Об изоморфизме сохраняющих меру $\mathbb{Z}^2$-действий при изоморфизме их декартовых степеней*

А. Е. ТРОИЦКАЯ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: sasha.troitskaya@gmail.com

УДК 517.9

Ключевые слова: действие, представление, метрическая изоморфность, эргодический оператор, слабо перемешивающий оператор.

Аннотация

Пусть Δ и Π — представления группы $\mathbb{Z}^2$ операторами на пространстве $L_2(X,\mu)$, индуцированными автоморфизмами, сохраняющими меру, причём для некоторого d представления $\Delta^{\otimes d}$ и $\Pi^{\otimes d}$ сопряжены, $\Delta\big(\mathbb{Z}^2 \setminus (0,0)\big)$ состоит из слабо перемешивающих операторов и имеется слабый предел по некоторой подпоследовательности в $\mathbb{Z}^2$ операторов из $\Delta(\mathbb{Z}^2)$, равный нетривиальной выпуклой линейной комбинации элементов $\Delta(\mathbb{Z}^2)$ и проектора на константы. Доказано, что в этом случае сопряжены и сами Δ и Π.

Abstract

A. E. Troitskaya, On isomorphity of measure-preserving $\mathbb{Z}^2$-actions that have isomorphic Cartesian powers, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 8, pp. 193—212.

Assume that Δ and Π are representations of the group $\mathbb{Z}^2$ by operators on the space $L_2(X,\mu)$ that are induced by measure-preserving automorphisms, and for some d, the representations $\Delta^{\otimes d}$ and $\Pi^{\otimes d}$ are conjugate to each other, $\Delta\big(\mathbb{Z}^2 \setminus (0,0)\big)$ consists of weakly mixing operators, and there is a weak limit (over some subsequence in $\mathbb{Z}^2$ of operators from $\Delta(\mathbb{Z}^2)$) which is equal to a nontrivial, convex linear combination of elements of $\Delta(\mathbb{Z}^2)$ and of the projection onto constant functions. We prove that in this case, Δ and Π are also conjugate to each other.

1. Введение

Пусть t_1, t_2, s_1 и s_2 — автоморфизмы пространства Лебега (X,μ), сохраняющие меру, а T_1, T_2, S_1 и S_2 — отвечающие им унитарные операторы в $L_2(X,\mu)$. Здесь и далее мы будем обозначать автоморфизмы пространства X строчными буквами, а соответствующие им унитарные операторы в L_2-пространствах соответствующими прописными буквами. Мера μ считается непрерывной, т. е. для

*Работа частично поддержана грантом НШ-3038.2008.1.

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 8, с. 193—212.

любого измеримого подмножества $E \subset X$ и любого α, $0 \leqslant \alpha \leqslant \mu(E)$, найдётся измеримое подмножество $E' \subset E$, для которого $\mu(E') = \alpha$.

Рассмотрим два действия δ и π группы $G = \mathbb{Z}^2$:

$$\delta\colon G \to \mathrm{Aut}(X), \quad \delta\big((1,0)\big) = t_1, \quad \delta\big((0,1)\big) = t_2, \quad \delta(k,m) = t_1^k t_2^m$$

(t_1 и t_2 — коммутирующие автоморфизмы),

$$\pi\colon G \to \mathrm{Aut}(X), \quad \pi\big((1,0)\big) = s_1, \quad \pi\big((0,1)\big) = s_2, \quad \pi(k,m) = s_1^k s_2^m$$

(s_1 и s_2 — коммутирующие автоморфизмы).

Определение 1.1. Действия δ и π называются *метрически изоморфными*, если найдётся такое сохраняющее меру преобразование $\varphi\colon X \to X$, что $\varphi\delta(g)\varphi^{-1} = \pi(g)$ для всех $g \in G$.

Очевидно, что метрический изоморфизм эквивалентен совокупности следующих двух равенств:

$$\begin{aligned}\varphi\delta(e_1)\varphi^{-1} &= \varphi\delta\big((1,0)\big)\varphi^{-1} = \varphi t_1\varphi^{-1} = \pi(e_1) = s_1,\\ \varphi\delta(e_2)\varphi^{-1} &= \varphi\delta\big((0,1)\big)\varphi^{-1} = \varphi t_2\varphi^{-1} = \pi(e_2) = s_2,\end{aligned}$$

т. е. эквивалентен изоморфности образующих.

Определим действие

$$\delta^{\times d}(g) = \delta(g) \times \ldots \times \delta(g)\colon G \to \mathrm{Aut}(X) \times \ldots \times \mathrm{Aut}(X)$$

следующим образом:

$$\delta^{\times d}(k,m) = (t_1 \times \ldots \times t_1)^k \circ (t_2 \times \ldots \times t_2)^m = t_1^k t_2^m \times \ldots \times t_1^k t_2^m.$$

Действия $\delta^{\times d}$ и $\pi^{\times d}$ называются *метрически изоморфными*, если найдётся такое сохраняющее меру преобразование $\varphi\colon X^{\times d} = X \times \ldots \times X \to X^{\times d}$, что $\varphi\delta^{\times d}(g)\varphi^{-1} = \pi^{\times d}(g)$ для всех $g \in G$.

Определим следующие представления группы $G = \mathbb{Z}^2$:

$$\Delta\colon G \to U\big(L_2(X,\mu)\big), \quad \Delta\big((1,0)\big) = T_1, \quad \Delta\big((0,1)\big) = T_2, \quad \Delta(k,m) = T_1^k T_2^m$$

(T_1 и T_2 — коммутирующие операторы пространства $L_2(X,\mu)$, $U(L_2)$ — множество всех унитарных операторов на L_2),

$$\Pi\colon G \to U\big(L_2(X,\mu)\big), \quad \Pi\big((1,0)\big) = S_1, \quad \Pi\big((0,1)\big) = S_2, \quad \Pi(k,m) = S_1^k S_2^m$$

(S_1 и S_2 — коммутирующие операторы). Определим

$$\begin{gathered}\Delta^{\otimes d}(g) = \Delta(g) \otimes \ldots \otimes \Delta(g)\colon G \to U(L_2) \otimes \ldots \otimes U(L_2),\\ \Delta^{\otimes d}(k,m) = (T_1 \otimes \ldots \otimes T_1)^k \circ (T_2 \otimes \ldots \otimes T_2)^m = T_1^k T_2^m \otimes \ldots \otimes T_1^k T_2^m,\end{gathered}$$

и аналогичным образом определим $\Pi^{\otimes d}$.

Тогда на уровне L_2-пространств определение метрической изоморфности запишется следующим образом.

Определение 1.2. Представления $\Delta^{\otimes d}$ и $\Pi^{\otimes d}$ называются *эквивалентными*, если существует такой оператор

$$\Phi\colon L_2 \otimes \ldots \otimes L_2 \to L_2 \otimes \ldots \otimes L_2$$

(индуцированный описанным выше отображением φ подстилающего пространства $X \times \ldots \times X$ в себя), что $\Phi^{-1}\Delta(g)\Phi = \Pi(g)$ для всех $g \in G$. Это соответствует набору условий

$$\Phi^{-1}(T_i \otimes \ldots \otimes T_i)\Phi = (S_i \otimes \ldots \otimes S_i), \quad i = 1, 2, \tag{1}$$

т. е., как и в случае изоморфизма действий, изоморфность представлений эквивалентна изоморфности образующих. При этом $T_1^{n_1}T_2^{n_2} \otimes \ldots \otimes T_1^{n_1}T_2^{n_2}$ перейдёт в $S_1^{n_1}S_2^{n_2} \otimes \ldots \otimes S_1^{n_1}S_2^{n_2}$.

Определение 1.3. Представление Δ называется *d-стабильным*, если для любого представления Π метрический изоморфизм представлений $\Delta^{\times d}$ и $\Pi^{\times d}$ влечёт метрический изоморфизм Δ и Π.

Выберем некоторое перечисление точек $\mathbb{Z}^2$, т. е. биективное отображение $\omega\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}^2$.

Напомним, что действие τ называется *свободным*, если $\tau(g)x \neq x$ для любого $g \in G$, не равного единице $e \in G$, и почти всех x по мере μ.

Основной задачей настоящей работы является доказательство следующего утверждения.

