элемент $\mathrm{Tr}(e_{11}de_{11}de_{11})$ не является кограницей в $\Omega^*(D,\Bbbk)$, т. е. характеристический класс $c_1\bigl(E_0,\Omega^*(D,A)\bigr)$ не равен нулю. $\square$

Следствие 2.3. *Пусть $A=\bigoplus\limits_{i=1}^{N}\mathrm{M}_{n_i}(F_i)$ — полупростая алгебра, $\tilde{A}=A/[A,A]$ — универсальный следовой модуль и $E=\sum\limits_{i=1}^{N}\mu_i E_i$ — конечномерный A-модуль. Если существует k, такое что $p\mid n_k$, $p\nmid \mathrm{ind}(F_k)$ и $p\nmid \mu_k$, то первый характеристический класс Жураева—Мищенко—Соловьёва $\mathrm{Ch}_1(E,\tilde{A})$ не равен нулю. В противном случае $\mathrm{Ch}_n(E,\tilde{A})=0$ для всех натуральных $n\leqslant\frac{p-1}{2}$.* $\square$

Замечание 2.3. Предыдущее утверждение показывает, что группа когомологий $\mathrm{H}^2(\mathfrak{sl}_n,\Bbbk)$ алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n$ не равна нулю, когда характеристика поля p делит n. Можно проверить, что в этом случае $\mathrm{H}^2(\mathfrak{sl}_n,\Bbbk)=\Bbbk$. Заметим, что если характеристика поля нулевая, то $\mathrm{H}^2(\mathfrak{sl}_n,\Bbbk)=0$.

3. Характеристические классы ядерных C^*-алгебр

В оставшейся части статьи в качестве основного поля рассматривается поле комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Пусть A — банахова алгебра с единицей, т. е. на унитальной алгебре A имеется полная норма $\|\cdot\|$, такая что

$$\|ab\|\leqslant\|a\|\,\|b\|\quad\text{для любых}\quad a,b\in A.$$

Теория характеристических классов, которая учитывает топологию алгебры A, получается простым повторением конструкции с заменой объектов линейной алгебры на соответствующие объекты категории полных нормированных пространств, т. е. все отображения предполагаются непрерывными отображениями банаховых пространств, а тензорные произведения рассматриваются как проективные произведения банаховых пространств.

Пусть дан банахов бимодуль над алгеброй A, т. е. некоторое банахово пространство E вместе с ограниченными билинейными отображениями $m_l\colon A\times E\to E$, $m_r\colon E\times A\to E$, которые задают на E структуру алгебраического A-бимодуля. Рассмотрим комплекс

$$E\xleftarrow{\,b\,}E\mathbin{\hat{\otimes}}A\xleftarrow{\,b\,}E\mathbin{\hat{\otimes}}A\mathbin{\hat{\otimes}}A\xleftarrow{\,b\,}\ldots$$

с дифференциалом b, определённым равенством

$$b(e\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_n)=ea_1\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_n+\\+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i e\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_ia_{i+1}\otimes\ldots\otimes a_n+(-1)^n a_ne\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_{n-1}$$

для всех $e\in E$, $a_1,\ldots,a_n\in A$.

Определение 3.1. Гомологии $\mathrm{HH}_*(A, E)$ комплекса $(E \mathbin{\hat{\otimes}} A^{\hat{\otimes} n}, b)$ называются *гомологиями Хохшильда* алгебры A с коэффициентами в банаховом бимодуле E.

Если $E = A$, то мы получаем хохшильдовы гомологии, определённые выше.

По отношению к хохшильдовым гомологиям с коэффициентами естественно выделяется следующий класс алгебр (см. [13]).

Определение 3.2. Банахова алгебра A с единицей называется *аменабельной алгеброй*, если для каждого банахова A-бимодуля X

1) пространство $\mathrm{HH}_0(A, X)$ является хаусдорфовым;
2) $\mathrm{HH}_n(A, X) = 0$ для всех $n \geqslant 1$.

Следующая теорема описывает класс аменабельных C^*-алгебр.

Теорема 3.1 (Конн [18], Хагеруп [24]). *Пусть A — C^*-алгебра. Тогда A аменабельна тогда и только тогда, когда A ядерная.*

Напомним, что C^*-алгебра A называется *ядерной*, если для произвольной C^*-алгебры B на алгебраическом тензорном произведении $A \otimes B$ (которое является $*$-алгеброй) имеется единственная C^*-норма.

Пусть A — ядерная C^*-алгебра. Тогда из точности последовательности Конна и теорем Каруби и Конна—Хагерупа следует, что все отображения

$$A/\overline{[A, A]} = \mathrm{HH}_0(A) \xrightarrow{I} \mathrm{HC}_0(A) \xleftarrow{S^n} \mathrm{HC}_{2n}(A),$$
$$A/(\overline{[A, A]} + \mathbb{C}1) = \overline{\mathrm{HH}}_0(A) \xrightarrow{I} \overline{\mathrm{HC}}_0(A) \xleftarrow{S^n} \overline{\mathrm{HC}}_{2n}(A) \hookleftarrow \mathrm{H}^{2n}\big(\tilde{\Omega}^*_{\mathrm{univ}}(A)\big)$$

