Элементарная эквивалентность унитарных линейных групп над кольцами

Е. С. БАЛМАСОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: asov@inbox.ru

Е. И. БУНИНА
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: HelenBunina@yandex.ru

УДК 512.54+510.67

Ключевые слова: элементарная эквивалентность, унитарные линейные группы, кольца с инволюцией.

Аннотация

Найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы две унитарные линейные группы над кольцами с инволюцией гиперболических рангов, не меньших двух, были элементарно эквивалентны.

Abstract

E. S. Balmasov, E. I. Bunina, Elementary equivalence of unitary linear groups over rings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 2, pp. 13—27.

We find necessary and sufficient conditions for two unitary linear groups over rings with involution with forms of hyperbolic rank at least 2 to be elementarily equivalent.

Введение

Элементарные свойства линейных групп были впервые рассмотрены в 1961 г. А. И. Мальцевым. В [4] он доказал, что группы $G_n(K_1)$ и $G_m(K_2)$ ($G = \mathrm{GL}$, $\mathrm{PGL}, \mathrm{SL}, \mathrm{PSL}$, $m \geqslant n \geqslant 3$) элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда $m = n$ и поля K_1 и K_2 элементарно эквивалентны.

Продолжение эта теория получила в 1992 г., когда К. И. Бейдар и А. В. Михалёв предложили в [6] общий способ решения проблем такого типа. Они обобщили теорему Мальцева для случая групп GL над первичными ассоциативными кольцами, содержащими $1/2$, над телами, а также для некоторых других алгебраических систем.

Кроме того, с помощью теорем К. И. Бейдара и А. В. Михалёва [6] и теоремы о продолжении изоморфизма И. З. Голубчика и А. В. Михалёва [2] в 1998 г.

в работе [1] Е. И. Буниной были доказаны теоремы об элементарной эквивалентности для унитарных линейных групп над ассоциативными кольцами и телами, содержащими $1/2$ и $1/3$ (для форм максимального ранга).

В данной работе мы обобщаем результаты работы [1] для случая унитарных линейных групп над кольцами, где форма не обязательно должна иметь максимальный ранг.

1. Определения и формулировки основных теорем

Инволюцией в кольце R называется антиавтоморфизм порядка 2, т. е. такое биективное отображение j кольца R на себя, что

1) $j(a+b) = j(a) + j(b)$ для любых $a, b \in R$;
2) $j(a \cdot b) = j(b) \cdot j(a)$ для любых $a, b \in R$;
3) $j^2(a) = j\big(j(a)\big) = a$ для любого $a \in R$.

Если R — кольцо с инволюцией j, то будем обозначать через τ инволюцию кольца $\mathrm{M}_m(R)$ матриц над R вида

$$\tau\colon A = \begin{pmatrix} a_{1\,1} & \dots & a_{1\,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m\,1} & \dots & a_{m\,m} \end{pmatrix} \longmapsto Q_m \circ \begin{pmatrix} a_{1\,1}^j & \dots & a_{m\,1}^j \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1\,m}^j & \dots & a_{m\,m}^j \end{pmatrix} \circ Q_m^{-1},$$

где

$$Q_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \bar{Q} \end{pmatrix},$$

где матрица $\bar{Q}$ косоэрмитова, т. е. $\bar{Q}^* = -\bar{Q}$.

Унитарной линейной группой $\mathrm{U}_m(R, j, Q_m)$ над кольцом R с инволюцией j называется группа матриц $A \in \mathrm{M}_m(R)$, таких что

$$AA^\tau = E.$$

Определение 1. Элемент α кольца R называется *идемпотентом* кольца R, если $\alpha^2 = \alpha$. Множество $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ идемпотентов кольца R называется *ортогональной системой идемпотентов* кольца R, если для любых $i, j \in \{1, \dots, k\}$ выполняется условие, что если $i \neq j$, то $\alpha_i \cdot \alpha_j = 0$.

Лемма 1. *Если кольцо K ассоциативно, содержит $1/2$, центр кольца содержит обратимый элемент α, такой что $\alpha \cdot \alpha^j - 1$ обратим, $m \geqslant 5$, то в $R := \mathrm{M}_m(K)$ существуют такие элементы f, a и h, что*

1) $f^2 = f$;
2) *a, h обратимы*;

3) $a^\tau = -a$, $h^\tau = h = h^{-1}$, $f^\tau = afa^{-1}$, $RfR = R$, $\{f, f^\tau, hfh\}$ — *ортогональная система идемпотентов кольца* R;
4) $R(1 - f - f^\tau - h(f + f^\tau)h)R = R$.

Доказательство. Примем за элемент f матричную единицу e_{11}. Тогда $e_{11}^2 = e_{11}$, и условие 1) выполнено. Кроме того, $f^\tau = e_{22}$.

