

# Автоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами над коммутативными частично упорядоченными кольцами

Е. И. БУНИНА, П. П. СЕМЁНОВ

Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова

УДК 512.643+512.552.2

**Ключевые слова:** частично упорядоченные кольца, полугруппа неотрицательных матриц, стандартные автоморфизмы.

## Аннотация

В данной работе описываются автоморфизмы полугруппы  $G_n(R)$  неотрицательных обратимых матриц с неотрицательными коэффициентами в случае, когда  $R$  является коммутативным частично упорядоченным кольцом, содержащим  $\mathbb{Q}$ ,  $n \geq 3$ .

## Abstract

*E. I. Bunina, P. P. Semenov, Automorphisms of the semigroup of invertible matrices with nonnegative elements over commutative partially ordered rings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 2, pp. 69–100.*

We describe automorphisms of the semigroup  $G_n(R)$  of invertible matrices with nonnegative coefficients in the case where  $R$  is a commutative partially ordered ring containing  $\mathbb{Q}$  and  $n \geq 3$ .

Пусть  $R$  — упорядоченное кольцо,  $G_n(R)$  — подполугруппа группы  $GL_n(R)$ , состоящая из матриц с неотрицательными элементами. В [3] А. В. Михалёв и М. А. Шаталова описали все автоморфизмы полугруппы  $G_n(R)$  в случае, когда  $R$  является линейно упорядоченным телом и  $n \geq 2$ . В [1] Е. И. Бунина и А. В. Михалёв описали все автоморфизмы полугруппы  $G_n(R)$ , если  $R$  — произвольное линейно упорядоченное ассоциативное кольцо с  $1/2$ ,  $n \geq 3$ . В данной работе мы описываем автоморфизмы полугруппы  $G_n(R)$  в случае, когда  $R$  является коммутативным частично упорядоченным кольцом, содержащим  $\mathbb{Q}$ ,  $n \geq 3$ .

Естественным примером коммутативных частично упорядоченных колец, не являющихся линейно упорядоченными и при этом содержащих  $\mathbb{Q}$ , являются прямые суммы линейно упорядоченных коммутативных колец (содержащих  $\mathbb{Q}$ ) с покомпонентным сравнением. Также классическим примером являются кольца многочленов (от одной или нескольких коммутирующих переменных) над линейно (частично) упорядоченными коммутативными кольцами, содержащими  $\mathbb{Q}$ , где

*Фундаментальная и прикладная математика*, 2008, том 14, № 2, с. 69–100.

© 2008 Центр новых информационных технологий МГУ,  
Издательский дом «Открытые системы»

неотрицательными являются многочлены, у которых все коэффициенты неотрицательны.

## 1. Необходимые определения и понятия, формулировка основной теоремы

Пусть  $R$  — ассоциативное (коммутативное) кольцо с 1.

**Определение 1.** Кольцо  $R$  называется *частично упорядоченным*, если на нём задано отношение частичного порядка  $\leq$ , удовлетворяющее следующим условиям:

- 1)  $\forall x, y, z \in R (x \leq y \implies x + z \leq y + z)$ ;
- 2)  $\forall x, y \in R (0 \leq x \wedge 0 \leq y \implies 0 \leq xy)$ .

Мы будем рассматривать такие частично упорядоченные кольца, в которых  $1/m \geq 0$  для всех  $m \in \mathbb{N}$ .

Элементы  $r$  кольца  $R$ , для которых  $0 \leq r$ , называются *неотрицательными*.

**Определение 2.** Пусть  $R$  — частично упорядоченное кольцо. Через  $G_n(R)$  обозначается подполугруппа группы  $\mathrm{GL}_n(R)$ , состоящая из всех матриц с неотрицательными элементами.

Множество всех обратимых элементов кольца  $R$  обозначается через  $R^*$ . Если  $1/2 \in R$ , то множество  $R^*$  бесконечно, так как оно содержит все  $1/2^n$  для  $n \in \mathbb{N}$ . Множество  $R_+ \cap R^*$  обозначается через  $R_+^*$ . Если  $1/2 \in R$ , то оно также бесконечно.

**Определение 3.** Пусть  $I = I_n$ ,  $\Gamma_n(R)$  — группа, состоящая из всех обратимых матриц из  $G_n(R)$ ,  $\Sigma_n$  — симметрическая группа порядка  $n$ ,  $S_\sigma$  — матрица перестановки  $\sigma \in \Sigma_n$  (т. е. матрица  $(\delta_{i\sigma(j)})$ , где  $\delta_{i\sigma(j)}$  — символ Кронекера),  $S_n = \{S_\sigma \mid \sigma \in \Sigma_n\}$ ,  $\mathrm{diag}[d_1, \dots, d_n]$  — диагональная матрица с элементами  $d_1, \dots, d_n$  на диагонали,  $d_1, \dots, d_n \in R_+^*$ . Через  $D_n(R)$  обозначим группу всех обратимых диагональных матриц из  $G_n(R)$ .

**Определение 4.** Если  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  — подмножества в  $G_n(R)$ , то положим

$$C_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) = \{a \in \mathcal{A} \mid \forall b \in \mathcal{B} (ab = ba)\}.$$

Пусть  $E_{ij}$  — матричная единица.

**Определение 5.** Через  $B_{ij}(x)$  обозначим матрицу  $I + xE_{ij}$ . Пусть  $\mathbf{P}$  обозначает подполугруппу в  $G_n(R)$ , порождённую всеми матрицами  $S_\sigma$  ( $\sigma \in \Sigma_n$ ),  $B_{ij}(x)$  ( $x \in R_+$ ,  $i \neq j$ ) и  $\mathrm{diag}[\alpha_1, \dots, \alpha_n] \in D_n(R)$ .

**Определение 6.** Две матрицы  $A, B \in G_n(R)$  называются  *$\mathcal{P}$ -эквивалентными* [3], если существуют матрицы  $A_j \in G_n(R)$ ,  $j = 0, \dots, k$ ,  $A = A_0$ ,  $B = A_k$ , и матрицы  $P_i, \tilde{P}_i, Q_i, \tilde{Q}_i \in \mathbf{P}$ ,  $i = 0, \dots, k-1$  такие, что  $P_i A_i \tilde{P}_i = Q_i A_{i+1} \tilde{Q}_i$ .

**Определение 7.** Через  $\mathrm{GE}_n^+(R)$  обозначим подполугруппу в  $G_n(R)$ , порождённую всеми матрицами,  $\mathcal{P}$ -эквивалентными матрицам из  $\mathbf{P}$ .

Заметим, что если, например,  $R$  — линейно упорядоченное поле, то  $\text{GE}_n^+(R) = G_n(R)$ .

**Определение 8.** Если  $G$  — некоторая полугруппа (например,  $G = R_+^*$ ,  $G_n(R)$ ,  $\text{GE}_n^+(R)$ ), то гомоморфизм  $\lambda(\cdot): G \rightarrow G$  называется *центральный гомоморфизмом*  $G$ , если  $\lambda(G) \subset Z(G)$ . Отображение  $\Omega(\cdot): G \rightarrow G$ , такое что  $\Omega(X) = \lambda(X) \cdot X$  для всех  $X \in G$ , где  $\lambda(\cdot)$  — центральный гомоморфизм, называется *центральной гомотетией*.

Например, если  $R = \mathbb{R}$  (поле действительных чисел), то гомоморфизм  $\lambda(\cdot): G_n(\mathbb{R}) \rightarrow G_n(\mathbb{R})$ , такой что  $\lambda(A) = |\det A| \cdot I$  для всех  $A \in G_n(\mathbb{R})$ , является центральным гомоморфизмом, а отображение  $\Omega(\cdot): G_n(\mathbb{R}) \rightarrow G_n(\mathbb{R})$ , такое что  $\Omega(A) = |\det A| \cdot A$  для всех  $A \in G_n(\mathbb{R})$ , является центральной гомотетией. Заметим, что центральная гомотетия  $\Omega(\cdot)$  всегда является эндоморфизмом полугруппы  $G$ : для всех  $X, Y \in G$

$$\Omega(X)\Omega(Y) = \lambda(X)X \cdot \lambda(Y)Y = \lambda(X)\lambda(Y)X \cdot Y = \lambda(XY)XY = \Omega(XY).$$

Для каждой матрицы  $M \in \Gamma_n(R)$  пусть  $\Phi_M$  обозначает такой автоморфизм полугруппы  $G_n(R)$ , что  $\Phi_M(X) = MXM^{-1}$  для всех  $X \in G_n(R)$ .

Для каждого автоморфизма  $y(\cdot) \in \text{Aut}(R_+)$  через  $\Phi^y$  обозначим такой автоморфизм полугруппы  $G_n(R)$ , что  $\Phi^y(X) = \Phi^y((x_{ij})) = (y(x_{ij}))$  для всех  $X = (x_{ij}) \in G_n(R)$ .

Основным результатом этой работы является следующая теорема.