являются изоморфизмами полных преднормированных пространств и все пространства хаусдорфовы, т. е. банаховы. Это значит, что все универсальные характеристические классы отождествляются с помощью изоморфизма S с нулевым классом c_0, который ставит в соответствие проектору p его приведённый след в пространстве $A/(\overline{[A, A]} + \mathbb{C}1)$. Точно так же характер Конна—Черна сводится к следу

$$\mathrm{ch}_0 = \mathrm{Tr}\colon K_0(A) \to A/\overline{[A, A]}.$$

Пример 3.1 (характеристические классы коммутативных C^*-алгебр). Пусть A — коммутативная C^*-алгебра с единицей. Тогда $A = C(X)$ — алгебра непрерывных функций на компактном топологическом пространстве X. По теореме Такесаки (см. [8]) алгебра A ядерна. Так как A коммутативна, то $\mathrm{HH}_0(A) = A$. Посмотрим, чему равен нулевой характеристический класс конечно порождённого проективного модуля E. По теореме Серра—Суона $E = \Gamma(\xi)$ — модуль сечений некоторого локально тривиального векторного расслоения ξ. Тогда $\mathrm{ch}_0(E) = \mathrm{Tr}(\xi)$ является локально постоянной функцией, принимающей значения в $\mathbb{N} \cup \{0\}$, которая равна размерности слоя расслоения в конкретной точке. Предположим, что X связно. Тогда $\mathrm{ch}_0(E) = \dim \xi$ — постоянная функция. В этом случае все универсальные характеристические классы, а вместе с ними и все остальные характеристические классы Каруби равны нулю.

Замечание 3.1. Если $A = C^\infty(M, \mathbb{C})$ — алгебра Фреше гладких функций на многообразии M, то, как показал Конн [17], группа гомологий $\mathrm{H}^n\big(\tilde{\Omega}^*_{\mathrm{univ}}(A)\big)$ изоморфна прямой сумме $\bigoplus\limits_{k\geqslant 0} \bar{\mathrm{H}}^{n-2k}(M, \mathbb{C})$. При этом n-й универсальный характеристический класс проективного модуля $E = \Gamma(\xi)$ совпадает с точностью до скалярного множителя с суммой первых n членов обычного характера Черна расслоения ξ.

Для того чтобы найти ядро характера Конна—Черна, нам потребуется понятие точной C^*-алгебры.

Определение 3.3. C^*-алгебра A называется *точной*, если для любой точной последовательности C^*-алгебр

$$0 \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow D \longrightarrow 0$$

последовательность

$$0 \longrightarrow B \otimes_{\min} A \longrightarrow C \otimes_{\min} A \longrightarrow D \otimes_{\min} A \longrightarrow 0,$$

где $\otimes_{\min}$ — пространственная C^*-норма, также является точной.

Каждая ядерная C^*-алгебра точна (см. [8, теорема 6.5.2]).

Пусть $K_0(A)^+$ обозначает положительный конус K-группы, т. е. множество классов стабильной эквивалентности проекторов. Назовём *состоянием* на $K_0(A)$ произвольное линейное отображение $\tau\colon K_0(A) \to \mathbb{R}$, такое что $\tau(1) = 1$ и для любого $\alpha \in K_0^+(A)$ выполнено $\tau(\alpha) \geqslant 0$.

Пример 3.2. Пусть φ — следовое состояние на C^*-алгебре A. Отображение $\tau\colon K_0(A) \to \mathbb{R}$, ставящее в соответствие элементу $\alpha = [p] - [q] \in K_0(A)$, где $p, q \in \mathrm{M}_n(A)$ — проекторы, число $\tau(\alpha) = \varphi\big(\mathrm{Tr}(p) - \mathrm{Tr}(q)\big)$, оказывается состоянием на $K_0(A)$. Говорят, что состояние τ индуцировано следовым состоянием φ. Отображение φ задаёт функционал $\tilde{\varphi}\colon A/\overline{[A, A]} \to \mathbb{C}$. Тогда состояние τ можно представить в виде композиции $\tau = \tilde{\varphi} \circ \mathrm{ch}_0$.

Результаты, полученные Хагерупом [25], а также Блакадаром и Рордамом [15] позволяют нам опираться в дальнейшем на следующий факт (см. [15]).

Теорема 3.2. *Пусть A — точная C^*-алгебра. Тогда каждое состояние на $K_0(A)$ индуцировано следовым состоянием алгебры A.*

Определение 3.4. Пусть дана некоторая унитальная C^*-алгебра A. Элемент $\alpha \in K_0(A)$ называется *бесконечно малым*, если для любого $n \in \mathbb{Z}$ найдётся $l \in \mathbb{N}$, такое что $l(1 + n\alpha) \in K_0^+(A)$. Бесконечно малые элементы образуют подгруппу $K_{\mathrm{inf}}(A)$ в $K_0(A)$.

Элемент $\alpha \in K_0(A)$ называется *приближённо скалярным*, если для любого натурального n существуют рациональное число r и натуральное l, такие что $rl \in \mathbb{Z}$ и $l \cdot 1 \pm n(l\alpha - lr \cdot 1) \in K_0^+(A)$. Приближённо скалярные элементы также образуют подгруппу, которую мы будем обозначать $K_{\mathrm{as}}(A)$. Образ $K_{\mathrm{as}}(A)$ при проекции на $\tilde{K}_0(A)$ будет обозначаться $\tilde{K}_{\mathrm{as}}(A)$.

Сформулируем основную теорему раздела.