Пусть теперь

$$a = Q, \quad h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix}.$$

Тогда a, h обратимы, т. е. выполнено условие 2). Далее, $a^\tau = -a$, $h^\tau = h = h^{-1}$, $afa^{-1} = f^\tau$,

$$RfR =$$

$$= \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{1\,1} & \dots & \alpha_{1\,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m\,1} & \dots & \alpha_{m\,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots \\ \dots & \dots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{1\,1} & \dots & \beta_{1\,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{m\,1} & \dots & \beta_{m\,m} \end{pmatrix} \middle| \alpha_{ij}, \beta_{ij} \in K \right\} \right\rangle =$$

$$= \left\langle \left\{ \begin{pmatrix} \beta_{1\,1}\alpha_{1\,1} & \dots & \beta_{1\,m}\alpha_{1\,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{1\,1}\alpha_{m\,1} & \dots & \beta_{1\,m}\alpha_{m\,1} \end{pmatrix} \middle| \alpha_{ij}, \beta_{ij} \in K \right\} \right\rangle = R.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} &f \cdot f^\tau = f^\tau \cdot f = 0, \\ &f \cdot (hfh) = (hfh) \cdot f = 0, \\ &f^\tau \cdot (hfh) = (hfh) \cdot f^\tau = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $\{f, f^\tau, hfh\}$ — ортогональная система идемпотентов кольца R, и условие 3) тоже выполнено.

И наконец, при $m \geqslant 5$

$$1 - f - f^\tau - h(f + f^\tau)h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix} \neq 0,$$

и условие 4) выполнено. □

Определение 2. Через $E_f(R,\tau)$ обозначим подгруппу унитарной группы $\mathrm{U}_m(R,\tau)$, порождённую элементами вида

$$1+fr(1-f)-\big(fr(1-f)\big)^{\tau}-\frac{1}{2}\cdot fr(1-f)\big(fr(1-f)\big)^{\tau}, \tag{1}$$

$$1+(1-f)rf-\big((1-f)rf\big)^{\tau}-\frac{1}{2}\cdot\big((1-f)rf\big)^{\tau}(1-f)rf, \tag{2}$$

где $r\in R$.

Определение 3. Две модели U_1 и U_2 одного языка первого порядка называются *элементарно эквивалентными*, если для любого предложения φ этого языка оно верно в модели U_1 тогда и только тогда, когда верно в модели U_2.

В данной работе мы доказываем следующие основную теорему и два её следствия.

Теорема 1. *Пусть R_1 и R_2 — ассоциативные кольца, содержащие $1/2$, $\alpha\in R_1^*$ такой, что $\alpha\cdot\alpha^j-1$ обратим, j_1 и j_2 — инволюции в кольцах R_1 и R_2 соответственно, $n,m\geqslant 5$, Q_n и Q_m — косоэрмитовы матрицы рассматриваемого выше вида. Тогда унитарные линейные группы $\mathrm{U}_n(R_1,j_1,Q_n)$ и $\mathrm{U}_m(R_2,j_2,Q_m)$ элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда кольца матриц $\mathrm{M}_n(R_1)$ и $\mathrm{M}_m(R_2)$ элементарно эквивалентны как кольца с инволюциями τ_1 и τ_2 соответственно.*

Следствие 1. *Пусть тела R_1 и R_2 имеют характеристику, не равную двум, j_1 и j_2 — инволюции в телах R_1 и R_2 соответственно, $n,m\geqslant 5$, $R_1\not\cong\mathbb{Z}_3$, Q_n и Q_m — косоэрмитовы формы описанного выше вида, унитарные линейные группы $\mathrm{U}_n(R_1,j_1,Q_n)$ и $\mathrm{U}_m(R_2,j_2,Q_m)$ элементарно эквивалентны. Тогда $m=n$ и тела R_1 и R_2 элементарно эквивалентны как тела с инволюциями j_1 и j_2 соответственно.*

Следствие 2. *Пусть коммутативные кольца R_1 и R_2 содержат $1/2$, j_1 и j_2 — инволюции в кольцах R_1 и R_2 соответственно, $n,m\geqslant 4$, существует такой $\alpha\in R_1^*$, что $\alpha\cdot\alpha^{j_1}-1\in R_1^*$, Q_n и Q_m — косоэрмитовы формы описанного выше вида, унитарные линейные группы $\mathrm{U}_n(R_1,j_1,Q_n)$ и $\mathrm{U}_m(R_2,j_2,Q_m)$ элементарно эквивалентны. Тогда $m=n$ и кольца R_1 и R_2 элементарно эквивалентны как кольца с инволюциями j_1 и j_2 соответственно.*