**Теорема.** Пусть  $\Phi$  — автоморфизм полугруппы  $G_n(R)$ ,  $n \geq 3$ ,  $\mathbb{Q} \subset R$ . Тогда на полугруппе  $\text{GE}_n^+(R)$   $\Phi = \Phi_M \Phi^b \Omega$ , где  $M \in \Gamma_n(R)$ ,  $b(\cdot) \in \text{Aut}(R_+)$ ,  $\Omega(\cdot)$  — центральная гомотетия полугруппы  $\text{GE}_n^+(R)$ .

## 2. Построение автоморфизма $\Phi'$

В этом разделе мы предполагаем, что фиксирован некоторый автоморфизм  $\Phi \in \text{Aut}(G_n(R))$ , где  $n \geq 3$ ,  $\mathbb{Q} \subset R$ , и с помощью его мы строим новый автоморфизм  $\Phi' \in \text{Aut}(G_n(R))$ , такой что  $\Phi' = \Phi_{M'} \Phi$  для некоторой матрицы  $M' \in \Gamma_n(R)$  и для всех  $\sigma \in \Sigma_n$  выполнено условие  $\Phi'(S_\sigma) = \alpha^{\text{sgn } \sigma} S_\sigma$ ,  $\alpha^2 = 1$  (элемент  $\alpha$  единый для всех подстановок).

**Лемма 1.** Для всех  $x, y \in R_+$ , если  $x + y = 0$ , то  $x = 0$  и  $y = 0$ .

**Доказательство.** По определению частично упорядоченного кольца получаем, что если  $0 \leq y$ , то  $x \leq x + y$ . Тогда  $x \leq 0$ , а значит,  $x = 0$ . Аналогично  $y = 0$ .  $\square$

**Лемма 2.** Если  $\Phi$  — автоморфизм полугруппы  $G_n(R)$ , где  $n \geq 3$ ,  $\mathbb{Q} \subset R$ , то

- 1)  $\Phi(\Gamma_n(R)) = \Gamma_n(R)$ ;
- 2)  $\Phi(D_n(R)) = D_n(R)$ .

**Доказательство.** Так как  $\Gamma_n(R)$  является подгруппой всех обратимых матриц полугруппы  $G_n(R)$ , то  $\Phi(\Gamma_n(R)) = \Gamma_n(R)$ . Утверждение 1) доказано.

Докажем второе утверждение. Рассмотрим множество  $\mathcal{F}$  всех матриц  $A \in \Gamma_n(R)$ , коммутирующих со всеми матрицами, сопряжёнными к  $A$ .

Рассмотрим

$$B = \text{diag}[\alpha_1, \dots, \alpha_n] \in D_n(R).$$

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \Gamma_n(R), \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} a'_{11} & \dots & a'_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n1} & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$\sum_{k=1}^n a'_{ik} \cdot a_{kj} = 0 \quad \text{для всех } i \neq j.$$

Значит,  $a'_{ik} \cdot a_{kj} = 0$  для всех  $i \neq j$  (по лемме 1). Тогда  $A^{-1}BA$  — диагональная матрица, поэтому  $D_n(R) \subset \mathcal{F}$ .

Пусть существует матрица  $C \in \mathcal{F} \setminus D_n(R)$ ,

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1i} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{i1} & \dots & c_{ii} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{j1} & \dots & c_{ji} & \dots & c_{jj} & \dots & c_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{in} & \dots & c_{jn} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Сопряжём  $C$  с помощью матрицы  $\text{diag}[d, 1, \dots, 1] \cdot S_{i,j}$  ( $i, j \neq 1$ ). Сопряжённая матрица имеет вид

$$C' = \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1j}d^{-1} & \dots & c_{1i}d^{-1} & \dots & c_{1n}d^{-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{j1}d & \dots & c_{jj} & \dots & c_{ji} & \dots & c_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{i1}d & \dots & c_{ij} & \dots & c_{ii} & \dots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1}d & \dots & c_{nj} & \dots & c_{nj} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Используя соотношение  $CC' = C'C$ , получаем (беря первый столбец и первую строку)

$$\begin{aligned} c_{11}^2 + c_{12}c_{21}d + \dots + c_{1i}c_{j1}d + \dots + c_{1j}c_{i1}d + \dots + c_{1n}c_{n1}d &= \\ = c_{11}^2 + c_{21}c_{12}d^{-1} + \dots + c_{i1}c_{1j}d^{-1} + \dots + c_{j1}c_{1i}d^{-1} + \dots + c_{n1}c_{1n}. \end{aligned}$$

Если взять  $d = 2$ , то получим

$$3 \cdot (c_{12}c_{21} + \dots + c_{1i}c_{j1} + \dots + c_{1j}c_{i1} + \dots + c_{1n}c_{n1}) = 0.$$

Значит (по лемме 1),

$$c_{1i}c_{j1} = 0 \text{ для всех } i, j \neq 1.$$

Аналогично

$$c_{ki}c_{jk} = 0 \text{ для всех } i, j \neq k.$$

Пусть

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \dots & \gamma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n1} & \dots & \gamma_{nn} \end{pmatrix}.$$

Беря 1-ю строку и  $k$ -й столбец в соотношении  $CC^{-1} = E$ , получаем

$$0 = \gamma_{11}c_{1k} + \gamma_{12}c_{2k} + \dots + \gamma_{1n}c_{nk},$$

откуда

$$\gamma_{11}c_{1k} = 0, \quad k \neq 1.$$

Кроме того,

$$1 = \gamma_{11}c_{11} + \gamma_{12}c_{21} + \dots + \gamma_{1n}c_{n1}.$$

Домножим это равенство на  $c_{1k}$ , получим  $c_{1k} = 0$ . Аналогично  $c_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ . Таким образом,  $\mathcal{F} = D_n(R)$ , и значит,  $\varphi(D_n(R)) = D_n(R)$  (так как множество  $\mathcal{F}$  определяется формулой).  $\square$

**Лемма 3.** Пусть  $\tau = (12)(34) \dots (2[n/2] - 1, 2[n/2]) \in S_n$ . Если  $\Phi$  является автоморфизмом полугруппы  $G_n(R)$ ,  $n \geq 3$ , то существует матрица  $M \in \Gamma_n(R)$ , такая что  $\Phi_M \Phi(S_\tau) = bS_\tau$ ,  $b \in R_+^*$ ,  $b^2 = 1$ .

**Доказательство.** Рассмотрим произвольную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in G_n(R),$$

такую что  $A^2 = 1$ . Для неё выполнены соотношения  $a_{ik}a_{kj} = 0$  для всех  $i \neq j$ . Кроме того,

$$1 = a_{11}^2 + a_{12}a_{21} + \dots + a_{1n}a_{n1}.$$

Пусть  $a_{1i}a_{i1} = e_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Тогда сразу видно, что  $\{e_i\}$  — это система попарно ортогональных идемпотентов (возможно, среди них есть нулевые) кольца  $R$ , дающих в сумме 1, т. е.

$$R = e_1R \oplus e_2R \oplus \dots \oplus e_nR.$$

Разложим матрицу  $A$  в сумму  $e_1A + \dots + e_nA$ . Явно выпишем  $A_i = e_iA$ :

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e_1a_{22} & \dots & e_1a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & e_1a_{n2} & \dots & e_1a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{1i} & 0 & 0 \\ 0 & e_i a_{22} & \dots & 0 & \dots & e_i a_{2n} \\ 0 & \vdots & * & 0 & * & \vdots \\ a_{i1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & * & 0 & * & \vdots \\ 0 & e_i a_{n2} & \dots & 0 & \dots & e_i a_{nn} \end{pmatrix}, \quad i > 1.$$

Сопряжем матрицу  $A$  матрицей  $B = e_1B + \dots + e_nB = B_1 + \dots + B_n$ , где  $B_1 = e_1 \cdot I$ ,  $B_i = e_i \cdot S_{(2i)}$ . Тогда

$$A' = B^{-1}AB = e_1A' + \dots + e_nA' = A'_1 + \dots + A'_n,$$

где  $A'_1 = A_1$ ,

$$A'_i = \begin{pmatrix} 0 & a_{1i} & 0 & \dots & 0 \\ a_{i1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1,n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \alpha_{n-2,1} & \dots & \alpha_{n-2,n-2} \end{pmatrix}, \quad i > 1.$$

Обозначим матрицу

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1,n-2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-2,1} & \dots & \alpha_{n-2,n-2} \end{pmatrix},$$

а в случае  $i = 1$  матрицу

$$\begin{pmatrix} e_1a_{22} & \dots & e_1a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e_1a_{n2} & \dots & e_1a_{nn} \end{pmatrix},$$

через  $\Lambda_i^{(1)}$ . Получается, что исходная матрица  $A$  сопряжена к матрице

$$\sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} D_i^{(1)} & 0 \\ 0 & \Lambda_i^{(1)} \end{pmatrix},$$

все матрицы  $D_i^{(1)}$  имеют размер  $1 \times 1$  или  $2 \times 2$ , все слагаемые в сумме взаимно ортогональны.