Теорема 3.3. *Пусть A — ядерная C^*-алгебра и $\mathrm{ch}_n\colon K_0(A) \to \mathrm{HC}_{2n}(A)$ — её характер Черна. Тогда для каждого $n \geqslant 0$*

$$\ker \mathrm{ch}_n = K_{\mathrm{inf}}(A).$$

Универсальные классы Каруби $c_n\colon \tilde{K}_0(A) \to \mathrm{H}^{2n}\big(\tilde{\Omega}^*_{\mathrm{univ}}(A)\big)$ в этом случае обладают аналогичным свойством

$$\ker c_n = \tilde{K}_{\mathrm{as}}(A).$$

Доказательство. Так как A ядерная, то достаточно провести доказательство только для нулевого характеристического класса.

1. Пусть $\alpha \in K_{\mathrm{inf}}(A)$. Покажем, что для любого линейного функционала $\varphi\colon A/\overline{[A,A]} \to \mathbb{C}$ выполняется равенство $\varphi\big(\mathrm{ch}_0(\alpha)\big) = 0$, откуда будет следовать, что $\mathrm{ch}_0(\alpha) = 0$. Можно считать, что φ — положительный функционал единичной нормы, т. е. состояние. Тогда композиция $\tau = \varphi \circ \mathrm{ch}_0$ — это состояние на $K_0(A)$. Для любого натурального n по определению $K_{\mathrm{inf}}(A)$ найдётся натуральное l, такое что $l \pm ln\alpha \in K_0^+(A)$ и, следовательно, $\tau(l \pm ln\alpha) = l\big(1 \pm n\tau(\alpha)\big) \geqslant 0$, откуда следует, что $|\tau(\alpha)| \leqslant n^{-1}$ для любого n. Значит, $\tau(\alpha) = 0$.

2. Предположим теперь, что $\mathrm{ch}_0(\alpha) = 0$. Тогда $\varphi\big(\mathrm{ch}_0(\alpha)\big) = 0$ для любого линейного функционала $\varphi \in (A/\overline{[A,A]})'$. Так как алгебра A точна, то любое состояние τ на $K_0(A)$ индуцируется следовым состоянием на A и, таким образом, может быть представлено в виде композиции $\tau = \varphi \circ \mathrm{ch}_0$ для некоторого положительного функционала φ. Следовательно, $\tau(\alpha) = 0$ для всех состояний τ на $K_0(A)$.

Обозначим $L = K_0(A) \otimes \mathbb{R}$. Пусть $\rho\colon K_0(A) \to L$, $x \mapsto x \otimes 1$, — естественный гомоморфизм. Пусть C — выпуклый конус, порождённый множеством $\rho\big(K_0^+(A)\big)$. Формула $\tau = \tilde{\tau} \circ \rho$ устанавливает биекцию между множеством состояний τ на $K_0(A)$ и множеством линейных функционалов $\tilde{\tau}\colon L \to \mathbb{R}$, таких что $\tilde{\tau}(x) \geqslant 0$ для любого $x \in C$ и $\tilde{\tau}\big(\rho(1)\big) = 1$. Тогда согласно теореме Хана—Банаха имеет место равенство

$$\mathrm{Int}\, C = \bigcap \{\tilde{\tau}^{-1}(0, +\infty) \mid \tau = \tilde{\tau} \circ \rho \text{ — состояние на } K_0(A)\},$$

где $\mathrm{Int}\, C$ — внутренность множества C (относительно сильнейшей локально выпуклой топологии на L).

Для любого натурального n элементы $y_n^{\pm} = \rho(1) \pm n\rho(\alpha)$ принадлежат $\mathrm{Int}\, C$, так как для всех состояний τ

$$\tilde{\tau}(y_n^p m) = \tau(1) \pm n\tau(\alpha) = \tau(1) = 1 > 0.$$

Следовательно, скажем, $y_n^+ = \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i \rho(\beta_i)$, где $\lambda_i > 0$ и $\beta_i \in K_0^+(A)$, $i = 1, \ldots, p$. Пусть $e_0 = 1, e_1, \ldots, e_q$ — независимые над $\mathbb{Q}$ вещественные числа, такие что $\lambda_i = \sum\limits_{j=0}^{q} \lambda_{ij} e_j$, $\lambda_{ij} \in \mathbb{Q}$, для всех i. В силу линейной независимости выполняются равенства

$$\sum_{i=1}^{p}\lambda_{i0}\rho(\beta_i)=y_n^+,\quad \sum_{i=1}^{p}\lambda_{ij}\rho(\beta_i)=0,\quad j=1,\ldots,q.$$

Для каждого $j=1,\ldots,q$ выберем $\tilde e_j\in\mathbb{Q}$, достаточно близкое к e_j, так, чтобы $\tilde\lambda_i=\lambda_{i0}+\sum\limits_{j=1}^{q}\lambda_{ij}\tilde e_j$ было положительным для всех $i=1,\ldots,p$. Тогда

$$y_n^+=\sum_{i=1}^{p}\tilde\lambda_i\rho(\beta_i),\quad \tilde\lambda_i\in\mathbb{Q},\quad \tilde\lambda_i>0.$$

Таким образом, можно считать, что изначально $\lambda_i\in\mathbb{Q}$, тогда после умножения на некоторое натуральное число l_0 получим равенство

$$\rho\bigl(l_0(1+n\alpha)\bigr)=\rho\biggl(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i'\beta_i\biggr),$$

где $\lambda_i'=l_0\lambda_i\in\mathbb{N}$. Пусть $\delta=l_0(1+n\alpha)-\sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_i'\beta_k$. Тогда $\rho(\delta)=0$, так что $\delta\in\operatorname{Tor}\bigl(K_0(A)\bigr)$, т. е. существует такое $m\in\mathbb{N}$, что $m\delta=0$. Положим $l=ml_0$. Тогда имеет место разложение

$$l(1+n\alpha)=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i''\beta_i\in K_0^+(A),$$

где $\lambda_i''=m\lambda_i'\in\mathbb{N}$. Аналогичное равенство справедливо для y_n^-. Таким образом, $\alpha\in K_{\mathrm{inf}}(A)$.

