Унитарно-ковариантные отображения в аппроксимативно-конечномерных алгебрах

Т. ШУЛЬМАН
Московский авиационно-технологический институт
e-mail: tatiana_shulman@yahoo.com

УДК 517.98

Ключевые слова: AF-алгебры, UHF-алгебры, функциональное исчисление, операторно-гладкие классы функций.

Аннотация

Рассматриваются отображения, заданные на вещественном пространстве A_{sa} самосопряжённых элементов C^*-алгебры A, коммутирующие с унитарным сопряжением: $F(u^*au) = u^*F(a)u$ для всех $a \in A_{\mathrm{sa}}$, $u \in \mathcal{U}(A)$. В случае матричных C^*-алгебр такие отображения допускают функциональную реализацию (в терминах функций многих переменных), причём аналитические свойства отображений определяются гладкостью соответствующих функций многих переменных. В настоящей работе эти результаты обобщаются на класс равномерно гиперфинитных C^*-алгебр и алгебру компактных операторов в гильбертовом пространстве.

Abstract

T. Shulman, Unitarily covariant maps in approximately finite-dimensional C^*-algebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 13 (2007), no. 8, pp. 213—227.

We consider maps defined on a real space A_{sa} of all self-adjoint elements of a C^*-algebra A commuting with the conjugation by unitaries: $F(u^*au) = u^*F(a)u$ for any $a \in A_{\mathrm{sa}}$, $u \in \mathcal{U}(A)$. In the case where A is a full matrix algebra, there is a functional realization of these maps (in terms of multivariable functions) and analytical properties of these maps can be expressed in terms of corresponding functions. In the present work, these results are generalized to the class of uniformly hyperfinite C^*-algebras and to the algebra of all compact operators in a Hilbert space.

Пусть A — C^*-алгебра, A_{sa} — вещественное пространство её самосопряжённых элементов, $\mathcal{U}(A)$ — группа всех унитарных элементов её унитализации A^+ (если A имеет единицу, то $A^+ = A$). Отображение $F\colon A_{\mathrm{sa}} \to A$ называется *унитарно-ковариантным* [6], если

$$F(u^*au) = u^*F(a)u$$

для всех $a \in A_{\mathrm{sa}}$, $u \in \mathcal{U}(A)$.

Примеры таких отображений приходят из функционального исчисления. А именно, для любой фиксированной борелевской функции φ на вещественной оси отображение $a \mapsto \varphi(a)$ является унитарно-ковариантным. Начиная с работы

Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, № 8, с. 213—227.

Далецкого и Крейна [3] интенсивно исследуется вопрос о связи между аналитическими свойствами (непрерывности, гладкости) этих «функциональных» унитарно-ковариантных отображений при $A=\mathcal{B}(H)$ и свойствами соответствующих функций. Операторно-гладкие классы функций, т. е. пространства, состоящие из тех функций φ, для которых соответствующее отображение обладает заданной гладкостью, не описываются, по-видимому, в «скалярных» терминах; из классических функциональных пространств к ним наиболее близки некоторые классы Бесова (см. [4]). Интерес к аналитическим свойствам «отображений функционального исчисления» и явился основной причиной для выделения свойства унитарной ковариантности и изучения общих унитарно-ковариантных отображений.

В [6] было установлено, что при $A=\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ (т. е. $A=\mathcal{B}(H)$, H конечномерно) все унитарно-ковариантные отображения допускают своеобразную функциональную реализацию в том смысле, что существует изоморфизм γ между алгеброй (относительно поэлементного сложения и умножения) всех унитарно-ковариантных отображений и алгеброй функций от n переменных, удовлетворяющих некоторым условиям симметрии. Функцию $\gamma(F)$ можно считать символом отображения F.

В [6] показано также, что унитарно-ковариантное отображение F является непрерывным или липшицевым тогда и только тогда, когда аналогичным свойством обладает его символ; F дифференцируемо по Фреше, если $\gamma(F)$ дифференцируема по Фреше.

В настоящей работе мы частично переносим эти результаты на некоторые аппроксимативно-конечномерные C^*-алгебры (AF-алгебры), т. е. C^*-алгебры, являющиеся индуктивными пределами конечномерных. А именно, мы рассматриваем алгебру $\mathcal{K}(H)$ всех компактных операторов гильбертова пространства H, а также равномерно-гиперфинитные C^*-алгебры (UHF-алгебры), важный класс AF-алгебр, который содержит, в частности, алгебру всех канонических антикоммутационных соотношений.

Структура работы такова: в разделе 1 приводятся необходимые обозначения и сведения об унитарно-ковариантных отображениях в алгебре матриц. В разделе 2 мы изучаем структуру бикоммутантов самосопряжённых элементов в аппроксимативно-конечномерных алгебрах. Эти результаты будут использоваться далее при изучении унитарно-ковариантных отображений. В разделе 3 исследуются унитарно-ковариантные отображения на равномерно-гиперфинитных алгебрах. В разделе 4 даётся описание непрерывных унитарно-ковариантных отображений в алгебре компактных операторов в гильбертовом пространстве.

1. Предварительные сведения

Обозначим через $\mathcal{F}$ пространство всех комплекснозначных функций на $\mathbb{R}^n$. Пусть S_n — симметрическая группа и $(\tau,\vec{\lambda})\mapsto\tau(\vec{\lambda})$ — её стандартное действие перестановками на $\mathbb{R}^n$. Тогда естественно определяется действие S_n на $\mathcal{F}$: для $f\in\mathcal{F}$, $\tau\in S_n$, $\vec{\lambda}\in\mathbb{R}^n$ положим $f_\tau(\vec{\lambda})=f\big(\tau(\vec{\lambda})\big)$.

Мы будем писать $f_{(i)}$ вместо $f_{\tau_{1i}}$, где τ_{ij} означает транспозицию, которая меняет местами j и i и сохраняет остальные символы. Пусть S_n^1 — подгруппа S_n, состоящая из всех перестановок, сохраняющих 1, и пусть

$$\mathcal{F}^1 = \{f \in \mathcal{F}\colon f_\tau = f \text{ для всех } \tau \in S_n^1\}.$$

Говоря нестрого, $\mathcal{F}^1$ — это пространство всех функций от n переменных, симметричных по всем переменным, кроме первой (такие функции мы называем для краткости *почти симметричными*).

Для любой функции $f \in \mathcal{F}^1$ определим отображение $F_f\colon \mathrm{M}_n(\mathbb{C})_{\mathrm{sa}} \to \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ следующим образом. Пусть $T \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})_{\mathrm{sa}}$ и $\sigma(T) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ — спектр оператора T (кратные собственные значения повторяются). Обозначим через $\vec{\sigma}(T)$ множество всех точек $\vec{\lambda} \in \mathbb{R}^n$, соответствующих всем возможным упорядочениям множества $\sigma(T)$. Фиксируем $\vec{\lambda} \in \vec{\sigma}(T)$ и набор собственных векторов $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$, такой что $Te_i = \lambda_i e_i$. Определим $F_f(T)$ как оператор $S \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, такой что $Se_i = f_{(i)}(\vec{\lambda})e_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Можно показать [6], что в силу почти симметричности функции f определение корректно (не зависит от выбора $\vec{\lambda} \in \vec{\sigma}(T)$ и базиса $\mathbf{e}$).

