Кольца, над которыми все модули являются I_0-модулями. II

А. Н. АБЫЗОВ
Казанский государственный университет
e-mail: Adel.Abyzov@ksu.ru

А. А. ТУГАНБАЕВ
Российский государственный торгово-экономический университет
e-mail: tuganbaev@gmail.com

УДК 512.55

Ключевые слова: I_0-модуль, слабо регулярный модуль, полуартиново кольцо.

Аннотация

Все правые R-модули являются I_0-модулями в точности тогда, когда либо R — правое SV-кольцо, либо $R/I^{(2)}(R)$ — полуцепное артиново кольцо с нулевым квадратом радикала Джекобсона.

Abstract

A. N. Abyzov, A. A. Tuganbaev, Rings over which all modules are I_0-modules. II, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 2, pp. 3—12.

All right R-modules are I_0-modules if and only if either R is a right SV-ring or $R/I^{(2)}(R)$ is an Artinian serial ring such that the square of the Jacobson radical of $R/I^{(2)}(R)$ is equal to zero.

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей, а модули — унитарными. Говоря об артиновых кольцах или подобных объектах, мы предполагаем, что соответствующие условия выполнены справа и слева. Подмодуль X модуля M называется *малым в* M, если $X + Y \neq M$ для любого собственного подмодуля P модуля M. Следуя [14], мы называем модуль M I_0-*модулем*, если каждый его немалый подмодуль содержит ненулевое прямое слагаемое модуля M. Ясно, что I_0-модули являются слабо регулярными модулями, рассматривавшимися в [1—3, 11]; модуль M называется *слабо регулярным*, если каждый его подмодуль, не лежащий в радикале Джекобсона модуля M, содержит в себе ненулевое прямое слагаемое модуля M. Слабо регулярные модули изучались в [1—3; 6; 7; 11; 13; 14; 15, гл. 3; 16] и других работах. Кольцо называется *обобщённым правым* SV-*кольцом*, если над ним каждый правый модуль является слабо регулярным. Ясно, что если каждый правый A-модуль является I_0-модулем, то A — обобщённое правое SV-кольцо. Кроме того, поскольку из результатов работы следует, что каждый правый модуль над обобщённым правым

SV-кольцом имеет малый радикал Джекобсона, то каждый правый модуль над обобщённым правым SV-кольцом является I_0-модулем. Целью работы является изучение обобщённых правых SV-колец.

Основным результатом работы является теорема 1.

Теорема 1. *Для кольца R равносильны следующие условия*:

1) *все правые R-модули являются I_0-модулями*;
2) *либо R — правое SV-кольцо, либо $R/I^{(2)}(R)$ — артиново полуцепное кольцо и $J^2\big(R/I^{(2)}(R)\big) = 0$.*

Доказательство теоремы 1 разбито на ряд утверждений, некоторые из которых представляют самостоятельный интерес. Приведём необходимые определения и обозначения.

Пересечение всех максимальных подмодулей модуля M обозначается через $\mathrm{J}(M)$ и называется *радикалом Джекобсона* модуля M. Через $E(M)$ обозначается инъективная оболочка модуля M. Кольцо A называется *регулярным* (по фон Нейману), если $a \in aAa$ для любого элемента $a \in A$. Модуль M называется *цепным*, если любые два его подмодуля сравнимы по включению. Прямая сумма цепных модулей называется *полуцепным* модулем. Модуль M называется *полупростым*, если каждый его подмодуль является прямым слагаемым в M. Подмодуль N модуля M называется *существенным*, если для любого подмодуля X модуля M равенство $X \cap N = 0$ влечёт равенство $X = 0$. В этом случае также говорят, что M — *существенное расширение* модуля N. Модуль, изоморфный подмодулю гомоморфного образа прямых сумм копий модуля M, называется *M-подпорождённым* модулем. Полная подкатегория всех правых R-модулей, состоящая из всех M-подпорождённых модулей, обозначается через $\sigma(M)$ и называется *категорией Висбауэра* модуля M.