Заметим, что каждая  $\Lambda_i^{(1)}$  — это матрица над кольцом  $e_i R$  размера меньше  $n$ , такая что  $\Lambda_i^{(1)2} = I$ . Значит, можно повторить предыдущие рассуждения для матрицы  $\Lambda_i^{(1)}$  и соответствующей системы  $\{e_{ij} \mid j = 1, \dots, n\}$  ортогональных идемпотентов кольца  $e_i R$ . В результате мы получим, что исходная матрица сопряжена сумме матриц

$$\sum_{i,j=1}^n \begin{pmatrix} D_{ij}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & D_{ij}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_{ij}^{(2)} \end{pmatrix},$$

где каждая из матриц в сумме лежит в соответствующем матричном кольце над  $e_{ij} R$ , матрицы  $D_{ij}^{(1)}$  и  $D_{ij}^{(2)}$  имеют размер  $1 \times 1$  или  $2 \times 2$ .

Продолжая этот процесс дальше, мы получим, что матрица  $A$  сопряжена сумме матриц из взаимно ортогональных матричных колец (соответствующих системе ортогональных идемпотентов  $\{e'_1, \dots, e'_N\}$  кольца  $R$ ), каждая из которых блочно-диагональна, блоки имеют размер  $1 \times 1$  и  $2 \times 2$ . Произведя ещё одну замену базиса с помощью матрицы

$$\sum_{k=1}^N e'_k C_k,$$

где каждая  $C_k$  есть матрица перестановки, переставляющей в соответствующей матрице суммы все блоки размера  $2 \times 2$  в начало, а блоки размера  $1 \times 1$  в конец, мы придём к матрице  $\tilde{A}$ , сопряжённой исходной матрице  $A$  и состоящей из диагональных блоков размера  $2 \times 2$  и  $1 \times 1$ .

Таким образом, каждый элемент порядка два в группе  $\Gamma_n(R)$  сопряжён к матрице, состоящей из диагональных блоков размера  $2 \times 2$  и  $1 \times 1$ .

Рассмотрим множество

$$\mathcal{F} = \left\{ D \in D_n(R) \mid \forall N \in \Gamma_n(R) \left( N^2 = I \implies \exists C \in \Gamma_n(R) (D(CNC^{-1}) = (CNC^{-1}D)) \right) \right\}.$$

Это множество состоит из всех таких диагональных матриц  $D$ , что для любого элемента  $N$  нашей полугруппы, имеющего порядок два, существует матрица, сопряжённая к  $N$  и коммутирующая с  $D$ . Тогда  $D$  в некотором базисе имеет вид

$$\begin{aligned} \text{diag}[\alpha_1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \alpha_k, \alpha], & \quad \text{если } n = 2k + 1, \\ \text{diag}[\alpha_1, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha_k], & \quad \text{если } n = 2k, \end{aligned} \quad (*)$$

так как в качестве  $N$  можно взять матрицу  $S_\tau$ .

Далее рассмотрим множество

$$\Lambda = \{ D \in \mathcal{F} \mid \forall D' \in \mathcal{F} \ C_{\Gamma_n(R)}(D) \not\subset C_{\Gamma_n(R)}(D') \},$$

состоящее из матриц из  $\mathcal{F}$  с минимальными централизаторами.

Любая матрица из  $\mathcal{F}$  коммутирует (в том базисе, в котором она имеет вид  $(*)$ ) со всеми матрицами, которые в этом базисе разбиты на диагональные блоки размера  $2 \times 2$  (и, возможно, блок  $1 \times 1$  в самом конце). Значит,  $\Lambda$  содержит матрицы, централизатор которых состоит только из таких матриц. С другой стороны, в любом базисе такие матрицы существуют, например, это матрицы вида  $\text{diag}[1, 1, 2, 2, \dots, k, k, \dots]$  (здесь используется обратимость натуральных чисел).

Рассмотрим элемент  $J$  порядка 2, который коммутирует с некоторой матрицей  $C \in \Lambda$  и, если  $J$  коммутирует с некоторой диагональной матрицей  $C'$ ,  $C_{\Gamma_n(R)}(C) \subset C_{\Gamma_n(R)}(C')$ . Так как  $J \in C_{\Gamma_n(R)}(C)$  и  $C \in \Lambda$ , то  $J$  состоит из диагональных блоков  $2 \times 2$  (и, возможно, одного блока  $1 \times 1$  в конце). Рассмотрим один из этих блоков

$$J_i = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Так как  $J_i^2 = I$ , то  $e_1 = a^2$  и  $e_2 = bc$  — это ортогональные идемпотенты, в сумме дающие 1. Мы знаем, что  $J_i \cdot \text{diag}[\alpha, \beta] \neq \text{diag}[\alpha, \beta] \cdot J_i$  ни для каких обратимых  $\alpha \neq \beta$  (по выбору матрицы  $J$ ). Возьмём  $\alpha = 1 = a^2 + bc$  и  $\beta = a^2/2 + bc$ . Тогда  $\alpha$  и  $\beta$  обратимы и  $J_i \cdot \text{diag}[\alpha, \beta] = \text{diag}[\alpha, \beta] \cdot J_i$ . Значит,  $\alpha = \beta$ , т. е.  $a^2 = 0$ . Следовательно,  $bc = 1$ . Так как  $abc = 0$ , то  $a = 0$ . Аналогично  $d = 0$ . Таким образом,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & \dots & 0 & 0 \\ b_1^{-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_k \\ 0 & 0 & \dots & b_k^{-1} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ b_1^{-1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_k & 0 \\ 0 & 0 & \dots & b_k^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

После сопряжения матрицы  $J$  с помощью диагональной матрицы  $\text{diag}[b_1, 1, b_2, 1, \dots, b_k, 1]$  или  $\text{diag}[b_1, b, b_2, b, \dots, b_k, b, 1]$  мы получим матрицу  $J' = S_\tau$  или соответственно  $bS_\tau$ . Таким образом, мы нашли такую матрицу  $M \in \Gamma_n(R)$ , что  $M\Phi(S_\tau)M^{-1} = bS_\tau$ ,  $b^2 = 1$ .  $\square$

**Лемма 4.** Пусть  $n = 3$ ,  $\Phi$  — такой автоморфизм полугруппы  $G_n(R)$ , что  $\Phi(S_\tau) = bS_\tau$ ,  $b^2 = 1$ , где  $\tau$  — подстановка из предыдущей леммы (в нашем случае это просто (12)). Тогда существует такая матрица  $M \in \Gamma_n(R)$ , что  $\Phi'(S_\rho) = \Phi_M \circ \Phi(S_\rho) = b^{\text{sgn } \rho} S_\rho$  для всех  $\rho \in \Sigma_n$ .

**Доказательство.** Из леммы 2 следует, что для любых  $\alpha, \beta \in R_+^*$

$$\Phi(\text{diag}[\alpha, \alpha, \beta]) = \text{diag}[\alpha', \alpha', \beta'],$$

так как  $\Phi(S_{(12)}) = bS_{(12)}$  и первая из матриц коммутирует с  $S_{(12)}$ . Если  $\alpha \neq \beta$ , то  $\alpha' \neq \beta'$ , так как  $\text{diag}[\alpha, \alpha, \beta]$  не может переходить в скалярную матрицу (центр полугруппы матриц). Пусть

$$\Phi(S_{(23)}) = A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Так как  $A^2 = I$ , то, как и ранее, получаем

$$a_{ik}a_{kj} = 0, \quad a_{1i}a_{i1} + a_{2i}a_{i2} + a_{3i}a_{i3} = 1. \quad (1)$$

Заметим, что  $A$  не коммутирует с  $\text{diag}[\alpha', \alpha', \beta']$ . Отсюда получаем, что должно выполняться хотя бы одно из следующих условий:

$$\alpha a_{13} \neq \beta a_{13}, \quad \alpha a_{23} \neq \beta a_{23}, \quad \alpha a_{31} \neq \beta a_{31}, \quad \alpha a_{32} \neq \beta a_{32}.$$

Так как  $A^2 = I$ , то, как и в предыдущей лемме,  $\xi = a_{12}a_{21}$  — идемпотент. Предположим, что он ненулевой. Тогда возьмём  $\alpha' = 1 + \xi$ ,  $\beta' = 1$  ( $\alpha'$  обратим, обратным к нему является элемент  $1 - \xi/2$ ). Тогда не выполняется ни одно из выписанных выше условий. Получаем противоречие, значит,  $a_{12}a_{21} = 0$ . Так как  $A^2 = I$ , то  $a_{11}^2 + a_{13}a_{31} = 1$ . Умножив это равенство на  $a_{12}$ , получаем  $a_{12} = 0$ . Аналогично  $a_{21} = 0$ . Теперь воспользуемся тем, что матрица  $S_{(12)}S_{(23)} = S_{(123)}$  имеет порядок 3, а значит,  $(bS_{(12)}A)^3 = I$ . Отсюда, пользуясь (1), получаем условия

$$a_{11}a_{23}a_{32} + a_{22}a_{13}a_{31} = b, \quad a_{11}^2a_{22} = 0, \quad a_{11}a_{22}^2 = 0. \quad (2)$$