3. Покажем теперь, что $\ker c_0=\tilde K_{\mathrm{as}}(A)$. Из коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd}
K_0(A) \arrow[r, "\mathrm{ch}_0"] \arrow[d, "p_K"'] & A/\overline{[A,A]} \arrow[d, "p_A"] \\
\tilde K_0(A) \arrow[r, "c_0"] & A/(\overline{[A,A]}+\mathbb{C}1)
\end{tikzcd}$$

следует, что

$$p_K^{-1}(\ker c_0)=\ker(c_0p_K)=\ker(p_A\mathrm{ch}_0)=\mathrm{ch}_0^{-1}(\mathbb{C}1).$$

Пусть $\mathrm{ch}_0(\alpha)=\lambda\cdot1$. Тогда для каждого состояния τ имеем $\tau(\alpha)=\lambda$. Возьмём произвольное натуральное число n и выберем $r=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$, такое что $|\lambda-r|<n^{-1}$. Положим $\beta^\pm=q\pm n(q\alpha-p)\in K_0(A)$. Тогда

$$\tau(\beta^\pm)=q\pm n(q\tau(\alpha)-p)=q[1\pm n(\lambda-r)]>0$$

для любого состояния τ на $K_0(A)$, так что согласно проведённым выше рассуждениям найдётся $l_0\in\mathbb{N}$, такое что $l_0\beta^\pm\in K_0^+(A)$, т. е.

$$l\cdot1\pm n(l\alpha-lr\cdot1)\in K_0^+(A),$$

где $l=l_0q$. Таким образом, $\alpha\in K_{\mathrm{as}}(A)$.

Предположим, что $\alpha \in K_{\mathrm{as}}(A)$. Тогда для каждого n существуют $r_n \in \mathbb{Q}$ и $l_n \in \mathbb{N}$, такие что $l_n \pm n(l_n\alpha - l_n r_n) \in K_0^+(A)$. Тогда для любого состояния τ на $K_0(A)$ выполнено неравенство $l_n \pm n(l_n\tau(\alpha) - l_n r_n) \geqslant 0$, откуда следует, что

$$-\frac{1}{n} \leqslant \tau(\alpha) - r_n \leqslant \frac{1}{n}.$$

Следовательно, последовательность $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, и её предел $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} r_n$ равен $\tau(\alpha)$ для всех состояний τ. Тогда $\varphi(\mathrm{ch}_0(\alpha) - \lambda\cdot 1) = 0$ для любого функционала $\varphi \in (A/\overline{[A,A]})'$. Так как алгебра A ядерная и пространство $A/\overline{[A,A]} = \mathrm{HH}_0(A)$ хаусдорфово, то $\mathrm{ch}_0(\alpha) = \lambda\cdot 1$, т. е. $\alpha \in \mathrm{ch}_0^{-1}(\mathbb{C}1)$. Таким образом, $p_K^{-1}(\ker c_0) = K_{\mathrm{as}}(A)$, откуда получаем, что $\tilde{K}_{\mathrm{as}}(A) = \ker c_0$. □

Пример 3.3. Пусть $A = \widetilde{K(\mathrm{H})}$ — алгебра компактных операторов с добавленной единицей. Тогда $K_0(A) = \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$. Конус положительных элементов равен

$$K_0(A)^+ = \{(x,y)\in\mathbb{Z}^2 \mid x>0 \text{ или } x=0,\ y\geqslant 0\}.$$

Тогда множество бесконечно малых элементов есть

$$K_{\mathrm{inf}}(A) = \{(0,y) \mid y\in\mathbb{Z}\}.$$

Оно порождается классами эквивалентности конечномерных проекторов $p \in K(\mathrm{H}) \subset A$. Заметим, что для любого следового функционала $\tau \in A^*$, т. е. функционала, обладающего свойством $\tau(ab) = \tau(ba)$ для всех $a,b\in A$, и конечного проектора $p\in K(\mathrm{H})$ мы имеем $\tau(p) = 0$. Подгруппа $K_{\mathrm{as}}(A)$ в данном случае совпадает со всей группой $K_0(A)$.

Пример 3.4. Пусть A — конечномерная C^*-алгебра. Тогда A имеет вид $A = \bigoplus\limits_{k=1}^{N} \mathrm{M}_{n_k}(\mathbb{C})$. Её K-теория равна $K_0(A) = \mathbb{Z}^N$ и $K_0(A)^+ = \mathbb{N}^N$. Из теоремы следует, что для любого n характер Конна ch_n мономорфно отображает $K_0(A)$ в $\mathrm{HC}_{2n}(A) = \mathbb{C}^N$. Универсальные классы Каруби в данном случае имеют ядро $\tilde{K}_{\mathrm{as}}(A) = \mathrm{Tor}\big(\tilde{K}_0(A)\big) \simeq \mathbb{Z}_l$, где l — наибольший общий делитель чисел $n_1,\ldots,n_N$.