Теорема 1.4. *Пусть Δ — свободное представление группы $\mathbb{Z}^2$, $T_1 = \Delta\bigl((1,0)\bigr)$ и $T_2 = \Delta\bigl((0,1)\bigr)$ — коммутирующие операторы в $L_2(X,\mu)$, все степени $T_1^kT_2^m$ (при $(k,m) \neq (0,0)$) являются слабо перемешивающими операторами и для некоторой возрастающей подпоследовательности натуральных чисел $n(i)$ имеет место слабый предел (полагаем $(n_1(i), n_2(i)) =: \omega(n(i))$)*

$$\lim_{i\to\infty} T^{\omega(n(i))} = \lim_{i\to\infty} T_1^{n_1(i)}T_2^{n_2(i)} = a\Theta + \sum_{j=0}^{\infty} a_j T^{\omega(j)} =: \mathcal{P}(T), \tag{2}$$

т. е. $T = (T_1, T_2)$, $T^{\omega(n)} := T_1^{n_1}T_2^{n_2}$, где $a \geqslant 0$, $a_j \geqslant 0$ и $a + \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j = 1$, причём по крайней мере два из коэффициентов $\mathcal{P}$ отличны от нуля, т. е. он не является мономом, а Θ — оператор проекции на пространство констант. Тогда Δ является d-стабильным.

Доказательство теоремы основывается на следующих соображениях, которые мы поясним для случая $d = 2$. Заметим, что действие $\delta \times \delta$ обладает двумя координатными факторами (ограничениями на инвариантные σ-подалгебры множеств вида $X \times A$ и $A \times X$). В пространстве $L_2(X \times X, \mu \times \mu)$ им соответствуют инвариантные подпространства $\mathbf{1} \otimes L_2(X,\mu)$ и $L_2(X,\mu) \otimes \mathbf{1}$ представления $\Delta \otimes \Delta$. Если мы сможем доказать, что под действием Φ^{-1}, например, пространство $\mathbf{1} \otimes L_2(X,\mu)$ изоморфно отображается на $\mathbf{1} \otimes L_2(X,\mu)$ или на $L_2(X,\mu) \otimes \mathbf{1}$, то это будет означать, что оператор Φ осуществляет изоморфизм Π и Δ. Аналогичные рассуждения остаются в силе и для $d > 2$.

Указанное свойство оператора Φ будет проверено в разделе 4, для чего в разделе 3 будет показано, что S обладает слабым пределом, аналогичным пределу T в (2). В разделе 2 собраны необходимые предварительные сведения и технические утверждения.

Частные случаи таких слабых пределов для $\mathbb{Z}$-действий рассматривались в работах А. М. Стёпина, например [4]. Настоящая схема рассуждений использовалась В. В. Рыжиковым в [2] для доказательства типичности свойства d-стабильности. Случай $\mathbb{Z}$-действий в контексте настоящей задачи изучен в [3].

Автор благодарен своему научному руководителю В. В. Рыжикову за постановку задачи и внимание к работе и Е. В. Троицкому за помощь при подготовке настоящей публикации к печати.

2. Предварительные сведения и технические утверждения

В качестве ω можно выбрать следующее перечисление точек $\mathbb{Z}^2$: пробегание по часовой стрелке по «спирали» (рис. 1). При этом

$$\begin{aligned} &\omega(0) = (0,0), \quad T^{\omega(0)} = T_1^0 T_2^0 = \mathrm{Id}; \\ &\omega(1) = (0,1), \quad T^{\omega(1)} = T^{(0,1)} = T_1^0 T_2^1 = T_2; \\ &\omega(2) = (1,1), \quad T^{\omega(2)} = T^{(1,1)} = T_1 T_2 \ \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

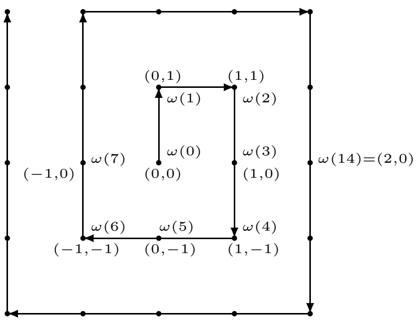

Рис. 1

Лемма 2.1. *Для свободного эргодического действия τ и любого $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 1$, имеется система множеств $\{B_v\}$ полной меры, т. е. $\mu\Big(\bigcup\limits_v B_v\Big) = 1$, где мера каждого множества ненулевая, причём для каждого из них*

$$\tau\big(\omega(i)\big)(B_k) \cap \tau\big(\omega(j)\big)(B_k) = \varnothing$$

при $\omega(i) \neq \omega(j)$ (т. е. $i \neq j$), $i, j = 0, \ldots, m$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из леммы Рохлина—Халмоша для «двумерного» случая, т. е. для представления группы $\mathbb{Z}^2$.

Точнее, переходя к большему множеству значений $\omega(i)$, можем считать, что они пробегают квадрат F в $\mathbb{Z}^2$ и, таким образом, образуют «замащивающее» множество в том смысле, что некоторые его сдвиги pF образуют разбиение группы $\mathbb{Z}^2$. Пусть F состоит из N элементов $f_1, \ldots, f_N$. Для такого множества F и свободного действия $\mathbb{Z}^2$ (и даже любой аменабельной группы) известна лемма Рохлина в следующей формулировке [6, 7]: для любого конечного разбиения $P_1, \ldots, P_s$ пространства X и любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое измеримое множество B, что

1) множества $\tau(f_i)B$ попарно не пересекаются;
2) для любых f_i и P_j имеем $\mu(\tau(f_i)B \cap P_j) = \mu(\tau(f_i)B) \cdot \mu(P_j)$;
3) $\mu(\tau(F)B) = \sum\limits_{i=1}^{N} \mu(\tau(f_i)B) > 1 - \varepsilon$.

Будем применять эту лемму, выбирая индуктивно соответствующие разбиения.

Начнём с тривиального разбиения $s = 1$, $P_1 = X$. Обозначим соответствующее B через B_1. Заметим, что $\mu(B_1) > (1-\varepsilon)/N \geqslant 1/(N+1)$ по третьему условию (в предположении, что ε достаточно мало). Более того, уменьшив немного B_1, можем считать, что $\mu(B_1) = 1/(N+1)$. На втором шаге возьмём $P_1 = B_1$, $P_2 = X \setminus B_1$. Получив некоторое B после применения леммы, возьмём $B_2 := B \cap P_2$, так что $B_1 \cap B_2 = \varnothing$. При этом

$$\mu(B_2) = \mu(B) \cdot \mu(P_2) = \frac{1}{N+1}\mu(P_2)$$

(мы снова уменьшили множество, если равенство не достигалось). Продолжая по индукции, мы получим счётное семейство попарно непересекающихся множеств B_v, для каждого из которых выполнено первое условие леммы Рохлина, причём для каждого v

$$\mu(B_{v+1}) = \frac{1}{N+1}\bigl(1 - \mu(B_1 \sqcup \ldots \sqcup B_v)\bigr),$$

так что

$$\mu\bigl(X \setminus (B_1 \sqcup \ldots \sqcup B_v)\bigr) = \left(\frac{N}{N+1}\right)^v \to 0 \quad (v \to \infty).$$

Таким образом, система B_v имеет полную меру.

Заметим, что этот же результат можно извлечь и из [1]. □

Теорема 2.2. *Следующие определения эквивалентны*:

1) *представление Δ является эргодическим*;
2) *единственными инвариантными относительно Δ, т. е. относительно каждого его представителя, функциями из $L_2(X, \mu)$ являются константы*;
3) *единственными инвариантными относительно действия δ подмножествами множества X являются само множество X и $\varnothing$.*

Теорема 2.3. *Следующие определения эквивалентны*:

1) *представление* Δ *является слабо перемешивающим*;
2) *единственным конечномерным инвариантным относительно* Δ, *т. е. относительно каждого его представителя, подпространством пространства* $L_2(X, \mu)$ *является одномерное пространство констант*;
3) *для любого эргодического представления* Δ_1 *тензорное произведение* $\Delta \otimes \Delta_1$ *является эргодическим*;
4) *тензорное произведение* $\Delta \otimes \Delta$ *является эргодическим*;
5) *единственными инвариантными относительно действия* $\delta \otimes \delta$ *подмножествами множества* $X \times X$ *являются само множество* $X \times X$ *и* $\varnothing$.

Обе теоремы можно найти, например, в [5, теоремы 3.10, 3.11, с. 67—68].