Рядом Лёви модуля M называется возрастающая цепочка

$$0 \subset \mathrm{Soc}_1(M) = \mathrm{Soc}(M) \subset \ldots \subset \mathrm{Soc}_\alpha(M) \subset \mathrm{Soc}_{\alpha+1}(M) \subset \ldots,$$

где

$$\mathrm{Soc}_\alpha(M)/\mathrm{Soc}_{\alpha-1}(M) = \mathrm{Soc}\big(M/\mathrm{Soc}_{\alpha-1}(M)\big)$$

для каждого непредельного ординального числа α и

$$\mathrm{Soc}_\alpha(M) = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathrm{Soc}_\beta(M)$$

для каждого предельного ординального числа α. Обозначим через $L(M)$ подмодуль вида $\mathrm{Soc}_\xi(M)$, где ξ — наименьший ординал, для которого выполнено равенство $\mathrm{Soc}_\xi(M) = \mathrm{Soc}_{\xi+1}(M)$. Модуль M называется *полуартиновым*, если $M = L(M)$. Модуль полуартинов в точности тогда, когда каждый его фактор-модуль является существенным расширением полупростого модуля. Кольцо R называется *полуартиновым справа*, если модуль R_R является полуартиновым. Для произвольного кольца R через $L(R)$ и $\mathrm{Soc}(R)$ обозначаются идеалы $L(R_R)$ и $\mathrm{Soc}(R_R)$ соответственно. Модуль M называется *инъективным*, если для любого модуля X и каждого подмодуля Y модуля X все гомоморфизмы $Y \to M$

продолжаются до гомоморфизмов $X \to M$. Кольцо A называется *правым V-кольцом* при выполнении следующих эквивалентных условий (см. [10, 7.32A]):

1) все простые правые A-модули инъективны;
2) в кольце A каждый собственный правый идеал — пересечение максимальных правых идеалов.

Полуартиново справа правое V-кольцо называется *правым* SV-*кольцом*.

В каждом кольце R мы выделим два идеала $I^{(1)}(R)$ и $I^{(2)}(R)$, которые строятся с помощью трансфинитной индукции.

Определим идеал $I^{(1)}(R)$. При $\alpha = 0$ положим $I^{(1)}_\alpha(R) = 0$. Если $\alpha = \beta+1$, то $I^{(1)}_{\beta+1}(R)/I^{(1)}_\beta(R)$ — сумма всех простых инъективных подмодулей правого R-модуля $R/I^{(1)}_\beta(R)$. Когда α — предельное ординальное число, положим

$$I^{(1)}_\alpha(R) = \bigcup_{\beta<\alpha} I^{(1)}_\beta(R).$$

Ясно, что для некоторого ординального числа τ имеют место равенства $I^{(2)}_\tau(R) = I^{(1)}_{\tau+1}(R)$. Далее через $I^{(1)}(R)$ будем обозначать правый идеал $I^{(1)}_\tau(R)$, который, как легко заметить, является идеалом.

Определим идеал $I^{(2)}(R)$. При $\alpha = 0$ положим $I^{(2)}_\alpha(R) = 0$. Если $\alpha = \beta + 1$, то $I^{(2)}_{\beta+1}(R)/I^{(2)}_\beta(R)$ — сумма всех локальных инъективных подмодулей правого R-модуля $R/I^{(2)}_\beta(R)$ длины не больше двух, у которых фактор-модуль по радикалу Джекобсона является инъективным модулем. Когда α — предельное ординальное число, положим

$$I^{(2)}_\alpha(R) = \bigcup_{\beta<\alpha} I^{(2)}_\beta(R).$$

Ясно, что для некоторого ординального числа τ имеет место равенство $I^{(2)}_\tau(R) = I^{(2)}_{\tau+1}(R)$. Далее через $I^{(2)}(R)$ будем обозначать правый идеал $I^{(2)}_\tau(R)$, который, как легко заметить, является идеалом.

