Свойство (T) для топологических групп и C^*-алгебр*

А. А. ПАВЛОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: axpavlov@mail.ru

Е. В. ТРОИЦКИЙ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: troitsky@mech.math.msu.su

УДК 517.986

Ключевые слова: свойство (T) Каждана, C^*-алгебра, C^*-гильбертов модуль, спектр C^*-алгебры.

Аннотация

Цель настоящей (в большей степени обзорной) статьи — показать взаимосвязь между обобщением свойства (T) Каждана для C^*-алгебр, введённого в нашей недавней работе, со свойством (T), определённым Б. Бекка. Показано, что наше определение совпадает с определением Бекка для групповых C^*-алгебр локально-компактных групп, в то время как в целом эти определения различны. Получены критерии обладания свойством (T) для C^*-алгебр. Рассмотрен ряд примеров C^*-алгебр с точки зрения наличия или отсутствия у них свойства (T). Изучены связи с K-теорией.

Abstract

A. A. Pavlov, E. V. Troitsky, Property (T) *for topological groups and C^*-algebras*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 8, pp. 171—192.

The aim of the present (mostly expository) paper is to show relations of a generalization of Kazhdan's property (T) for C^*-algebras introduced in our recent paper, to this of B. Bekka. It is shown that our definition coincides with Bekka's definition for group C^*-algebras of locally compact groups, whereas, in general, these definitions are distinct. Criteria for a C^*-algebra to possess our property (T) are given. A number of examples of C^*-algebras with and without property (T) are considered. Relations to K-theory are studied.

1. Введение

Первоначально свойство (T) Каждана возникло в [2] в алгебраико-топологическом контексте.

*Работа частично поддержана РФФИ (грант 07-01-00046) и программой «Развитие научного потенциала высшей школы».

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 8, с. 171—192.

Отметим прежде всего, что существует по меньшей мере два основных подхода к определению свойства (T) Каждана для топологических групп (см. [11, 22, 26]). Первый подход использует понятие ε-инвариантных векторов, и свойство (T) формулируется в терминах существования так называемой пары Каждана для топологической группы, второй представляет собой переформулировку свойства (T) в терминах топологии Фелла. Более подробно эта тема обсуждается в разделе 2.

Переходя к области операторных алгебр, отметим, что аналог свойства (T) для W^*-алгебр был введён А. Конном и В. Джонсом в [13,14], причём ключевую роль в их определении играло понятие соответствия, которое использовалось вместо понятия представления групп. Для некоторых C^*-алгебр аналог свойства (T) был определён Б. Бекка в [10] посредством адаптации определения Конна. В целом подход Бекка близок к первому подходу для топологических групп. Мы расскажем об этом более подробно в разделе 4.

Следует также упомянуть, что А. Конн, В. Джонс и Б. Бекка изучали соотношения между свойством (T) для топологических групп и его аналогом для соответствующих групповых C^*- или W^*-алгебр. Этот вопрос обсуждается в разделе 4. Некоторая общая информация о групповых операторных алгебрах приведена в разделе 3.

Второй подход к определению свойства (T) для C^*-алгебр, который первоначально был рассмотрен в [28, 30], формулируется в терминах топологии Фелла—Джекобсона на спектре. Основное определение, а также объяснение различия между ним и определением Бекка даются в разделе 7. Перед этим разделом мы кратко обсуждаем некоторые необходимые для последующего изложения свойства C^*-гильбертовых модулей и спектров C^*-алгебр (разделы 5, 6). В разделе 8 приводятся некоторые дополнительные свойства топологии Джекобсона на множестве всех примитивных идеалов C^*-алгебры. Основные теоремы, включая критерий свойства (T) для C^*-алгебры, доказываются в разделах 9, 10. Ряд эквивалентных формулировок свойства (T) изучен в разделе 11. Последний раздел посвящён рассмотрению некоторых примеров.

Настоящее исследование является частью совместной исследовательской программы второго автора в Институте математики имени Макса Планка (МПИ) в Бонне, и он выражает благодарность МПИ за поддержку и гостеприимство в период написания данной работы.

Авторы также признательны В. М. Мануйлову, А. С. Мищенко, Т. Шику, З. Эхтерхофу за полезные обсуждения.

2. Свойство (T) Каждана для топологических групп

Существует два основных способа ввести свойство (T) Каждана, которое первоначально возникло в [2], для топологических групп (см., например, [11, 26]).

В рамках первой точки зрения свойство (T) может быть сформулировано в терминах ε-инвариантных векторов и пар Каждана. Более точно, пусть G — топологическая группа и

$$\pi\colon G \to U(H) - \tag{1}$$

унитарное представление группы G в гильбертовом пространстве H, т. е. π есть такой групповой гомоморфизм, что отображение

$$G \to H, \quad g \mapsto \pi(g)h,$$

непрерывно для любого $h \in H$.

Определение 2.1. Пусть X — подмножество в G и $\varepsilon > 0$. Вектор $h \in H$ называется (X,ε)-*инвариантным*, если

$$\sup_{x\in X} \|\pi(x)h - h\| < \varepsilon\|h\|.$$

Определение 2.2. Вектор $h \in H$ называется *инвариантным* для унитарного представления (1), если $\pi(g)h = h$ для всех $g \in G$.

Определение 2.3. Пара (X,ε), которая состоит из компактного множества $X \subset G$ и $\varepsilon > 0$, называется *парой Каждана* для G, если любое унитарное представление группы G, которое имеет (X,ε)-инвариантный вектор, обладает также ненулевым инвариантным вектором. Топологическая группа G обладает *свойством* (T) *Каждана*, если для неё существует хотя бы одна пара Каждана.

Теорема 2.4 [11, теорема 1.1.5]. *Пусть G — локально-компактная группа. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *G — аменабельная группа со свойством* (T);
2) *G компактна.*

Пример 2.5. С учётом утверждения теоремы 2.4 очевидно, что группы $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{Z}^n$ не обладают свойством (T).

Вторая точка зрения на определение свойства (T) может рассматриваться как переформулировка вышеизложенных понятий в терминах топологии Фелла. Остановимся на некоторых деталях этого подхода.

Пусть $[\pi]$ обозначает класс эквивалентности представления (1) и $\mathcal{R}$ — фиксированное множество классов эквивалентности унитарных представлений группы G.

Определение 2.6. Определим базу $\mathcal{B}_{\mathcal{R}}$ топологии Фелла на $\mathcal{R}$ следующим образом. Пусть класс унитарного представления $\pi\colon G \to U(H)$ принадлежит $\mathcal{R}$, $X \subset G$ — компактное подмножество, $h_1,\dots,h_n \in H$ — единичные векторы и $\varepsilon > 0$. Тогда окрестность $V([\pi],X,h_1,\dots,h_n,\varepsilon)$ точки $[\pi]$ состоит из унитарных представлений ρ, $[\rho] \in \mathcal{R}$, таких что для любого h_i существуют единичные векторы $z_1^{(i)},\dots,z_{k_i}^{(i)} \in H$, удовлетворяющие условию

$$\sup_{x\in X}\left|\langle\pi(x)h_i,h_i\rangle - \sum_{j=1}^{k_i}\left\langle\rho(x)z_j^{(i)},z_j^{(i)}\right\rangle\right| < \varepsilon.$$

Обозначим через 1_G единичное представление G в $\mathbb{C}$ и через $\hat{G}$ множество всех классов эквивалентности неприводимых унитарных представлений G. Следующие теоремы дают интерпретацию свойства (T) в терминах топологии Фелла.