2. Изоморфизм между кольцами матриц

Лемма 2. *Пусть кольцо K с инволюцией j содержит $1/2$, $m\geqslant 4$, $f=e_{11}$, $R=\mathrm{M}_m(K)$. Тогда сложением и умножением матриц из $E_f(R,\tau)$ можно получить любую матрицу из $\mathrm{M}_m(K)$.*

Доказательство. Предположим, что $m=6$ (для бóльших размерностей подсчёты совершенно аналогичны). Найдём общий вид матриц, порождающих $E_f(R,\tau)$. Для этого сначала рассмотрим соотношение (1):

$$1+fr(1-f)-\big(fr(1-f)\big)^\tau-\frac{1}{2}fr(1-f)\big(fr(1-f)\big)^\tau=$$

$$=E+\begin{pmatrix}1&0&\dots&0\\0&0&\dots&0\\0&0&\dots&0\\0&0&\dots&0\\0&0&\dots&0\\0&0&\dots&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cdot&\alpha&\beta&\gamma&\delta&\varepsilon\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}-$$

$$-\left(\begin{pmatrix}1&0&\dots&0\\0&0&\dots&0\\0&0&\dots&0\\0&0&\dots&0\\0&0&\dots&0\\0&0&\dots&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cdot&\alpha&\beta&\gamma&\delta&\varepsilon\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}\right)^\tau-$$

$$-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&\dots&0\\0&0&\dots&0\\0&0&\dots&0\\0&0&\dots&0\\0&0&\dots&0\\0&0&\dots&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cdot&\alpha&\beta&\gamma&\delta&\varepsilon\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}\times$$

$$\times\left(\begin{pmatrix}1&0&\dots&0\\0&0&\dots&0\\0&0&\dots&0\\0&0&\dots&0\\0&0&\dots&0\\0&0&\dots&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cdot&\alpha&\beta&\gamma&\delta&\varepsilon\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}\right)^\tau=$$

$$=\begin{pmatrix}1&\alpha+\alpha^j+\frac{1}{2}\chi&\beta&\gamma&\delta&\varepsilon\\0&1&0&0&0&0\\0&\gamma^j&1&0&0&0\\0&-\beta^j&0&1&0&0\\0&-\delta^j\lambda_1-\varepsilon^j\lambda_2&0&0&1&0\\0&-\delta^j\lambda_3-\varepsilon^j\lambda_4&0&0&0&1\end{pmatrix}, \tag{3}$$

где

$$\chi=\gamma\beta^j-\beta\gamma^j-\delta\delta^j\lambda_1-\delta\varepsilon^j\lambda_2-\varepsilon\delta^j\lambda_3-\varepsilon\varepsilon^j\lambda_4.$$

Теперь посмотрим, что получается при подстановке матриц в соотношение (2):

$$1+(1-f)rf-\big((1-f)rf\big)^{\tau}-\frac{1}{2}\big((1-f)rf\big)^{\tau}(1-f)rf=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&\dots&0\\a&0&\dots&0\\b&0&\dots&0\\c&0&\dots&0\\d&0&\dots&0\\e&0&\dots&0\end{pmatrix}-$$

$$-\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\-a^j&0&-c^j&b^j&-d^j\mu_1-e^j\mu_2&-d^j\mu_3-e^j\mu_4\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}-$$

$$-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\-a^j&0&-c^j&b^j&-d^j\mu_1-e^j\mu_2&-d^j\mu_3-e^j\mu_4\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0&0&\dots&0\\a&0&\dots&0\\b&0&\dots&0\\c&0&\dots&0\\d&0&\dots&0\\e&0&\dots&0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\a+a^j&1&-c^j&b^j&-d^j\mu_1-e^j\mu_2&-d^j\mu_3-e^j\mu_4\\b&0&1&0&0&0\\c&0&0&1&0&0\\d&0&0&0&1&0\\e&0&0&0&0&1\end{pmatrix}-$$

$$-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&\dots&0\\\varphi&0&\dots&0\\0&0&\dots&0\\0&0&\dots&0\\0&0&\dots&0\\0&0&\dots&0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\a+a^j-\frac{1}{2}\varphi&1&-c^j&b^j&-d^j\mu_1-e^j\mu_2&-d^j\mu_3-e^j\mu_4\\b&0&1&0&0&0\\c&0&0&1&0&0\\d&0&0&0&1&0\\e&0&0&0&0&1\end{pmatrix},\tag{4}$$

где

$$\varphi=-bc^j+cb^j-dd^j\mu_1-de^j\mu_3-ed^j\mu_2-ee^j\mu_4.$$

Положим в (3) $\alpha=\beta=\delta=\varepsilon=0$. Тогда матрица в (3) примет вид

$$\begin{pmatrix}1&0&0&\gamma&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&\gamma^j&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