Лемма 2. *Пусть e — ненулевой идемпотент кольца R.*

1. *Если N — подмодуль модуля M, то имеет место естественный изоморфизм правых eRe-модулей $(M/N)e \cong Me/Ne$.*
2. *Если M — полупростой правый R-модуль, то Me — полупростой правый eRe-модуль.*
3. *Если eRe — регулярное кольцо, то из инъективности правого R-модуля M следует инъективность правого eRe-модуля Me.*

Доказательство. Утверждения 1 и 2 леммы 2 хорошо известны и проверяются непосредственно.

Докажем утверждение 3. Поскольку над кольцом eRe каждый модуль является плоским, то наше утверждение следует из [10, 11.35] и eRe-изоморфизма $\mathrm{Hom}_R(eR, M) \cong Me$. □

Лемма 3. *Пусть M — слабо регулярный правый R-модуль и N — такой подмодуль модуля M, что $\big(N+\mathrm{J}(M)\big)/\mathrm{J}(M)$ — простой подмодуль модуля $M/\mathrm{J}(M)$. Тогда модуль N содержит такое локальное прямое слагаемое mR модуля M, что $\big(N+\mathrm{J}(M)\big)/\mathrm{J}(M) = \big(m+\mathrm{J}(M)\big)R$.*

Доказательство. Пусть n — такой элемент подмодуля N, что

$$\big(N+\mathrm{J}(M)\big)/\mathrm{J}(M) = \big(n+\mathrm{J}(M)\big)R.$$

Из слабой регулярности модуля M следует существование такого циклического подмодуля mR, что $mR \not\subset \mathrm{J}(M)$, $mR \subset nR$ и mR — прямое слагаемое модуля M. Тогда

$$\big(N+\mathrm{J}(M)\big)/\mathrm{J}(M) = \big(m+\mathrm{J}(M)\big)R \cong mR/(\mathrm{J}(M)\cap mR) \cong mR/\mathrm{J}(mR),$$

что доказывает локальность модуля mR. □

Лемма 4. *Пусть R — кольцо.*

1. *Для каждого ординального числа α всякий инъективный простой правый $R/I_\alpha^{(1)}$-модуль M является инъективным правым R-модулем.*
2. *Если e — центральный идемпотент кольца R и eR — полупростой модуль над кольцом R, то eR — инъективный модуль.*

Доказательство. 1. Покажем с помощью трансфинитной индукции, что для каждого ординального числа α инъективный простой R/I_α-модуль M является инъективным R-модулем. Если $\alpha = 0$, то утверждение тривиально. Пусть α — некоторое ординальное число и для каждого $\beta < \alpha$ всякий инъективный простой правый R/I_β-модуль M является инъективным правым R-модулем. Рассмотрим произвольный инъективный простой правый R/I_α-модуль M. Допустим, что $E(M) \neq M$, где $E(M)$ — инъективная оболочка R-модуля M. Если $E(M)I_\alpha \neq 0$, то обозначим через γ наименьшее ординальное число, для которого $E(M)I_\gamma \neq 0$. Ясно, что $\gamma = \gamma_0 + 1$ для некоторого ординального числа γ_0. Тогда $E(M)$ — R/I_{γ_0}-модуль и для некоторого примитивного идемпотента e из идеала I_γ/I_{γ_0} имеет место неравенство $E(M)e \neq 0$. По предположению индукции простой модуль $e(R/I_{\gamma_0})$ является инъективным R-модулем. Согласно [4, 6.6.3] $E(M)$ — непростой модуль, в котором любые два ненулевых подмодуля имеют ненулевое пересечение. С другой стороны, $E(M)$ содержит простой инъективный R-модуль. Полученное противоречие показывает, что $E(M)I_\alpha = 0$. Таким образом, $E(M)$ является R/I_α-модулем и, поскольку M — инъективный простой R/I_α-модуль, $E(M) = M$.