Согласно (1) имеем, что  $a_{11}^3 = a_{11}$ ,  $a_{22}^3 = a_{22}$ ,  $a_{11}a_{23}a_{32} = a_{11}$ ,  $a_{22}a_{13}a_{31} = a_{22}$ , следовательно,  $a_{11} + a_{22} = b$ . С другой стороны,  $a_{11}a_{23}a_{32} + a_{22}a_{13}a_{31} + a_{33}^3 = b$ , а значит,  $a_{33}^3 = 0 = a_{33}$ . Таким образом, мы можем переписать (1) в виде

$$a_{13}a_{31} + a_{23}a_{32} = 1, \quad a_{11}^2 + a_{31}a_{13} = 1, \quad a_{22}^2 + a_{32}a_{23} = 1.$$

Обозначим  $e_1 = a_{23}a_{32}$ ,  $e_2 = a_{13}a_{31}$ . Это ортогональные идемпотенты, в сумме дающие 1. Таким образом, мы знаем, что  $a_{11}e_1 + a_{22}e_2 = b$  (это одно из равенств (2)). Значит,  $a_{11}e_1 = be_1$ , но так как  $a_{11}$  ортогонален  $e_2$ , то он лежит в кольце  $e_1R$ , поэтому  $a_{11} = ba_{11}e_1 = be_1$ . Аналогично получаем  $a_{22} = be_2$ , и матрица  $A$  имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} be_1 & 0 & a_{13} \\ 0 & be_2 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix}.$$

Возьмём теперь матрицу

$$C = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & 0 \\ e_2 & e_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Она обратима (обратна сама себе) и коммутирует с  $S_{(12)}$ , следовательно, при автоморфизме  $\Phi_C$  матрица  $S_{(12)}$  перейдёт в  $bS_{(12)}$ . При этом матрица  $A$  перейдёт в матрицу

$$A' = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b(a_{13} + a_{23}) \\ 0 & b(a_{31} + a_{32}) & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что  $(a_{13} + a_{23})(a_{31} + a_{32}) = e_1 + e_2 = 1$ . Теперь возьмём матрицу  $C' = \text{diag}[1, 1, a_{13} + a_{23}]$  (она также коммутирует с  $S_{(12)}$ ) и сопряжем  $A'$  с помощью неё. Получим  $bS_{(23)}$ . Так как группа подстановок порождается подстановками (12) и (23), то автоморфизм  $\Phi' = \Phi_M \circ \Phi$  является искомым. Лемма доказана.  $\square$

**Лемма 5.** Пусть  $n = 4$ ,  $\Phi$  — такой автоморфизм полугруппы  $G_n(R)$ , что  $\Phi(S_\tau) = S_\tau$ , где  $\tau$  — подстановка из леммы 3 (в нашем случае это просто (12)(34)). Пусть  $\rho = (13)(24)$ . Тогда существует такая матрица  $M \in \Gamma_n(R)$ , что  $\Phi_M \circ \Phi(S_\rho) = S_\rho$  и  $\Phi_M \circ \Phi(S_\tau) = S_\tau$ .

**Доказательство.** Пусть  $X = \Phi(S_\rho)$ . Так как  $S_\tau$  коммутирует с  $S_\rho$ , то

$$X = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \\ a_2 & a_1 & b_2 & b_1 \\ c_1 & c_2 & d_1 & d_2 \\ c_2 & c_1 & d_2 & d_1 \end{pmatrix}.$$

Будем рассматривать  $X$  как матрицу размера  $2 \times 2$  над матрицами  $2 \times 2$ :

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad A, B, C, D \in M_2(R).$$

Так как  $X^2 = I$ , то  $A^2 + BC = I_2$ , причём, так как

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix},$$

имеем

$$A^2 = \begin{pmatrix} a_1^2 + a_2^2 & 2a_1a_2 \\ 2a_1a_2 & a_1^2 + a_2^2 \end{pmatrix}.$$

Значит, у матриц  $A^2$  и (аналогично)  $BC$  на диагонали стоят равные элементы. Так как сумма матриц  $A^2$  и  $BC$  имеет нули вне главной диагонали, то и сами матрицы  $A^2$  и  $BC$  диагональны (и даже скалярны). Значит, они являются центральными идемпотентами кольца матриц  $2 \times 2$ . Заметим, далее, что матрица  $\text{diag}[d_1, d_1, d_2, d_2]$ , где  $d_1 \neq d_2$ ,  $d_1, d_2 \in R_+^*$ , перейдёт при автоморфизме в матрицу такого же вида, т. е.  $\text{diag}[d'_1, d'_1, d'_2, d'_2]$ ,  $d'_1 \neq d'_2$ , потому что данная матрица диагональна, коммутирует с  $S_\tau$  и не скалярна. Будем рассматривать матрицу

$$\begin{pmatrix} A^2/2 + BC & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}.$$

Она имеет описанный выше вид и коммутирует с  $X$  (для проверки надо воспользоваться коммутированием  $B$  и  $C$  и равенствами  $B^2C = B$  и  $BC^2 = C$ , получающимися из  $A^2 + BC = I_2$  умножением на  $B$  и  $C$ ). Значит,  $A^2/2 + BC = I_2 = A^2 + BC$ ,  $A^2 = 0$ ,  $BC = I_2$ , а так как  $ABC = 0$ , то  $A = 0$ , аналогично  $D = 0$ . Теперь нетрудно убедиться, что

$$M = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}$$

(заметим, что  $M$  коммутирует с матрицей  $S_\tau$ ). Таким образом, лемма доказана.  $\square$

**Лемма 6.** Пусть  $n = 4$ ,  $\Phi$  — автоморфизм, построенный в предыдущей лемме. Тогда найдутся матрица  $M \in \Gamma_n(R)$  и инволюция  $a \in R_+^*$ , такие что  $\Phi_M \circ \Phi(S_\sigma) = a^{\text{sgn } \sigma} S_\sigma$  для любой подстановки  $\sigma$ .

**Доказательство.** Пусть  $Y = \Phi(S_{(4321)})$ , где  $\Phi$  — автоморфизм из предыдущей леммы. Так как  $S_{(4321)}$  коммутирует с матрицей  $S_{(13)(24)}$ ,  $Y$  имеет вид

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 & z_1 & y_2 & z_2 \\ x_1 & w_1 & x_2 & w_2 \\ y_2 & z_2 & y_1 & z_1 \\ x_2 & w_2 & x_1 & w_1 \end{pmatrix}.$$

Теперь воспользуемся тождеством

$$S_{(4321)}S_{(12)(34)} = S_{(14)(23)}S_{(4321)},$$

из которого получим равенства  $x_1 = z_2$ ,  $z_1 = x_2$ ,  $y_1 = w_2$ ,  $w_1 = y_2$ . Таким образом,

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 & z_1 & y_2 & z_2 \\ z_2 & y_2 & z_1 & y_1 \\ y_2 & z_2 & y_1 & z_1 \\ z_1 & y_1 & z_2 & y_2 \end{pmatrix}.$$

Наконец, воспользуемся тем, что  $Y^2 = S_{(13)(24)}$ . Отсюда имеем условия

$$y_1^2 + 2z_1z_2 + y_2^2 = 0, \quad y_1z_2 + y_1z_1 + y_2z_1 + y_2z_2 = 0, \quad z_1^2 + 2y_1y_2 + z_2^2 = 1.$$

Умножив последнее равенство на  $y_1$ , получим

$$z_1^2y_1 + 2y_1^2y_2 + z_2^2y_1 = y_1,$$

но из первых равенств следует, что  $y_1^2 = 0$ ,  $y_1z_1 = 0$ ,  $y_1z_2 = 0$  (см. лемму 1). Значит,  $y_1 = 0$ , аналогично  $y_2 = 0$ . Таким образом,

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & z_1 & 0 & z_2 \\ z_2 & 0 & z_1 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & z_1 \\ z_1 & 0 & z_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & z_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z_1 \\ z_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & z_2 \\ z_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Имеем  $z_1^2 + z_2^2 = 1$  и  $z_1z_2 = 0$ . Положим  $M_1 = z_2^2S_{(14)(23)} + z_1^2I_4$  (матрица  $M$  обратима — обратна самой себе). Пусть  $\Phi_1 = \Phi_{M_1} \circ \Phi$ , тогда (так как  $M_1$  коммутирует с  $S_\tau$  и  $S_\rho$ )

$$\Phi_1(S_{(4321)}) = (z_1 + z_2)S_{(4321)}, \quad \Phi_1(S_\tau) = S_\tau, \quad \Phi_1(S_\rho) = S_\rho.$$