Лемма 2.4. *В условиях теоремы* 1.4 Δ *— слабо перемешивающее представление, даже если не накладывать условие слабого перемешивания на все операторы, а вместо этого потребовать лишь* $a > 0$.

Доказательство. Пусть V — конечномерное инвариантное относительно представления Δ подпространство пространства $L_2(X, \mu)$. Тогда у образующих T_1 и T_2 существует общая собственная функция, назовём её f. Имеем $T_1 f = \lambda_1 f$, $T_2 f = \lambda_2 f$, тогда $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ и можно считать, что $\|f\|^2 = \langle f, f\rangle = 1$. Тогда по определению слабой сходимости

$$\langle (T_1)^{n_1(i)} (T_2)^{n_2(i)} f, f\rangle \to \langle \mathcal{P}(T) f, f\rangle.$$

При этом нас интересуют только функции f с нулевым средним, которые образуют ортогональное инвариантное пространство к константам, т. е. собственным функциям, отвечающим собственному значению единица. Для них $\Theta f = 0$, и соотношение можно переписать как

$$\lambda_1^{n_1(i)} \lambda_1^{n_1(i)} \to \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda_1^{k(1)} \lambda_2^{k(2)}. \tag{3}$$

Поскольку $a > 0$, то $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k < 1$. Заметим, что $|\lambda_1^k| = |\lambda_2^k| = 1$ и модуль предела в левой части тоже единица. Но

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda_1^{k(1)} \lambda_2^{k(2)}\right| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left|\lambda_1^{k(1)} \lambda_2^{k(2)}\right| < 1,$$

и (3) невозможно. □

Лемма 2.5. *Пусть* Δ *— слабо перемешивающее представление, тогда представление* $\Delta \otimes \ldots \otimes \Delta$ *эргодично.*

Доказательство. Так как представление Δ слабо перемешивающее, то $\Delta \otimes \Delta$ по пункту 3) теоремы 2.3 является эргодическим. Далее, по пункту 2) той же теоремы и $\Delta \otimes \Delta \otimes \Delta$, и все представления этого вида с бо́льшим числом тензорных сомножителей также оказываются эргодическими. Мы просто берём в качестве Δ_1 сначала представление $\Delta \otimes \Delta$ (тогда представление $\Delta \otimes \Delta \otimes \Delta$ оказывается эргодическим), потом представление $\Delta\otimes\Delta\otimes\Delta$ (тогда $\Delta\otimes\Delta\otimes\Delta\otimes\Delta$ оказывается эргодическим) и т. д. □

Так как представление $\Delta \otimes \ldots \otimes \Delta$ эргодично, то и эквивалентное ему представление $\Pi \otimes \ldots \otimes \Pi = \Phi^{-1}\Delta^{\otimes d}\Phi$ также является эргодическим, а это в свою очередь влечёт эргодичность каждого из факторов представления $\Pi \otimes \ldots \otimes \Pi$, т. е. эргодичность представления Π.

В дальнейшем нам понадобится следующее элементарное утверждение (монотонность).

Лемма 2.6. *Пусть $R\colon L_2 \to L_2$ — линейный оператор, переводящий неотрицательные функции в неотрицательные. Тогда если $f \leqslant g$, то $R(f) \leqslant R(g)$.*

Доказательство. Функция $g - f$ неотрицательная, поэтому

$$0 \leqslant R(g - f) = R(g) - R(f), \quad R(f) \leqslant R(g).$$ □

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.7. *Пусть $\{P_v\}$ и $\{R_w\}$ — наборы операторов пространства $L_2(X,\mu)$, порождённых сохраняющими меру автоморфизмами пространства (X,μ), коммутирующих с эргодическим представлением U группы $G = \mathbb{Z}^2$. Если $\sum\limits_v a_v P_v = \sum\limits_w b_w R_w$, все P_v различны и все R_w различны, а веса a_v и b_w положительны, то для некоторой перестановки индексов σ выполнено $P_v = R_{\sigma(v)}$ и $a_v = b_{\sigma(v)}$.*

Утверждение верно и для бесконечных сумм, если мы потребуем абсолютной сходимости рядов $\sum\limits_v a_v$ и $\sum\limits_w b_w$.

Доказательство. Рассмотрим пространство $X \times X$ со стандартной алгеброй множеств, отвечающей декартову произведению, но наряду с мерой Фубини $\mu\otimes\mu$ рассмотрим и другие меры, связанные с нашими автоморфизмами и сосредоточенные на их графиках (подмножествах $X \times X$). Прежде всего, заметим, что график — измеримое множество $\mu \otimes \mu$-меры нуль, поскольку является образом диагонали при измеримом автоморфизме $I \times p_v\colon X \times X \to X \times X$. На графике автоморфизма p_v (для каждого v) сосредоточена мера ν_v, определённая формулой

$$\nu_v(Y) = \mu(\{x\colon (x, p_v x) \in Y\}),$$

т. е. ν_v-мера подмножества графика Y равна мере проекции Y на первую координату X:

$$\nu_v(Y) = \begin{cases} \mu\bigl(\pi_1(Y)\bigr), & \text{если } Y \text{ — измеримое подмножество графика,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где π_1 — проекция на первый экземпляр X в $X \times X$. Аналогично определяется мера η_w, отвечающая автоморфизму r_w.

Из равенства $\sum\limits_v a_v P_v = \sum\limits_w b_w R_w$ вытекает, что $\sum\limits_v a_v \nu_v = \sum\limits_w b_w \eta_w$. Чтобы убедиться в этом, заметим, что для индикаторов множеств A и B

$$\langle P_v \chi_A, \chi_B \rangle = \nu_v\bigl((A \times B) \cap \Gamma\bigr), \tag{4}$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $L_2(X, \mu)$. Проверим соотношение (4). Пусть Γ — график p_v. По определению ν_v

$$\begin{aligned}\nu_v\bigl((A \times B) \cap \Gamma\bigr) &= \nu_v\{(x, y) \mid y = p_v x,\ x \in A,\ y \in B\} = \\ &= \mu\{x \mid y = p_v x,\ x \in A,\ y \in B\} = \mu(A \cap (p_v)^{-1} B) = \int\limits_X \chi_A \chi_{(p_v)^{-1} B}\, d\mu = \\ &= \langle \chi_A, (P_v)^{-1} \chi_B \rangle = \langle \chi_A, (P_v)^* \chi_B \rangle = \langle P_v \chi_A, \chi_B \rangle.\end{aligned}$$

Аналогичные рассуждения проводятся для R_w. Теперь возьмём линейную комбинацию соотношений (4) и воспользуемся линейностью левой части (4):

$$\begin{aligned}\sum_v a_v \nu_v\bigl((A \times B) \cap \Gamma\bigr) &= \sum_v a_v \langle P_v \chi_A, \chi_B \rangle = \Bigl\langle \sum_v a_v P_v \chi_A, \chi_B \Bigr\rangle = \\ &= \Bigl\langle \sum_w b_w R_w \chi_A, \chi_B \Bigr\rangle = \sum_w b_w \langle R_w \chi_A, \chi_B \rangle = \sum_w b_w \eta_w\bigl((A \times B) \cap \Gamma\bigr).\end{aligned} \tag{5}$$

Абсолютная сходимость рядов гарантирует возможность перестановки суммирования и интегрирования. Поскольку множества вида $A \times B$ порождают алгебру измеримых подмножеств $X \times X$, то равенство (5) выполнено для измеримых подмножеств произвольного вида. Соотношение $\sum\limits_v a_v \nu_v = \sum\limits_w b_w \eta_w$ проверено.

Меры ν_v, η_w инвариантны и, более того, эргодичны относительно $\hat{u} \times \hat{u}$, где $\hat{u}$ — любой автоморфизм действия $\hat{u} = u(g)$, $g \in G$. Действительно, заметим, прежде всего, что из того что, например, p_v коммутирует с $\hat{u}$, следует, что $\hat{u} \times \hat{u}$ переводит измеримые подмножества графика в (измеримые) подмножества графика:

$$p_v\bigl(\hat{u}(x)\bigr) = \hat{u}\bigl(p_v(x)\bigr), \quad (\hat{u} \times \hat{u})\bigl(x, p_v(x)\bigr) = \Bigl(\hat{u}(x), \hat{u}\bigl(p_v(x)\bigr)\Bigr) = \Bigl(\hat{u}(x), p_v\bigl(\hat{u}(x)\bigr)\Bigr).$$

При этом

$$\nu_v\bigl((\hat{u} \times \hat{u})Y\bigr) = \mu(\pi_1(\hat{u} \times \hat{u})Y) = \mu\Bigl(\hat{u}\bigl(\pi_1(Y)\bigr)\Bigr) = \mu\bigl(\pi_1(Y)\bigr) = \nu_v(Y),$$

что даёт инвариантность (для множеств, не пересекающихся с графиком, рассуждения аналогичны).