Пример 3.5. Пусть $A = \mathbb{C}\boldsymbol{l}$ — бесконечномерная алгебра Клиффорда. Тогда в силу непрерывности K-теории

$$K_0(\mathbb{C}\boldsymbol{l}) = \lim_{n\to\infty} K_0(\mathbb{C}\boldsymbol{l}_n) = \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right], \quad K_0(\mathbb{C}\boldsymbol{l})^+ = \lim_{n\to\infty} K_0(\mathbb{C}\boldsymbol{l}_n)^+ = \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]\cap\mathbb{Q}_+.$$

Отсюда получаем

$$K_{\mathrm{inf}}(A) = 0, \quad K_{\mathrm{as}}(A) = K_0(A),$$

так что все характеристические классы Каруби тривиальны.

Пример 3.6. Пусть G — компактная группа. Её C^*-групповая алгебра $C(G)$ является ядерной. В этом случае $K_0\big(C(G)\big)$ совпадает с кольцом представлений $R(G)$. Рассмотрим унитализацию $A = \widetilde{C(G)}$. Тогда A — унитальная C^*-алгебра и $K_0(A) = K_0\big(C(G)\big)\oplus\mathbb{Z}$, так что $\bar{K}_0(A) = K_0\big(C(G)\big)$. Так как в $K_0(A)$ нет приближённо скалярных элементов, отличных от нуля, (приведённый) характер Черна инъективен, т. е. различает все проективные модули. Этот результат есть переформулировка известного утверждения о том, что представление компактной группы однозначно определяется своим характером.

Пример 3.7. Возьмём произвольное иррациональное число $\theta \in (0,1)$. Рассмотрим абелеву группу

$$G_\theta = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\theta = \{m + n\theta \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$$

с порядком, индуцируемым вложением $G_\theta \subset \mathbb{R}$. Построим AF-алгебру A_θ, такую что $K_0(A_\theta) = G_\theta$ (см. [23]). Для этого рассмотрим разложение числа θ в цепную дробь:

$$\theta = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}}, \quad a_n \in \mathbb{N},$$

и определим A_θ как прямой предел конечномерных алгебр

$$\mathrm{M}_{k_1}(\mathbb{C}) \oplus \mathrm{M}_{l_1}(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathrm{M}_{k_2}(\mathbb{C}) \oplus \mathrm{M}_{l_2}(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathrm{M}_{k_3}(\mathbb{C}) \oplus \mathrm{M}_{l_3}(\mathbb{C}) \hookrightarrow \ldots,$$

где $k_1 = l_1 = 1$, а унитальный гомоморфизм алгебры $A_n = \mathrm{M}_{k_n}(\mathbb{C}) \oplus \mathrm{M}_{l_n}(\mathbb{C})$ в A_{n+1} задаётся матрицей кратности вложения матричных компонент

$$T_n = \begin{pmatrix} a_n - 1 & 1 \\ a_n & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как $T_n \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$, то $K_0(A_\theta) = \varinjlim_n K_0(A_n) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Выделим теперь элементы, принадлежащие положительному конусу

$$K_0(A_\theta)^+ = \bigcup_n K_0(A_n)^+.$$

Введём с помощью изоморфизма $K_0(A_\theta) \simeq K_0(A_1) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ целочисленные координаты x, y на $K_0(A_\theta)$. Тогда множество $K_0(A_n)^+$ задаётся неравенством

$$S_n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geqslant 0, \quad S_n = T_{n-1} \ldots T_2 T_1, \quad n > 1, \quad S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Известные формулы из теории цепных дробей показывают, что неравенство (10) эквивалентно паре неравенств

$$\begin{cases} y + \theta'_n x \geqslant 0, \\ y + \dfrac{p_n + p_{n-1}}{q_n + q_{n-1}} x \geqslant 0, \end{cases}$$

где

$$\frac{p_n}{q_n} = a_1 - 1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ldots + \cfrac{1}{a_{n-1}}}} = \theta'_{n-1}.$$

Переходя к пределу, получаем одно условие $y + \theta' x \geqslant 0$, где $\theta' = \frac{1}{\theta} - 1$. Гомоморфизм абелевых групп $\rho\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$, $\rho(x, y) = (1-\theta)x + \theta y$, изоморфно отображает частично упорядоченную группу $K_0(A_\theta)$ на G_θ.

Из теоремы 3.3 следует, что $K_{\mathrm{as}}(A_\theta) = K_0(A_\theta)$, и все характеристические классы Каруби равны нулю. Так как линейное пространство, порождённое образом $K_0(A_\theta)$ в $A_\theta/\overline{[A_\theta, A_\theta]}$, является плотным, теорема также показывает, что на A_θ имеется единственный (с точностью до нормировки) след τ.

4. Характеристические классы алгебр фон Неймана

В этом разделе мы используем теорему 3.3, чтобы вычислить ядро характера Конна—Черна и универсальных характеристических классов Каруби для алгебр фон Неймана. Заметим, что алгебры фон Неймана, вообще говоря, не являются ядерными C^*-алгебрами.