Теорема 1.1 [6]. *Каждое унитарно-ковариантное отображение на $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ совпадает с F_f для некоторой функции $f \in \mathcal{F}^1$.*

«Отображениям функционального исчисления» в этой схеме соответствуют функции, зависящие только от первой переменной. Аналитические свойства унитарно-ковариантных отображений связаны со свойствами соответствующих почти симметричных функций следующим образом.

Теорема 1.2 [6].

1. *Отображение F_f непрерывно в точке $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})_{\mathrm{sa}}$ тогда и только тогда, когда f непрерывна во всех точках $\vec{\lambda} \in \vec{\sigma}(A)$.*
2. *Отображение F_f дифференцируемо по Фреше в точке $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})_{\mathrm{sa}}$ тогда и только тогда, когда функция f дифференцируема во всех точках $\vec{\lambda} \in \vec{\sigma}(A)$.*
3. *Отображение F_f липшицево на $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})_{\mathrm{sa}}$ тогда и только тогда, когда функция f липшицева на $\mathbb{R}^n$.*

Основным техническим приёмом при изучении аналитических свойств унитарно-ковариантных отображений было следующее утверждение, которое мы будем использовать и в этой статье.

Лемма 1.3 [6]. *Пусть $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})_{\mathrm{sa}}$. Тогда для каждого $T \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})_{\mathrm{sa}}$ существует такой унитарный оператор $U = U(T)$, что*

1) $[U^*TU, A] = 0$,
2) $\|U^*TU - A\| \leqslant \|T - A\|$.

Кроме того, существует такое число $C \geqslant 0$, зависящее только от n и от спектра A, что

3) $\|U - 1\| \leqslant C\|T - A\|$.

2. Задача о бикоммутанте для аппроксимативно-конечномерных алгебр

Пусть $\mathcal{A}$ — C^*-алгебра, B — её подмножество. *Коммутантом* множества B в $\mathcal{A}$ называется множество всех элементов $a \in \mathcal{A}$, таких что $ab = ba$ для всех $b \in B$. Коммутант (в $\mathcal{A}$) коммутанта B в $\mathcal{A}$ называется *бикоммутантом* B в $\mathcal{A}$. Везде в дальнейшем коммутант (бикоммутант) подмножества $B \subset \mathcal{A}$ в алгебре $\mathcal{A}$ будет обозначаться через B' (соответственно B'') или $B'_{\mathcal{A}}$ (соответственно $B''_{\mathcal{A}}$) в том случае, если выбор $\mathcal{A}$ не очевиден.

Через $C^*(a)$ мы будем обозначать C^*-подалгебру в $\mathcal{A}$, порождённую элементом a (и единицей $\mathcal{A}$, если $\mathcal{A}$ унитальна).

Коммутатор $ab - ba$ элементов $a, b \in \mathcal{A}$ мы будем для краткости обозначать через $[a, b]$.

Лемма 2.1. *Пусть $\mathcal{K}$ — C^*-алгебра, $\mathcal{L}$ — её конечномерная $*$-подалгебра. Пусть $a \in \mathcal{K}$, определим отображение $d_a\colon \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ формулой $d_a(x) = [a, x]$. Тогда*

$$\operatorname{dist}(a, \mathcal{L}') \leqslant \|d_a|_{\mathcal{L}}\| \leqslant 2\operatorname{dist}(a, \mathcal{L}').$$

Доказательство. Докажем первое неравенство. Для любого $u \in \mathcal{U}(\mathcal{L})$ имеем

$$\|d_a|_{\mathcal{L}}\| = \sup_{x \in \mathcal{L},\ \|x\| \leqslant 1} \|\,[a, x]\,\| \geqslant \|\,[a, u]\,\| = \|u^* a u - a\|. \tag{1}$$

Так как алгебра L конечномерна, то на унитарной группе $\mathcal{U}(\mathcal{L})$ есть мера Хаара du. Докажем, что

$$\int\limits_{\mathcal{U}(\mathcal{L})} u^* a u\, du \in \mathcal{L}'.$$

Поскольку любой элемент $x \in \mathcal{L}$ есть линейная комбинация элементов из $\mathcal{U}(\mathcal{L})$ (см., например, доказательство леммы 3.1), достаточно показать, что

$$\left[\int u^* a u du, x\right] = 0$$

для всех $x \in \mathcal{U}(\mathcal{L})$. Действительно,

$$\left(\int u^* a u\, du\right) x - x \int u^* a u\, du =$$
$$= \int u^* a u x\, du - x \int u^* a u\, du = x \int (ux)^* a (ux)\, d(ux) - x \int u^* a u\, du = 0.$$

Взяв интеграл от обеих частей неравенства (1), получаем, что

$$\|d_a|_{\mathcal{L}}\| \geqslant \left\| \int u^* a u\, du - a \right\|,$$

откуда следует $\|d_a|_{\mathcal{L}}\| \geqslant \operatorname{dist}(a, \mathcal{L}')$.

Неравенство $\|d_a|_{\mathcal{L}}\| \leqslant 2\operatorname{dist}(a, \mathcal{L}')$ следует из того, что для любого $x \in \mathcal{L}$, $\|x\| \leqslant 1$, и любого $y \in \mathcal{L}'$ справедливо $\|\,[a, x]\,\| = \|\,[a - y, x]\,\| \leqslant 2\|a - y\|$. $\square$

Лемма 2.2. *Пусть $\mathcal{A} = \overline{\bigcup \mathcal{A}_i}$, где $\{\mathcal{A}_i\}$ — возрастающая последовательность конечномерных подалгебр C^*-алгебры $\mathcal{A}$, причём центр $Z(\mathcal{A}_i)$ подалгебры $\mathcal{A}_i$ тривиален для любого i. Тогда для любого самосопряжённого элемента $a \in \bigcup \mathcal{A}_i$ имеет место равенство $(a)'' = C^*(a)$.*

Доказательство. Пусть $a \in \bigcup \mathcal{A}_i$. Тогда существует такое N, что $a \in \mathcal{A}_n$ при всех $n > N$. Пусть $b \in (a)''_{\mathcal{A}}$. Существуют такие $b_n \in \mathcal{A}_n$, что $b_n \to b$ при $n \to \infty$. Положим $\|b_n - b\| = \varepsilon_n$, тогда $\varepsilon_n \to 0$.