Различным индексам v отвечают различные меры (аналогично для индексов w), более того, они сосредоточены на множествах, пересекающихся по множествам нулевой меры относительно каждой ν_v. Действительно, в противном случае существовало бы общее измеримое подмножество Y графиков двух автоморфизмов из $\{p_v\}$ (обозначим их p и p'), причём $\mu\bigl(\pi_1(Y)\bigr) > 0$. Получаем, что p и p' совпадают на множестве $Z = \pi_1(Y)$ положительной меры. Поскольку они коммутируют с эргодическим действием, это влечёт совпадение почти всюду. В самом деле, из равенства $px = p'x$ следует, что $\hat{u}px = \hat{u}p'x$, $p\hat{u}x = p'\hat{u}x$ для всех $\hat{u} = u(g)$, т. е. p, p' совпадают на G-инвариантном множестве

$$Z' := \bigcup_{g\in G} u(g)(Z)$$

положительной меры $\mu(Z') \geqslant \mu(Z) > 0$. В силу эргодичности U это означает, что они совпадают почти всюду, так как мера $\mu(Z')$ может быть только 0 или 1.

Каждая из сумм в равенстве $\sum\limits_v a_v\nu_v = \sum\limits_w b_w\eta_w$ есть разложение на $(u\times u)$-эргодические компоненты некоторой $(u \times u)$-инвариантной меры. Из единственности такого разложения вытекает, что $a_v\nu_v = b_w\eta_{\sigma(v)}$, что равносильно утверждению теоремы (см. [5, теорема 2.7, с. 164]). □

Наконец, введём следующие обозначения, которыми будем пользоваться в дальнейшем.

Определение 2.8. Расширим определение степени пары операторов $A = (A_1, A_2)$ для $i = -1, 0, 1, 2, \ldots$:

$$A^{\omega(i)} := \begin{cases} \Theta, & \text{если } i = -1, \\ \mathrm{Id}, & \text{если } i = 0\ (= \omega(i)), \\ A^{\omega(i)}, & \text{если } i = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

(конечно, вторую строчку можно считать частным случаем третьей).

Замечание 2.9. Рассмотрим ситуацию, которая, с одной стороны, более общая, с другой — более частная, чем рассмотренная в теореме 2.7. Именно, в качестве P_v будут выступать (различные) операторы $\Phi\big(T^{\omega(i_1)}\otimes\ldots\otimes T^{\omega(i_d)}\big)\Phi^{-1}$, а в качестве R_w — $S^{\omega(j_1)}\otimes\ldots\otimes S^{\omega(j_d)}$ (в этом специфичность). При этом, конечно, некоторые операторы, где участвует Θ, не будут соответствовать автоморфизмам (в этом — бóльшая общность). В качестве эргодического представления, с которым коммутируют все операторы, выступает $\Pi^{\otimes d}$.

Меры, соответствующие каждому слагаемому, будут тензорными произведениями мер, соответствующих его тензорным сомножителям. Поскольку Θ не связан с автоморфизмом, мы не можем напрямую (пользуясь исходным определением) поставить ему в соответствие меру на $X\times X$, однако мы можем сделать это, пользуясь соотношением (4):

$$\nu_\Theta(A\times B) := \langle\Theta\chi_A, \chi_B\rangle = \langle\mu(A)\cdot\mathbf{1}, \chi(B)\rangle = \mu(A)\cdot\mu(B).$$

Таким образом, ν_Θ — это просто мера $\mu\otimes\mu$ на $X\times X$, сосредоточенная, в отличие от фигурировавших выше ν_v, на множествах положительной меры $\mu\otimes\mu$. При таком определении равенство типа (5) остаётся в силе. При этом меры, соответствующие членам, содержащим Θ (т. е. $T^{\omega(i_1)}\otimes\ldots\otimes T^{\omega(i_d)}$, где хотя бы одно из i_j равно -1), обладают следующим свойством: мера множества, имеющего нулевые $(\mu\otimes\mu)$-меры проекций на все экземпляры $X\times X$, входящие в $(X\times X)\times\ldots\times(X\times X)$ (d-я степень $X\times X$), равна нулю. Но именно на таких множествах сосредоточены меры, отвечающие $T^{\omega(i_1)} \otimes \ldots \otimes T^{\omega(i_d)}$ и $S^{\omega(i_1)} \otimes \ldots \otimes S^{\omega(i_d)}$, поскольку графики имеют $(\mu \otimes \mu)$-меру нуль. Поэтому равенство (5) распадается на два равенства: отвечающее членам без Θ и отвечающее членам с Θ. Поступая с первым из равенств таким же образом, как в доказательстве теоремы 2.7, получаем вывод теоремы: попарное совпадение членов без Θ из левой и правой части.

3. О слабом пределе последовательности $S^{\omega(k_j)}$

Целью этого раздела является доказательство следующего утверждения.

Лемма 3.1. *При выполнении условий теоремы* 1.4 *существует слабый предел*

$$S^{\omega(k_j)} \to a\Theta + \sum_{i=0}^{\infty} a_i S^{\omega(i)}.$$

Доказательство. Введём обозначение

$$(S \otimes \ldots \otimes S)^{\omega(i)} = S^{\omega(i)} \otimes \ldots \otimes S^{\omega(i)}$$

и соответственно будем понимать $\mathcal{P}(S \otimes \ldots \otimes S)$. Имеем

$$\Phi(S \otimes S \otimes \ldots \otimes S)^{\omega(n_j)} \Phi^{-1} \to$$
$$\to \left(a\Theta + \sum_{i=0}^{\infty} a_i T^{\omega(i)}\right) \otimes \left(a\Theta + \sum_{i=0}^{\infty} a_i T^{\omega(i)}\right) \otimes \ldots \otimes \left(a\Theta + \sum_{i=0}^{\infty} a_i T^{\omega(i)}\right).$$

С другой стороны, для некоторой подпоследовательности $\{k_j\}$, выделяя слабо сходящуюся подпоследовательность из последовательности унитарных операторов, имеем

$$(S \otimes S \otimes \ldots \otimes S)^{\omega(k_j)} \to Q \otimes Q \otimes \ldots \otimes Q.$$

Тогда, используя обозначения определения 2.8, получаем, что

$$Q \otimes Q \otimes \ldots \otimes Q =$$
$$= \Phi^{-1}\left(\left(a\Theta + \sum_{i=0}^{\infty} a_i T^{\omega(i)}\right) \otimes\right.$$
$$\left.\otimes \left(a\Theta + \sum_{i=0}^{\infty} a_i T^{\omega(i)}\right) \otimes \ldots \otimes \left(a\Theta + \sum_{i=0}^{\infty} a_i T^{\omega(i)}\right)\right)\Phi =$$
$$= a^d \Theta \otimes \ldots \otimes \Theta + a_0^d I \otimes \ldots \otimes I + \Phi^{-1}\left(\sum \ldots\right)\Phi + \sum_{i=1}^{\infty} a_i^d S^{\omega(i)} \otimes \ldots \otimes S^{\omega(i)}.$$

Рассмотрим неотрицательную функцию $f \in L_2(X, \mu)$. Все участвующие в последнем выражении операторы переводят неотрицательные функции на X^d

в неотрицательные, поскольку эти операторы индуцированы отображениями X^d. Поэтому для неотрицательной функции f имеем

$$(Q\otimes Q\otimes\ldots\otimes Q)(f\otimes f\otimes\ldots\otimes f)\geqslant a^d(\Theta f\otimes\Theta f\otimes\ldots\otimes\Theta f),$$
$$(Q\otimes Q\otimes\ldots\otimes Q)(f\otimes f\otimes\ldots\otimes f)\geqslant a_0^d(f\otimes f\otimes\ldots\otimes f),$$
$$(Q\otimes Q\otimes\ldots\otimes Q)(f\otimes f\otimes\ldots\otimes f)\geqslant a_i^d\bigl(S^{\omega(i)}f\otimes S^{\omega(i)}f\otimes\ldots\otimes S^{\omega(i)}f\bigr),$$
$$i=1,\ldots,\infty,$$