Если вычесть из неё матрицу E, то получим

$$M_\gamma=\begin{pmatrix}0&0&0&\gamma&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&\gamma^j&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Аналогичным образом получим из соотношения (3) матрицы

$$L_\beta=\begin{pmatrix}0&0&\beta&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&-\beta^j&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix},\quad Q_\delta=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}\delta\delta^j\lambda_1&0&0&\delta&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&\delta^j\lambda_1&0&0&0&0\\0&\delta^j\lambda_3&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$R_\varepsilon=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon^j\lambda_4&0&0&0&\varepsilon\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&\varepsilon^j\lambda_2&0&0&0&0\\0&\varepsilon^j\lambda_4&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

а из соотношения (4) — матрицы

$$N_b=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&-b^j&0&0\\b&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix},\quad P_c=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&c^j&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\c&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$S_d=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\\frac{1}{2}dd^j\mu_1&0&0&0&d^j\mu_1&d^j\mu_2\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\d&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

и

$$T_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}ee^j\mu_1 & 0 & 0 & 0 & e^j\mu_3 & e^j\mu_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_\gamma \cdot L_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma^j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \gamma e_{1\,2},$$

$$N_{-1} \cdot P_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = ce_{2\,1},$$

$$\begin{aligned} \gamma e_{1\,2} \cdot e_{2\,1} &= \gamma e_{1\,1}, & ce_{2\,1} \cdot e_{1\,2} &= ce_{2\,2}, \\ ae_{2\,1} \cdot M_1 &= ae_{2\,4}, & M_1 \cdot (ae_{2\,1}) &= ae_{3\,1}, \\ ae_{2\,1} \cdot L_1 &= ae_{2\,3}, & L_1 \cdot (ae_{2\,1}) &= ae_{4\,1}, \\ ae_{1\,2} \cdot e_{2\,4} &= ae_{1\,4}, & ae_{1\,2} \cdot e_{2\,3} &= ae_{1\,3}, \\ ae_{3\,1} \cdot e_{1\,2} &= ae_{3\,2}, & ae_{4\,1} \cdot e_{1\,2} &= ae_{4\,2}, \\ ae_{3\,1} \cdot e_{1\,4} &= ae_{3\,4}, & ae_{4\,1} \cdot e_{1\,3} &= ae_{4\,3}, \\ ae_{3\,4} \cdot e_{4\,3} &= ae_{3\,3}, & ae_{4\,3} \cdot e_{3\,4} &= ae_{4\,4}. \end{aligned}$$

Далее преобразуем матрицы Q_δ, R_ε, S_d, T_e, просто вычитая из них соответствующее $e_{i\,j}$. Получим

$$Q'_\delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta^j\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta^j\lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R'_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^j\lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^j\lambda_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$S'_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d^j\mu_1 & d^j\mu_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T'_d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^j\mu_3 & e^j\mu_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \gamma e_{11}\cdot Q'_\delta &= \delta e_{15}, & e_{11}\cdot R'_\varepsilon &= \varepsilon e_{16},\\ ae_{21}\cdot e_{15} &= ae_{25}, & ae_{21}\cdot e_{16} &= ae_{26},\\ ae_{31}\cdot e_{15} &= ae_{35}, & ae_{31}\cdot e_{16} &= ae_{36},\\ ae_{41}\cdot e_{15} &= ae_{45}, & ae_{41}\cdot e_{16} &= ae_{46},\\ T'_e\cdot e_{11} &= ee_{61}, & S'_d\cdot e_{11} &= de_{51},\\ ae_{61}\cdot e_{12} &= ae_{62}, & ae_{51}\cdot e_{12} &= ae_{52},\\ ae_{61}\cdot e_{13} &= ae_{63}, & ae_{51}\cdot e_{13} &= ae_{53},\\ ae_{61}\cdot e_{14} &= ae_{64}, & ae_{51}\cdot e_{14} &= ae_{54},\\ ae_{61}\cdot e_{15} &= ae_{65}, & ae_{51}\cdot e_{15} &= ae_{55},\\ ae_{61}\cdot e_{16} &= ae_{66}, & ae_{51}\cdot e_{16} &= ae_{56}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили все $\alpha\cdot e_{ij}$, $i,j=1,\ldots,6$. Значит, мы можем породить любую матрицу из $\mathrm{M}_m(K)$. $\square$

В [2, теорема 1.3] доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть R, S — ассоциативные кольца с единицей, удовлетворяющие условиям 1)—4) леммы 1, $\varphi\colon \mathrm{U}(R,\tau)\to \mathrm{U}(S,j)$ — изоморфизм унитарных групп. Тогда $S=S_1\oplus S_2$ и существует изоморфизм колец*

$$\Theta\colon R\to S_1,$$

такой что

$$\varphi(A)=\Theta(A)+1-\Theta(1)$$

для всех $A\in E_f(R,\tau)$. Если $-1\in E_f(R,\tau)$, то $1=\Theta(1)$, т. е. $\varphi(A)=\Theta(A)$ для всех $A\in E_f(R,\tau)$, $S_2=\{0\}$.