Так как $[b, x] = 0$ для любого $x \in (a)'_{\mathcal{A}}$, то тем более $[b, x] = 0$ для любого $x \in (a)'_{\mathcal{A}} \cap \mathcal{A}_n = (a)'_{\mathcal{A}_n}$. Значит, $\| [b_n, x] \| = \| [b_n - b, x] \| \leqslant 2\varepsilon_n$ для всех $x \in (a)'_{\mathcal{A}_n}$. Следовательно, $\|d_{b_n}|_{(a)'_{\mathcal{A}_n}}\| \leqslant 2\varepsilon_n$. Применяя лемму 2.1 к C^*-алгебре $\mathcal{A}_n$, её подалгебре $(a)'_{\mathcal{A}_n}$ и элементу $b_n \in \mathcal{A}_n$, получаем, что $\|d_{b_n}|_{(a)'_{\mathcal{A}_n}}\| \geqslant \operatorname{dist}(b_n, (a)''_{\mathcal{A}_n})$. Так как центр алгебры $\mathcal{A}_n$ тривиален, то $\mathcal{A}_n$ изоморфна полной матричной алгебре. Поскольку $a \in \mathcal{A}_n$ при $n > N$, мы можем заключить, что $(a)''_{\mathcal{A}_n} \subseteq C^*(a)$ при $n > N$ (см., например, [1]). Следовательно,

$$\operatorname{dist}\bigl(b, C^*(a)\bigr) \leqslant \|b - b_n\| + \operatorname{dist}\bigl(b_n, C^*(a)\bigr) = \varepsilon_n + \operatorname{dist}(b_n, (a)''_{\mathcal{A}_n}) \leqslant 3\varepsilon_n \to 0.$$

Таким образом, $\operatorname{dist}\bigl(b, C^*(a)\bigr) = 0$ и $b \in C^*(a)$. □

Напомним, что C^*-алгебра называется равномерно гиперфинитной, если она является индуктивным пределом полных матричных алгебр (с унитальными вложениями), или, другими словами, если она является замыканием объединения возрастающей последовательности своих подалгебр, содержащих её единицу и изоморфных полным матричным алгебрам.

Теорема 2.3. *Пусть $\mathcal{A}$ — UHF-алгебра. Тогда для любого самосопряжённого элемента $a \in \mathcal{A}$, спектр которого конечен, $(a)'' = C^*(a)$.*

Доказательство. Поскольку $\mathcal{A}$ — UHF-алгебра, её можно представить в виде $\mathcal{A} = \overline{\bigcup \mathcal{A}_n}$, где все $\mathcal{A}_n$ изоморфны полным матричным алгебрам. Пусть $\sigma(a) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$. Тогда $a = \sum\limits_1^k \lambda_i p_i$, где p_i — спектральные проекторы, т. е. $p_i = \int\limits_{\Gamma_i} (a - z)^{-1}\, dz$, где через Γ_i обозначена окружность с центром в λ_i, такая что остальные точки спектра находятся вне её. Проекторы p_i попарно ортогональны и $\sum p_i = 1$. Выберем число $\varepsilon < 1$. По [5, теорема III.3.1] найдётся номер n и попарно ортогональные проекторы $q_i \in \mathcal{A}_n$, такие что $\|q_i - p_i\| \leqslant \varepsilon$. Следовательно, существуют частичные изометрии u_i, $i = 1, \ldots, k$, такие что $u_i^* u_i = p_i$, $u_i u_i^* = q_i$. Положим $u = \sum u_i$. Несложные вычисления показывают, что оператор u унитарен и $u p_i u^* = q_i$.

Положим $\mathcal{B}_n = u^* \mathcal{A}_n u$. Тогда $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{A}$ — конечномерная подалгебра при каждом n, $\mathcal{A} = \overline{\bigcup \mathcal{B}_n}$ и $p_i \in \bigcup \mathcal{B}_n$. Значит, $a = \sum\limits_1^k \lambda_i p_i \in \bigcup \mathcal{B}_n$. Согласно лемме 2.2 $(a)'' = C^*(a)$. □

Утверждение леммы 2.2 становится неверным, если отбросить предположение $Z(\mathcal{A}_i) = \{\mathbb{C} 1_{\mathcal{A}}\}$, даже если центр всей алгебры $\mathcal{A}$ тривиален. Мы сейчас построим AF-алгебру с тривиальным центром, в которой существует проектор p, такой что $(p)'' \neq C^*(p,1)$.

Лемма 2.4. *Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра с единицей e и нетривиальным центром Z, Y — идеал в $\mathcal{A}$ с нулевым центром, $\tilde{Y} = Y + \mathbb{C}e$,*

$$\Omega = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & Y \\ Y & \tilde{Y} \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \Omega.$$

Тогда

1) $(p)' = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & t \end{smallmatrix} \right) : x \in \mathcal{A},\ t \in \tilde{Y} \right\}$;
2) $(p)'' = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} z & 0 \\ 0 & \lambda e \end{smallmatrix} \right) : z \in Z,\ \lambda \in \mathbb{C} \right\}$;
3) *центр $Z(\Omega)$ алгебры Ω равен*

$$\left\{ \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \mu e \end{pmatrix} : z \in Z,\ \mu \in \mathbb{C},\ zx = \mu x \text{ для всех } x \in Y \right\};$$

4) *если Y имеет нулевой аннулятор, т. е.*

$$\{a \in \mathcal{A} \colon ax = 0,\ xa = 0 \text{ для всех } x \in Y\} = \{0\},$$

то

$$Z(\Omega) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda e & 0 \\ 0 & \lambda e \end{pmatrix},\ \lambda \in \mathbb{C} \right\} = \mathbb{C}1_\Omega.$$

Доказательство. Каждый из пунктов проверяется непосредственно с использованием предшествующих пунктов. □

Следствие 2.5.

1. *Пусть X — произвольный компакт, $\mathcal{A}_0 = \mathcal{B}(H)$, $Y_0 = K(H)$, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \otimes C(X)$, $Y = Y_0 \otimes C(X)$, Ω и p такие же, как в лемме 2.4. Тогда $(p)'' \neq C^*(p,1)$.*
2. *То же заключение справедливо, если в качестве $\mathcal{A}_0$ выбрать $K(H) + \mathbb{C}1$.*

Доказательство. Легко заметить, что центр алгебры $\mathcal{A}$ состоит из скалярнозначных функций, т. е. нетривиален, и что Y — её идеал, имеющий нулевой центр. Следовательно, применимы утверждения 1)—4) предыдущей леммы. Но из 2) очевидным образом следует, что бикоммутант проектора p строго содержит порождённую им унитальную C^*-алгебру. □

Алгебру Ω можно сделать и аппроксимативно-конечномерной.

Положим $\mathcal{A}_0 = K(H) + \mathbb{C}1$, $Y_0 = K(H)$, в качестве X возьмём пространство, состоящее из двух точек. В этом случае справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.6. *Ω является AF-алгеброй.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}_n$ — возрастающая последовательность конечномерных подалгебр в $K(H)$, объединение которых плотно в $K(H)$.

Для каждого n положим

$$\Omega_n = \begin{pmatrix} (\mathcal{A}_n + \mathbb{C}1) \otimes C(X) & \mathcal{A}_n \otimes C(X) \\ \mathcal{A}_n \otimes C(X) & \mathcal{A}_n \otimes C(X) + \mathbb{C}e \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что Ω_n — возрастающая последовательность конечномерных подалгебр в Ω, имеющая плотное в Ω объединение. □

Из следствия 2.5 и леммы 2.6 вытекает существование нужного нам примера.