2. Рассмотрим вложение $eR \subset E(eR)$. Если $E(eR)(1-e) \neq 0$, то для некоторого элемента x из $E(eR)$ имеем $x(1-e) \neq 0$. Поскольку eR существенен в $E(eR)$, для некоторых элементов r и s из R имеем $x(1-e)r = es \neq 0$. Тогда

$$es = ese = x(1-e)re = 0.$$

Полученное противоречие показывает, что $E(eR)(1-e) = 0$, и следовательно, $E(eR)$ мы можем рассматривать как модуль над кольцом eR. Поскольку eR — полупростой модуль, то eR — полупростое кольцо и $eR = E(eR)$. □

Лемма 5 [6, следствие 7]. *Над обобщённым правым* SV*-кольцом каждый неразложимый правый модуль является либо простым модулем, либо локальным модулем длины два.*

Лемма 6 [6, теорема 1]. *Для кольца R равносильны следующие условия*:

1) *R — обобщённое правое* SV*-кольцо*;
2) *над кольцом R каждый правый модуль является либо полупростым, либо содержит в себе ненулевой инъективный подмодуль.*

Замечание. Утверждение, аналогичное предыдущему, для категории Висбауэра было независимо установлено первым автором.

Лемма 7 [2, теорема 3; 6, следствие 10]. *Для полусовершенного кольца R равносильны следующие условия*:

1) *R — обобщённое правое* SV*-кольцо*;
2) *R — артиново полуцепное кольцо и $J^2(R) = 0$.*

Лемма 8. *Если R — полуартиново справа обобщённое правое* SV*-кольцо, то каждый неполупростой правый R-модуль N будет содержать инъективный локальный подмодуль длины не больше двух. В частности, каждый локальный модуль длины два инъективен.*

Доказательство. Поскольку модуль N не полупрост, то из леммы 6 следует, что он будет содержать ненулевой инъективный подмодуль N_0. Так как R — полуартиново справа кольцо, то подмодуль N_0 также является полуартиновым и, следовательно, $N_0/\mathrm{J}(N_0)$ будет содержать простой подмодуль. Тогда из лемм 3 и 5 следует, что модуль N_0 содержит прямое слагаемое, являющееся инъективным локальным модулем длины не больше двух. □

Лемма 9. *Пусть M — правый модуль над кольцом R.*

1. *Если $MI^{(2)}(R) \neq 0$, то M содержит ненулевой локальный инъективный подмодуль длины не больше двух.*
2. *Если $R = I^{(2)}(R)$, то R — правое* SV*-кольцо.*

Доказательство. 1. Пусть γ — наименьшее ординальное число с условием $MI^{(2)}_{\gamma}(R) \neq 0$. Ясно, что γ — непредельное ординальное число. Тогда модуль M содержит ненулевой гомоморфный образ модуля $I^{(2)}_{\gamma}(R)/I^{(2)}_{\gamma-1}(R)$ и, следовательно, M содержит локальный инъективный подмодуль длины не больше двух.

2. Второе утверждение следует из первого. □

Лемма 10. *Для кольца R равносильны следующие условия*:

1) *R — полуартиново справа обобщённое правое* SV*-кольцо*;
2) *либо R — правое* SV*-кольцо, либо $R/I^{(2)}(R)$ — артиново полуцепное кольцо и $J^2\big(R/I^{(2)}(R)\big) = 0$.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Обозначим через S фактор-кольцо $R/I^{(2)}(R)$, которое можно рассматривать как правый R-модуль. Предположим, что $S/\mathrm{J}(S)$ — неполупростое кольцо. Тогда по лемме 6 правый R-модуль $S/\mathrm{J}(S)$ содержит в себе ненулевой инъективный подмодуль и, следовательно, будет содержать и простой инъективный подмодуль. Тогда из лемм 3 и 8 следует, что правый R-модуль S содержит инъективный локальный подмодуль длины не больше двух, у которого фактор-модуль по радикалу Джекобсона является инъективным модулем. Поскольку по построению идеала $I^{(2)}(R)$ правый R-модуль $R/I^{(2)}(R)$ не может содержать локальных подмодулей длины не больше двух, у которых фактор-модуль по радикалу Джекобсона является инъективным модулем, то получаем противоречие. Таким образом, $S/\mathrm{J}(S)$ не содержит ненулевых инъективных подмодулей и, следовательно, согласно лемме 6 является полупростым модулем. Тогда S является полулокальным кольцом, и импликация следует из лемм 6 и 7.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Покажем, что каждый локальный правый $R/I^{(2)}(R)$-модуль N длины два является инъективным R-модулем. Пусть $E(N)$ — инъективная оболочка R-модуля N. Если $E(N)I^{(2)}(R) = 0$, то $E(N)$ можно рассматривать как $R/I^{(2)}(R)$-модуль. Тогда из инъективности $R/I^{(2)}(R)$-модуля N следует равенство $N = E(N)$. В случае когда $E(N)I^{(2)}(R) \neq 0$, из леммы 9 следует, что $E(N)$ содержит инъективный локальный подмодуль длины не больше двух, и тогда равенство $E(N) = N$ проверяется непосредственно.

Рассмотрим произвольный неполупростой правый R-модуль N. Если $NI^{(2)}(R) = 0$, то N можно рассматривать как правый $R/I^{(2)}(R)$-модуль. Тогда N содержит локальный подмодуль длины два, который является инъективным R-модулем. Если $NI^{(2)}(R) \neq 0$, то из леммы 9 следует, что N содержит ненулевой локальный инъективный подмодуль. Таким образом, приведённые выше рассуждения показывают, что в произвольном неполупростом модуле N содержится ненулевой инъективный подмодуль. Тогда импликация следует из леммы 6. $\square$

Лемма 11. *Если e — ненулевой идемпотент кольца R, eRe — регулярное кольцо и R — обобщённое правое* SV*-кольцо, то eRe — обобщённое правое* SV*-кольцо.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда из леммы 6 следует, что над кольцом eRe найдётся неполупростой правый модуль N, который не содержит ненулевых инъективных подмодулей. Рассмотрим правый R-модуль $M = N \otimes_{eRe} eR$. Ясно, что $Me \cong N$. Определим в модуле M по трансфинитной индукции для каждого ординального числа α подмодуль M_α следующим образом. При $\alpha = 0$ положим $M_\alpha = 0$. Если $\alpha = \beta + 1$, то $M_{\beta+1}/M_\beta$ — сумма всех инъективных подмодулей модуля M/M_β. Когда α — предельное ординальное число, положим $M_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} M_\beta$. Обозначим через M_0 объединение всех таких модулей. Покажем с помощью трансфинитной индукции, что для каждого ординального числа α имеет место равенство $M_\alpha e = 0$. Если $\alpha = 0$, то утверждение тривиально. Пусть α — некоторое ординальное число и $M_\beta e = 0$ для каждого $\beta < \alpha$. Если α — предельное ординальное число, то равенство $M_\alpha e = 0$ тривиально. Предположим, что α — непредельное ординальное число и $\alpha = \alpha_0 + 1$. По предположению индукции $M_{\alpha_0} e = 0$. Тогда по лемме 2 имеем

$$(M_\alpha / M_{\alpha_0})e \cong (M_\alpha e)/(M_{\alpha_0} e) \cong M_\alpha e.$$

Если $M_\alpha e \neq 0$, то в модуле M_α / M_{α_0} найдётся инъективный подмодуль L, для которого имеет место неравенство $Le \neq 0$. Поскольку по лемме 2 Le — инъективный eRe-модуль, то $M_\alpha e$ и, следовательно, Me будут содержать в себе ненулевые инъективные подмодули, что противоречит исходному предположению. Таким образом, для каждого ординального числа α имеет место равенство $M_\alpha e = 0$, и следовательно, $M_0 e = 0$. Поскольку M/M_0 не содержит инъективных подмодулей, то из леммы 6 следует, что модуль M/M_0 полупрост. Тогда по лемме 2 $(M/M_0)e$ — полупростой модуль, и следовательно, поскольку $(M/M_0)e \cong Me$, модуль Me также является полупростым, что противоречит выбору модуля N. □

При доказательстве следующей леммы мы использовали рассуждения, приведённые в [12, лемма 10].