Теорема 2.7 [11, предложение 1.2.3]. *Предположим, что G — топологическая группа и $\mathcal{R}$ — множество классов эквивалентности унитарных представлений G без ненулевых инвариантных векторов. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *G обладает свойством* (T) *Каждана*;
2) *1_G является изолированным в $\mathcal{R} \cup \{1_G\}$.*

Теорема 2.8 (см. [22, предложение 14], [11, теорема 1.2.6]). *Пусть G — локально-компактная группа. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *G обладает свойством* (T) *Каждана*;
2) *1_G является изолированным в $\hat{G}$*;
3) *любое конечномерное неприводимое унитарное представление является изолированным в $\hat{G}$*;
4) *по меньшей мере одно конечномерное неприводимое унитарное представление является изолированным в $\hat{G}$.*

3. Групповые C^*-алгебры

Напомним, что *групповая комплексная алгебра* $\mathbb{C}G$ группы G определяется как множество всех комплекснозначных функций на G с конечным носителем, снабжённое поточечными операциями сложения и умножения на скаляры и умножением функций, задаваемым свёрткой, т. е.

$$\xi * \eta(g) = \sum_{h \in G} \xi(h)\eta(h^{-1}g), \quad \xi, \eta \in \mathbb{C}G, \quad g \in G.$$

Заметим, что $\mathbb{C}G$ — унитальная ассоциативная алгебра, которая коммутативна тогда и только тогда, когда G коммутативна.

Будем теперь дополнительно предполагать, что группа G локально-компактна. Тогда существует (и единственна с точностью до умножения на скаляры) [8, 9, 31] левоинвариантная борелевская мера $\mu_l = \mu_l(h)$ на G (здесь $h \in G$), такая что μ_l конечна на компактных множествах и имеет место следующее свойство регулярности:

$$\mu_l(E) = \sup\{\mu_l(C) \colon C \subset E,\ C \text{ компактно}\} = \\ = \inf\{\mu_l(U) \colon E \subset U,\ U \text{ открыто}\}.$$

Тогда, рассматривая пространство $L^1(G) = L^1(G, \mu_l)$ и произвольную функцию $\xi \in L^1(G)$, можем определить $\xi_h \in L^1(G)$ по формуле

$$\xi_h(g) = \xi(h^{-1}g).$$

Непосредственная проверка показывает, что

$$\int\limits_G \xi_h \, d\mu_l = \int\limits_G \xi \, d\mu_l$$

для всех $\xi \in L^1(G)$, $h \in G$.

Заметим теперь, что банахово пространство $L^1(G)$ допускает мультипликативную структуру, которая может быть определена с помощью свёртки, т. е. по формуле

$$\xi * \eta(g) = \int\limits_G \xi(h)\eta(h^{-1}g) \, d\mu_l, \quad \xi, \eta \in L^1(G), \quad g \in G.$$

Относительно этого умножения $L^1(G)$ образует ассоциативную алгебру, которая коммутативна тогда и только тогда, когда коммутативна группа G. Кроме того, алгебра $L^1(G)$ унитальна тогда и только тогда, когда G дискретна (см., например, [6, 28.1]).

Учитывая, что $\mu_l(hg)$ — левоинвариантная мера для любого фиксированного $g \in G$, получаем

$$\mu_l(hg) = \Delta(g)^{-1}\mu_l(h)$$

для всех $g \in G$, где через $\Delta(g)^{-1}$ обозначена некоторая константа. Непосредственная проверка показывает, что

$$\Delta(g_1 g_2) = \Delta(g_1)\Delta(g_2), \quad g_1, g_2 \in G.$$

Кроме того, очевидно, произведение $\mu_r(h) := \Delta(h)\mu_l(h)$ — это правоинвариантная мера на G. Группа называется унимодулярной, если $\Delta(h) = 1$ для всех $h \in G$. Это условие выполнено, в частности, для всех абелевых, дискретных и компактных групп.

Теперь мы готовы ввести инволюцию на $L^1(G)$. Она определяется по формуле

$$\xi^*(g) = \Delta(g)\overline{\xi(g^{-1})}, \quad \xi \in L^1(G), \quad g \in G,$$

и удовлетворяет условию $\|\xi^*\| = \|\xi\|$. Таким образом, $L^1(G)$ образует $*$-алгебру по отношению к вышеупомянутым структурам.

Определим (унитарное) левое регулярное представление группы G следующим образом:

$$\lambda \colon G \to U\big(L^2(G)\big), \quad (\lambda(g)\xi)(h) = \xi(gh),$$

где $\xi \in L^2(G)$, $g, h \in G$. Оно может быть продолжено до унитарного представления

$$\lambda \colon L^1(G) \to B\big(L^2(G)\big), \quad T(\xi)(\eta) = \xi * \eta.$$

Определение 3.1. *Редуцированная C^*-алгебра $C_r^*(G)$* группы G определяется как замыкание по норме образа $\lambda\big(L^1(G)\big)$ в $B\big(L^2(G)\big)$.

Определение 3.2. Алгебра фон Неймана $L(G)$ группы G определяется как обёртывающая алгебра фон Неймана редуцированной C^*-алгебры $C_r^*(G)$ в $B\big(L^2(G)\big)$. Другими словами, $L(G)$ — это замыкание образа $\lambda\big(L^1(G)\big)$ в $B\big(L^2(G)\big)$ относительно σ-слабой топологии.

Пусть π_{univ}, *универсальное представление* группы G, обозначает сумму всех унитарных циклических представлений G. Существует взаимно-однозначное соответствие между унитарными представлениями группы G и невырожденными $*$-представлениями $*$-алгебры $L^1(G)$ (подробности можно найти, например, в [11, F.4]). Следовательно, можно построить соответствующее универсальное представление $*$-алгебры $L^1(G)$, которое также будет обозначаться через π_{univ}.

Определение 3.3. (*Полная*) *C^*-алгебра $C^*(G)$* группы G определяется как пополнение $*$-алгебры $L^1(G)$ по норме

$$\|\xi\|_{\max} = \|\pi_{\mathrm{univ}}(\xi)\|, \quad \xi \in L^1(G).$$

4. Свойство (T) для операторных алгебр: первый подход

Аналог свойства (T) для W^*-алгебр был введён Конном и Джонсом в [13,14]. Ключевую роль в их определении играло понятие соответствия, которое использовалось вместо понятия представления групп. *Соответствие* из алгебры фон Неймана A в алгебру фон Неймана B — это гильбертово пространство H, которое является левым A-модулем и правым B-модулем с коммутирующими нормальными действиями. Оказывается возможным ввести некоторую схожую с топологией Фелла топологию на множестве всех соответствий из A в B. Пусть Id_A — тождественное соответствие, построенное в [21]. Тогда A обладает свойством (T), если существует окрестность U соответствия Id_A, такая что любое соответствие из U содержит Id_A как прямое слагаемое. Это определение может быть переформулировано в терминах центральных и почти центральных векторов. В [14] было доказано, что счётная дискретная группа G с факторной алгеброй фон Неймана $L(G)$ обладает свойством Каждана тогда и только тогда, когда $L(G)$ обладает свойством (T). Это достаточно естественный подход, и в рамках его был получен целый ряд приложений (в частности, был построен пример гомоморфизма θ дискретной группы Q со свойством (T) в $\mathrm{Out}(\lambda(F_\infty)'')$, где F_∞ — свободная группа с бесконечным числом образующих, с тривиальным препятствием $\mathrm{Ob}\,\theta \in H^3(Q,\mathbb{T})$, который тем не менее не может быть поднят до гомоморфизма из Q в $\mathrm{Aut}(\lambda(F_\infty)'')$ [14]). Отсылая за дальнейшими подробностями к упомянутым работам, перейдём к следующему вопросу.

Для некоторых C^*-алгебр аналог свойства (T) был определён в [10] посредством адаптации определения Конна. В целом подход Б. Бекка близок к первому подходу для топологических групп. Остановимся на этом более подробно.

Определение 4.1 (см. [10]). Пусть A — C^*-алгебра, V — гильбертов бимодуль над ней, причём действия должны быть нормальными в случае, когда A — алгебра фон Неймана. Единичный вектор x из V называется (F,ε)-центральным для некоторого конечного подмножества F алгебры A и $\varepsilon > 0$, если

$$\|ax - xa\| < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad a \in F,$$

и центральным, если

$$xa = ax \quad \text{для всех} \quad a \in A.$$

Определение 4.2 (см. [10]). Пусть A либо унитальная C^*-алгебра, допускающая следовое состояние, т. е. след τ с дополнительным условием $\tau(ab) = \tau(ba)$ для всех $a, b \in A$, либо конечная алгебра фон Неймана, V — гильбертов бимодуль над ней. Тогда A обладает свойством (T), если можно найти конечное подмножество F алгебры A и $\varepsilon > 0$, такие что V имеет центральный вектор всякий раз, когда V имеет (F, ε)-центральный вектор.