т. е. в каждой точке $(x_1,\ldots,x_d)\in X^d$

$$(Q\otimes Q\otimes\ldots\otimes Q)(f\otimes f\otimes\ldots\otimes f)(x_1,\ldots,x_d)\geqslant$$
$$\geqslant a^d(\Theta f\otimes\Theta f\otimes\ldots\otimes\Theta f)(x_1,\ldots,x_d),$$
$$(Q\otimes Q\otimes\ldots\otimes Q)(f\otimes f\otimes\ldots\otimes f)(x_1,\ldots,x_d)\geqslant a_0^d(f\otimes f\otimes\ldots\otimes f)(x_1,\ldots,x_d),$$
$$(Q\otimes Q\otimes\ldots\otimes Q)(f\otimes f\otimes\ldots\otimes f)(x_1,\ldots,x_d)\geqslant$$
$$\geqslant a_i^d\bigl(S^{\omega(i)}f\otimes S^{\omega(i)}f\otimes\ldots\otimes S^{\omega(i)}f\bigr)(x_1,\ldots,x_d),\quad i=1,\ldots\infty,$$

$$(Qf)(x_1)\ldots(Qf)(x_d)\geqslant a^d\Theta f(x_1)\ldots\Theta f(x_d),$$
$$(Qf)(x_1)\ldots(Qf)(x_d)\geqslant a_0^d f(x_1)\ldots f(x_d),$$
$$(Qf)(x_1)\ldots(Qf)(x_d)\geqslant a_i^d\bigl(S^{\omega(i)}f\bigr)(x_1)\ldots\bigl(S^{\omega(i)}f\bigr)(x_d),\quad i=1,\ldots,\infty.$$

Подставляя $x_1=\ldots=x_d=x$ и извлекая корень степени d, получаем

$$(Qf)(x)\geqslant a\Theta f(x),\quad (Qf)(x)\geqslant a_0f(x),$$
$$(Qf)(x)\geqslant a_i\bigl(S^{\omega(i)}f\bigr)(x),\quad i=1,\ldots,\infty.$$

Покажем, что

$$Qf\geqslant a\Theta f+\sum_{i=0}^{N}a_iS^{\omega(i)}f$$

при любом $N\geqslant 1$.

Ниже будет доказано (см. лемма 4.2), что, так как в условиях теоремы 1.4 все операторы $T^{w(i)}$ при $i\neq 0$ являются слабо перемешивающими, то и представление Δ (а следовательно, и изоморфное ему Π) будет слабо перемешивающим. Поэтому слабо перемешивающим будет и действие π, и мы можем воспользоваться леммой 2.1 и взять такое множество A, что попарное пересечение степеней автоморфизма $s=(s_1,s_2)$ до степени $\omega(N)$ включительно на этом множестве является пустым множеством. Пусть f — характеристическая функция множества A. Рассмотрим произвольно малое $\varepsilon>0$. Представим A в виде объединения непересекающихся множеств A_j, $j=1,\ldots,k$, где $\mu(A_j)<\varepsilon$, что можно сделать в силу непрерывности меры μ. Пусть f_j — характеристическая функция множества A_j, $j=1,\ldots,k$, $f=\sum\limits_j f_j$.

Для любой точки $x \in X$ и любого $j = 1, \dots, k$

$$a\Theta f_j(x) = a\int\limits_X f_j(x)\,dx = a\int\limits_{A_j} f_j(x)\,dx = a\mu(A_j) < a\varepsilon.$$

Возможны два случая.

1. Если x не принадлежит ни одному множеству $s^{\omega(i)}A$, то

$$a\Theta f_j(x) = \Big(a\Theta f_j + \sum_{i=0}^N a_i S^{\omega(i)} f_j\Big)(x).$$

2. Если $x \in \operatorname{supp} S^{\omega(i_0)} f_j = s^{\omega(i_0)} A_j$, то

$$a_{i_0} S^{\omega(i_0)} f_j(x) = a_{i_0} = a\varepsilon + (a_{i_0} - a\varepsilon) \geqslant a\Theta f_j(x) + \frac{a_{i_0} - a\varepsilon}{a_{i_0}} a_{i_0} =$$

$$= a\Theta f_j(x) + \frac{a_{i_0} - a\varepsilon}{a_{i_0}} a_{i_0} S^{\omega(i_0)} f_j(x) + \sum_{i\neq i_0,\ i=0}^N a_i S^{\omega(i)} f_j(x) =$$

$$= a\Theta f_j(x) + \sum_{i=0}^N a_i S^{\omega(i)} f_j(x) - a\varepsilon S^{\omega(i_0)} f_j(x).$$

Следовательно,

$$Qf_j \geqslant a\Theta f_j + \sum_{i=0}^N a_i S^{\omega(i)} f_j - a\varepsilon S^{\omega(i_0)} f_j.$$

Просуммируем эти неравенства по j. Учитывая, что для данного x может быть отлично от нуля (равно единице) только одно из $S^{\omega(i)} f_j(x)$ по всем $i = 0, \dots, m$, $j = 1, \dots, k$, получим, что

$$Qf(x) \geqslant a\Theta f(x) + \sum_{i=0}^N a_i S^{\omega(i)} f(x) - a\varepsilon.$$

В силу произвольности ε

$$Qf \geqslant a\Theta f + \sum_{i=0}^N a_i S^{\omega(i)} f \tag{6}$$

для всех $N \geqslant 1$.

Заметим, что если $A \cap s(A) \cap \ldots \cap s^N(A) = \varnothing$, то любое измеримое подмножество A обладает тем же свойством (фактически, мы уже пользовались этим для A_j). Поэтому по лемме 2.1 в силу непрерывности меры таких множеств достаточно много, чтобы их характеристические функции порождали плотное в L_2 множество, а их линейные комбинации с положительными коэффициентами — плотное множество в неотрицательных функциях. Значит, неравенство (6) имеет место для любой неотрицательной функции, так как обе части неравенства линейны по f.

В правой части неравенства (6) стоит сходящийся ряд (из неотрицательных функций), следовательно,

$$Qf \geqslant a\Theta f + \sum_{i=0}^{\infty} a_i S^{\omega(i)} f.$$

Таким образом,

$$Qf = a\Theta f + \sum_{i=0}^{\infty} a_i S^{\omega(i)} f + R(f),$$

где $R(f)$ — положительный оператор (переводит неотрицательные функции в неотрицательные), $R(\mathbf{1}) = 0$, так как

$$\mathbf{1} = Q(\mathbf{1}) = a + \sum_{i=0}^{\infty} a_i + R(\mathbf{1}),$$

где $\mathbf{1}$ — функция, тождественно равная 1. Значит, в силу леммы 2.6 для любой неотрицательной функции h, меньшей $\mathbf{1}$, имеем

$$0 \leqslant R(h) \leqslant R(\mathbf{1}) = 0.$$

Отсюда вытекает, что $R = 0$, так что

$$Q = a\Theta + \sum_{i=0}^{\infty} a_i S^{\omega(i)},$$

что и требовалось. Лемма 3.1 доказана. □

Замечание 3.2. Поскольку мы выделяли последовательность k_j из n_j, мы без ограничения общности можем считать эти подпоследовательности одинаковыми.

4. Свойства оператора Φ

В предыдущем разделе мы получили, что

$$Q \otimes Q \otimes \ldots \otimes Q = \Phi\big(\mathcal{P}(T) \otimes \mathcal{P}(T) \otimes \ldots \otimes \mathcal{P}(T)\big)\Phi^{-1}, \tag{7}$$

где $T = (T_1, T_2)$, и

$$Q \otimes Q \otimes \ldots \otimes Q = \mathcal{P}(S) \otimes \mathcal{P}(S) \otimes \ldots \otimes \mathcal{P}(S), \tag{8}$$

где $S = (S_1, S_2)$.