Далее будем рассматривать матрицу  $A = \Phi_1(S_{12})$ . Тогда из условий коммутирования  $S_{12}$  с  $S_{(12)(34)}$  и с  $\text{diag}[\alpha, \alpha, \beta, \beta]$  (а последняя при автоморфизме

переходит в подобную ей, если  $\alpha, \beta \in R_+^*$ , см. предыдущую лемму) получаем, что

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & b_2 & b_1 \end{pmatrix}.$$

Из тождества

$$S_{(13)(24)}S_{(12)}S_{(13)(24)}S_{(12)} = S_{(12)(34)}$$

следуют условия на элементы матрицы:

$$a_1b_1 + a_2b_2 = 0, \quad a_1b_2 + a_2b_1 = 1.$$

Из первого равенства получим  $a_1b_1 = a_2b_2 = 0$ . Домножим второе равенство на  $a_1$ , получим  $a_1^2b_2 + a_1a_2b_1 = a_1$ . Так как  $X^2 = I_4$  ( $a_1a_2 = 0$ ,  $a_1^2 = 1 - a_2^2$ ), имеем  $a_1 = b_2(1 - a_2^2) = b_2$ . Аналогично  $a_2 = b_1$ . Таким образом,

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_2 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Положим  $M' = a_1^2S_{(13)(24)} + a_2^2I_4$  (эта матрица обратима — обратна самой себе). Пусть  $\Phi_2 = \Phi_{M'} \circ \Phi_1$ , тогда (так как  $M'$  коммутирует с  $S_{(4321)}$ ,  $S_\tau$  и  $S_\rho$ )

$$\begin{aligned} \Phi_2(S_{(12)}) &= (a_1 + a_2)S_{(12)}, & \Phi_2(S_{(4321)}) &= (z_1 + z_2)S_{(4321)}, \\ \Phi_2(S_\tau) &= S_\tau, & \Phi_2(S_\rho) &= S_\rho. \end{aligned}$$

Осталось доказать, что инволюции  $a_1 + a_2$  и  $z_1 + z_2$  совпадают. Пусть

$$X = \Phi_2(S_{(432)}) = (a_1 + a_2)(z_1 + z_2)S_{(432)}.$$

Так как  $(432) = (4321)(12)$ , то  $X^3 = I_4$ , следовательно,  $(a_1 + a_2)^3(z_1 + z_2)^3 = 1$ . Таким образом,  $(a_1 + a_2)(z_1 + z_2) = 1$ , значит,  $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2)^{-1} = a_1 + a_2$ .  $\square$

**Определение 9.** Пусть число  $n$  разложено в сумму степеней двойки:

$$n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \dots + 2^{k_l}, \quad k_1 > k_2 > \dots > k_l \geq 0.$$

Диагональный блок размера  $2^{k_i} \times 2^{k_i}$ ,  $i = 1, \dots, l$ , матрицы размера  $n \times n$ , соответствующий векторам базиса с номерами

$$2^{k_1} + 2^{k_2} + \dots + 2^{k_{i-1}} + 1, \dots, 2^{k_1} + 2^{k_2} + \dots + 2^{k_i},$$

будем обозначать через  $\mathbf{D}_i$ .

**Определение 10.** Через  $\sigma_i^{(j)}$ ,  $j = 1, \dots, l$ ,  $i = 1, \dots, k_i$ , обозначим подстановку, которая тождественно действует во всех блоках  $\mathbf{D}_m$ , кроме блока  $\mathbf{D}_j$ , а в блоке  $\mathbf{D}_j$  является произведением  $2^{k_j-1}$  транспозиций, каждая из которых имеет вид  $(p, p + 2^{i-1})$ .

Через  $\sigma_i$  обозначим подстановку  $\sigma_{i_1}^{(1)} \cdot \dots \cdot \sigma_{i_l}^{(l)}$ , где  $i_q = \min(i, k_q)$ .

Например, для  $n = 7$

$$\sigma_1 = (1, 2)(3, 4)(5, 6), \quad \sigma_2 = (1, 3)(2, 4)(5, 6),$$

для  $n = 10$

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= (1, 2)(3, 4)(5, 6)(7, 8)(9, 10), & \sigma_2 &= (1, 3)(2, 4)(5, 7)(6, 8)(9, 10), \\ \sigma_3 &= (1, 5)(2, 6)(3, 7)(4, 8)(9, 10). \end{aligned}$$

**Лемма 7.** Пусть  $\Phi$  — произвольный автоморфизм полугруппы  $G_n(R)$ . Тогда найдётся матрица  $M \in \Gamma_n(R)$ , такая что  $\Phi_M \circ \Phi(S_{\sigma_i}) = a_i S_{\sigma_i}$ ,  $a_i^2 = 1$ , для всех  $i = 1, 2, \dots$

**Доказательство.** По лемме 3 мы можем выбрать такую матрицу  $M_1$ , что

$$\Phi_1(S_{\sigma_1}) = \Phi_{M_1} \circ \Phi(S_{\sigma_1}) = S_{\sigma_1}.$$

Теперь рассмотрим матрицу  $A_2 = \Phi_1(S_{\sigma_2})$ . Пусть  $n$  нечётно. Так как  $A_2$  коммутирует с матрицей  $S_{\sigma_1}$ , то она имеет вид

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1,n-2} & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{12} & a_{11} & a_{14} & a_{13} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n-2} & a_{1,n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ a_{32} & a_{31} & a_{34} & a_{33} & \dots & a_{3,n-1} & a_{3,n-2} & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ a_{n-2,1} & a_{n-2,2} & a_{n-2,3} & a_{n-2,4} & \dots & a_{n-2,n-2} & a_{n-2,n-1} & a_{n-2,n} \\ a_{n-2,2} & a_{n-2,1} & a_{n-2,4} & a_{n-2,3} & \dots & a_{n-2,n-1} & a_{n-2,n-2} & a_{n-2,n} \\ a_{n,1} & a_{n,1} & a_{n,3} & a_{n,3} & \dots & a_{n,n-2} & a_{n,n-2} & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Тогда из того, что  $A_2^2 = I$ , следует, что (если рассмотреть первый столбец, умноженный на вторую строчку, третий столбец, умноженный на четвёртую строчку, и т. д.)  $a_{n,i}a_{i,n} = 0$  для всех  $i = 1, \dots, n-1$ . Теперь рассмотрим последний столбец, умноженный на последнюю строчку. Из найденных равенств получим  $a_{n,n}^2 = 1$ , т. е.  $a_{n,n}$  — обратимый элемент кольца  $R$ . Отсюда следует, что  $a_{i,n} = a_{n,i} = 0$  для всех  $i = 1, \dots, n-1$ . Таким образом, можно рассматривать ограничение данной матрицы на размер  $(n-1) \times (n-1)$ . Поэтому можем пока считать, что размерность группы чётна. В этом случае матрица имеет вид

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{12} & a_{11} & a_{14} & a_{13} & \dots & a_{1,n} & a_{1,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3,n-1} & a_{3,n} \\ a_{32} & a_{31} & a_{34} & a_{33} & \dots & a_{3,n} & a_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & a_{n-1,4} & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n-1,2} & a_{n-1,1} & a_{n-1,4} & a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1,n} & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix}.$$

Будем рассматривать  $A_2$  как матрицу размера  $n/2 \times n/2$  над матрицами  $2 \times 2$ :

$$A_2 = \begin{pmatrix} A_2^{(1,1)} & \dots & A_2^{1,n/2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_2^{(n/2,1)} & \dots & A_2^{(n/2,n/2)} \end{pmatrix}, \quad A_2^{(1,1)}, \dots, A_2^{(n/2,n/2)} \in M_2(R).$$

Так как  $A_2^2 = 1$ , то

$$A_2^{(1,1)2} + A_2^{(1,2)} A_2^{(2,1)} + \dots + A_2^{(1,n/2)} A_2^{(n/2,1)} = I_2,$$

причём, так как

$$A_2^{(i,j)} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix},$$

имеем, что

$$A_2^{(1,i)} A_2^{(i,1)} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_1 b_2 & a_1 b_2 + a_2 b_1 \\ a_1 b_2 + a_2 b_1 & a_1 a_2 + b_1 b_2 \end{pmatrix}.$$

Значит, у матриц  $A_2^{(1,i)} A_2^{(i,1)}$  на диагонали стоят равные элементы. Так как сумма всех матриц  $A_2^{(1,i)} A_2^{(i,1)}$  имеет нули вне главной диагонали, то и сами матрицы  $E_i = A_2^{(1,i)} A_2^{(i,1)}$  диагональны, а следовательно, и скалярны. Значит, они являются центральными идемпотентами кольца матриц размера  $2 \times 2$ . Таким образом,  $\{E_i\}$  — это система попарно ортогональных идемпотентов, дающих в сумме 1, т. е.

$$M_2(R) = E_1 M_2(R) \oplus E_2 M_2(R) \oplus \dots \oplus E_{n/2} M_2(R).$$

Разложим матрицу  $A_2$  в сумму  $E_1 A_2 + \dots + E_{n/2} A_2$ .