Если в качестве колец в этой теореме рассмотреть кольца матриц $\mathrm{M}_n(R_1)$ и $\mathrm{M}_m(R_2)$, то можно доказать следующую лемму.

Лемма 3. *Пусть R_1, R_2 — ассоциативные кольца с инволюциями j_1, j_2 соответственно, $S_1=\mathrm{M}_n(R_1,j_1,Q_n)$ и $S_2=\mathrm{M}_m(R_2,j_2,Q_m)$ — кольца матриц с индуцированными инволюциями τ_1, τ_2, где Q_n, Q_m — формы описанного выше вида. Пусть $\varphi\colon \mathrm{U}(S_1,\tau_1)\to \mathrm{U}(S_2,\tau_2)$ — изоморфизм унитарных групп. Тогда существует такой изоморфизм колец*

$$\Theta\colon S_1\to S_2,$$

что

$$\varphi(A)=\Theta(A)$$

для всех $A\in E_f(S_1,\tau_1)$.

Доказательство. Применим к кольцам $S_1=\mathrm{M}_n(R_1)$ и $S_2=\mathrm{M}_m(R_2)$ теорему 2. Мы сразу получаем, что $S_2=S\oplus S'$, $\Theta\colon S_1\to S$ — изоморфизм, $\varphi(A)=\Theta(A)+1-\Theta(1)$ для всех $A\in E_f(S_1,\tau_1)$. Покажем, что $S'=\{0\}$. Предположим противное, $S'\neq\{0\}$. Рассмотрим разложение единицы кольца S_2: $1=\theta+(1-\theta)$, где $\theta \in S$, $(1-\theta) \in S'$. Тогда θ является центральным идемпотентом кольца S_2, т. е. скалярной матрицей λE, где λ — центральный идемпотент кольца R_2. Значит, кольцо R_2 распадается в прямую сумму $R_2 = R \oplus R'$, при этом $S = \mathrm{M}_m(R)$, $S' = \mathrm{M}_m(R')$.

Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^{j_1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix},$$

где a — произвольный элемент кольца R_1 (например, единица кольца R_1). Легко убедиться, она лежит в $E_f(S_1, \tau_1)$, её образ имеет вид

$$B = \varphi(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b^{j_2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix},$$

$b \in R$ (b — единица кольца R). При этом аналогичная матрица при $b \in R'$ (обозначим такую матрицу для b — единицы кольца R' — через B') также содержится в унитарной группе, а значит, имеет прообраз A' при изоморфизме φ^{-1}. Матрица B' коммутирует с любым элементом из $\varphi\big(E_f(S_1, \tau_1)\big)$, поэтому матрица A' коммутирует с любым элементом из $E_f(S_1, \tau_1)$. Значит, она скалярна и элемент на её диагонали централен. Следовательно, B' лежит в центре унитарной группы $\mathrm{U}(S_2, \tau_2)$, что неверно, если $b \neq 0$. Таким образом, $b = 0$ и $S' = \{0\}$. Лемма доказана. □

Лемма 4. *Изоморфизм Θ колец $\mathrm{M}_n(R_1)$ и $\mathrm{M}_m(R_2)$ из теоремы 2 сохраняет инволюцию τ, т. е. диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{M}_n(R_1) & \xrightarrow{\Theta} & \mathrm{M}_m(R_2) \\ \big\downarrow{\scriptstyle\tau_1} & & \big\downarrow{\scriptstyle\tau_2} \\ \mathrm{M}_n(R_1) & \xrightarrow{\Theta} & \mathrm{M}_m(R_2) \end{array}$$

коммутативна.