Лемма 12. *Пусть R — самоинъективное справа регулярное кольцо и A — счётно порождённый не конечно порождённый правый идеал кольца R. Если для некоторого идемпотента e модуль eR является существенным расширением A_R, то модуль $R/(A \oplus (1-e)R)$ не содержит ненулевых инъективных подмодулей.*

Доказательство. Допустим, что $B = A \oplus (1-e)R$. Предположим, что модуль R/B содержит ненулевой инъективный подмодуль C/B. Тогда $R/B = C/B \oplus D/B$. Поскольку $R/D \cong C/B$, R/D — инъективный модуль. Так как правый идеал B счётно порождён, а модуль D/B цикличен, то правый идеал D счётно порождён. Тогда из [12, следствие 9] следует, что D — конечно порождённый правый идеал регулярного кольца R. Поэтому D — прямое слагаемое в R_R. Поскольку B — существенный подмодуль в R_R и B лежит в прямом слагаемом D модуля R_R, то $D = R$. Следовательно, $C/B = 0$, что противоречит нашему предположению. □

Теорема 13. *Для кольца R равносильны следующие условия*:

1) *R — правое* SV*-кольцо;*
2) *R — регулярное кольцо и каждый правый R-модуль является слабо регулярным.*

Доказательство. Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) проверяется непосредственно.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть R — регулярное кольцо, над которым каждый правый модуль слабо регулярен. Предположим, что $R \neq I^{(1)}(R)$, и обозначим через S кольцо $R/I^{(1)}(R)$. Из леммы 4 следует, что модуль S_S не содержит простых инъективных S-подмодулей и, в частности, не является полупростым. Поскольку над кольцом S каждый модуль является слабо регулярным, то из леммы 6 следует, что S_S содержит ненулевой инъективный подмодуль вида eS, где e — некоторый идемпотент кольца S. Так как кольцо eSe изоморфно кольцу эндоморфизмов инъективного модуля eS и $\mathrm{J}(eSe) = 0$, то согласно [17, 22.1] оно является самоинъективным справа регулярным кольцом. Тогда из леммы 11 следует, что eSe — обобщённое правое SV-кольцо. Поскольку eS не содержит простых подмодулей, то регулярное кольцо eSe не содержит примитивных идемпотентов, т. е. $\mathrm{Soc}(eSe) = 0$. Тогда в кольце eSe мы можем выделить бесконечное семейство ортогональных ненулевых идемпотентов вида $\{e_{ij}\}_{i,j=1}^{\infty}$. Для каждого i модуль $\bigoplus\limits_{j=1}^{\infty} e_{ij}eSe$ является существенным подмодулем в f_ieSe, где f_i — некоторый идемпотент кольца eSe. Семейство правых идеалов $\{f_ieSe\}_{i=1}^{\infty}$ является, очевидно, независимым, и для некоторого идемпотента f кольца eSe правый идеал $\bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} f_ieSe$ является существенным в $feSe$. Правый идеал $\bigoplus\limits_{i,j=1}^{\infty} e_{ij}eSe$ является существенным подмодулем в $feSe$, и правый eSe-модуль $eSe/\Big(\bigoplus\limits_{i,j=1}^{\infty} e_{ij}eSe \oplus (e-f)eSe\Big)$ содержит подмодуль, изоморфный модулю $\bigoplus\limits_{i=1}^{\infty}\Big(f_ieSe/\Big(\bigoplus\limits_{j=1}^{\infty} e_{ij}eSe\Big)\Big)$. Тогда модуль $eSe/\Big(\bigoplus\limits_{i,j=1}^{\infty} e_{ij}eSe \oplus (e-f)eSe\Big)$ не является полупростым и, следовательно, согласно лемме 6 содержит ненулевой инъективный подмодуль, что противоречит лемме 12. □