Тогда основной результат из [10] может быть сформулирован следующим образом.

Теорема 4.3. *Предположим, что G — счётная дискретная группа и A — C^*-алгебра, являющаяся фактором полной групповой алгебры $C^*_{\max}(G)$, причём редуцированная алгебра $C^*_{\mathrm{r}}(G)$ является фактором A. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *G обладает свойством* (T);
2) *A обладает свойством* (T);
3) *$L(G)$ обладает свойством* (T).

5. Несколько слов о C^*-гильбертовых модулях

Напомним, что *C^*-предгильбертов модуль* над C^*-алгеброй A — это (правый) A-модуль M, рассматриваемый вместе с таким полуторалинейным отображением $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon M \times M \to A$, что

1) $\langle x, x \rangle \geqslant 0$ для всех $x \in M$,
2) $\langle x, x \rangle = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$,
3) $\langle x, y \rangle^* = \langle y, x \rangle$ для всех $x, y \in M$,
4) $\langle x, ya \rangle = \langle x, y \rangle a$ для всех $x, y \in M$, $a \in A$.

Отображение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ называется A-значным скалярным произведением. На каждом C^*-предгильбертовом модуле M может быть определена норма по формуле

$$\|x\| = \|\langle x, x \rangle\|^{1/2}, \quad x \in M.$$

Предгильбертов A-модуль является *C^*-гильбертовым A-модулем*, если он полон по отношению к этой норме.

Предположим, что M — гильбертов модуль над C^*-алгеброй A. Через $\mathrm{End}_A(M)$ будем обозначать множество всех одновременно линейных и A-линейных ограниченных операторов на M. Оператор $T \in \mathrm{End}_A(M)$ допускает сопряжённый оператор $T^* \in \mathrm{End}_A(M)$, если равенство

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle$$

имеет место для всех $x, y \in M$. Заметим, что оператор в C^*-гильбертовом модуле может не иметь сопряжённого, в отличие от классического случая гильбертовых пространств (см. [3, пример 2.1.2]). Далее $\mathrm{End}^*_A(M)$ будет обозначать подмножество в $\mathrm{End}_A(M)$, состоящее из операторов, допускающих сопряжённый.

Предположим, что M — гильбертов A-модуль. Пусть $M' = \mathrm{Hom}_A(M, A)$ — множество всех одновременно линейных и A-линейных ограниченных отображений из M в A. Заметим, что M' — левый банахов A-модуль. Он называется *дуальным модулем* для M. Очевидно, существует изометрическое модульное вложение

$$\wedge\colon M \to M', \quad x^\wedge(\cdot) = \langle x, \cdot\rangle.$$

C^*-гильбертов A-модуль называется *автодуальным*, если это отображение сюръективно.

Стандартный C^*-гильбертов модуль над C^*-алгеброй A, который обозначается через $l_2(A)$ или H_A, состоит из таких последовательностей (a_i) с элементами из A, что ряды $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i^* a_i$ сходятся по норме.

Предложение 5.1 [3, предложение 2.5.5]. *Рассмотрим множество всех последовательностей $f = (f_i)$, $f_i \in A$, $i \in \mathbb{N}$, таких что частичные суммы рядов $\sum f_i^* f_i$ являются равномерно ограниченными. Если A — унитальная C^*-алгебра, то это множество совпадает с H'_A, действие f на H_A задаётся формулой*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i^* x_i,$$

где $x = (x_i) \in H_A$, и норма функционала f удовлетворяет условию

$$\|f\|^2 = \sup_N \left\| \sum_{i=1}^{\infty} f_i^* f_i \right\|.$$

Предложение 5.2 [3, теорема 5.1.6]. *Пусть A — C^*-алгебра. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *C^*-гильбертов модуль H_A автодуальный*;
2) *C^*-алгебра A конечномерна.*

Более подробную информацию о C^*-гильбертовых модулях можно найти в [3, 24, 27].

6. О спектрах C^*-алгебр

Напомним некоторые понятия и обозначения, касающиеся спектров C^*-алгебр (дальнейшую информацию можно найти в [1, 4, 29]).

Для C^*-алгебры A пусть $\hat{A}$ — это пространство всех классов эквивалентности неприводимых представлений алгебры A, $\mathrm{Prim}(A)$ — пространство примитивных идеалов A и $\mathrm{P}(A)$ — множество чистых состояний на A.

Теорема 6.1 [4, теорема 5.1.6]. *Для любого состояния τ на A можно рассмотреть соответствующее циклическое представление ρ_τ алгебры A в гильбертовом пространстве, которое задаётся посредством ГНС-конструкции. Тогда представление ρ_τ неприводимо тогда и только тогда, когда τ — чистое состояние.*

Таким образом, существует сюръективное отображение

$$\mathrm{P}(A) \to \hat{A}. \tag{2}$$

Теорема 6.2 [1, 2.5.7]. *Следующие условия эквивалентны*:

1) *отображение* (2) *биективно*;
2) *любое неприводимое представление C^*-алгебры A одномерно*;
3) *A коммутативна.*

Предложение 6.3 (см. [1, 2.9.7; 4, теорема 5.4.3]). *Любой замкнутый двусторонний идеал в C^*-алгебре есть пересечение всех содержащих его примитивных идеалов.*

Пусть S — подмножество C^*-алгебры A. Тогда $\mathrm{hull}(S)$ — множество всех примитивных идеалов из A, содержащих S. Пусть R — подмножество в $\mathrm{Prim}(A)$. Тогда $\ker(R)$ — пересечение всех идеалов из R. Мы считаем, что $\ker(\varnothing) = A$.

Определение 6.4. *Топология Джекобсона* на $\mathrm{Prim}(A)$ определяется посредством введения следующей операции замыкания (см. [1, 3.1.1], [4, теорема 5.4.6]):

$$R \mapsto \bar{R} := \mathrm{hull}\big(\ker(R)\big), \quad R \subset \mathrm{Prim}(A).$$

Заметим, что $\mathrm{Prim}(A)$ образует T_0-пространство по отношению к топологии Джекобсона (см. [1, 3.1.3], [4, теорема 5.4.7]).

Предложение 6.5 [1, 3.1.2]. *Пусть $T \subset \mathrm{Prim}(A)$. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *T замкнуто в топологии Джекобсона*;
2) *T — это множество всех примитивных идеалов A, содержащих некоторое фиксированное подмножество C^*-алгебры A.*

Определение 6.6. *Топология Фелла* на $\hat{A}$ определяется посредством перенесения топологии Джекобсона с $\mathrm{Prim}(A)$ на $\hat{A}$ с помощью сюръективного отображения

$$\theta\colon \hat{A} \to \mathrm{Prim}(A). \tag{3}$$

Отображение (3) одновременно открыто и замкнуто. Пространства $\hat{A}$ и $\mathrm{Prim}(A)$ локально-компактны, причём они компактны, если A унитальна [1, 3.1.8, 3.3.8].

Для $a \in A$ и $I \in \mathrm{Prim}(A)$ мы будем обозначать через $\|a+I\|$ норму элемента $a+I$ в фактор-алгебре A/I.

Теорема 6.7 (Даунс, Хофманн, [15, 17]). *Пусть A — C^*-алгебра, x — элемент из A и f — ограниченная непрерывная скалярнозначная функция на*

$\mathrm{Prim}(A)$, *причём предполагается, что множество примитивных идеалов снабжено топологией Джекобсона. Тогда существует единственный элемент* fx *из* A, *такой что*

$$(\widehat{fx})(I) = f(I)\hat{x}(I), \quad I \in \mathrm{Prim}(A),$$

где $\hat{x}(I) = x + I \in A/I$.

Точка $S \in \mathrm{Prim}(A)$ называется *отделённой точкой*, если для любого идеала $I \in \mathrm{Prim}(A)$, который не является предельной точкой для S, существуют дизъюнктные окрестности точек S и I.