Пусть A — алгебра фон Неймана. Она распадается в прямое произведение

$$A = A_{\mathrm{i}} \times A_{\mathrm{f}},$$

где A_{f} — конечная алгебра фон Неймана (типа I_n, II_1), а A_{i} — собственно бесконечная (типа I_∞, II_∞, III) (см. [20]). Тогда

$$K_0(A) = K_0(A_{\mathrm{i}}) \oplus K_0(A_{\mathrm{f}}), \quad \mathrm{HC}_n(A) = \mathrm{HC}_n(A_{\mathrm{i}}) \oplus \mathrm{HC}_n(A_{\mathrm{f}}).$$

Поэтому можно рассматривать конечный и собственно бесконечный случаи по отдельности. Посмотрим сначала на K-теорию алгебр фон Неймана.

Теорема 4.1 (см. [14]). *Пусть A — собственно бесконечная алгебра фон Неймана. Тогда $K_0(A) = 0$.*

Пусть A — конечная алгебра фон Неймана и $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(A)$ — её центр. Тогда существует единственное нормальное отображение $\tau\colon A \to \mathcal{Z}$, $\|\tau\| = 1$, обладающее следующими свойствами:

1) $\tau(ab) = \tau(ba)$ для любых $a, b \in A$;
2) $\tau(za) = z\tau(a)$ для всех $a \in A$, $z \in \mathcal{Z}$.

При этом для любого ненулевого положительного элемента $a \in A^+$ справедливо $\tau(a) \neq 0$ (см. [20]). Отображение τ называется *каноническим $\mathcal{Z}$-следом* конечной алгебры A.

Пусть $A = A_0 \times \prod\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, где A_0 имеет тип II_1, A_n — тип I_n, — разложение алгебры A по типам и $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_0 \times \prod\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{Z}_n$ — соответствующее разложение её центра. Пусть $\tau\colon A \to \mathcal{Z}$ — её канонический $\mathcal{Z}$-след. Коммутативная алгебра фон Неймана $\mathcal{Z}_n$ отождествляется с $L^\infty_{\mathbb{C}}(Z_n, \nu_n)$ для некоторого пространства Z_n с мерой μ_n, а $\mathcal{Z}$ — с $L^\infty_{\mathbb{C}}\Bigl(\coprod\limits_{n=0}^{\infty} Z_n, \coprod\limits_{n=0}^{\infty} \nu_n\Bigr)$.

Теорема 4.2 (см. [14]). *Канонический след τ индуцирует изоморфизм τ^* группы $K_0(A)$ на подгруппу по сложению*

$$M = \left\{ f \in L^\infty_{\mathbb{C}}\left(\coprod_{n=0}^{\infty} Z_n, \coprod_{n=0}^{\infty} \nu_n \right) \;\middle|\; f(x) \in F_n \text{ для всех } x \in Z_n,\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}$$

в $\mathcal{Z}$, где $F_0 = \mathbb{R}$, $F_n = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z} \right\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Введём следующее обозначение.

Определение 4.1. Пусть A — конечная алгебра фон Неймана. Назовём элемент $\alpha \in K_0(A)$ *скалярным*, если образ α при действии канонического следа есть скалярный оператор. Множество всех скалярных элементов обозначим как $K_{\mathrm{sc}}(A)$.

Теорема 4.3. *Пусть A — алгебра фон Неймана. Тогда*

1) *характер Черна $\mathrm{ch}_n \colon K_0(A) \to \mathrm{HC}_{2n}(A)$ инъективен*;
2) $\ker\left\{ c_n \colon K_0(A) \to \mathrm{H}^{2n}\left(\tilde{\Omega}^*_{\mathrm{univ}}(A)\right)\right\} = K_{\mathrm{sc}}(A_{\mathrm{f}})$.

Доказательство. Можно ограничиться рассмотрением случая, когда A конечна.

Пусть $\alpha \in K_0(A)$, $\alpha \neq 0$. По теореме 4.2 имеем, что $\tau(\alpha) \neq 0$ в $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(A)$, где τ — канонический $\mathcal{Z}$-след. По теореме Хана—Банаха существует непрерывный функционал $\varphi \in \mathcal{Z}^*$, такой что $\varphi\big(\tau(\alpha)\big) \neq 0$. Отображение $\varphi \circ \tau$ является следом на A, поэтому представляется в виде композиции $\varphi \circ \tau = \tilde{\varphi} \circ \mathrm{ch}_0$, $\mathrm{ch}_0 \colon A \to \mathrm{HC}_0(A) = A/[A, A]$. Следовательно, $\mathrm{ch}_0(\alpha) \neq 0$. Таким образом, ch_0, а вместе с ним и все ch_n, $n \in \mathbb{N}$, — инъективные отображения. Отсюда также следует, что $\ker c_n \subset K_{\mathrm{sc}}(A)$. Покажем обратное включение.