Из уравнений (7) и (8), помня об основном соотношении (1) и используя обозначения определения 2.8, получаем

$$\sum_{i_1,\ldots,i_d=-1}^{\infty} a_{i_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_d} \Phi\big(T^{\omega(i_1)} \otimes \ldots \otimes T^{\omega(i_d)}\big)\Phi^{-1} = \\ = \sum_{i'_1,\ldots,i'_d=-1}^{\infty} a_{i'_1} \cdot \ldots \cdot a_{i'_d} S^{\omega(i'_1)} \otimes \ldots \otimes S^{\omega(i'_d)}.$$

Возможны два случая (в зависимости от вида $\mathcal{P}$):

1) среди a_i при $i \geqslant 0$ имеются два ненулевых, скажем a_γ и a_β, $\gamma < \beta$;
2) противоположный случай.

Во втором случае $\mathcal{P}(T) = \alpha\Theta + (1-\alpha)T^{\omega(i)}$, $\omega(i)$ — некоторая неотрицательная степень, так что
$$T^{\omega(n_k)} \to \alpha\Theta + (1-\alpha)T^{\omega(i)}$$
в слабом смысле. Но тогда
$$T^{\omega(n_k)-\omega(i)} \to \alpha\Theta T^{-\omega(i)} + (1-\alpha)\,\mathrm{Id} = \alpha\Theta + (1-\alpha)\,\mathrm{Id}\,.$$

Этот случай разбирается аналогично [2]. А именно, обозначим через H функции с нулевым средним. Имеем
$$L_2(X,\mu)\otimes\ldots\otimes L_2(X,\mu) = \{\mathrm{const}\}\oplus(H\otimes\mathbf{1}\otimes\ldots\otimes\mathbf{1})\oplus\ldots\oplus(H\otimes H\otimes\ldots\otimes H). \quad (9)$$
Тогда
$$\Phi(H\otimes\mathbf{1}\otimes\ldots\otimes\mathbf{1}) \subset (H\otimes\mathbf{1}\otimes\ldots\otimes\mathbf{1})\oplus\ldots\oplus(\mathbf{1}\otimes\ldots\otimes\mathbf{1}\otimes H), \qquad (10)$$
где суммирование идёт уже только по слагаемым, содержащим ровно одно H. Действительно, последовательность
$$T^{\omega(n_k)-\omega(i)}\otimes\ldots\otimes T^{\omega(n_k)-\omega(i)}$$
сходится на $H\otimes\mathbf{1}\otimes\ldots\otimes\mathbf{1}$ к оператору $(1-\alpha)\,\mathrm{Id}\otimes\ldots\otimes\mathrm{Id}$. Значит,
$$S^{\omega(n_k)-\omega(i)}\otimes\ldots\otimes S^{\omega(n_k)-\omega(i)} = \Phi\big(T^{\omega(n_k)-\omega(i)}\otimes\ldots\otimes T^{\omega(n_k)-\omega(i)}\big)\Phi^{-1}$$
сходится на $\Phi(H\otimes\mathbf{1}\otimes\ldots\otimes\mathbf{1})$ также к оператору $(1-\alpha)\,\mathrm{Id}\otimes\ldots\otimes\mathrm{Id}$. Поскольку на тех прямых слагаемых в (9), где число сомножителей H равно $j \geqslant 2$, эта последовательность сходится к $(1-\alpha)^j\,\mathrm{Id}\otimes\ldots\otimes\mathrm{Id}$, а $(1-\alpha)^j < (1-\alpha)$, то (10) выполнено. В частности, для любой функции $f \in H$ (будем пока считать её ограниченной) существуют такие функции $f_1,\ldots f_d$, что
$$\Phi(f\otimes 1\otimes\ldots\otimes 1) = (f_1\otimes 1\otimes\ldots\otimes 1)+\ldots+(1\otimes\ldots\otimes 1\otimes f_d). \qquad (11)$$
Поскольку $\Phi(L_2(X,\mu)\otimes\mathbf{1}\otimes\ldots\otimes)$ замкнуто относительно умножения ограниченных функций, то
$$\big(\Phi(f\otimes 1\otimes\ldots\otimes 1)\big)^2 \in (H\otimes\mathbf{1}\otimes\ldots\otimes\mathbf{1})\oplus\ldots\oplus(\mathbf{1}\otimes\ldots\otimes\mathbf{1}\otimes H)\oplus\{\mathrm{const}\}. \quad (12)$$
Поэтому
$$\Phi(f\otimes 1\otimes\ldots\otimes 1) \in (H\otimes\mathbf{1}\otimes\ldots\otimes\mathbf{1})\cup\ldots\cup(\mathbf{1}\otimes\ldots\otimes\mathbf{1}\otimes H). \qquad (13)$$
Действительно (рассмотрим для простоты случай $d=3$), при возведении в квадрат получим
$$\begin{aligned}\big(\Phi(f\otimes 1\otimes 1)\big)^2 = (f_1^2\otimes 1\otimes 1) + (1\otimes f_2^2\otimes 1) + (1\otimes 1\otimes f_3^2) +{}\\ + 2(f_1\otimes f_2\otimes 1) + 2(1\otimes f_2\otimes f_3) + 2(f_1\otimes 1\otimes f_3).\end{aligned}$$

Учитывая, что

$$f_1^2 \otimes 1 \otimes 1 \in (H \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \oplus \{\mathrm{const}\}$$

(и аналогично для f_2 и f_3), получаем, что должно выполняться соотношение

$$f_1 \otimes f_2 \otimes 1 + f_1 \otimes 1 \otimes f_3 + 1 \otimes f_2 \otimes f_3 \in (H \otimes \mathbf{1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{1}) \oplus \ldots \oplus (\mathbf{1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{1} \otimes H) \oplus \{\mathrm{const}\}.$$

Иными словами,

$$f_1(x)f_2(y) + f_1(x)f_3(z) + f_2(y)f_3(z) = a(x) + b(y) + c(z).$$

Подставляя (x_1, y, z) и (x_2, y, z) в это равенство и вычитая второе полученное соотношение из первого (и проводя аналогичные операции для y и z), получаем

$$\begin{aligned}
\big(f_1(x_1) - f_1(x_2)\big) \cdot \big(f_2(y) + f_3(z)\big) &= a(x_1) - a(x_2),\\
\big(f_2(y_1) - f_2(y_2)\big) \cdot \big(f_1(x) + f_3(z)\big) &= b(y_1) - b(y_2),\\
\big(f_3(z_1) - f_3(z_2)\big) \cdot \big(f_1(x) + f_2(y)\big) &= c(z_1) - c(z_2).
\end{aligned}$$

Из первого уравнения получаем, что либо f_1 — константа, либо f_2 и f_3 — константы. Аналогичные выводы следуют из второго и третьего уравнений, так что только одна из трёх функций не является константой. Так как f_i принадлежат H (т. е. являются функциями с нулевым средним), равенство константе означает тождественное обнуление. Таким образом, мы получили (13) (случай $d \neq 3$ ничем не отличается от рассмотренного). Для неограниченных L_2-функций это же утверждение получается по непрерывности предельным переходом. Поскольку Φ — линейное отображение, из (13) следует, что

$$\Phi(H \otimes \mathbf{1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{1}) \subset (H \otimes \mathbf{1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{1})$$

(может быть включение в другое аналогичное слагаемое). Рассматривая обратное сопряжение, получаем обратное включение и равенство

$$\Phi(H \otimes \mathbf{1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{1}) = (H \otimes \mathbf{1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{1}).$$

Обратимся теперь к первому случаю (среди a_i при $i \geqslant 0$ имеются два ненулевых). Тогда слева есть слагаемое вида

$$T^{\omega(\gamma)} \otimes T^{\omega(\beta)} \otimes \ldots \otimes T^{\omega(\beta)}.$$

Отбрасывая в левой и правой частях слагаемые, содержащие лишь тождественные операторы в виде тензорных сомножителей, и применяя замечание 2.9, получаем

$$\Phi\big(T^{\omega(\gamma)} \otimes T^{\omega(\beta)} \otimes T^{\omega(\beta)} \otimes \ldots \otimes T^{\omega(\beta)}\big)\Phi^{-1} = S^{\omega(i_1)} \otimes \ldots \otimes S^{\omega(i_d)}$$

для некоторого конкретного набора $(i_1, \ldots, i_d)$. Выполним преобразования:

$$\begin{aligned}
\Phi\big(I \otimes T^{\omega(\beta)-\omega(\gamma)} \otimes T^{\omega(\beta)-\omega(\gamma)} \otimes \ldots \otimes T^{\omega(\beta)-\omega(\gamma)}\big)\Phi^{-1} &= \\
= S^{\omega(i_1)-\omega(\gamma)} \otimes \ldots \otimes S^{\omega(i_d)-\omega(\gamma)}. \qquad (14)
\end{aligned}$$

Без ограничения общности можно считать, что справа сначала идут ноль, одна или несколько нулевых степеней S $(\omega(i_k)-\omega(\gamma)=(0,0))$, а потом — ненулевые, так что (14) принимает вид

$$\Phi\bigl(I\otimes T^{\omega(\beta)-\omega(\gamma)}\otimes T^{\omega(\beta)-\omega(\gamma)}\otimes\ldots\otimes T^{\omega(\beta)-\omega(\gamma)}\bigr)\Phi^{-1}= \\ =\underbrace{I\otimes\ldots\otimes I}_{k}\otimes S^{\omega(r_1)}\otimes\ldots\otimes S^{\omega(r_{d-k})}, \quad (15)$$

где $r_1,\ldots,r_{d-k}\neq 0$, т. е. $\omega(r_1),\ldots,\omega(r_{d-k})\neq(0,0)$. Заметим, что Θ справа нет, поскольку в рассматриваемом (первом) случае мы смогли выбрать слагаемое так, что их нет слева, а автоморфизм может быть сопряжён только автоморфизму.