Теорема 6.8 [16]. *Предположим,* A — C^**-алгебра. Тогда*

1) *точка* $I \in \mathrm{Prim}(A)$ *является отделённой тогда и только тогда, когда для любого элемента* $x \in A$ *функция* $I \mapsto \|x + I\|$ *непрерывна в* I;
2) *если* A *сепарабельна, то все отделённые точки из* $\mathrm{Prim}(A)$ *образуют* G_δ*-множество, которое плотно в* $\mathrm{Prim}(A)$.

7. Свойство (T) для операторных алгебр: второй подход. Сравнение с определением Бекка

Обобщение свойства (T) для коммутативных C^*-алгебр в духе второго (топологического) подхода для топологических групп было предложено в [30]. Исследование было мотивировано изучением условных ожиданий конечного индекса, связанных с действиями групп [7, 20, 30], [3, § 4.5]. Некоммутативный случай был изучен с этой точки зрения в [28].

Начнём с формулировки основного определения.

Определение 7.1. Унитальная C^*-алгебра A обладает свойством (TP) (свойством (T) в некоторой точке её спектра), если существует такая изолированная по отношению к топологии Фелла точка в $\hat{A}$, что соответствующее представление конечномерно.

Замечание 7.2. Из теоремы 2.8 непосредственно следует, что для $A = C^*(G)$ определение 7.1 в точности совпадает с определением Каждана, если G — локально-компактная группа.

В частности, для полных групповых C^*-алгебр счётных дискретных групп определение 7.1 свойства (TP) совпадает с определением Бекка для свойства (T). Но в общей ситуации эти определения различны. Действительно, Н. Брауном [12] было доказано, что если унитальная C^*-алгебра A одновременно ядерная и обладает свойством (T) в смысле Бекка, то $A = B \oplus C$, где B — конечномерная и C не имеет следовых состояний. В частности, если A одновременно коммутативная C^*-алгебра и обладает свойством (T) в смысле Бекка, то она должна быть изоморфна конечной сумме копий поля комплексных чисел. С другой стороны, любая коммутативная C^*-алгебра обладает свойством (TP) при условии, что её спектр имеет изолированные точки (см. [30]).

Мы доказываем в следующих разделах, что свойство (TP) отвечает за одно очень интересное свойство C^*-гильбертовых модулей над рассматриваемой алгеброй. Прежде чем дать точную формулировку утверждения, напомним определение (см. [30]).

Определение 7.3. Унитальная C^*-алгебра A является MI-алгеброй (module-infinite), если каждый автодуальный счётно порождённый гильбертов A-модуль является конечно порождённым проективным модулем. (Заметим, что конечно порождённые проективные модули всегда автодуальны.)

Теорема 7.4 [28]. *Предположим, что A — сепарабельная унитальная C^*-алгебра. Тогда A будет MI-алгеброй в том и только в том случае, когда A не обладает свойством* (TP).

Замечание 7.5. Свойство существования изолированных точек может быть сформулировано как для $\hat{A}$, так и для $\operatorname{Prim}(A)$. К счастью, для конечномерных представлений это свойство не зависит от выбора одного из упомянутых пространств. Действительно, разница могла бы возникнуть в случае, если бы рассматриваемая изолированная точка имела несколько прообразов. Но конечномерные неприводимые представления эквивалентны тогда и только тогда, когда их ядра совпадают (см., например, [4, пример 5.6.2, теорема 5.6.3]). Это позволит нам выбирать подходящее множество в разных частях работы, чтобы упростить рассуждения.

8. Некоторые специальные свойства $\operatorname{Prim}(A)$

Предположим, что A — унитальная C^*-алгебра.

Лемма 8.1. *Пусть U — окрестность точки $\rho \in \hat{A}$. Тогда существует положительный элемент $a \in A$ нормы 1, такой что*

1) $\|\rho(a)\| = 1$;
2) $\pi(a) = 0$ *для всех* $\pi \in \hat{A} \setminus U$.

То же самое верно для $\operatorname{Prim}(A)$.

Доказательство. По [1, лемма 3.3.3] существует положительный элемент $x \in A$, такой что множество $Z = \{\pi \in \hat{A} \colon \|\pi(x)\| > 1\}$ содержит ρ и лежит в U. Пусть $\|\rho(x)\| = t$, $1 < t \leqslant \|x\|$ и $t_1 \in (1, t)$. Пусть f — непрерывная функция на $[0, \|x\|\,]$, равная 0 на $[0, t_1]$, равная 1 на $[t, \|x\|]$ и линейная на $[t_1, t]$. Выберем $a = f(x)$. Тогда $a \geqslant 0$, $\|a\| = 1$. Кроме того,

$$\|\rho(a)\| = \big\|\rho\big(f(x)\big)\big\| = \big\|f\big(\rho(x)\big)\big\| = 1$$

и

$$\|\pi(a)\| = \big\|\pi\big(f(x)\big)\big\| = \big\|f\big(\pi(x)\big)\big\| = 0$$

для всех $\pi \in \hat{A} \setminus U$, потому что $\|\pi(x)\| \leqslant 1 < t_1$. $\square$

Лемма 8.2. *Пусть $\{S_i\}$ — последовательность различных отделённых точек из $\mathrm{Prim}(A)$. Тогда существуют подпоследовательность $\{S_{i(j)}\}$ последовательности $\{S_i\}$ и окрестности V_j точек $S_{i(j)}$, которые не содержат других точек данной подпоследовательности.*

Доказательство. Предположим, последовательность $\{S_i\}$ не имеет точек накопления среди своих членов. Тогда каждый из них имеет окрестность, в которую не входят другие точки данной последовательности.

Теперь предположим, что S_k — предельная точка. Без ограничения общности (мы можем перейти к подпоследовательности) можно считать, что S_k — предел последовательности $\{S_i\}$. Пусть V_1' и V_1 — дизъюнктные окрестности точек S_k и $S_1 =: S_{i(1)}$ (так как $\mathrm{Prim}(A)$ — T_0-пространство, отделённые точки образуют хаусдорфово пространство, в частности, любое их конечное число имеет попарно дизъюнктные окрестности). Тогда существуют $S_{i(2)} \in V_1'$, $S_{i(2)} \neq S_k$, и дизъюнктные окрестности $W_2' \ni S_k$ и $W_2 \ni S_{i(2)}$. Возьмём $V_2' := W_2' \cap V_1'$ и $V_2 := W_2 \cap V_1'$, и т. д. $\square$

9. Свойство DINC

Определение 9.1. Унитальная C^*-алгебра называется DINC-алгеброй (divisible infinite for the noncommutative case), если для любой последовательности $u_i \in A$ элементов нормы $1 \geqslant \|u_i\| \geqslant C > 0$ существуют подпоследовательность $i(k)$ и элементы $b_k \in A$ нормы 1, такие что

1) частичные суммы ряда $\sum\limits_k b_k^* b_k$ являются равномерно ограниченными;
2) для каждого k

$$\|u_{i(k)} b_k\| \geqslant \frac{C}{2}. \tag{4}$$

Следующий результат обобщает [30, теорема 32].

Теорема 9.2 [28]. *Если унитальная C^*-алгебра A есть DINC-алгебра, то она MI-алгебра.*

Доказательство. Мы должны доказать, что если счётно порождённый гильбертов A-модуль $\mathcal{M}$ не является конечно порождённым проективным модулем, то он не является автодуальным. По теореме стабилизации Каспарова [23] (см. также [3, 24]) имеем $\mathcal{M} \oplus l_2(A) \cong l_2(A)$. Обозначим через $p_{\mathcal{M}}\colon l_2(A) \to \mathcal{M} \subset l_2(A)$ соответствующий ортопроектор. Пусть $p_j\colon l_2(A) \to E_j \cong A^j$ — ортопроектор на первые j стандартных слагаемых модуля $l_2(A)$ и q_j — ортопроектор на j-е стандартное слагаемое. Таким образом, $p_j = q_1 + \ldots + q_j$. Две возможности могут иметь место: 1) $\|(1-p_j)p_{\mathcal{M}}\| \to 0$ при $j \to \infty$ и 2) противоположный случай.