Сопряжём матрицу  $A_2$  матрицей  $B = E_1 B + \dots + E_n B = B_1 + \dots + B_n$ , где  $B_1 = E_1 \cdot I$ ,  $B_i = E_i \cdot S_{(3,2i-1)(4,2i)}$ . Тогда

$$A_2' = B^{-1} A_2 B = E_1 A_2' + \dots + E_n A_2' = A_2^{(1)'} + \dots + A_2^{(n)'},$$

где

$$A_2^{(1)'} = \begin{pmatrix} A_2^{(1,1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_{11}^{(1)} & \dots & \alpha_{1,n-1}^{(1)} \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \alpha_{n-1,1}^{(1)} & \dots & \alpha_{n-1,n-1}^{(1)} \end{pmatrix},$$

$$A_2^{(i)'} = \begin{pmatrix} 0 & A_{1i} & 0 & \dots & 0 \\ A_{i1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{11}^{(i)} & \dots & \alpha_{1,n-2}^{(i)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \alpha_{n-2,1}^{(i)} & \dots & \alpha_{n-2,n-2}^{(i)} \end{pmatrix}, \quad i > 1.$$

Обозначим матрицу

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1,n-2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-2,1} & \dots & \alpha_{n-2,n-2} \end{pmatrix},$$

а в случае  $i = 1$  матрицу

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-1,1} & \dots & \alpha_{n-1,n-1} \end{pmatrix},$$

через  $\Lambda_i$ . Заметим, что  $\Lambda_i$  — матрица над кольцом  $E_i M_2(R)$  размера меньше  $n/2$ , такая что  $\Lambda_i^2 = I$ . Значит, можно повторить предыдущие рассуждения для матрицы  $\Lambda_i$  и соответствующей системы ортогональных идемпотентов кольца  $E_i M_2(R)$ . В результате мы получим матрицу  $\tilde{A}_2$ , сопряжённую исходной матрице  $A_2$  и состоящую из диагональных блоков размера  $4 \times 4$  и  $2 \times 2$ . Таким образом, каждый элемент порядка два в группе  $\Gamma_n(R)$ , коммутирующий с  $S_{\sigma_1}$ , в некотором базисе, в котором  $S_{\sigma_1}$  не меняется, состоит из диагональных блоков размера  $4 \times 4$  и  $2 \times 2$  (понятно, что если вернуться к случаю матрицы нечётного размера, то может ещё возникнуть один блок размера  $1 \times 1$ ).

Рассмотрим теперь множество

$$\mathcal{F}_1 = \{D \in D_n(R) \mid DS_{\sigma_1} = S_{\sigma_1}D \wedge \forall J \in \Gamma_n(R) (J^2 = I \wedge JS_{\sigma_1} = S_{\sigma_1}J \implies \exists C \in \Gamma_n(R) (D(CJC^{-1}) = CJC^{-1}D))\}.$$

Это множество должно состоять из диагональных матриц, у которых на диагонали стоят попарно равные элементы и которые в некотором базисе коммутируют со всеми матрицами порядка 2, представимыми в виде блоков размера  $4 \times 4$  и  $2 \times 2$ . Значит, любой элемент  $D$  этого множества в некотором базисе имеет вид

$$\begin{aligned} \text{diag}[\alpha_1 I_2, \alpha_1 I_2, \alpha_2 I_2, \alpha_2 I_2, \dots, \alpha_k I_2, \alpha_k I_2, I_2], & \text{ если } n/2 = 2k + 1, \\ \text{diag}[\alpha_1 I_2, \alpha_1 I_2, \dots, \alpha_k I_2, \alpha_k I_2], & \text{ если } n/2 = 2k \end{aligned} \quad (*)$$

(если размерность полугруппы нечётна, то добавляется ещё один диагональный элемент в конце), причём соответствующая замена базиса не меняет  $S_{\sigma_1}$ ,  $D$  коммутирует с  $S_{\sigma_1}$  и в некотором базисе — с матрицей  $S_{\sigma_2}$ .

Далее рассмотрим множество

$$\Lambda_1 = \{D \in \mathcal{F}_1 \mid \forall D' \in \mathcal{F}_1 (C_{\Gamma_n(R)}(D) \not\supseteq C_{\Gamma_n(R)}(D'))\}.$$

Любая матрица из  $\mathcal{F}_1$  коммутирует (в том базисе, в котором она имеет вид  $(*)$ ) со всеми матрицами, которые в этом базисе разбиты на диагональные блоки размера  $4 \times 4$  (и, возможно,  $2 \times 2$  в конце, и ещё, возможно,  $1 \times 1$

в самом конце). Значит,  $\Lambda_1$  содержит матрицы, централизатор которых состоит только из таких матриц. С другой стороны, в любом базисе такие матрицы существуют, например, это матрицы вида  $\text{diag}[1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, \dots, k, k, k, k, \dots]$ .

Рассмотрим инволюцию  $K$  — образ матрицы  $S_{\sigma_2}$ . Это матрица, коммутирующая с  $S_{\sigma_1}$  и с некоторой матрицей  $C \in \Lambda_1$ . Кроме того, если она коммутирует с некоторой диагональной матрицей  $C'$ , то  $C_{\Gamma_n(R)}(C) \subset C_{\Gamma_n(R)}(C')$ . Так как  $K \in C_{\Gamma_n(R)}(C)$  и  $C \in \Lambda_1$ , то  $J$  состоит из диагональных блоков  $4 \times 4$  (и, возможно, одного блока  $2 \times 2$ , и ещё, возможно, одного блока  $1 \times 1$ ).

Рассмотрим один из этих блоков (размера  $4 \times 4$ )

$$\tilde{K}_i = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad A, B, C, D \in M_2(R).$$

Так как  $\tilde{K}_i$  — инволюция, коммутирующая с ограничением  $S_{\sigma_1}$  на данную часть базиса, то  $E_1 = A^2$  и  $E_2 = BC$  — это центральные ортогональные идемпотенты кольца  $M_2(R)$ , в сумме дающие  $I_2$ . Мы знаем, что

$$\tilde{K}_i \cdot \text{diag}[\alpha, \alpha, \beta, \beta] \neq \text{diag}[\alpha, \alpha, \beta, \beta] \cdot \tilde{K}_i$$

ни для каких обратимых  $\alpha \neq \beta$  (по выбору матрицы  $K$ ). Возьмём  $\alpha I_2 = A^2 + BC$  и  $\beta I_2 = A^2/2 + BC$ . Тогда  $\alpha$  и  $\beta$  обратимы и

$$\tilde{K}_i \cdot \text{diag}[\alpha, \alpha, \beta, \beta] = \text{diag}[\alpha, \alpha, \beta, \beta] \cdot \tilde{K}_i.$$

Значит,  $\alpha = \beta$ , т. е.  $A^2 = 0$ . Следовательно,  $BC = 1$ . Так как  $ABC = 0$ , то  $A = 0$ . Аналогично  $D = 0$ . Таким образом,  $K$  (в зависимости от размерности) может иметь один из четырёх видов:

$$\begin{pmatrix} 0 & B_1 & \dots & 0 & 0 \\ B_1^{-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & B_k \\ 0 & 0 & \dots & B_k^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & B_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ B_1^{-1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & B_k & 0 \\ 0 & 0 & \dots & B_k^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_{k+1} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & B_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_1^{-1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & B_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & B_k^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & b_{k+1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_{k+1}^{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & B_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_1^{-1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & B_k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & B_k^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & b_{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_{k+1}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{k+2} \end{pmatrix}.$$

После сопряжения матрицы  $K$  с помощью блочно-диагональной матрицы, которая имеет вид

$$\text{diag}[B_1, I_2, B_2, I_2, \dots, B_k, I_2]$$

в первом случае,

$$\text{diag}[B_1, b_{k+1}I_2, B_2, b_{k+1}I_2, \dots, B_k, b_{k+1}I_2, 1]$$

во втором случае,

$$\text{diag}[B_1, I_2, B_2, I_2, \dots, B_k, I_2, b_{k+1}, 1]$$

в третьем случае,

$$\text{diag}[B_1, b_{k+2}I_2, B_2, b_{k+2}I_2, \dots, B_k, b_{k+2}I_2, b_{k+1}, b_{k+2}, 1]$$

в четвёртом случае, мы получим матрицу  $K' = S_{\sigma_2}$  или  $b_{k+1}S_{\sigma_2}$ ,  $b_{k+2}S_{\sigma_2}$ , при этом матрица  $S_{\sigma_1}$  не изменится. Таким образом, мы нашли матрицу  $M_2 \in \Gamma_n(R)$ , такую что  $M\Phi(S_{\sigma_i})M_2^{-1} = b_i S_{\sigma_i}$ ,  $i = 1, 2$ . Продолжая данную процедуру далее (а именно рассматривая матрицы размера  $n \times n$  как матрицы  $n/4 \times n/4$  над кольцом матриц  $4 \times 4$  и подстановку  $\sigma_3$  и т. д.), дойдём до искомой замены базиса.  $\square$

**Определение 11.** Назовём диагональную матрицу  $D \in \Gamma_n(R)$  *блочно-скалярной инволюцией*, если  $D^2 = I$  и матрица  $D$  является скалярной в каждом блоке  $\mathbf{D}_i$ ,  $i = 1, \dots, l$ . Множество (группу) всех блочно-скалярных инволюций будем обозначать через  $\mathcal{Q}$ .