Теорема 2.7. *Существуют AF-алгебра $\mathcal{A}$ с тривиальным центром и проектор $p \in \mathcal{A}$, такой что $(p)'' \neq C^*(p, 1)$.*

3. Унитарно-ковариантные отображения в UHF-алгебрах

Если m, n — натуральные числа и m делится на n, то можно определить унитальный инъективный гомоморфизм из M_n в M_m, отображая каждую матрицу x в блочно-диагональную $\left(\frac{m}{n} \times \frac{m}{n}\right)$-матрицу с диагональными элементами, равными x. Если $\vec{k} = (k_1, k_2, \ldots)$ — последовательность целых чисел, таких что $k_n \mid k_{n+1}$, то имеется последовательность вложений матричных алгебр: $\mathrm{M}_{n_1} \to \mathrm{M}_{n_2} \to \ldots$. Прямой предел этой последовательности называется UHF-алгеброй индекса $\vec{k} = (k_1, k_2, \ldots)$. Другими словами, C^*-алгебра $\mathcal{A}$ является (изоморфна) UHF-алгеброй индекса $\vec{k} = (k_1, k_2, \ldots)$, если $\mathcal{A} = \overline{\bigcup \mathcal{A}_n}$, где $\mathcal{A}_n \cong \mathrm{M}_{k_n}$ и $1 \in A_1$.

Положим $\mathcal{A}^0 = \bigcup \mathcal{A}_n$. Везде в дальнейшем мы будем отождествлять произвольный элемент $x \in \mathcal{A}_n$ с матрицей из M_{k_n}, которую мы тоже будем обозначать x, и с матрицами

$$\mathrm{diag}(x) = \begin{pmatrix} x & & \\ & \ddots & \\ & & x \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{k_m}$$

(x повторяется k_m/k_n раз), $m \in \mathbb{N}$.

Для $i < j$ обозначим через $\varphi_{i,j}$ вложение $\mathbb{R}^{k_i}$ в $\mathbb{R}^{k_j}$, такое что $\varphi_{i,j}(x) = (x, x, \ldots, x)$, $x \in \mathbb{R}^{k_i}$ (в правой части x повторяется k_j/k_i раз). Тем самым определяется (алгебраический) индуктивный предел $\mathbb{R}^{\vec{k}}$ пространств $\mathbb{R}^{k_j}$. Его можно отождествить с пространством последовательностей, периодических с периодом k_j, где j может быть любым. Будем для краткости называть такие последовательности $\vec{k}$-периодическими.

Определим пространство $\mathcal{F}_{\vec{k}}$ функций на $\mathbb{R}^{\vec{k}}$ как обратный предел пространств $\mathfrak{F}(\mathbb{R}_{k_j})$ функций на $\mathbb{R}_{k_j}$ относительно отображений $\Phi_{i,j} : \mathcal{F}(\mathbb{R}_{k_j}) \to \mathfrak{F}(\mathbb{R}_{k_i})$, определённых формулой $\Phi_{i,j}(f)(\vec{x}) = f\big(\varphi_{i,j}(\vec{x})\big)$. Его элементами являются последовательности $\vec{f} = (f_i)_{i \geqslant 1}$, $f_i \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^{k_i})$, согласованные в смысле отображений $\Phi_{i,j}$, однако всякой такой последовательности $\vec{f}$ естественно ставится в соответствие конкретное значение $\vec{f}(\vec{x})$ в каждой точке $\vec{x} \in \mathbb{R}^{\vec{k}}$, так что $\mathcal{F}_{\vec{k}}$ действительно можно считать состоящим из функций на $\mathbb{R}^{\vec{k}}$.

Пусть теперь $\mathcal{F}^1_{\vec{k}}$ — подпространство в $\mathcal{F}_{\vec{k}}$, состоящее из последовательностей $\vec{f} = (f_i)_{i \geqslant 1}$, в которых все f_i симметричны по всем переменным, кроме первой.

По $\vec{f} = \{f_1, f_2, \ldots\} \in \mathcal{F}_{\vec{k}}$ определим отображение $F_{\vec{f}}\colon \mathcal{A}^0_{\mathrm{sa}} \to \mathcal{A}^0$, полагая $F_{\{f_1,f_2,\ldots\}}(a) = F_{f_n}(a_n)$ при $a \in (A_n)_{\mathrm{sa}}$. Из условия согласованности легко следует, что такое определение корректно. Поскольку все f_i симметричны по всем переменным, кроме первой, то нетрудно убедиться, что отображение $F_{\vec{f}}$ унитарно-ковариантно. Мы покажем, что любое ковариантное отображение алгебры $\mathcal{A}$ совпадает на $\mathcal{A}^0$ с одним из отображений $F_{\vec{f}}$.

Лемма 3.1. *Пусть A — C^*-алгебра, $F\colon A_{\mathrm{sa}} \to A$ — ковариантное отображение, $x \in A_{\mathrm{sa}}$. Тогда $F(X) \in (x)''$.*

Доказательство. Пусть $y \in (x)'$. Мы должны доказать, что $[F(x), y] = 0$. Представим y в виде $a + ib$, где $a = a^*$, $b = b^*$. Так как $x = x^*$, то $[y^*, x] = 0$, откуда $[a, x] = [b, x] = 0$. Поэтому достаточно доказать наше утверждение для случая $y = y^*$. Умножая, если потребуется, на число, мы считаем, что $\|y\| \leqslant 1$. Тогда элементы $z = (1 - y^2)^{1/2}$ и $u = y + iz$ также коммутируют с x. Так как u — унитарный элемент, то

$$[u, F(x)] = uF(x) - F(x)u = uF(x)u^*u - F(x)u = F(uxu^*)u - F(x)u = 0.$$

Очевидно, что u^* также коммутирует с $F(x)$. Поскольку $y = (u + u^*)/2$, мы получаем, что $[y, F(x)] = 0$. □

Теорема 3.2. *Пусть $\mathcal{A} = \overline{\bigcup_n \mathcal{A}_n}$ — UHF-алгебра индекса $\vec{k}$. Каждое ковариантное отображение алгебры $\mathcal{A}$ совпадает на $\mathcal{A}_0 = \bigcup_n \mathcal{A}_n$ с $F_{\{f_1,f_2,\ldots\}}$ для некоторого семейства функций $\{f_1, f_2, \ldots\} \in \mathcal{F}_{\vec{k}}$.*

Доказательство. Пусть $F\colon \mathcal{A}_{\mathrm{sa}} \to \mathcal{A}$ — ковариантное отображение. По лемме 3.1 $F(a) \in (a)''$ для любого элемента $a \in \mathcal{A}_{\mathrm{sa}}$.

Пусть $a \in (\mathcal{A}_i)_{\mathrm{sa}}$. По теореме 2.2 $(a)'' = C^*(a)$, поэтому $F(a) \in C^*(a) \subset \mathcal{A}_i$. Это доказывает, что $F\big((\mathcal{A}_i)_{\mathrm{sa}}\big) \subset \mathcal{A}_i$ для всех i.