Покажем, что в первом случае $\mathcal{M}$ — конечно порождённый проективный модуль, т. е. этот случай невозможен в наших предположениях. Будем рассуждать как в [5]: для достаточно большого j оператор

$$J(x) = \begin{cases} p_j(x), & \text{если } x \in \mathcal{M}, \\ x, & \text{если } x \in \mathcal{M}^\perp \cong l_2(A), \end{cases}$$

близок к тождественному, следовательно, он является изоморфизмом, который отображает $\mathcal{M}$ изоморфно на прямое слагаемое в E_j.

Во втором случае рассмотрим матрицу ортогонального проектора $p_{\mathcal{M}}$. Это допускающий сопряжённый (на самом деле даже самосопряжённый) оператор $p_{\mathcal{M}}\colon l_2(A) \to l_2(A)$. Следовательно, $\|p_j p_{\mathcal{M}}(1-p_k)\| \to 0$ при $k \to \infty$ для фиксированного j. Действительно, достаточно проверить, что $\|q_m p_{\mathcal{M}}(1-p_k)\| \to 0$ для каждого $m = 1, \ldots, j$, т. е.

$$\sup_{\|x\|=1} |\langle e_m, p_{\mathcal{M}}(1-p_k)x\rangle| = \sup_{\|x\|=1} |\langle (1-p_k)p_{\mathcal{M}}e_m, x\rangle| = \|(1-p_k)p_{\mathcal{M}}e_m\| \to 0.$$

Последняя формула очевидна, потому что $p_{\mathcal{M}}e_m$ — фиксированный элемент из $l_2(A)$. Таким образом, в данном случае мы имеем следующие соотношения:

$$\|(1-p_j)p_{\mathcal{M}}\| \nrightarrow 0 \quad (j \to \infty),$$
$$\|p_j p_{\mathcal{M}}(1-p_k)\| \to 0 \quad (k \to \infty,\ j \text{ фиксирован}).$$

Используя эти два наблюдения, мы можем выбрать разложения $l_2(A) = M_1 \oplus \oplus M_2 \oplus \ldots$ области определения и $l_2(A) = N_1 \oplus N_2 \oplus \ldots$ образа оператора $p_{\mathcal{M}}$ таким образом, что

- M_i и N_i — свободные модули, порождённые несколькими последовательно идущими векторами $e_{\mu(1,i)}, \ldots, e_{\mu(m_i,i)}$ и $e_{\nu(1,i)}, \ldots, e_{\nu(n_i,i)}$ стандартного базиса;
- существуют элементы $v_i \in M_i$, $\|v_i\| \leqslant 1$, такие что проекция $p_{\mathcal{M}}(v_i)$ на N_i не мала, более точно,
$$\big\|\big(p_{\nu(n_i,i)} - p_{\nu(1,i)-1}\big)p_{\mathcal{M}}(v_i)\big\| \geqslant C$$
для некоторого фиксированного $C > 0$ для любого i;
- для этих элементов проекция $p_{\mathcal{M}}(v_i)$ на $N_1 \oplus \ldots \oplus N_{i-1} \oplus N_{i+1} \oplus \ldots$ мала, более точно,
$$\big\|\big(1 - p_{\nu(n_i,i)} + p_{\nu(1,i)-1}\big)p_{\mathcal{M}}(v_i)\big\| < \frac{\varepsilon}{2^i}$$
для любого наперёд заданного достаточно малого $\varepsilon > 0$ и любого i.

Мы найдём эти элементы индукцией по i. По предположению существует такое число $K > 0$, что для любого j

$$\|(1-p_j)p_{\mathcal{M}}w_j\| \geqslant K \tag{5}$$

для некоторого w_j нормы 1. Очевидно, $K \leqslant 1$. Пусть $\varepsilon = K/4$. Пусть x — любой вектор нормы 1 из $\mathcal{M}$. Тогда с точностью до $\varepsilon/4$ вектор x принадлежит $M_1 = N_1 = E_s$ для некоторого $s = \mu(m_1, 1) = \nu(n_1, 1) = m_1 = n_1$, и условия выполнены с v_1, являющимся проекцией x на M_1, и $C = 1 - \varepsilon \geqslant K - \varepsilon$. Теперь выберем номер $t > \mu(m_1, 1)$ так, что $\|p_s p_{\mathcal{M}}(1-p_t)\| < \varepsilon/16$, и после этого номер $d > \nu(n_1, 1)$ так, что $\|(1-p_d)p_{\mathcal{M}} p_t\| < \varepsilon/16$. Выберем w_d как в (5) и номер $r > t$ так, что $\|(1-p_r)(1-p_t)w_d\| < \varepsilon/16$. Тогда

$$\|(1-p_d)p_{\mathcal{M}} p_r(1-p_t)w_d\| \geqslant \\ \geqslant \|(1-p_d)p_{\mathcal{M}}(1-p_t)w_d\| - \frac{\varepsilon}{16} \geqslant \|(1-p_d)p_{\mathcal{M}} w_d\| - \frac{\varepsilon}{8} \geqslant K - \frac{\varepsilon}{8}.$$

Теперь выберем такой номер $l > d$, что

$$\|p_l(1-p_d)p_{\mathcal{M}} p_r(1-p_t)w_d\| \geqslant K - \frac{\varepsilon}{4}$$

и

$$\|(1-p_l)p_{\mathcal{M}} p_r(1-p_t)w_d\| < \frac{\varepsilon}{8}. \tag{6}$$

Пусть $\mu(m_2, 2) := r$, $\nu(n_2, 2) := l$, $v_2 := p_r(1-p_t)w_d$. Тогда $\|v_2\| \leqslant 1$ и $v_2 \in M_2$, потому что $t > \mu(m_1, 1)$. Так как $l > d > \nu(n_1, 1)$, получаем

$$\|(p_{\nu(n_2,2)} - p_{\nu(n_1,1)})p_{\mathcal{M}}(v_2)\| \geqslant \\ \geqslant \|(p_l - p_d)p_r(1-p_t)w_d\| = \|p_l(1-p_d)p_r(1-p_t)w_d\| \geqslant K - \frac{\varepsilon}{4}.$$

Так как $\|p_s p_{\mathcal{M}}(1-p_t)\| < \varepsilon/16$, получаем

$$\frac{\varepsilon}{16} > \|p_{\nu(n_1,1)} p_{\mathcal{M}}(1-p_t)p_r w_d\| = \|p_{\nu(n_1,1)} p_{\mathcal{M}} p_r(1-p_t)w_d\| = \|p_{\nu(n_1,1)} p_{\mathcal{M}} v_2\|.$$

Вместе с (6) это даёт последнее необходимое свойство. Продолжая таким образом, мы получаем нужные разложения и элементы с

$$C = K - \varepsilon \geqslant \frac{3}{4}K.$$

Обозначим $u_i := p_{\mathcal{M}}(v_i)$. Пусть z_i — ортопроекция элемента u_i на N_i. Тогда $C \leqslant \|u_i\| \leqslant 1$, $\|z_i - u_i\| < \varepsilon/2^i$, $\|z_i\| \leqslant (1 + \varepsilon/2^i)$.