Для завершения доказательства основной теоремы нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 4.1. *Представление группы $\mathbb{Z}$ является эргодическим тогда и только тогда, когда его образующий оператор эргодический.*

Доказательство. Напомним, что эргодичность представления (как и эргодичность оператора) эквивалентна тому, что единственными инвариантными относительно него функциями из $L_2(X,\mu)$ являются константы (теорема 2.2).

Пространство собственных векторов представления является пересечением пространств собственных векторов каждого входящего в это представление оператора. Поэтому если образующий оператор эргодический, то и всё представление тоже будет эргодическим, так как в этом случае у представления не может быть других инвариантных функций, кроме соответствующих функций образующего оператора, которые все являются константами. В то же время среди инвариантных функций представления, естественно, константы обязательно должны быть. Заметим, что по этому рассуждению эргодичность представления будет следовать и из эргодичности любого входящего в него оператора.

Обратно, пусть представление эргодично. Тогда константы являются единственными общими инвариантными функциями для всех входящих в него операторов. Допустим, у образующего оператора существует ещё какая-то инвариантная относительно него функция f, отличная от константы. Но тогда эта функция будет инвариантной и для всех операторов представления. Действительно, если T — образующий оператор, то для всех $i>0$

$$T^i f=T^{i-1}Tf=T^{i-1}f=\ldots=Tf=f,$$

а отсюда следует нужное равенство и для отрицательных степеней, так как если $T^i f=f$, то $f=T^{-i}f$. Следовательно, в этом случае у всего представления есть инвариантная функция f, отличная от константы, что противоречит его эргодичности. □

Лемма 4.2. *Представление группы $\mathbb{Z}$ является слабо перемешивающим тогда и только тогда, когда любой (кроме образа нуля) оператор этого представления является слабо перемешивающим.*

Доказательство. Напомним, что свойство слабого перемешивания у оператора эквивалентно тому, что его собственными функциями могут быть только константы; свойство слабого перемешивания у представления эквивалентно тому, что конечномерным инвариантным относительно него подпространством пространства $L_2(X,\mu)$ может быть только одномерное пространство констант (теорема 2.3).

Рассмотрим произвольный оператор представления, отличный от T^0, где T — образ образующей. Предположим, что T^k является слабо перемешивающим оператором, а V — конечномерное инвариантное подпространство представления. Тогда $T(V)=V$, так как T — оператор представления. Найдём диагонализующий базис $w_1,\dots,w_s$ для T в V. Тогда для любой функции w_i выполняется равенство $Tw_i=\lambda_i w_i$. Следовательно,

$$T^k w_i = T^{k-1}Tw_i = T^{k-1}\lambda_i w_i = \ldots = \lambda_i^k w_i,$$

откуда получаем, что $w_i=\mathrm{const}$, $\lambda_i^k=1$. Поскольку все функции $w_1,\dots,w_s$ являются константами, то и всё пространство V (инвариантное подпространство оператора T^k) является, на самом деле, (одномерным) пространством констант и представление является слабо перемешивающим.

Обратно, пусть представление слабо перемешивающее, а какой-то из его операторов, отличных от T^0, — нет. Пусть этот оператор есть T^k. Тогда существует функция $f\neq\mathrm{const}$, такая что $T^k f=\lambda f$. Рассмотрим пространство, порождённое $f, Tf,\dots,T^{k-1}f$. Это отличное от констант конечномерное инвариантное пространство для T, а значит, и для всего представления. Получили противоречие со слабой перемешиваемостью представления. Лемма доказана. □

Лемма 4.3. *При выполнении условий теоремы* 1.4 *любой оператор* $S^{\omega(i)}$, $i>0$, *будет слабо перемешивающим.*

Доказательство. Рассмотрим оператор $T^{\omega(i)}$ для некоторого $i>0$ и обозначим его через J. Так как оператор $T^{\omega(i)}=J$ слабо перемешивающий, то представление группы $\mathbb{Z}$, в котором J является образующим оператором, тоже будет слабо перемешивающим по лемме 4.2. Обозначим это представление через Ψ. По лемме 2.5, которую мы сейчас используем для представления группы $\mathbb{Z}$, представления

$$\Psi\otimes\Psi,\quad \Psi\otimes\Psi\otimes\Psi,\dots,\quad \underbrace{\Psi\otimes\ldots\otimes\Psi}_{d}$$

будут эргодическими. Напомним, что

$$\underbrace{J\otimes\ldots\otimes J}_{d}=\underbrace{T^{\omega(i)}\otimes\ldots\otimes T^{\omega(i)}}_{d}=\Phi^{-1}\Big(\underbrace{S^{\omega(i)}\otimes\ldots\otimes S^{\omega(i)}}_{d}\Big)\Phi,$$

Если мы обозначим оператор $S^{\omega(i)}$ через M, то представление $\Psi\otimes\ldots\otimes\Psi$ группы $\mathbb{Z}$, порождённое оператором $J\otimes\ldots\otimes J$, и представление этой же группы, порождённое оператором $M\otimes\ldots\otimes M$ (обозначим его $\Lambda\otimes\ldots\otimes\Lambda$), будут изоморфными. Действительно,

$$\begin{aligned}(J \otimes \ldots \otimes J)^k &= (\Phi^{-1}(M \otimes \ldots \otimes M)\Phi)^k = \\ &= \Phi^{-1}(M \otimes \ldots \otimes M)\Phi\ \Phi^{-1}(M \otimes \ldots \otimes M)\Phi \ldots \Phi^{-1}(M \otimes \ldots \otimes M)\Phi = \\ &= \Phi^{-1}(M \otimes \ldots \otimes)^k \Phi\end{aligned}$$

для всех $k \in \mathbb{Z}$. Отсюда следует, что представление $\Lambda \otimes \ldots \otimes \Lambda$ также будет эргодическим.

Докажем следующее утверждение: если $\Xi_1 \otimes \Xi_2$ — тензорное произведение представлений, образующее эргодическое представление в пространстве $Y \times Z$, то Ξ_1 (как и Ξ_2) тоже обязаны быть эргодическими. Действительно, пусть это не так. Тогда у Ξ_1 есть конечномерное инвариантное пространство L, отличное от пространства констант. Тогда и у $\Xi_1 \otimes \Xi_2$ есть конечномерное инвариантное пространство $L \otimes \mathbf{1}$, что противоречит эргодичности $\Xi_1 \otimes \Xi_2$.