Доказательство. Для $r \in E_f(S_1, \tau_1)$ из условия $r^{\tau_1} \cdot r = 1$ следует, что $r^{\tau_1} = r^{-1}$. Значит,

$$\Theta(r^{\tau_1}) = \Theta(r^{-1}) = \Theta(r)^{-1} = \Theta(r)^{\tau_2},$$

так как $\Theta(r) \in \mathrm{U}(S_2, \tau_2)$. Так как Θ — изоморфизм, то

$$\Theta\big((r_1 + r_2)^{\tau_1}\big) = \Theta(r_1^{\tau_1} + r_2^{\tau_1}) = \Theta(r_1)^{\tau_2} + \Theta(r_2)^{\tau_2} = \Theta(r_1 + r_2)^{\tau_2}.$$

Если $r_1, r_2 \in E_f(S_1, \tau_1)$, то $\Theta(r_1^{\tau_1}) = \Theta(r_1)^{\tau_2}$, $\Theta(r_2^{\tau_1}) = \Theta(r_2)^{\tau_2}$, т. е.

$$\Theta\big((r_1 + r_2)^{\tau_1}\big) = \Theta(r_1)^{\tau_2} + \Theta(r_2)^{\tau_2} = \Theta(r_1 + r_2)^{\tau_2}.$$

Кроме того, при $r_1, r_2 \in E_f(S_1, \tau_1)$

$$\Theta\big((r_1 \cdot r_2)^{\tau_1}\big) = \Theta(r_2^{\tau_1} \cdot r_1^{\tau_1}) = \Theta(r_2)^{\tau_2} \cdot \Theta(r_1)^{\tau_2} = \Theta(r_1 \cdot r_2)^{\tau_2}.$$

Так как группа $E_f(S_1, \tau_1)$ сложением и умножением порождает все кольцо $\mathrm{M}_n(R_1)$, то изоморфизм Θ сохраняет инволюцию τ на всём кольце. Лемма доказана. □

Введём определения ультрафильтра и ультрастепени (см. [3]).

Определение 4. Пусть I — некоторое непустое множество. Через $\mathcal{P}(I)$ обозначается множество всех подмножеств множества I. *Фильтр D над множеством I* определяется как множество $D \subset \mathcal{P}(I)$, для которого

1) $I \in D$;
2) если $X, Y \in D$, то $X \cap Y \in D$;
3) если $X \in D$ и $X \subset Z \subset I$, то $Z \in D$.

Фильтр D над множеством I называется *ультрафильтром* над I, если для всякого $X \in \mathcal{P}(I)$

$$X \in D \text{ тогда и только тогда, когда } (I \setminus X) \notin D.$$

Пусть I — непустое множество, D — фильтр над I и $D \neq \mathcal{P}(I)$, A_i при всяком $i \in I$ — непустое множество. Пусть $C = \prod\limits_{i \in I} A_i$ — декартово произведение этих множеств. Иными словами, C — множество всех отображений f, определённых на I и таких, что $f(i) \in A_i$ при всяком $i \in I$.

Функции $f, g \in C$ назовём *D-эквивалентными* (обозначение: $f =_D g$), если

$$\{i \in I \colon f(i) = g(i)\} \in D.$$

Определим f_D — класс эквивалентности, содержащий функцию f:

$$f_D = \{g \in C \mid f =_D g\}.$$

Определим *фильтрованное произведение множеств A_i по фильтру D* как совокупность всех классов эквивалентности отношения $=_D$, обозначим его через $\prod\limits_D A_i$. Итак,

$$\prod_D A_i = \left\{ f_D \;\middle|\; f \in \prod_{i \in I} A_i \right\} = \prod_{i \in I} A_i / {=_D}.$$

В том случае, когда D — ультрафильтр над множеством I, фильтрованное произведение $\prod\limits_D A_i$ называется *ультрапроизведением*. В том случае, когда множества A_i совпадают, т. е. $A_i = A$, фильтрованное произведение обозначают $\prod\limits_D A$ и называют *фильтрованной степенью множества A по фильтру D*. Если, в частности, D — ультрафильтр, то $\prod\limits_D A$ называется *ультрастепенью множества A по ультрафильтру D*.

Лемма 5. *Для любого ультрафильтра D*

$$\prod_D \mathrm{U}_n(R,j,Q)=\prod_D \mathrm{U}(S=\mathrm{M}_n(R),\tau)\cong \mathrm{U}\Big(\prod_D (S,\tau)\Big).$$

Доказательство. Докажем, что левая и правая части изоморфны.

Действительно, каждый элемент g группы $\prod\limits_D \mathrm{U}_n(R,j,Q)$ по определению является последовательностью $g=\{g_i \mid i\in I\}$, где каждый g_i — это элемент группы $\mathrm{U}_n(R,j,Q)$. При этом две такие «последовательности» g и g' считаются равными, если $\{i\in I \mid g_i=g'_i\}\in D$. Таким образом, можно представить себе любой элемент группы как набор («последовательность») матриц с некоторым отношением эквивалентности на таких наборах. Соответственно, любую последовательность матриц можно считать матрицей над последовательностями из элементов кольца R, т. е. так мы строим взаимно-однозначное отображение между $\prod\limits_D(\mathrm{M}_n(R))$ и $\mathrm{M}_n\Big(\prod\limits_D R\Big)$.