Лемма 14. *Если R — обобщённое правое* SV*-кольцо, то R — полуартиново справа кольцо.*

Доказательство. Пусть R — обобщённое правое SV-кольцо. Предположим, что $R \neq L(R)$, и обозначим через S кольцо $R/L(R)$, которое также является обобщённым правым SV-кольцом. Ясно, что $\mathrm{Soc}(S_S) = 0$, и следовательно, по лемме 6 $\mathrm{J}(S) = 0$. Поскольку модуль S_S не является полупростым, то из леммы 6 следует, что S_S содержит ненулевой инъективный подмодуль вида eS, где e — некоторый идемпотент кольца S. Согласно [17, 22.1] кольцо eSe регулярно. Тогда из леммы 11 и теоремы 13 следует, что eSe — правое SV-кольцо и, следовательно, содержит некоторый примитивный идемпотент f. Модуль feS является простым, что противоречит равенству $\mathrm{Soc}(S_S) = 0$. □

Окончание доказательства теоремы 1. Теорема 1 непосредственно вытекает из лемм 9, 10 и 14. □

Замечание. Отметим, что теоремы 1 и 13 на данном уровне общности были сначала получены первым из авторов.

Следствие 15. *Пусть R — обобщённое правое* SV*-кольцо. Тогда мощность классов изоморфизмов неразложимых правых R-модулей, у которых фактор-модуль по радикалу Джекобсона неинъективен, является конечным.*

Доказательство. Пусть M — неразложимый правый R-модуль, у которого фактор-модуль по радикалу Джекобсона неинъективен. Из леммы 5 следует, что M — локальный модуль длины два. Если $MI^{(2)}(R) \neq 0$, то из доказательства леммы 9 следует, что модуль $M/\mathrm{J}(M)$ является инъективным. Полученное противоречие показывает, что $MI^{(2)}(R) = 0$, и следовательно, по теореме 1 модуль M изоморфен неразложимому прямому слагаемому модуля $\big(R/I^{(2)}(R)\big)_R$. □

Кольцо называется I-бесконечным, если оно содержит бесконечное множество ортогональных идемпотентов.

Теорема 16. *Если R — кольцо, у которого каждое I-бесконечное фактор-кольцо содержит примитивный центральный идемпотент, то равносильны следующие условия*:

1) *R — обобщённое* SV*-кольцо*;
2) *либо R — правое* SV*-кольцо, либо $R/I^{(1)}(R)$ — артиново полуцепное кольцо и $J^2\big(R/I^{(1)}(R)\big) = 0$.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Обозначим через S кольцо $R/I^{(1)}(R)$. Предположим, что S не является полусовершенным. Из следствия 15 следует, что мощность классов изоморфизмов неразложимых правых S-модулей, у которых фактор-модули по радикалу Джекобсона неинъективны, равна некоторому натуральному числу n. Пусть $m > n$. Тогда по предположению в кольце S мы можем выделить m ортогональных примитивных центральных идемпотентов $e_1, \ldots, e_m$. Согласно леммам 4 и 5 $I^{(1)}(S) = 0$ и для каждого i e_iS — локальный модуль длины два. Поскольку модули $e_1S, \ldots, e_mS$ попарно не изоморфны и $m > n$, то существует такой примитивный центральный идемпотент f кольца S, что модуль fS является локальным модулем длины два и $fS/\mathrm{J}(fS)$ — инъективный модуль. Рассмотрим произвольный ненулевой элемент вида fj, где $j \in \mathrm{J}(S)$. Поскольку $\mathrm{Ann}(f) \subset \mathrm{Ann}(fj)$, то имеет место гомоморфизм φ из fS в fjS, при котором $\varphi(f) = fj$, и ядро этого гомоморфизма равно $f\mathrm{J}(S) = fjS$. Тогда $f\mathrm{J}(S) \cong fS/f\mathrm{J}(S)$ и, следовательно, $fS/\mathrm{J}(fS)$ не может быть инъективным. Полученное противоречие показывает, что кольцо $R/I^{(1)}(R)$ полусовершенно и, следовательно, согласно теореме 1 является артиновым полуцепным и $J^2\big(R/I^{(1)}(R)\big) = 0$. □