Рассмотрим теперь в качестве Ξ_1 тензорное произведение $\Lambda \otimes \Lambda$ каких-то двух сомножителей, например первых, действующее на пространстве $Y = X \times X$, а в качестве Ξ_2 — тензорное произведение остальных сомножителей $\underbrace{\Lambda \otimes \ldots \otimes \Lambda}_{d-2}$, действующее на пространстве $Z = \underbrace{X \times \ldots \times X}_{d-2}$. По доказанному $\Lambda \otimes \Lambda$ будет эргодическим. Следовательно, Λ по теореме 2.3 будет слабо перемешивающим. Тогда по лемме 4.2 и оператор M, т. е. $S^{\omega(i)}$, тоже будет слабо перемешивающим. □

Лемма 4.4. *Пространство собственных векторов оператора $I \otimes R$, отвечающих собственному значению 1, совпадает с $L_2(X,\mu) \otimes \mathbf{1}$, если оператор $R\colon L_2(Y,\nu) \to L_2(Y,\nu)$ эргодический.*

Доказательство. Пространство $L_2(X,\mu) \otimes \mathbf{1}$, очевидно, является собственным подпространством, отвечающим собственному значению 1. Проверим, что этим всё исчерпывается, т. е. в ортогональном дополнении этого пространства нет собственных векторов. Пусть e_i — ортонормированный базис $L_2(X,\mu)$, $i = 1, 2, \ldots$. Тогда любой элемент z тензорного произведения однозначно разлагается в сумму $z = \sum\limits_i e_i \otimes h_i$, $h_i \in L_2(Y,\nu)$. Тогда $(I \otimes R)z = \sum\limits_i e_i \otimes R(h_i)$. В силу однозначности разложения условие $(I \otimes R)z = z$ влечёт $R(h_i) = h_i$ для каждого i. Значит, $h_i = \alpha_i \cdot \mathbf{1}$, поскольку R — эргодический оператор. Таким образом,

$$z = \sum_i e_i \otimes \alpha_i \cdot \mathbf{1} = \left(\sum_i \alpha_i e_i\right) \otimes \mathbf{1},$$

что и требовалось доказать. □

Лемма 4.5. *Пространство собственных векторов оператора*

$$\underbrace{I \otimes \ldots \otimes I}_{k} \otimes S^{\omega(r_1)} \otimes \ldots \otimes S^{\omega(r_{d-k})},$$

отвечающих собственному значению 1, *совпадает с*

$$\underbrace{L_2(X,\mu)\otimes\ldots\otimes L_2(X,\mu)}_{k}\otimes\underbrace{\mathbf{1}\otimes\ldots\otimes\mathbf{1}}_{d-k},$$

где $\omega(r_1),\ldots,\omega(r_{d-k})\neq(0,0)$, *т. е.* $r_1,\ldots,r_{d-k}\neq 0$.

Доказательство. Обозначая

$$\mathbf{I}:=\underbrace{I\otimes\ldots\otimes I}_{k},\quad \mathbf{S}:=S^{\omega(r_1)}\otimes\ldots\otimes S^{\omega(r_{d-k})},$$

докажем, что оператор $\mathbf{S}$ эргодический. Действительно, как мы показали в лемме 4.3, все операторы $S^{\omega(r_i)}$ являются эргодическими, поэтому мы можем рассмотреть представления $\Psi_1,\ldots,\Psi_{d-k}$ группы $\mathbb{Z}$, порождённые операторами $S^{\omega(r_1)},\ldots,S^{\omega(r_{d-k})}$ соответственно. В силу леммы 4.2 все эти представления будут слабо перемешивающими. Следовательно, по пункту 3) теоремы 2.3, применённой к представлению группы $\mathbb{Z}$, представление $\Psi_1\otimes\ldots\otimes\Psi_{d-k}$ будет эргодическим. Поэтому его образующий оператор, т. е. $S^{\omega(r_1)}\otimes\ldots\otimes S^{\omega(r_{d-k})}$, тоже будет эргодическим (лемма 4.1).

Теперь, зная, что оператор $\mathbf{S}$ эргодический, мы можем применить лемму 4.4 и получить необходимое нам утверждение. □

Возвращаясь к равенству (15), замечаем, что в силу доказанной леммы 4.5 собственные векторы, отвечающие собственному значению 1 для оператора

$$I\otimes T^{\omega(\beta)-\omega(\gamma)}\otimes T^{\omega(\beta)-\omega(\gamma)}\otimes\ldots\otimes T^{\omega(\beta)-\omega(\gamma)},$$

составляют пространство $L_2(X,\mu)\otimes\mathbf{1}\otimes\ldots\otimes\mathbf{1}$, а для оператора

$$\underbrace{I\otimes\ldots\otimes I}_{k}\otimes S^{\omega(r_1)}\otimes\ldots\otimes S^{\omega(r_{d-k})}$$

они составляют пространство

$$\underbrace{L_2(X,\mu)\otimes\ldots\otimes L_2(X,\mu)}_{k}\otimes\underbrace{\mathbf{1}\otimes\ldots\otimes\mathbf{1}}_{d-k}.$$

Операторы Φ и Φ^{-1} должны переводить соответствующие пространства друг в друга, так что мы получаем, что Δ изоморфно $\Pi^{\otimes k}$, т. е.

$$\underbrace{S^{\omega(i)}\otimes\ldots\otimes S^{\omega(i)}}_{k}=\Phi T^{\omega(i)}\Phi^{-1}.$$

Это возможно только при $k=1$, поскольку $\mathcal{P}$ не моном. Действительно, поскольку

$$(S\otimes\ldots\otimes S)^{\omega(i)}=S^{\omega(i)}\otimes\ldots\otimes S^{\omega(i)},$$

то возведение в степень и переход к слабому пределу в тензорном произведении происходит по компонентам, и $S^{\omega(n_i)}\to\mathcal{P}(S)$. Тогда

$$\mathcal{P}\Big(\underbrace{S\otimes\ldots\otimes S}_{k}\Big)=\Phi\mathcal{P}(T)\Phi^{-1}=\Phi\big(\lim T^{\omega(n_i)}\big)\Phi^{-1}=\lim(S\otimes\ldots\otimes S)^{\omega(n_i)}=$$
$$=\lim\big(S^{\omega(n_i)}\otimes\ldots\otimes S^{\omega(n_i)}\big)=\mathcal{P}(S)\otimes\ldots\otimes\mathcal{P}(S).$$

Если мы разложим на однородные слагаемые левую и правую части, то получим с обеих сторон сумму коэффициентов, равную единице, т. е. выпуклую линейную комбинацию. Переходя к мерам, как в замечании 2.9, мы можем усилить результат этого замечания, отделив меры, которые сосредоточены на множествах положительной $(\mu \otimes \ldots \otimes \mu)$-меры. Это в точности меры, отвечающие $\Theta \otimes \ldots \otimes \Theta$, так что коэффициенты при них слева и справа должны совпадать: $a = a^k$. Поэтому либо $a = 1$, что запрещено, либо $a = 0$. Но тогда имеется коэффициент $a_i \neq 0$, $i \geqslant 0$, и совпадают коэффициенты при $S^{\omega(i)} \otimes \ldots \otimes S^{\omega(i)}$ в левой и правой части: $a_i = (a_i)^k$, так что $a_i = 1$ и $\mathcal{P}$ — моном.

Итак, $k = 1$ и

$$\Phi(L_2(X,\mu) \otimes \mathbf{1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{1}) = L_2(X,\mu) \otimes \mathbf{1} \otimes \ldots \otimes \mathbf{1} \tag{16}$$

(конечно, в правой части сомножитель, отличный от $\mathbf{1}$, может быть не первым). Поскольку доказательство основной теоремы 1.4 в разделе 1 было сведено к проверке условия (16), то теорема 1.4 доказана.

Литература

[1] Приходько А. А. Разбиение на башни фазового пространства $\mathbb{Z}^d$-действия, сохраняющего меру // Мат. заметки. — 1999. — Т. 65. — С. 712—725.

[2] Рыжиков В. В. Типичность изоморфизма сохраняющих меру преобразований при изоморфизме их декартовых степеней // Мат. заметки. — 1995. — Т. 59. — С. 630—632.

[3] Рыжиков В. В., Троицкая А. Е. Тензорный корень из изоморфизма и слабые пределы преобразований // Мат. заметки. — 2006. — Т. 80, № 4. — С. 596—600.

[4] Стёпин А. М. Спектральные свойства типичных динамических систем // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1986. — Т. 50, № 4. — С. 801—834.

[5] Glasner E. Ergodic Theory via Joinings. — Providence: Amer. Math. Soc., 2003.

[6] Katznelson Y., Weiss B. Commuting measure preserving transformations // Israel J. Math. — 1972. — Vol. 12. — P. 161—173.

[7] Ornstein D. S., Weiss B. Ergodic theory of amenable group actions. I. The Rohlin lemma // Bull. Amer. Math. Soc. — 1980. — Vol. 2, no. 1. — P. 161—164.

[8] Walters P. Ergodic Theory — Introductory Lectures. — Berlin: Springer, 1975. — (Lect. Notes Math.; Vol. 458).