Согласно определению 9.1 выберем элементы b_k для $\langle z_k, z_k\rangle$ (для краткости обозначений предположим, что нет необходимости переходить к подпоследовательности второй раз). Тогда формула

$$\beta(x) = \sum_k b_k^* \langle z_k, x\rangle \tag{7}$$

определяет A-функционал на $l_2(A)$. Действительно, чтобы это проверить, согласно предложению 5.1 достаточно доказать, что частичные суммы ряда

$$\sum_i \beta(e_i)\beta(e_i)^*$$

являются равномерно ограниченными. Если $e_i \in N_m$, то

$$\beta(e_i) = \sum_{k \neq m} b_k^* \langle z_k, e_i\rangle + b_m^* \langle z_m, e_i\rangle = b_m^* \langle z_m, e_i\rangle.$$

Следовательно,

$$\sum_i \beta(e_i)\beta(e_i)^* = \sum_m \sum_{e_i \in N_m} (b_m^* \langle z_m, e_i\rangle)(b_m^* \langle z_m, e_i\rangle)^* =$$

$$= \sum_m b_m^* \Bigg(\sum_{e_i \in N_m} \langle z_m, e_i\rangle \langle z_m, e_i\rangle^* \Bigg) b_m = \sum_m b_m^* \langle z_m, z_m\rangle b_m \leqslant (1+\varepsilon)^2 \sum_m b_m^* b_m.$$

Покажем, что не существует такого функционала α на $l_2(A)$, допускающего сопряжённый, что $\alpha|_{\mathcal{M}} = \beta|_{\mathcal{M}}$, и следовательно, $\beta|_{\mathcal{M}}$ — это не допускающий сопряжённого функционал на $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}$ не автодуальный модуль. Действительно, предположим, что существует элемент $a = (a_1, a_2, \ldots) \in \mathcal{M} \subset l_2(A)$, такой что $\alpha(x) := \sum\limits_i a_i x^i = \beta(x)$ для любого $x \in \mathcal{M}$. Тогда

$$\alpha(z_j) \to 0, \quad [\alpha(u_j) - \alpha(z_j)] \to 0, \quad \alpha(u_j) = \beta(u_j),$$
$$[\beta(u_j) - \beta(z_j)] \to 0, \quad \beta(z_j) = b_j^* \langle z_j, z_j\rangle \nrightarrow 0.$$

Мы пришли к противоречию. □

10. Описание спектров MI-алгебр

Следующая теорема доказана в [18] в гораздо большей общности. Мы представляем здесь более простое рассуждение, чтобы сделать текст самодостаточным.

Теорема 10.1. *Пусть A — неприводимая C^*-подалгебра в $B(H)$, где $B(H)$ — множество всех ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве H. Тогда следующие свойства эквивалентны*:

1) *H бесконечномерно*;
2) *существует последовательность $\alpha_i \in A$, такая что*
   а) $\|\alpha_i\| = 1$;
   б) $0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1$;
   в) $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \leqslant 1$ *для любого n.*

Доказательство. Если H конечномерно, то, очевидно, последовательности с упомянутыми свойствами не существует.

Пусть теперь H бесконечномерно. Если существует элемент $\alpha \geqslant 0$ из A с бесконечным спектром, то мы можем построить искомые α_i с помощью функционального исчисления на спектре α, т. е. найти их внутри коммутативной C^*-алгебры, порождённой элементом α.

Предположим теперь, что любой положительный элемент из A имеет конечный спектр. В этой ситуации любой проектор $p \in A$ может быть разложен в сумму двух нетривиальных проекторов $p = p_0 + p_1$ в предположении, что образ p имеет размерность не меньше 2. Действительно, пусть h_0 и h_1 — два единичных вектора из образа p, которые ортогональны друг другу. По теореме транзитивности Кадисона существует самосопряжённый элемент $\alpha \in A$, такой что $\alpha(h_0) = 0$ и $\alpha(h_1) = h_1$. Тогда $p\alpha^*\alpha p = p\alpha^2 p$ имеет 0 и 1 в качестве собственных значений, отвечающих собственным векторам из $\operatorname{Im} p$. Следовательно, его спектральное разложение над $\operatorname{Im} p$ не тривиально, причём проекторы лежат в A, так как спектр конечен.

Повторим теперь построение разложения $p = p_0 + p_1$ бесконечно много раз начиная с некоторого спектрального проектора и получим последовательность попарно ортогональных проекторов, которая может быть взята в качестве α_i. $\square$

Нам понадобится следующая лемма для доказательства основной теоремы.

Лемма 10.2 [28]. *Предположим, что $\hat{A}$ имеет изолированную точку, являющуюся конечномерным представлением. Тогда A не MI-алгебра.*

Доказательство. Пусть $M \in \operatorname{Prim}(A)$ — ядро изолированного представления ρ. Тогда M — максимальный идеал, потому что фактор A/M изоморфен простой конечномерной матричной C^*-алгебре. Пусть

$$\chi(I) = \begin{cases} 1, & I = M, \\ 0, & I \neq M, \end{cases} \text{ —}$$

характеристическая функция $\{M\}$. Множество $\{M\}$ одновременно открыто (потому что эта точка является изолированной) и замкнуто (потому что это максимальный идеал), следовательно, функция χ непрерывна. Рассмотрим конечномерную матричную C^*-алгебру $M_n = \rho(A) \cong A/M$. По теореме Даунса—Хофманна (теорема 6.7) для любого $a \in A$ существует единственный элемент $(\chi a) \in A$, такой что $\chi\hat{a} = \widehat{\chi a}$. Здесь

$$\hat{a}(I) = a + I, \quad I \in \operatorname{Prim}(A).$$

Предположим,

$$A_M = \{a \in A \colon \hat{a}(I) = 0 \text{ для всех } I \neq M\}$$

и π — это композиция

$$A \longrightarrow A/M \xrightarrow{\cong} M_n.$$

Тогда по теореме Даунса—Хофманна ограничение π на A_M является изоморфизмом. Кроме того, A_M — прямое слагаемое в A, потому что отображение $a \mapsto \chi a$ — проекция. Таким образом, A не MI-алгебра (см. предложение 5.2). $\square$

Доказательство теоремы 7.4. В одну сторону это в точности лемма 10.2.

Теперь предположим, что $\hat{A}$ не имеет изолированных точек, являющихся конечномерными представлениями. Покажем, что A есть MI-алгебра, установив, что A есть DINC-алгебра. В соответствии с замечанием 7.5 будем работать с $\operatorname{Prim}(A)$.

Возьмём любую последовательность $u_i \in A$ нормы $1 \geqslant \|u_i\| \geqslant C$. Функции $f_i(I) = \|u_i + I\|$ полунепрерывны снизу на $\operatorname{Prim}(A)$, следовательно, множества $G_i = f_i^{-1}(2C/3, \infty)$ открыты. Выберем отделённые точки S_i из G_i, тогда

$1 \geqslant \|u_i + S_i\| \geqslant 2C/3$. Переходя, если необходимо, к подпоследовательности, можем предполагать, что либо (I) $S_i = S$ для всех i, либо (II) все точки S_i различны.

В случае (I) мы можем считать, что S — изолированная точка, являющаяся ядром бесконечномерного представления $\rho\colon A \to B(H)$. Действительно, в противном случае, очевидно, найдётся такая последовательность T_i различных отделённых точек, что $T_i \to S$. Переходя от S к T_i, получаем случай (II).

Изучим теперь случай (I) в предположении, что S — изолированная точка. Множество $\{S\}$ открыто, следовательно, по лемме 8.1 существует положительный элемент $a \in A$ нормы 1, такой что $\|a + S\| = 1$ и $\|a + I\| = 0$ для всех примитивных идеалов $I \neq S$. По теореме 10.1 существует такая последовательность $a_i \in A$, что

1) $\|a_i + S\| = 1$;
2) $0 \leqslant a_i + S \leqslant 1 + S$;
3) $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i + S \leqslant 1 + S$ для любого n.

Рассмотрим неприводимое представление ρ алгебры A в H с ядром S. Выберем теперь $x_i, y \in H$ нормы 1, такие что

$$\|\rho(a_i)x_i\| > \|\rho(a_i)\| - \varepsilon = 1 - \varepsilon, \quad \|\rho(a)y\| > \|\rho(a)\| - \varepsilon > 1 - \varepsilon,$$

где $(1-\varepsilon)^2 > 1/\sqrt{2}$. По теореме транзитивности Кадисона найдутся унитарные операторы $\rho(c_i) \in \rho(A)$, $\|c_i\| = 1$ (см. [1, теорема 2.8.3.]), такие что

$$y = \rho(c_i)\left(\frac{\rho(a_i)x_i}{\|\rho(a_i)x_i\|}\right).$$

Следовательно,

$$\|a(c_i a_i) + S\| \geqslant \|\rho(a c_i a_i)x_i\| = \|\rho(a)y\|\,\|\rho(a_i)x_i\| > \\ > (\|\rho(a_i)\| - \varepsilon)(\|\rho(a)\| - \varepsilon) > \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Положим $v_i = a c_i a_i$ и $b_i = v_i^* v_i$. Мы утверждаем, что

1) $\|b_i + S\| > 1/2$;
2) $0 \leqslant b_i + S \leqslant 1 + S$;
3) $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i + S \leqslant 1 + S$ для любого n;
4) $\|b_i + I\| = 0$ для всех примитивных идеалов $I \neq S$.