Теорема 17 [9]. *Для кольца R без бесконечных множеств ортогональных нецентральных идемпотентов следующие условия равносильны*:

1) *R — обобщённое правое* SV*-кольцо*;
2) *либо R — правое* SV*-кольцо, либо $R/I^{(1)}(R)$ — артиново полуцепное кольцо и $J^2\big(R/I^{(1)}(R)\big) = 0$.*

Открытый вопрос. В связи с теоремами 1 и 17 рассмотрим следующие два условия для произвольного кольца R:

1) либо R — правое SV-кольцо, либо $R/I^{(1)}(R)$ — артиново полуцепное кольцо и $J^2\big(R/I^{(1)}(R)\big) = 0$;

2) либо R — правое SV-кольцо, либо $R/I^{(2)}(R)$ — артиново полуцепное кольцо и $J^2\big(R/I^{(2)}(R)\big) = 0$.

Непосредственно проверяется, что всегда верна импликация 1) $\Longrightarrow$ 2). Верно ли, что эти два условия эквивалентны? По теореме 17 это верно для колец без бесконечных множеств ортогональных нецентральных идемпотентов.

Литература

[1] Абызов А. Н. Замкнутость слабо регулярных модулей относительно прямых сумм // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 2003. — № 9. — С. 3—5.

[2] Абызов А. Н. Слабо регулярные модули над полусовершенными кольцами // Чебышёвский сб. — 2003. — Т. 4, № 1. — С. 4—9.

[3] Абызов А. Н. Слабо регулярные модули // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 2004. — № 3. — С. 3—6.

[4] Каш Ф. Модули и кольца. — М.: Мир, 1981.

[5] Сахаев И. И., Хакми Х. И. О сильно регулярных модулях и кольцах // Изв. высш. учебн. завед. Математика — 1998. — № 2. — С. 60—63.

[6] Туганбаев А. А. Модули с большим числом прямых слагаемых // Фундамент. и прикл. мат. — 2006. — Т. 12, вып. 8. — С. 233—241.

[7] Туганбаев А. А. Кольца, над которыми все модули полурегулярны // Фундамент. и прикл. мат. — 2007. — Т. 13, вып. 2. — С. 185—194.

[8] Туганбаев А. А. Кольца, над которыми все модули являются I_0-модулями // Фундамент. и прикл. мат. — 2007. — Т. 13, вып. 5. — С. 193—200.

[9] Туганбаев А. А. Кольца без бесконечных множеств нецентральных ортогональных идемпотентов // Фундамент. и прикл. мат. — 2008. — Т. 14, вып. 2. — С. 207—221.

[10] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. 1. — М.: Мир, 1977.

[11] Хакми Х. И. Сильно регулярные и слабо регулярные кольца и модули // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1994. — № 5. — С. 60—65.

[12] Dung N. V., Smith P. F. On semiartinian V-modules // J. Pure Appl. Algebra. — 1992. — Vol. 82, no. 1. — P. 27—37.

[13] Hamza H. I_0-rings and I_0-modules // Math. J. Okayama Univ. — 1998. — Vol. 40. — P. 91—97.

[14] Nicholson W. K. I-rings // Trans. Amer. Math. Soc. — 1975. — Vol. 207. — P. 361—373.

[15] Tuganbaev A. A. Rings Close to Regular. — Dordrecht: Kluwer Academic, 2002.

[16] Tuganbaev A. A. Semiregular, weakly regular, and π-regular rings // J. Math. Sci. — 2002. — Vol. 109, no. 3. — P. 1509—1588.

[17] Wisbauer R. Foundations of Module and Ring Theory. — Philadelphia: Gordon and Breach, 1991.