С другой стороны, как раз каждый элемент группы $\mathrm{U}\Big(\prod\limits_D(S,\tau)\Big)$ является матрицей, коэффициенты которой — это наборы элементов кольца R.

Рассмотрим теперь произвольную матрицу, соответствующую некоторому элементу группы $\prod\limits_D \mathrm{U}_n(R,j,Q)$. Пусть эта матрица имеет вид

$$A=\begin{pmatrix}\{a^i_{1,1}\mid i\in I\} & \dots & \{a^i_{1,n}\mid i\in I\}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \{a^i_{n,1}\mid i\in I\} & \dots & \{a^i_{n,n}\mid i\in I\}\end{pmatrix}.$$

Тогда её принадлежность группе $\prod\limits_D \mathrm{U}_n(R,j,Q)$ означает, что множество таких $i\in I$, что матрица

$$A^i=\begin{pmatrix}a^i_{1,1} & \dots & a^i_{1,n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a^i_{n,1} & \dots & a_{n,n}\end{pmatrix}$$

лежит в группе $\mathrm{U}_n(R,j,Q)$, т. е. удовлетворяет некоторому специальному соотношению на коэффициенты, содержится в ультрафильтре.

С другой стороны, если такая матрица A лежит в группе $\mathrm{U}\Big(\prod\limits_D(S,\tau)\Big)$, то это означает ровно то же самое, то есть то, что множество тех индексов, для которых $A^i\in \mathrm{U}_n(R,j,Q)$, лежит в ультрафильтре. Таким образом, построенное отображение является естественным изоморфизмом между группами. $\square$

Теорема 3 (Кейслера—Шелаха об изоморфизме [3]). *Две модели U и U' элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда существует ультрафильтр $\mathcal{F}$, такой что*

$$\prod_{\mathcal{F}} U\cong\prod_{\mathcal{F}} U'.$$

Доказательство теоремы 1. Пусть две унитарные линейные группы $U_1 = \mathrm{U}_n(R_1, j_1, Q_n)$ и $U_2 = \mathrm{U}_m(R_2, j_2, Q_m)$ удовлетворяют всем условиям теоремы.

По теореме Кейслера—Шелаха об изоморфизме элементарная эквивалентность этих групп равносильна существованию такого ультрафильтра D, что

$$\prod_D U_1 \cong \prod_D U_2.$$

Однако по лемме 5

$$\prod_D \mathrm{U}_n(R, j, Q) = \prod_D \mathrm{U}(S = \mathrm{M}_n(R), \tau) \cong \mathrm{U}\Big(\prod_D (S, \tau)\Big),$$

при этом $\prod\limits_D (S, \tau) \equiv (S, \tau)$.

Значит, элементарная эквивалентность групп U_1 и U_2 равносильна изоморфизму между $\mathrm{U}\Big(\prod\limits_D (S_1, \tau_1)\Big)$ и $\mathrm{U}\Big(\prod\limits_D (S_2, \tau_2)\Big)$. Так как кольца $\prod\limits_D S_1$ и $\prod\limits_D S_2$ удовлетворяют всем условиям теоремы Голубчика—Михалёва, то по этой теореме они изоморфны, а благодаря лемме 4 изоморфизм сохраняет инволюцию. Значит, кольца $\prod\limits_D (S_1, \tau_1)$ и $\prod\limits_D (S_2, \tau_2)$ изоморфны как кольца с инволюцией. Так как $\prod\limits_D (S, \tau) \equiv (S, \tau)$, то полученный изоморфизм равносилен элементарной эквивалентности

$$(S_1 = \mathrm{M}_n(R_1), \tau_1) \equiv (S_2 = \mathrm{M}_m(R_2), \tau_2),$$

что и требовалось. □

Доказательство следствия 1. Согласно теореме 1 нам достаточно доказать, что для тел из элементарной эквивалентности матричных колец с индуцированными инволюциями следует совпадение размерностей и элементарная эквивалентность исходных тел с инволюциями. Напишем предложения, выделяющие размерность m и подкольцо в кольце с инволюцией $(\mathrm{M}_m(R), \tau)$, изоморфное телу (R, j). Из них и будет следовать необходимое утверждение.