**Лемма 8.** Пусть автоморфизм  $\Phi$  полугруппы  $G_n(R)$  таков, что  $\Phi(S_{\sigma_i}) = a_i S_{\sigma_i}$ ,  $a_i^2 = 1$ ,  $i = 1, \dots, k_1$ . Тогда каждая матрица  $S_{\sigma_i^{(j)}}$  под действием  $\Phi$  переходит в  $D \cdot S_{\sigma_i^{(j)}}$ , где  $D \in \mathcal{Q}$ .

**Доказательство.** Будем доказывать это утверждение по индукции по размеру блока с номером  $j$ .

**База индукции.** Для блока  $\mathbf{D}_l$  размера  $1 \times 1$  доказывать нечего, поэтому начнём с блока размера  $2 \times 2$  (если он существует).

Пусть блок размера  $2 \times 2$  находится на месте  $(p, p+1)$ . Рассмотрим матрицу  $S_{\sigma_1^{(j)}} = S_{(p, p+1)}$ . Она удовлетворяет следующим свойствам:

- 1)  $S_{(p, p+1)}$  коммутирует со всеми  $\sigma_i$ ,  $i = 1, \dots, k_1$ ;

- 2)  $S_{(p,p+1)}^2 = I$ ;
- 3) если некоторая диагональная матрица  $D$  коммутирует с какой-то матрицей  $S_{\sigma_i}$ , то  $D$  коммутирует и с  $S_{(p,p+1)}$ ;
- 4) если диагональная матрица коммутирует с  $S_{(p,p+1)}$ , то она коммутирует и с любой другой матрицей, удовлетворяющей свойствам 1)–3).

Так как любая матрица, которая скалярна в каждом блоке  $\mathbf{D}_i$ , коммутирует с  $S_{\sigma_i}$ ,  $i = 1, \dots, k_1$ , то образ  $A_{(p,p+1)} = \Phi(S_{(p,p+1)})$  должен коммутировать, например, с матрицей  $\text{diag}[I_{2^{k_1}}, 2 \cdot I_{2^{k_2}}, \dots, l \cdot I_{2^{k_l}}]$ , поэтому матрица  $A_{(p,p+1)}$  также разбивается на блоки  $\mathbf{D}_1, \dots, \mathbf{D}_l$ . Рассмотрим у матрицы  $A_{(p,p+1)}$  блок  $\mathbf{D}_i$  размера, большего  $2 \times 2$ . В этом блоке есть ровно  $k_i$  различных  $S_{\sigma_m}^{(i)}$ . Рассмотрим набор диагональных матриц  $H_1, \dots, H_{k_i}$ , единичных во всех блоках, кроме  $\mathbf{D}_i$ , а в блоке  $\mathbf{D}_i$

$$\begin{aligned} H_1 &= \text{diag}[1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots, 2^{k_i-1}, 2^{k_i-1}], \\ H_2 &= \text{diag}[1, 2, 1, 2, 3, 4, 3, 4, \dots, 2^{k_i-1} - 1, 2^{k_i-1}, 2^{k_i-1} - 1, 2^{k_i-1}], \\ H_3 &= \text{diag}[1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, \dots], \\ &\dots \\ H_{k_i} &= \text{diag}[1, 2, \dots, 2^{k_i-1}, 1, 2, 3, \dots, 2^{k_i-1}]. \end{aligned}$$

Каждая матрица  $H_j$  коммутирует с соответствующей матрицей  $S_{\sigma_j}$ , поэтому по условию 3) матрица  $A_{(p,p+1)}$  должна коммутировать со всеми  $H_j$ ,  $j = 1, \dots, k_i$ . Значит,  $A_{(p,p+1)}$  в блоке  $\mathbf{D}_i$  диагональна. Из условия 1) следует, что матрица  $A_{(p,p+1)}$  в блоке  $\mathbf{D}_i$  скалярна (так как она имеет порядок 2, то соответствующий скаляр является инволюцией). Теперь посмотрим на последний блок (имеющий размер  $2 \times 2$ ). Пусть в этом блоке матрица  $A_{(p,p+1)}$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Так как  $A_{(p,p+1)}$  коммутирует с  $S_{\sigma_1}$ , то  $a = d$ ,  $b = c$ . Так как  $A_{(p,p+1)}$  имеет порядок 2, то  $a^2 + b^2 = 1$ ,  $ab = 0$ .

Воспользуемся теперь условием 4). Рассмотрим диагональную матрицу  $H$ , единичную во всех блоках  $\mathbf{D}_i$ , кроме рассматриваемого, а в рассматриваемом блоке размера  $2 \times 2$  имеющую вид  $\text{diag}[1, a^2/2 + b^2]$ . Тогда

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot a & 1 \cdot b \\ (a^2/2 + b^2) \cdot b & (a^2/2 + b^2) \cdot a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot a & (a^2/2 + b^2) \cdot b \\ 1 \cdot b & (a^2/2 + b^2) \cdot a \end{pmatrix},$$

так как  $ab = 0$ , т. е.  $H$  и  $A_{(p,p+1)}$  коммутируют. Значит, матрица  $H$  должна коммутировать с любой другой матрицей, удовлетворяющей условиям 1)–3), в том числе с  $S_{(p,p+1)}$ . А это означает, что  $a^2/2 + b^2 = 1$ , т. е.  $a^2 = 0$ . Следовательно,  $a = 0$  (так как из  $a^2 + b^2 = 1$  и  $ab = 0$  следует  $a^3 = a$ ). Таким образом, обязательно  $A_{(p,p+1)} = DS_{(p,p+1)}$ , где  $D \in \mathcal{Q}$ .

ШАГ ИНДУКЦИИ. Теперь мы можем сделать предположение индукции о том, что матрица каждой подстановки  $\sigma_m^{(j)}$ ,  $j > i$ ,  $m = 1, \dots, k_{i+1}$ , переходит при

автоморфизме в себя, умноженную на некоторую матрицу из  $\mathcal{Q}$ . Принимая это предположение, рассмотрим теперь матрицы подстановок  $\sigma_m^{(i)}$ ,  $m = 1, \dots, k_i$ . Образы всех таких матриц коммутируют со всеми диагональными матрицами, одновременно коммутирующими со всеми матрицами  $S_{\sigma_1}, \dots, S_{\sigma_{k_1}}$ , а значит, и с матрицей  $\text{diag}[I_{2^{k_1}}, 2 \cdot I_{2^{k_2}}, \dots, l \cdot I_{2^{k_l}}]$ , поэтому все эти образы также разбиваются на блоки  $\mathbf{D}_1, \dots, \mathbf{D}_l$ .

Пусть  $A_{\sigma_1^{(i)}} = \Phi(S_{\sigma_1^{(i)}})$ . Из того, что  $A_{\sigma_1^{(i)}}$  коммутирует со всеми диагональными матрицами, коммутирующими с  $S_{\sigma_1}$ , следует, что  $A_{\sigma_1^{(i)}}$  разбивается на диагональные блоки размера  $2 \times 2$ . Теперь мы можем сказать, что матрица  $A_{\sigma_1^{(i)}}$  коммутирует с любой диагональной матрицей, коммутирующей с матрицей подстановки  $\sigma_1^{(1)} \cdot \dots \cdot \sigma_1^{(i)} = \sigma_1 \cdot \sigma_1^{(i+1)} \cdot \dots \cdot \sigma_1^{(l)}$ . Такие диагональные матрицы могут иметь любые произвольные элементы на диагонали начиная с блока  $\mathbf{D}_{i+1}$ , поэтому матрица  $A_{\sigma_1^{(i)}}$  на блоках  $\mathbf{D}_{i+1}, \dots, \mathbf{D}_l$  диагональна. Благодаря тому что она коммутирует со всеми матрицами  $S_{\sigma_m^{(j)}}$ ,  $j > i$ , получаем, что в каждом блоке  $\mathbf{D}_j$ ,  $j > i$ , матрица  $A_{\sigma_1^{(i)}}$  скалярна.

Матрица  $A_{\sigma_1^{(i)}}$  коммутирует со всеми  $S_{\sigma_1}, \dots, S_{\sigma_{k_1}}$ , поэтому внутри каждого  $\mathbf{D}_j$  все блоки  $2 \times 2$  одинаковые.