Третье условие следует из оценки

$$\sum_{i=1}^{n} b_i + S = \sum_{i=1}^{n} a_i^* c_i^* a^* a c_i a_i + S \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^* a_i + S \leqslant 1 + S.$$

Другие свойства, упомянутые выше, очевидны. Из того, что $\|b_i\| = \sup\{\|b_i + I\|\colon I \in \mathrm{Prim}(A)\}$, следует, что $\|b_i\| = \|b_i + S\| > 1/2$ для всех i и $\Big\|\sum\limits_{i=1}^{n} b_i\Big\| \leqslant 1$ для всех n. Следовательно,

$$u_i b_i + I = \begin{cases} u_i b_i + S, & I = S, \\ 0, & I \neq S, \end{cases}$$

и $\|u_i b_i\| = \|u_i b_i + S\|$. Выберем теперь такие $\xi_i, \eta_i \in H$ нормы 1, что

$$\|\rho(b_i)\xi_i\| > \|\rho(b_i)\| - \varepsilon > \frac{1}{2} - \varepsilon, \quad \|\rho(u_i)\eta_i\| > \|\rho(u_i)\| - \varepsilon \geqslant \frac{C}{2} - \varepsilon,$$

где $(1/2 - \varepsilon)(C/2 - \varepsilon) > C/4$. По теореме транзитивности Кадисона найдутся унитарные операторы $\rho(c_i) \in \rho(A)$, $\|c_i\| = 1$, такие что

$$\eta_i = \rho(c_i)\left(\frac{\rho(b_i)\xi_i}{\|\rho(b_i)\xi_i\|}\right).$$

Тогда

$$\|u_i(c_i b_i)\| \geqslant \|\rho(u_i c_i b_i)\xi_i\| = \|\rho(u_i)\eta_i\|\,\|\rho(b_i)\xi_i\| > (\|\rho(b_i)\| - \varepsilon)(\|\rho(u_i)\| - \varepsilon) > \frac{C}{4}.$$

Таким образом, $c_i b_i$ может быть выбрана в качестве последовательности для u_i, обозначенной через b_i в определении 9.1. Следовательно, A есть DINC-алгебра и, согласно теореме 9.2, MI-алгебра.

Рассмотрим теперь случай (II). По лемме 8.2 существуют окрестности V_i точек S_i, такие что $S_j \notin V_i$, если $j \neq i$ (для краткости обозначений мы не переходим к подпоследовательности). Теперь по лемме 8.1 мы можем найти такую последовательность y_n положительных элементов из A, что

$$\|y_n\| = 1, \quad \|y_n + S_n\| = 1, \quad \|y_n + S_m\| = 0 \ \text{ для всех } \ m \neq n. \tag{8}$$

Теперь перейдём от последовательности y_n к другой последовательности z_n со следующими свойствами:

а) частичные суммы ряда $\sum\limits_k z_k^* z_k$ равномерно ограничены единицей,

б) $\|z_i + S_j\| = 0$ для всех $j \neq i$,

в) $\|z_i + S_i\| = 1$ для любого i.

Для этой цели определем $z_1 := y_1$ и по индукции

$$z_{i+1} := y_{i+1}\left(1 - \sum_{k=1}^{i} z_k^* z_k\right)^{1/2}. \tag{9}$$

Из свойства а) для z_i следует, что элемент z_{i+1} корректно определён. Свойство б) очевидно. Свойство а) следует из оценки

$$\sum_{k=1}^{i+1} z_k^* z_k = \sum_{k=1}^{i} z_k^* z_k + \left(1 - \sum_{k=1}^{i} z_k^* z_k\right)^{1/2} (y_{i+1})^2 \left(1 - \sum_{k=1}^{i} z_k^* z_k\right)^{1/2} \leqslant 1.$$

Кроме того, по б)

$$\left(1 - \sum_{k=1}^{i-1} z_k^* z_k\right)^{1/2} + S_i = 1,$$

откуда

$$\|z_i + S_i\| = \|y_i + S_i\| = 1,$$

и условие в) также выполнено.

Пусть теперь $S_i = \ker(\rho_i)$ и H_i — пространство неприводимого представления ρ_i. Мы можем выбрать $\xi_i, \eta_i \in H_i$ нормы 1 так, что

$$\|\rho_i(z_i)\xi_i\| > \|\rho_i(z_i)\| - \varepsilon = 1 - \varepsilon, \quad \|\rho_i(u_i)\eta_i\| > \|\rho_i(u_i)\| - \varepsilon \geqslant \frac{2C}{3} - \varepsilon,$$

где $(1-\varepsilon)(2C/3 - \varepsilon) \geqslant C/2$. По теореме транзитивности Кадисона существуют такие унитарные операторы $\rho_i(c_i) \in \rho_i(A)$, $\|c_i\| = 1$, что

$$\eta_i = \rho_i(c_i)\left(\frac{\rho_i(z_i)\xi_i}{\|\rho_i(z_i)\xi_i\|}\right).$$

Таким образом,

$$\|u_i(c_i z_i)\| \geqslant \big\|\rho_i\big(u_i(c_i z_i)\big)\big\| \geqslant \|\rho_i(u_i c_i z_i)\xi_i\| = \\ = \|\rho_i(u_i)\eta_i\|\,\|\rho_i(z_i)\xi_i\| > (1-\varepsilon)(\|\rho_i(u_i)\| - \varepsilon) \geqslant \frac{C}{2}.$$

Таким образом, $b_i := c_i z_i$ — последовательность для u_i, как в определении 9.1. Следовательно, A есть DINC-алгебра и, согласно теореме 9.2, MI-алгебра. □

11. Переформулировки и связи с K-теорией

В предыдущих разделах были получены некоторые переформулировки свойства (TP). Мы соберём их в следующих двух теоремах.

Теорема 11.1. *Для сепарабельной унитальной C^*-алгебры свойства* «не (TP)», DINC *и* MI *эквивалентны.*

Доказательство. В доказательстве теоремы 7.4 было показано, что свойство «не (TP)» влечёт свойство DINC. Лемма 10.2 утверждает, что свойство MI влечёт «не (TP)». Свойство DINC влечёт свойство MI по теореме 9.2. Следовательно, эти три свойства C^*-алгебр эквивалентны. □

Теорема 11.2. *Пусть A — унитальная C^*-алгебра. Рассмотрим следующие условия*:

1) *A обладает свойством* (TP),
2) *A допускает разложение $A = B \oplus M_n$ для некоторой C^*-алгебры B.*

Тогда 1) *влечёт* 2). *С другой стороны,* 2) *также влечёт* 1) *при условии, что A сепарабельна.*

Доказательство. Доказательство леммы 10.2 содержит проверку, что 1) влечёт 2). С другой стороны, условие «не MI» следует из 2) (см. предложение 5.2), «не MI» влечёт «не DINC» по теореме 9.2 и «не DINC» является причиной того, что A обладает свойством (TP), согласно доказательству теоремы 7.4. □

Из последней теоремы может быть получено некоторое описание C^*-алгебр, обладающих свойством (TP), на языке K-теории.

Следствие 11.3. *Пусть A — унитальная C^*-алгебра. Тогда*

$$K_0(A) = G \oplus \mathbb{Z}$$

для некоторой абелевой группы G, при условии что A обладает свойством (TP).

12. Примеры

Рассмотрим несколько примеров C^*-алгебр как обладающих, так и не обладающих свойством (TP).

Пример 12.1. Пусть A — конечномерная C^*-алгебра. Тогда

$$A = M_{n_1} \oplus \ldots \oplus M_{n_k}.$$

Если $k = 1$, то $\mathrm{Prim}(A) = \{0\}$, иначе $\mathrm{Prim}(A) = \{i_1(M_{n_1}), \ldots, i_k(M_{n_k})\}$, где $i_j \colon M_{n_j} \to A$ — вложения на j-е слагаемые.