Согласно теореме 1.2 для каждого $i \in \mathbb{N}$ сужение отображения F на $(\mathcal{A}_i)_{\mathrm{sa}}$ совпадает с отображением F_{f_i} для некоторой функции $f_i\colon \mathbb{R}^{k_i} \to \mathbb{C}$, симметричной по всем переменным, кроме первой. Поскольку $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{A}_j$ при $i < j$, то для любого элемента $a \in (\mathcal{A}_i)_{\mathrm{sa}}$ имеем $F_{f_i}(a) = F_{f_j}(a)$, откуда, положив $a = \mathrm{diag}(x)$, $x \in \mathbb{R}^{k_i}$, мы заключаем, что $f_j\big(\varphi_{i,j}(x)\big) = f_i(x)$. Это означает, что $\{f_1, f_2, \ldots\} \in \mathcal{F}_{\vec{k}}$. Ясно, что F совпадает с F_f на $\mathcal{A}_0$. □

Рассмотрим теперь условия непрерывности отображения F_f на A_0. В дальнейшем, говоря о непрерывности функции $\vec{f} \in \mathfrak{F}_{\vec{k}}$, мы будем подразумевать непрерывность относительно sup-нормы на $\mathbb{R}^{\vec{k}}$, т. е. нормы, индуцированной из l^∞. Для того чтобы функция $\vec{f} \in \mathfrak{F}_{\vec{k}}$ была непрерывной в точке $x \in \mathbb{R}^{k_n}$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность функций $f_i\colon \mathbb{R}^{k_i} \to \mathbb{R}$ была *равностепенно непрерывной* в x, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ должно существовать $\delta > 0$, такое что из $y \in \mathbb{R}^{k_m}$, $m \geqslant n$, $\|y - \varphi_{n,m}(x)\| < \delta$ следует $|f_m(y) - f_n(x)| < \varepsilon$.

Пусть $\mathcal{C}^1_{\vec{k}}$ — пространство всех непрерывных функций из $\mathcal{F}^1_{\vec{k}}$. Примером элемента множества $\mathcal{C}^1_{\vec{k}}$ может служить семейство функций $\{f_1, f_2, \ldots\}$, где $f_i(x_1, \ldots, x_{k_i}) = x_1 \max\{x_1, \ldots, x_{k_i}\}$.

Лемма 3.3. *Пусть $\{f_1, f_2, \ldots\} \in \mathcal{C}_{\vec{k}}$, $a \in (\mathcal{A}_n)_{\mathrm{sa}}$. Тогда семейство отображений $\{F_{f_n}, F_{f_{n+1}}, \ldots\}$ равностепенно непрерывно в точке a.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Нужно показать, что найдётся такое $\delta > 0$, что из $b \in (\mathcal{A}_m)_{\mathrm{sa}}$, $m > n$, $\|b - a\| < \delta$ следует, что $\|F_{f_m}(b) - F_{f_n}(a)\| \leqslant \varepsilon$. Сначала мы рассмотрим два частных случая.

1. Пусть $b \in (\mathcal{A}_m)_{\mathrm{sa}}$ коммутирует с a. Выберем базис в M_{k_m}, в котором a и b диагональны, $a = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{k_n}, \ldots, \lambda_1, \ldots, \lambda_{k_n})$, $b = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_{k_m})$. В силу равномерной и равностепенной непрерывности семейства $\{f_1, f_2, \ldots\}$ и условий симметрии существует такое δ_1, что

$$\left|\bigl(F_{f_m}(b) - F_{f_n}(a)\bigr)_{ii}\right| = \\ = \left|f_m\bigl(\tau_{1i}(\mu_1, \ldots, \mu_{k_m})\bigr) - f_m\bigl(\tau_{1i}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{k_n}, \ldots, \lambda_1, \ldots, \lambda_{k_n})\bigr)\right| \leqslant \varepsilon,$$

как только $\|b - a\| \leqslant \delta_1$.

2. Пусть $b = uau^*$, где u — унитарный элемент в A. Существует многочлен $p(t)$, такой что $p(\lambda_i) = f_n(\tau_{1i}\vec{\lambda})$, $i = 1, \ldots, k_n$. Тогда

$$F_{f_m}(a) = F_{f_n}(a) = p(a), \quad F_{f_m}(b) = F_{f_m}(uau^*) = uF_{f_m}(a)u^* = up(a)u^* = p(b).$$

Поскольку любой многочлен действует непрерывно в любой C^*-алгебре, то, в частности, отображение $x \to p(x)$, $x \in \mathcal{A}$, непрерывно в точке a, а значит, существует δ_2, не зависящее от m, такое что при $\|b - a\| \leqslant \delta_2$ выполняется

$$\|F_{f_m}(b) - F_{f_n}(a)\| = \|p(b) - p(a)\| \leqslant \varepsilon.$$

Наконец, рассмотрим общий случай. Применим лемму 1.3 к матрицам $a, b \in \mathrm{M}_{k_m}$. Пусть $u = u(b)$ — соответствующая унитарная матрица. Тогда

$$\|F_{f_m}(b) - F_{f_m}(a)\| \leqslant \|F_{f_m}(b) - F_{f_m}(uau^*)\| + \|F_{f_m}(uau^*) - F_{f_m}(a)\| = \\ = \|F_{f_m}(u^*bu) - F_{f_m}(a)\| + \|F_{f_m}(uau^*) - F_{f_m}(a)\|.$$

Согласно утверждениям 1) и 2) леммы 1.3 и пункту 1 первое слагаемое не превосходит ε, если $\|b - a\| < \delta_1$. Так как

$$\|uau^* - a\| \leqslant \|uau^* - b\| + \|b - a\| = \|a - u^*bu\| + \|b - a\| \leqslant 2\|b - a\|,$$

то согласно пункту 2 второе слагаемое не превосходит ε, если $\|b - a\| < \delta_2/2$. Таким образом, $\|F_{f_m}(b) - F_{f_n}(a)\| \leqslant 2\varepsilon$ при $\|b - a\| < \delta$, где $\delta = \min(\delta_1, \delta_2/2)$. □

Теорема 3.4. *Ковариантное отображение $F\colon \mathcal{A}_{\mathrm{sa}} \to \mathcal{A}$ непрерывно во всех точках $a \in \mathcal{A}_0$ тогда и только тогда, когда соответствующее семейство функций $\{f_i\}$ принадлежит $\mathcal{C}_{\vec{k}}$.*

Доказательство. Учитывая лемму 3.3, достаточно доказать, что если F непрерывно на $\mathcal{A}_0$, то семейство функций $\{f_i\}$ равностепенно непрерывно.