Выпишем формулу

$$\varphi(\bar{x}) := \Big(\bigwedge_{i=1}^{n} x_{ii}^2 = x_{ii} \wedge \bigwedge_{i,j,k,l=1}^{n} x_{ij}x_{kl} = \delta_j^k x_{il} \wedge (x_{11} + \ldots + x_{nn} = E)\Big),$$

где $\bar{x}$ — это $x_{11}, \ldots x_{nn}$. Теперь предложение

$$\varphi_n := \exists\, x_{11}, \ldots x_{nn}\ \varphi(\bar{x})$$

утверждает, что в кольце $\mathrm{M}_m(R, j)$ существует n^2 матричных единиц. Тогда предложение

$$\mathrm{SiZe}_n := \varphi_n \wedge \neg\varphi_{n+1}$$

позволяет выделить размерность. Докажем это. Пусть размерность матричного кольца меньше n. При этом по предложению SiZe_n в данном матричном кольце существуют n ортогональных идемпотентов, в сумме дающих единицу этого кольца. Пусть размер матричного кольца равен m. Это означает, что данное кольцо является кольцом эндоморфизмов свободного модуля R^m. Таким образом, данный модуль есть прямая сумма n подмодулей (каждый из которых порождён элементом x_{ii}). Однако любой модуль над телом свободен, т. е. является R^{l_i}. Так как $n > m$, то такого быть не может.

Следовательно, размерность матричного кольца нам известна. Кроме того, будем считать фиксированным набор матричных единиц из формулы φ_n. Идемпотент x_{11} обозначим через e.

Следующая формула выделяет подкольцо, изоморфное телу R:

$$u(r) := \exists\, x\ (r = exe).$$

Операции сложения и умножения совпадают с теми же операциями из матричного кольца. Для того чтобы узнать действие инволюции на произвольном элементе r, удовлетворяющем формуле $u(r)$, введём формулой следующую функцию:

$$\mathrm{Ext}(r, \lambda_r) := \lambda_r = r + \sum_{i=2}^{n} (1 - x_{11} - x_{ii} + x_{1i} + x_{i1}) r (1 - x_{11} - x_{ii} + x_{1i} + x_{i1}).$$

В матричном кольце это означает, что элемент r имеет ненулевой коэффициент только на месте $(1, 1)$, а элемент λ_r является скалярной матрицей со скаляром, соответствующим r.

Зная, как инволюция τ действует на скалярных матрицах, напишем формулу, показывающую, как инволюция j действует на элементах тела:

$$\mathrm{Inv}(r, r') := \exists\, \lambda_r\ \mathrm{Ext}(r, \lambda_r) \wedge r' = e\lambda_r^{\tau} e.$$

Следствие доказано. □

Доказательство следствия 2. Аналогично предыдущему следствию нам достаточно доказать, что для коммутативных колец из элементарной эквивалентности матричных колец с индуцированными инволюциями следует совпадение размерностей и элементарная эквивалентность исходных колец с инволюциями.

Следующее предложение выделяет центр кольца $\mathrm{M}_m(R)$ — множество скалярных матриц λE, изоморфное исходному кольцу R:

$$Z(r) := \forall y\ (yr = ry).$$

Операции $+$, $\times$ и взятие инволюции вводятся естественным образом (индуцируются из матричного кольца). Из данного предложения следует, что исходные кольца элементарно эквивалентны как кольца с инволюциями.

Нам осталось написать предложение, показывающее, какую размерность будет иметь наше кольцо матриц.

Заметим, что кольцо матриц $\mathrm{M}_n(R)$ является свободным модулем размера n^2 над кольцом R (т. е. над своим центром). Для коммутативных колец размерность свободного модуля является инвариантом (см., например, [5]). С другой стороны, легко можно написать предложение, утверждающее, что существуют такие n^2 элементов кольца, что любой элемент кольца однозначно представляется как линейная комбинация этих элементов с коэффициентами из центра кольца. Значит, у элементарно эквивалентных матричных колец над коммутативными кольцами обязательно одинаковая размерность, что и требовалось. $\square$

Утверждения, обратные к следствиям 1 и 2, не будут верны, так как унитарная линейная группа зависит не только от кольца R с инволюцией j и размерности матриц, но и от формы Q.

Литература

[1] Бунина Е. И. Элементарная эквивалентность унитарных линейных групп над кольцами и телами // Успехи мат. наук. — 1998. — Т. 53, № 2. — С. 137—138.

[2] Голубчик И. З., Михалёв А. В. Изоморфизмы унитарных групп над ассоциативными кольцами // Зап. науч. сем. ЛОМИ АН СССР. — 1983. — Т. 132. — С. 97—109.

[3] Кейслер К., Ченг С. Теория моделей. — М.: Мир, 1975.

[4] Мальцев А. И. Об элементарных свойствах линейных групп // Проблемы математики и механики. — Новосибирск, 1961. — С. 110—132.

[5] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. — М.: Мир, 1977.

[6] Beidar C. I., Mikhalev A. V. On Mal'cev's theorem on elementary equivalence of linear groups // Contemp. Math. — 1992. — Vol. 131, no. 1. — P. 29—35.