Пусть $\alpha \in K_{\mathrm{sc}}(A)$. Если A не является непрерывной, т. е. её разложение содержит блоки типа I_n, то, как следует из теоремы 4.2, $\tau(\alpha) = \lambda 1$, где $\lambda \in \mathbb{Q}$. Отсюда получаем

$$c_n(\alpha) = \lambda c_n(1) = 0.$$

Предположим, что A непрерывна. Тогда имеется вложение $j \colon \mathcal{R} \to A$ гиперфинитного фактора $\mathcal{R}$ типа II_1 в A, которое, как нетрудно заметить, отображает $K_0(\mathcal{R})$ на $K_{\mathrm{sc}}(A)$ (см. [20]). В силу естественности характеристических классов это замечание сводит доказательство к случаю $A = \mathcal{R}$. Пусть $\alpha \in K_0(\mathcal{R})$. Тогда $\tau(\alpha) = \lambda \in \mathbb{R}$. Если $\lambda \in \mathbb{Q}$, то $\alpha \in \operatorname{Tor} \tilde{K}_0(\mathcal{R})$, так что $c_n(\alpha) = 0$. Пусть $\lambda \notin \mathbb{Q}$. Можно считать, что $\lambda \in [0, 1]$. Рассмотрим AF-алгебру A_λ из примера 3.7. Отметим, что A_λ проста (см. [19, следствие IV.5.2]) и обладает единственным состоянием типа следа. Отсюда следует, что представление Гельфанда—Наймарка—Сегала, ассоциированное с этим состоянием, инъективно и является факторным типа II_1 (доказательство, данное в [8, теорема 6.2.5], дословно переносится на этот случай). Соответствующий фактор будет гиперфинитным, так как A_λ аппроксимативно конечна. Таким образом, имеется вложение $\varphi \colon A_\lambda \to \mathcal{R}$, которое индуцирует отображение $\varphi_* \colon K_0(A_\lambda) \to K_0(\mathcal{R})$, совпадающее с гомоморфизмом ρ в примере 3.7. Поэтому $\alpha = \varphi_*(\beta)$ для некоторого $\beta \in K_0(A_\lambda)$. Следовательно,

$$c_n(\alpha) = \varphi_*\big(c_n(\beta)\big) = \varphi_*(0) = 0. \qquad \square$$

Посмотрим, как обстоит дело с неуниверсальными характеристическими классами. Нам пригодится следующая лемма.

Лемма 4.1. *Пусть A — ассоциативная алгебра с единицей и Ω^* — центральное дифференциальное исчисление на A. Пусть E — проективный конечно порождённый модуль, определяемый проектором $p \in A$, лежащим в центре алгебры. Тогда для всех n справедливо $c_n(E, \Omega^*) = 0$.*

Доказательство. Вычисляя характеристический класс с помощью грассмановой связности, получим равенство

$$c_n(E, \Omega^*) = [p(dp)^{2n}] = [p^2 dp(dp)^{2n-1}] = [pdp\,p(dp)^{2n-1}] = 0,$$

где мы воспользовались центральностью проектора p и тождеством $pdp\,p = 0$. $\square$

Теорема 4.4. *Пусть A — алгебра фон Неймана, Ω^* — (банахово) центральное дифференциальное исчисление на A. Тогда для любого $\alpha \in K_0(A)$ выполнено $\|c_n(\alpha, \Omega^*)\| = 0$, где $\|\cdot\|$ — индуцированная (полу)норма на пространстве $\mathrm{H}^{2n}(\tilde{\Omega}^*)$.*

Доказательство. Можно считать, что A — конечная алгебра и $\alpha = [p]$, где $p \in A$ — проектор. Пусть $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(A) \simeq L^\infty_{\mathbb{C}}(Z, \nu)$ — центр алгебры A и $\tau\colon A \to \mathcal{Z}$ — канонический $\mathcal{Z}$-след.

Возьмём произвольное натуральное число N. Так как $f = \tau(p) \in \mathrm{M}_1$, где

$$\mathrm{M}_1 = \{f \in M \mid f(x) \in [0,1] \text{ для почти всех } x \in Z\}$$

(см. теорема 4.2), то для почти всех $x \in Z$ имеем $Nf(x) \in [0, N]$. Пусть $Y_k = f^{-1}[k, N]$, $k = 1, \ldots, N$, и $g_k = \chi_{Y_k} \in \mathcal{Z}$. Пусть $f_1 = Nf - \sum\limits_{k=1}^N g_k$. Тогда $g_k, f_1 \in \mathrm{M}_1$, поэтому $f_1 = \tau(p_1)$, p_1 — проектор в A, а g_k, $k = 1, \ldots, N$, — центральные проекторы в A. Разложению $Nf = \sum\limits_{k=1}^N g_k + f_1$ соответствует разложение $N\alpha = \sum\limits_{k=1}^n [g_k] + [p_1]$. Тогда

$$Nc_n(\alpha, \Omega^*) = c_n(N\alpha, \Omega^*) = \sum_{k=1}^N c_n(g_k, \Omega^*) + c_n(p_1, \Omega^*) = c_n(p_1, \Omega^*)$$

в силу предыдущей леммы. Так как $\|p_1\| \leqslant 1$, то $\|p_1^{\otimes 2n+1}\| \leqslant 1$ в $A^{\otimes 2n+1}$. Следовательно, $\|p_1(dp_1)^{2n}\| \leqslant 1$ в $\Omega^{2n}_{\mathrm{univ}}(A)$ и, наконец, $\|c_n(p_1)\| \leqslant 1$ в $\mathrm{H}^{2n}\big(\tilde{\Omega}^*_{\mathrm{univ}}(A)\big)$. Пусть $C = \|\psi\|$ — норма канонического морфизма $\psi\colon \Omega^*_{\mathrm{univ}}(A) \to \Omega^*$. Тогда получаем неравенство

$$N\|c_n(\alpha, \Omega^*)\| = \|c_n(N\alpha, \Omega^*)\| = \|c_n(p_1, \Omega^*)\| = \|\psi_* c_n(p_1)\| \leqslant C \cdot 1 = C,$$

откуда $\|c_n(\alpha, \Omega^*)\| \leqslant \frac{C}{N}$. Так как выбор N произволен, то $\|c_n(\alpha, \Omega^*)\| = 0$, что и требовалось доказать. $\square$

Замечание 4.1. Если пространство когомологий $\mathrm{H}^{2n}(\tilde{\Omega}^*)$ является хаусдорфовым, то из доказанной теоремы следует, что $c_n(\alpha, \Omega^*) = 0$ для всех $\alpha \in K_0(A)$.