Пусть $x \in \mathbb{R}^{k_n}$, $\varepsilon > 0$. Положим $a = \operatorname{diag}(x)$, тогда $a \in (\mathcal{A}_n)_{\mathrm{sa}}$. В силу непрерывности отображения F существует $\delta > 0$, такое что из $b \in \mathcal{A}_{\mathrm{sa}}$, $\|b - a\| < \delta$ следует, что $\|F(b) - F(a)\| \leqslant \varepsilon$. Пусть $y \in \mathbb{R}^{k_m}$, $\|\varphi_{n,m}(x) - y\| < \delta$. Тогда $b = \operatorname{diag}(y) \in (\mathcal{A}_m)_{\mathrm{sa}}$, $\|b - a\| = \|y - \varphi_{n,m}(x)\| < \delta$ и, значит,

$$|f_m(\varphi_{n,m}(x) - f_m(y)| = \left|\bigl(F(b) - F(a)\bigr)_{11}\right| \leqslant \varepsilon,$$

т. е. семейство функций $\{f_i\}$ равностепенно непрерывно. □

4. Ковариантные отображения в алгебре компактных операторов

Пусть H — бесконечномерное гильбертово пространство, $\mathcal{K}(H)$ — алгебра всех компактных операторов на H. В случае если равенство

$$F(U^*TU) = U^*F(T)U$$

выполняется для всех унитарных операторов $U \in \mathcal{L}(H)$ (и всех компактных эрмитовых T), мы говорим, что отображение F является $\mathcal{U}(H)$-ковариантным. Покажем, прежде всего, что для непрерывных F это понятие совпадает с обычной унитарной ковариантностью.

Лемма 4.1. *Непрерывное унитарно-ковариантное отображение в $\mathcal{K}(H)$ является $\mathcal{U}(H)$-ковариантным.*

Доказательство. Пусть F — непрерывное унитарно-ковариантное отображение на $K(H)$. Пусть U — произвольный унитарный оператор. Тогда $U = \exp iS$, где S — эрмитов оператор. Существует последовательность компактных эрмитовых операторов S_n, сходящаяся к S в сильной операторной топологии. Полагая $U_n = \exp iS_n$, получаем, что $U_n \in \mathcal{K}(H)^+$ и $U_n \to U$ в сильной операторной топологии. Следовательно, $U_n^*TU_n \to U^*TU$ по норме для любого компактного оператора T (для операторов конечного ранга это очевидно, а для произвольного компактного оператора следует из плотности операторов конечного ранга в $\mathcal{K}(H)$). Учитывая непрерывность F, имеем

$$F(U^*TU) = \lim F(U_n^*TU_n) = \lim U_n^*F(T)U_n = U^*F(T)U. \qquad \square$$

Поскольку нас в основном интересуют непрерывные унитарно-ковариантные отображения, мы можем в этом случае ограничиться рассмотрением $\mathcal{U}(H)$-ковариантных отображений.

Построим функциональную модель унитарно-ковариантного отображения.

Обозначим через c_0 вещественное банахово пространство последовательностей вещественных чисел, стремящихся к 0 при $n \to \infty$, а через $\mathcal{F}$ — пространство всех комплекснозначных функций на c_0. Пусть S — группа всех перестановок натурального ряда $\mathbb{N}$. Для $f \in \mathcal{F}$, $\tau \in S$, $\vec{\lambda} \in c_0$ положим $f_\tau(\vec{\lambda}) = f\bigl(\tau(\vec{\lambda})\bigr)$;

как и в разделе 1, мы будем писать $f_{(i)}$ вместо $f_{\tau_{1i}}$, где через τ_{1i} обозначена транспозиция, которая меняет местами i и 1 и сохраняет остальные символы. Пусть S^1 — подгруппа группы S, состоящая из всех перестановок, оставляющих на месте 1. Положим

$$\mathcal{F}^{1,0} = \Big\{ f \in \mathcal{F} \colon f_\tau = f \text{ для всех } \tau \in S^1, \ \lim_{n\to\infty} f_{(n)}(\vec{x}\,) = 0 \text{ для всех } \vec{x} \in c_0 \Big\}.$$

Примерами функций из $\mathcal{F}^{1,0}$ могут служить функции вида $\varphi\big(x_1, \psi(x_2, \ldots)\big)$, где $\psi(\vec{x}\,)$ — функция, симметричная по всем переменным и ограниченная на любом шаре, а φ — функция двух переменных, такая что $\varphi(x, y) \to 0$ при $x \to 0$ равномерно по $y \in [a, b]$ для любого отрезка $[a, b]$. Например, можно взять функцию $f(x_1, x_2, \ldots) = x_1 \sup\limits_{i\geqslant 2} |x_i|$.

Каждой функции $f \in \mathcal{F}^{1,0}$ мы поставим в соответствие отображение $F_f \colon \mathcal{K}(H)_{\mathrm{sa}} \to \mathcal{K}(H)$ следующим образом. Пусть $T \in \mathcal{K}(H)_{\mathrm{sa}}$. Согласно теореме Гильберта—Шмидта в некотором базисе (e_i) оператор T имеет диагональный вид: $T = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$, т. е. $Te_i = \lambda_i e_i$. Тогда по определению $F_f(T)$ — это оператор $S \in \mathcal{K}(H)$, такой что $Se_i = f(\lambda_i, \lambda_2, \ldots)e_i$. Можно показать, используя условия симметричности, что определение корректно (не зависит от выбора базиса, в котором T диагонален, и от упорядочения собственных значений) и что отображение F_f является $\mathcal{U}(H)$-ковариантным.

Теорема 4.2. *Каждое $\mathcal{U}(H)$-ковариантное отображение C^*-алгебры $\mathcal{K}(H)$ совпадает с F_f для некоторой функции $f \in \mathcal{F}^{1,0}$.*

Доказательство. Пусть F — произвольное $\mathcal{U}(H)$-ковариантное отображение алгебры $\mathcal{K}(H)$. По лемме 3.1 $F(X) \in (X)''$ для любого самосопряжённого $X \in \mathcal{K}(H)$. В частности, $F(X)$ имеет диагональный вид в каждом базисе, в котором X имеет диагональный вид. Следовательно, для каждого ортонормированного базиса существует последовательность функций $f_1, f_2, \ldots$, принадлежащих пространству $\mathcal{F}$, таких что если в этом базисе $X = \operatorname{diag}(\vec{\lambda}\,)$, то $F(X) = \operatorname{diag}(\vec{\mu}\,)$, где $\mu_i = f_i(\vec{\lambda}\,)$.

Докажем, что $f_1, f_2, \ldots$ не зависят от выбора базиса. Пусть $\{\xi_i\}$, $\{\eta_i\}$ — ортонормированные базисы и $\{f_i\}$, $\{g_i\}$ — соответствующие семейства функций. Пусть U — такой унитарный оператор, что $U\xi_i = \eta_i$. Для каждой последовательности $\vec{\lambda} \in c_0$ рассмотрим операторы X, Y, которые имеют диагональный вид $\operatorname{diag}(\vec{\lambda}\,)$ в базисах $\{\xi_i\}$ и $\{\eta_i\}$ соответственно. Положим $\mu_i = f_i(\vec{\lambda}\,)$, $\nu_i = g_i(\vec{\lambda}\,)$. Тогда $F(X) = \operatorname{diag}(\vec{\mu}\,)$, $F(Y) = \operatorname{diag}(\vec{\nu}\,)$ в базисах $\{\xi_i\}$ и $\{\eta_i\}$ соответственно. С другой стороны, $Y = UXU^*$, поэтому $F(Y) = UF(X)U^*$. Следовательно, $\mu_i = \nu_i$, поэтому $f_i(\vec{\lambda}\,) = g_i(\vec{\lambda}\,)$.