В любом случае существуют изолированные точки в $\mathrm{Prim}(A)$, являющиеся ядрами конечномерных неприводимых представлений. Таким образом, A обладает свойством (TP).

Также легко показать непосредственно, что A не удовлетворяет свойствам DINC и MI. Действительно, положим $u_i = 1$ для всех i в определении 9.1. Если бы существовала такая последовательность (b_i), что условия 1) и 2) определения 9.1 были для неё выполнены, то эта последовательность определяла бы элемент дуального модуля $l_2(A)'$, который не принадлежал бы $l_2(A)$ (см. предложение 5.1), но это невозможно согласно предложению 5.2. Следовательно, A не обладает свойством DINC.

A также не MI-алгебра, потому что модуль $l_2(A)$ автодуален по предложению 5.2.

Пример 12.2. Пусть $K(H)$ — C^*-алгебра компактных операторов в бесконечномерном сепарабельном гильбертовом пространстве H. Для $x, y, z \in H$ положим $\theta_{x,y}(z) = x\langle y, z\rangle$, так что $\theta_{x,y} \in K(H)$. Пусть $A = \widetilde{K(H)}$ — алгебра $K(H)$ с присоединённой единицей.

Пусть I — любой ненулевой идеал из A. Тогда $I = K(H)$. Действительно, рассмотрим любой ненулевой элемент u из I. Тогда существует такой вектор $x \in H$, что $u(x) \neq 0$. Для любого $y \in H$ положим $v = \frac{\theta_{y,u(x)}}{\|u(x)\|^2}$. Тогда $vu(x) = y$ и $\theta_{y,y} = vu\theta_{x,x}u^*v^*$, так что $\theta_{y,y} \in I$.

Таким образом, $\mathrm{Prim}(A) = \{0, K(H)\}$ и все открытые множества в $\mathrm{Prim}(A)$ — это $\varnothing$, $\{0\}$, $\{0, K(H)\}$. Следовательно, не существует изолированных точек спектра, кроме $\{0\}$. Но эта точка есть ядро бесконечномерного неприводимого представления. Следовательно, алгебра A не обладает свойством (TP) и по теореме 7.4 является MI-алгеброй.

Отметим хорошо известный факт, что любой счётно порождённый гильбертов модуль над A рефлексивен (см., например, [3]). Из наших результатов немедленно следует, что этот модуль не автодуален.

Пример 12.3. Пусть $\mathbb{A}$ — алгебра Теплица и H^2 — пространство Харди. Тождественное представление алгебры $\mathbb{A}$ в H^2 неприводимо (см. [4, теорема 3.5.5]). По тем же причинам, что и в предыдущем примере, любой ненулевой идеал $I \subset \mathbb{A}$ содержит $K(H^2)$. Таким образом, нулевой идеал — единственная изолированная точка в $\mathrm{Prim}(\mathbb{A})$, и она является ядром бесконечномерного неприводимого представления. Следовательно, алгебра Теплица $\mathbb{A}$ не обладает свойством (TP) и по теореме 7.4 обладает свойством MI.

Пример 12.4. Из следствия 11.3 вытекает, что C^*-алгебра $\mathbb{B}$ всех линейных ограниченных операторов в некотором гильбертовом пространстве, алгебра Калкина Q, алгебра Кунтца $\mathcal{O}_n$ и любой II_1-фактор не обладают свойством (TP) (см. [32, 6.5]).

Литература

[1] Диксмье Ж. C^*-алгебры и их представления. — М.: Наука, 1974.

[2] Каждан Д. А. О связи дуального пространства группы со структурой её замкнутых подгрупп // Функц. анализ и его прил. — 1967. — Т. 1. — С. 71—74.

[3] Мануйлов В. М., Троицкий Е. В. C^*-гильбертовы модули. — М.: Факториал, 2001.

[4] Мерфи Дж. C^*-алгебры и теория операторов. — М.: Факториал, 1997.

[5] Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Индекс эллиптических операторов над C^*-алгебрами // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1979. — Т. 43. — С. 831—859.

[6] Наймарк М. А. Нормированные кольца. — М.: Наука, 1968.

[7] Серёгин В. В. Рефлексивность C^*-гильбертовых модулей, полученных из действий групп // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 2003. — № 1. — С. 40—45, 72.

[8] Халмош П. Теория меры. — М.: Факториал, 2003.

[9] Хелемский А. Я. Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомологии. — М.: Наука, 1989.

[10] Bekka M. B. Property (T) for C^*-algebras // Bull. London Math. Soc. — 2006. — Vol. 38. — P. 857—867.

[11] Bekka M. B., de la Harpe P., Valette A. Kazhdan's property (T). — Preprint.

[12] Brown N. Kazhdan's property T and C^*-algebras // J. Funct. Anal. — 2006. — Vol. 240. — P. 290—296.

[13] Connes A. A factor of type II_1 with countable fundamental group // J. Operator Theory. — 1980. — Vol. 4, no. 1. — P. 151—153.

[14] Connes A., Jones V. Property T for von Neumann algebras // Bull. London Math. Soc. — 1985. — Vol. 17, no. 1. — P. 57—62.

[15] Dauns J., Hofmann K. H. Representations of Rings by Continuous Sections. — Providence: Amer. Math. Soc., 1968. — (Mem. Amer. Math. Soc.; Vol. 83).

[16] Dixmier J. Points séparés dans le spectre d'une C^*-algèbre // Acta Sci. Math. — 1961. — Vol. 22. — P. 115—128.

[17] Elliott G. A., Olesen D. A simple proof of the Dauns—Hofmann theorem // Math. Scand. — 1974. — Vol. 34. — P. 231—234.

[18] Frank M. Self-duality and C^*-reflexivity of Hilbert C^*-modules // Z. Anal. Anwendungen. — 1990. — Vol. 9. — P. 165—176.

[19] Frank M. Geometrical aspects of Hilbert C^*-modules // Positivity. — 1999. — Vol. 3. — P. 215—243.

[20] Frank M., Manuilov V. M., Troitsky E. V. On conditional expectations arising from group actions // Z. Anal. Anwendungen. — 1997. — Vol. 16. — P. 831—850.

[21] Haagerup U. The standard form of von Neumann algebras // Math. Scand. — 1975. — Vol. 37, no. 2. — P. 271—283.

[22] De la Harpe P., Valette A. La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes localement compacts (avec un appendice de Marc Burger). — Paris: Soc. Math. France, 1989. — (Astérisque; Vol. 175).

[23] Kasparov G. G. Hilbert C^*-modules: Theorems of Stinespring and Voiculescu // J. Operator Theory. — 1980. — Vol. 4. — P. 133—150.

[24] Lance E. C. Hilbert C^*-Modules — A Toolkit for Operator Algebraists. — Cambridge Univ. Press, 1995. — (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; Vol. 210).

[25] Lin H. Injective Hilbert C^*-modules // Pacific J. Math. — 1992. — Vol. 154. — P. 131—164.

[26] Lubotzky A., Żuk A. On property (τ) — preliminary version. — Preprint. — 2003. — `http://www.ma.huji.ac.il/~alexlub/`.

[27] Manuilov V. M., Troitsky E. V. Hilbert C^*- and W^*-modules and their morphisms // J. Math. Sci. — 2000. — Vol. 98, no. 2. — P. 137—201.

[28] Pavlov A. A., Troitsky E. V. A C^*-analogue of Kazhdan's property (T) // Adv. Math. — 2007. — Vol. 216. — P. 75—88.

[29] Pedersen G. K. C^*-Algebras and Their Automorphism Groups. — London: Academic Press, 1979. — (London Math. Soc. Monogr.; Vol. 14).

[30] Troitsky E. V. Discrete groups actions and corresponding modules // Proc. Amer. Math. Soc. — 2003. — Vol. 131, no. 11. — P. 3411—3422.

[31] Wagon S. The Banach—Tarski Paradox. — Cambridge, 1985.

[32] Wegge-Olsen N. E. K-Theory and C^*-Algebras. — Oxford Univ. Press, 1993.