Следствие 4.1. *Пусть A — алгебра фон Неймана. Тогда для любого $\alpha \in K_0(A)$ и любого n характеристический класс Жураева—Мищенко—Соловьёва не отделим от нуля в топологии, определяемой индуцированной нормой, т. е. $\|\mathrm{Ch}_n(\alpha)\| = 0$.* $\square$

Литература

[1] Винберг Э. Б. Лекции по алгебре. — М.: МЦНМО, 1995.

[2] Жураев Ю. Й. Характеристические классы модулей над некоммутативными алгебрами: Дис.... канд. физ.-мат. наук. — М., 1987.

[3] Жураев Ю. Й., Мищенко А. С., Соловьёв Ю. П. О характеристических классах в алгебраической K-теории // Тираспольский симпозиум по общей топологии и её приложениям. — Кишинёв: Штиинца, 1985. — С. 91—92.

[4] Жураев Ю. Й., Мищенко А. С., Соловьёв Ю. П. О характеристических классах в алгебраической K-теории // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1986. — № 1. — С. 75—76.

[5] Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. — М.: Наука, 1981.

[6] Корнеева Е. В. Характеристические классы в некоммутативной дифференциальной геометрии: Дис.... канд. физ.-мат. наук. — М., 2003.

[7] Люмис Л. Введение в абстрактный гармонический анализ. — М.: Изд. иностр. лит., 1956.

[8] Мёрфи Дж. C^*-алгебры и теория операторов. — М.: Факториал, 1997.

[9] Милнор Дж. Алгебраическая K-теория. — М.: Мир, 1974.

[10] Никонов И. М. Пример нетривиального характеристического класса групповой алгебры $\mathbb{C}[\mathbb{Z}_3]$ // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 2002. — № 4. — С. 58—60.

[11] Никонов И. М. Ядро характера Каруби для полупростых алгебр. — Деп. в ВИНИТИ 31.10.2003; № 1896-В2003.

[12] Фукс Д. Б. Когомологии бесконечномерных алгебр Ли. — М.: Наука, 1984.

[13] Хелемский А. Я. Гомология в банаховых и топологических алгебрах. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986.

[14] Blackadar B. K-Theory for Operator Algebras. — 2nd edition. — Cambridge Univ. Press, 1998.

[15] Blackadar B., Rørdam M. Extending states on preordered semigroups and the existence of quasitraces on C^*-algebras // J. Algebra — 1992. — Vol. 152. — P. 240—247.

[16] Bratteli O. Inductive limits of finite dimensional C^*-algebras // Trans. Amer. Math. Soc. — 1972. — Vol. 171. — P. 195—234.

[17] Connes A. Noncommutative Geometry. — Academic Press, 1994.

[18] Connes A. On the cohomology of operator algebras // J. Funct. Anal. — 1978. — Vol. 28, no. 2. — P. 248—253.

[19] Davidson K. R. C^*-Algebras by Example. — Amer. Math. Soc., 1996. — (Fields Institute Monographs Ser.; Vol. 6).

[20] Dixmier J. Von Neumann Algebras. — Amsterdam: North-Holland, 1981.

[21] Dubois-Violette M. Lectures on graded differential algebras and noncommutative geometry. — `arXiv:math/9912017[math.QA]`.

[22] Effros E. G., Handelman D. E., Shen C.-L. Dimension groups and their affine representations // Amer. J. Math. — 1980. — Vol. 102, no. 2. — P. 385—407.

[23] Effros E. G., Shen C.-L. Approximately finite C^*-algebras and continued fractions // Indiana Univ. Math. J. — 1980. — Vol. 29, no. 2. — P. 191—204.

[24] Haagerup U. All nuclear C^*-algebras are amenable // Invent. Math. — 1983. — Vol. 74, no. 2. — P. 305—319.

[25] Haagerup U. Quasitraces on exact C^*-algebras are traces. — Preprint. — 1991.

[26] Haagerup U., Thorbjørnsen S. Random matrices and K-theory for exact C^*-algebras // Doc. Math., J. DMV. — 1999. — Vol. 4. — P. 341—450.

[27] Karoubi M. K-théorie et cohomologies cycliques. — Astérisque, Paris (1987).

[28] Landi G. An introduction to noncommutative spaces and their geometry. — `arXiv:hep-th/9701078`.

[29] Loday J.-L. Cyclic Homology. — Berlin: Springer, 1992. — (Grundlehren Math. Wiss.; Vol. 301).

[30] Popelensky F. Yu., Solovyov Yu. P. Lie—Cartan pairs and characteristic classes in noncommutative geometry // Contemporary Geometry and Related Topics. — World Scientific, 2004. — P. 351—373.