Докажем, что все f_i получаются перестановками функции f_1: $f_k(\vec{\lambda}\,) = f_1\big(\tau_{1,k}(\vec{\lambda}\,)\big)$ для всех $k \neq 1$, $\vec{\lambda} \in c_0$. Фиксируем базис $\{\xi_i\}$ и рассмотрим унитарный оператор $U \in \mathcal{U}(H)$, который меняет местами ξ_k и ξ_1 и сохраняет остальные базисные векторы. Пусть $X = \operatorname{diag}(\vec{\lambda}\,)$ в базисе $\{\xi_i\}$, $\vec{\lambda} \in c_0$. Сравнивая первые диагональные элементы операторов $F(U^*XU)$ и $UF(X)U^*$

(которые равны в силу унитарной ковариантности отображения F), получаем $f_k(\vec{\lambda}) = f_1(\tau_{1,k}(\vec{\lambda}))$.

Осталось проверить, что $f_1 \in \mathcal{F}^{1,0}$. Пусть $j, k \neq 1$. Фиксируем базис $\{\xi_i\}$ и рассмотрим унитарный оператор $U \in \mathcal{U}(H)$, который меняет местами ξ_k и ξ_j и сохраняет остальные базисные векторы. Пусть $X = \operatorname{diag}(\vec{\lambda})$ в базисе $\{\xi_i\}$, $\vec{\lambda} \in c_0$. Сравнивая первые диагональные элементы операторов $F(U^*XU)$ и $UF(X)U^*$, получаем $f_1(\vec{\lambda}) = f_1(\tau_{j,k}(\vec{\lambda}))$. Таким образом, $f_{1\tau} = f_1$ для любой перестановки $\tau \in S^1$. Кроме того, так как оператор $F(X)$ компактен, то

$$\lim_{n\to\infty} f_1(\lambda_n, \lambda_2, \ldots, \lambda_1, \lambda_{n+1}, \ldots) = \lim_{n\to\infty} f_n(\lambda_1, \lambda_2, \ldots) = \lim_{n\to\infty} F(X)_{nn} = 0,$$

а значит, $f_1 \in \mathcal{F}^{1,0}$. □

Перейдём к изучению условий непрерывности отображения F_f.

Лемма 4.3. *Пусть $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})_{\mathrm{sa}}$, $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$ — собственные значения A, $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \ldots \geqslant \mu_n$ — собственные значения B (мы учитываем кратности). Тогда $|\lambda_i - \mu_i| \leqslant \|A - B\|$.*

Доказательство. Выберем такое число $\alpha \geqslant 0$, что $\tilde{A} = A + \alpha 1$ и $\tilde{B} = B + \alpha 1$ имеют только положительные собственные значения. Так как $\|\tilde{A} - \tilde{B}\| = \|A - B\|$ и $|\tilde{\lambda}_i - \tilde{\mu}_i| = |\lambda_i - \mu_i|$, то мы можем считать A и B положительными. Очевидно, что $\lambda_1 = \|A\|$, $\mu_1 = \|B\|$, $|\lambda_1 - \mu_1| = |\,\|A\| - \|B\|\,| \leqslant \|A - B\|$. Для остальных λ_i и μ_i имеем [2]

$$\lambda_i = \inf_{L \subset \mathbb{C}^n:\ \dim L = n-i+1} \ \sup_{x \in O_1(L)} (Ax, x),$$

где $O_1(L)$ — единичный шар подпространства L,

$$\mu_i = \inf_{L \subset \mathbb{C}^n:\ \dim L = n-i+1} \ \sup_{x \in O_1(L)} (Bx, x).$$

Обозначая

$$f(L) = \sup_{x \in O_1(L)} (Ax, x), \quad g(L) = \sup_{x \in O_1(L)} (Bx, x),$$

получаем, что

$$f(L) - g(L) \leqslant \sup_{O_1(L)} \big((A - B)x, x\big) \leqslant \|A - B\|, \quad f(L) \leqslant \|A - B\| + g(L),$$

$$\inf_{L \subset \mathbb{C}^n:\ \dim L = n-i+1} f(L) \leqslant \|A - B\| + \inf_{L \subset \mathbb{C}^n:\ \dim L = n-i+1} g(L).$$

Следовательно, $\lambda_i - \mu_i \leqslant \|A - B\|$. Аналогично $\mu_i - \lambda_i \leqslant \|A - B\|$. □

Следствие 4.4. *Пусть A и B — компактные самосопряжённые операторы. Тогда их собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ и $\mu_1, \mu_2, \ldots$ (мы учитываем кратности) можно занумеровать так, что $|\lambda_i - \mu_i| \leqslant 2\|A - B\|$.*

Доказательство. Пусть N — такой номер, что $|\lambda_i| < \|A - B\|/2$ и $|\mu_i| < \|A - B\|/2$ при $i > N$. Пусть P (Q) — проектор на линейную оболочку первых N собственных векторов оператора A (соответственно B). Тогда

$\|A - PAP\| \leqslant \|A - B\|/2$, $\|B - QBQ\| \leqslant \|A - B\|/2$ и, значит,

$$\|PAP - QBQ\| \leqslant \frac{\|A - B\|}{2} + \frac{\|A - B\|}{2} + \|A - B\| = 2\|A - B\|.$$

Пусть R — проектор на линейную оболочку подпространств PH и QH. Тогда PAP и QBQ можно рассматривать как операторы в конечномерном пространстве RH с собственными значениями $0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и $0, \mu_1, \ldots, \mu_n$ соответственно (кратность 0 у обоих операторов равна $\operatorname{rank}(R) - N$). Согласно лемме 4.3 можно выбрать такую нумерацию, что $|\lambda_i - \mu_i| \leqslant 2\|A - B\|$, $i = 1, \ldots, N$. Для $i > N$ имеем при любой нумерации

$$|\lambda_i - \mu_i| \leqslant 2\frac{\|A - B\|}{2} = \|A - B\|. \qquad \square$$

Лемма 4.5. *Пусть A — компактный самосопряжённый оператор. Тогда для каждого компактного самосопряжённого оператора T найдётся такой унитарный оператор $U = U(T)$, что*

1) $[U^*TU, A] = 0$;
2) $\|U^*TU - A\| \leqslant 2\|T - A\|$;
3) $\|\,[U, A]\,\| \leqslant 3\|T - A\|$.

Доказательство. Пусть A имеет диагональный вид, $A = \operatorname{diag}(\vec{\lambda})$, в базисе $\{e_i\}$, T имеет диагональный вид, $T = \operatorname{diag}(\vec{\mu})$, в базисе $\{f_i\}$. Пользуясь следствием 4.4, нумерацию собственных значений выберем таким образом, что $|\lambda_i - \mu_i| \leqslant 2\|A - T\|$. Определим унитарный оператор U, положив $Ue_i = f_i$. Тогда

$$U^*TUe_i = U^*Tf_i = \mu_i U^* f_i = \mu_i f_i,$$

т. е. $U^*TU = \operatorname{diag}(\vec{\mu})$ в базисе $\{e_i\}$. Очевидно, что $[U^*TU, A] = 0$. Далее,

$$\|U^*TU - A\| = \sup_i |\mu_i - \lambda_i| \leqslant 2\|T - A\|$$

из-за выбора нумерации. Тем самым утверждения 1) и 2) доказаны. Имеем

$$\begin{aligned}\|\,[U, A]\,\| &= \|UA - AU\| = \|UAU^* - A\| \leqslant \\ &\leqslant \|UAU^* - T\| + \|T - A\| = \|A - U^*TU\| + \|T - A\| \leqslant 3\|T - A\|,\end{aligned}$$

так что и 3) доказано. $\square$

Лемма 4.6. *Пусть F — $\mathcal{U}(H)$-ковариантное отображение C^*-алгебры $\mathcal{K}(H)$. Тогда для любого самосопряжённого компактного оператора X найдётся непрерывная функция φ, такая что $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(X) = F(X)$.*

Доказательство. Пусть $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — собственный базис для X, $Xe_n = \lambda_n e_n$, $\lambda_n \to 0$. Тогда $F(X)e_n = \mu_n e_n$, где $\mu_n \to 0$, поскольку оператор $F(X)$ компактен. Если $\lambda_n = \lambda_m$, то $\mu_n = \mu_m$ (иначе оператор Y, меняющий местами векторы e_n и e_m, коммутирует с X, но не коммутирует с $F(X)$, что противоречит лемме 3.1). Поэтому существует непрерывная функция φ, для которой $\varphi(\lambda_n) = \mu_n$ и $\varphi(0) = 0$. Ясно, что $F(X) = \varphi(X)$. $\square$

Будем говорить, что функция f, определённая на c_0, *равномерно непрерывна в* $\vec{\sigma}(A)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что из условий $\vec{\lambda} \in \vec{\sigma}(A)$, $\vec{\mu} \in c_0$, $\|\vec{\lambda} - \vec{\mu}\| < \delta$ следует, что $|f(\vec{\lambda}) - f(\vec{\mu})| < \varepsilon$.

Теорема 4.7. *Отображение F_f непрерывно в точке $A \in \mathcal{K}(H)_{\mathrm{sa}}$ тогда и только тогда, когда функция f равномерно непрерывна в $\vec{\sigma}(A)$.*

Доказательство. Пусть отображение F_f непрерывно в точке $A \in \mathcal{K}(H)_{\mathrm{sa}}$. Тогда для любого ε найдётся такое δ, что $\|F_f(X) - F_f(A)\| \leqslant \varepsilon$, если $\|X - A\| < \delta$. Пусть $\vec{\lambda} \in \vec{\sigma}(A)$ и $|x_i - \lambda_i| < \delta$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Выберем базис, в котором $A = \mathrm{diag}(\vec{\lambda})$, и пусть $X = \mathrm{diag}(\vec{x})$ в этом же базисе. Тогда $\|X - A\| < \delta$, и значит,

$$\|f(\vec{x}) - f(\vec{\lambda})\| = \big(F_f(X) - F_f(A)\big)_{11} \leqslant \varepsilon.$$

Так как это неравенство выполняется для любого $\vec{\lambda} \in \vec{\sigma}(A)$, то f равномерно непрерывна в $\vec{\sigma}(A)$.

Предположим теперь, что f равномерно непрерывна в $\vec{\sigma}(A)$, и будем доказывать, что отображение F_f непрерывно в точке A. Сначала мы рассмотрим два частных случая.

1. Пусть $T \in \mathcal{K}(H)_{\mathrm{sa}}$ коммутирует с A. Выберем базис, в котором A и T диагональны, $A = \mathrm{diag}(\vec{\lambda})$, $T = \mathrm{diag}(\vec{\mu})$. В силу равномерной непрерывности f для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta_1 > 0$, что при каждом $n \in \mathbb{N}$

$$\big|f\big(\tau_{1,n}(\vec{\lambda})\big) - f\big(\tau_{1,n}\vec{\mu}\big)\big| \leqslant \varepsilon,$$

как только $\|\vec{\lambda} - \vec{\mu}\| \leqslant \delta_1$. Поэтому если $\|T - A\| \leqslant \delta_1$, то $\|\vec{\lambda} - \vec{\mu}\| \leqslant \delta_1$, и следовательно, $\|F_f(T) - F_f(A)\| \leqslant \varepsilon$.

2. Пусть $T = UAU^*$, где U — унитарный оператор. По лемме 4.6 существует непрерывная функция $\varphi(t)$ (зависящая только от f и A), такая что $\varphi(A) = F_f(A)$. Так как F_f $\mathcal{U}(H)$-ковариантно, то

$$\varphi(T) = \varphi(UAU^*) = U\varphi(A)U^* = UF_f(A)U^* = F_f(UAU^*) = F_f(T).$$

Любая непрерывная функция действует непрерывно на $\mathcal{L}(H)$ (для многочленов это очевидно, а общий случай доказывается с помощью теоремы Стоуна—Вейерштрасса), так что, в частности, отображение $X \to \varphi(X)$ непрерывно в точке A. Поэтому для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$, такое что $\|F_f(T) - F_f(A)\| = \|\varphi(T) - \varphi(A)\| \leqslant \varepsilon$, если $\|T - A\| \leqslant \delta_2$.

Наконец, рассмотрим общий случай. Пусть $U = U(T)$ такое же, как в лемме 4.5. Тогда

$$\begin{aligned}\|F_f(T) - F_f(A)\| \leqslant \|F_f(T) - F_f(UAU^*)\| + \|F_f(UAU^*) - F_f(A)\| = \\ = \|F_f(U^*TU) - F_f(A)\| + \|F_f(UAU^*) - F_f(A)\|.\end{aligned}$$

Согласно утверждениям 1) и 2) леммы 4.5 и пункту 1 первое слагаемое не превосходит ε, если $\|T - A\| < \delta_1$. Так как $\|UAU^* - A\| = \|\,[U, A]\,\|$, то согласно утверждению 3) леммы 4.5 и пункту 2 второе слагаемое не превосходит ε, если

$\|T-A\| < \delta_2/3$. Таким образом, $\|F_f(T)-F_f(A)\| \leqslant 2\varepsilon$ при $\|T-A\| < \delta$, где $\delta = \min(\delta_1, \delta_2/3)$. □

Литература

[1] Глазман И. М., Любич Ю. И. Конечномерный линейный анализ. — М.: Наука, 1969.

[2] Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965.

[3] Далецкий Ю. Л., Крейн С. Г. Интегрирование и дифференцирование функций эрмитовых операторов и применения к теории возмущений // Тр. сем. по функц. анализу Воронеж. ун-та. — 1956. — Вып. 1. — С. 81—105.

[4] Пеллер В. В. Операторы Ганкеля в теории возмущений унитарных и самосопряжённых операторов // Функц. анализ и его прил. — 1985. — Т. 19, № 2. — С. 37—51.

[5] Davidson K. R. C^*-Algebras by Example. — Amer. Math. Soc., 1996. — (Fields Institute Monogr. Ser.; Vol. 6).

[6] Shulman T. On covariant maps of matrices // Methods Funct. Anal. Topology. — 2003. — Vol. 9, no. 3. — P. 252—261.