Теперь рассмотрим блок  $\mathbf{D}_j$ ,  $j < i$ . Матрицы  $S_{\sigma_i}, S_{\sigma_{i+1}}, \dots, S_{\sigma_{k_1}}$  совпадают на блоке  $\mathbf{D}_i$ , поэтому все их попарные произведения тождественны на  $\mathbf{D}_i$ . Значит, матрица  $A_{\sigma_1^{(i)}}$  коммутирует со всеми диагональными матрицами, коммутирующими с одной из матриц  $S_{\sigma_1} S_{\sigma_i} S_{\sigma_{i+1}}, S_{\sigma_1} S_{\sigma_i} S_{\sigma_{i+2}}, \dots, S_{\sigma_1} S_{\sigma_i} S_{\sigma_{k_1}}$ . Например, мы можем взять матрицу  $\text{diag}[1, 2, 1, 2, \dots, 2, 1, 2, 1]$  на  $\mathbf{D}_j$ , она должна будет коммутировать с матрицей  $A_{\sigma_1^{(i)}}$ , откуда получаем, что на блоке  $\mathbf{D}_j$  наша  $A_{\sigma_1^{(i)}}$  диагональна, а следовательно, скалярна.

Осталось рассмотреть матрицу  $A_{\sigma_1^{(i)}}$  на блоке  $\mathbf{D}_i$ . Благодаря тому что  $A_{\sigma_1^{(i)}}$  коммутирует со всеми  $S_{\sigma_i}$ ,  $i = 1, \dots, k_1$ , мы знаем, что  $A_{\sigma_1^{(i)}}$  на  $\mathbf{D}_i$  состоит из одинаковых диагональных блоков размера  $2 \times 2$  вида

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

и, кроме того (так как  $A_{\sigma_1^{(i)}}$  имеет порядок 2),  $a^2 + b^2 = 1$ ,  $ab = 0$ . Теперь заметим, что матрица  $S_{\sigma_1^{(i)}}$  такова, что если диагональная матрица с ней коммутирует, то она коммутирует и с любой другой матрицей, удовлетворяющей всем перечисленным выше свойствам. Значит, такова же и матрица  $A_{\sigma_1^{(i)}}$ . Следовательно, как и выше (в базе индукции), заключаем, что в каждом блоке  $a = 0$ . Следовательно, на блоке  $\mathbf{D}_i$  имеем  $A_{\sigma_1^{(i)}} = bS_{\sigma_1^{(i)}}$ ,  $b^2 = 1$ , что и требовалось.

Доказательство для  $S_{\sigma_m^{(i)}}$ ,  $m = 2, 3, \dots$ , совершенно аналогично, надо лишь использовать дополнительно доказанное условие  $A_{\sigma_1^{(i)}} = DS_{\sigma_1^{(i)}}$ .  $\square$

**Определение 12.** Через  $\tau(i, p, m)$ ,  $i = 1, \dots, l$ ,  $p = 1, \dots, k_i$ ,  $m = p, \dots, k_i$ , обозначим подстановку, которая на всех блоках, кроме  $\mathbf{D}_i$ , тождественна, а на

блоке  $\mathbf{D}_i$  на первых  $2^m$  элементах базиса совпадает с  $\sigma_p$ , а на остальных элементах базиса тождественна. Таким образом,  $\tau(i, 1, 1)$  — это просто транспозиция,  $\tau(i, p, k_i) = \sigma_p^{(i)}$ .

**Лемма 9.** Пусть автоморфизм  $\Phi$  полугруппы  $G_n(R)$  таков, что  $\Phi(S_{\sigma_i}) = a_i S_{\sigma_i}$ ,  $a_i^2 = 1$ ,  $i = 1, \dots, k_1$ . Тогда существует такая матрица  $M \in \Gamma_n(R)$ , что каждая матрица  $S_{\tau(i,1,m)}$ ,  $i = 1, \dots, l$ ,  $m = 1, \dots, k_i$ , под действием  $\Phi_M \circ \Phi$  переходит в  $D \cdot S_{\tau(i,1,m)}$ , где  $D \in \mathcal{Q}$ . При этом если подстановка  $\tau(i, 1, m)$  чётна, то  $D = E$ .

**Доказательство.** Фиксируем какой-то конкретный блок  $\mathbf{D}_i$  и будем доказывать утверждение для всех  $\tau(i, 1, m)$ ,  $m = 1, \dots, k_i$ , по индукции от  $k_i$  до 1. Заметим, что для  $k_i$  всё уже доказано. Произведём переход от  $k_i$  к  $k_i - 1$ .

Сразу заметим, что любая из матриц  $S_{\tau(i,p,m)}$  коммутирует с каждой диагональной матрицей, с которой коммутирует  $S_{\tau(i,p,k_i)}$ . Это сразу даёт нам, что для каждого  $m = p, \dots, k_i$  образ  $A_{\tau(i,p,m)} = \Phi(S_{\tau(i,p,m)})$  диагонален во всех блоках, кроме  $\mathbf{D}_i$ , а так как все  $S_{\tau(i,p,m)}$  коммутируют со всеми  $S_{\sigma_q^{(p)}}$ ,  $q \neq i$ , сразу получаем, что этот образ во всех блоках скалярен. Значит, нам осталось рассмотреть только блок  $\mathbf{D}_i$ . В этом блоке будем использовать индукцию.

Матрица  $A_{\tau(i,1,k_i-1)}$  коммутирует со всеми  $S_{\sigma_q}$ ,  $q = 1, \dots, k_i - 1$ , откуда сразу следует, что на  $\mathbf{D}_i$  матрица  $A_{\tau(i,1,k_i-1)}$  состоит из диагональных блоков размера  $2 \times 2$ , при этом первая половина блоков совпадает друг с другом и вторая половина тоже. Пусть каждый блок в первой половине равен

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix},$$

каждый блок во второй половине равен

$$\begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}.$$

Теперь воспользуемся соотношением

$$S_{\tau(i,1,k_i-1)} S_{\sigma_{k_i}} S_{\tau(i,1,k_i-1)} S_{\sigma_{k_i}} = S_{\tau(i,1,k_i)}.$$

Оно даёт

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix},$$

откуда  $ac = bd = 0$ ,  $ad + bc = \alpha$ . Заменяем базис с помощью матрицы  $b^2 E + a^2 S_{\tau(i,k_i,k_i)}$  (такая замена базиса коммутирует со всеми введенными нами матрицами), придём к матрице  $A_{\tau(i,1,k_i-1)}$ , у которой в первой половине блока  $\mathbf{D}_i$  стоят матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha^2 = 1,$$

а во второй половине — матрицы  $\beta I_2$ ,  $\beta^2 = 1$ . Произведём замену базиса (только в блоке  $\mathbf{D}_i$ ) с помощью диагональной матрицы  $\text{diag}[\alpha/\beta, 1, \alpha/\beta, 1, \dots, \alpha/\beta, 1]$ .

Такая замена не изменит  $A_{\sigma_q^{(i)}}$ ,  $q > 1$ , при этом рассматриваемая матрица  $A_{\tau(i,1,k_i-1)}$  примет искомый вид.

Снова из соотношения

$$A_{\tau(i,1,k_i-1)} A_{\sigma_{k_i}^{(i)}} A_{\tau(i,1,k_i-1)} A_{\sigma_{k_i}^{(i)}} = A_{\tau(i,1,k_i)}$$

получаем, что  $A_{\tau(i,1,k_i)} = S_{\tau(i,1,k_i)}$ .

Если  $k_i - 1 = 1$ , то дальше рассматривать нечего. Поэтому пусть  $k_i$  было больше двух. Проведём ещё один шаг индукции (остальные шаги проводятся совершенно аналогично).

Для начала покажем, что если в блоке  $\mathbf{D}_i$   $A_{\tau(i,1,k_i-1)} = \alpha S_{\tau(i,1,k_i-1)}$ , то обязательно  $\alpha = 1$ .

Заметим, что существуют матрица  $B$  (на самом деле это, например, матрица транспозиции  $(1, 3)$ ), которая коммутирует со всеми диагональными матрицами, коммутирующими с  $S_{\sigma_2}$ , и матрица  $C$  (например,  $S_{(1,4)}$ ), которая коммутирует со всеми диагональными матрицами, коммутирующими с  $S_{\sigma_1} S_{\sigma_2}$ , такие что

$$B \cdot S_{\tau(i,1,k_i-1)} \cdot B^{-1} \cdot S_{\tau(i,1,k_i-1)} = C \cdot S_{\tau(i,1,k_i-1)} \cdot C^{-1}.$$

Естественно, это условие должно сохраниться при автоморфизме. Так как матрица  $\Phi(B)$  коммутирует со всеми диагональными матрицами, коммутирующими с  $S_{\sigma_2}$ , то она независимо действует в первой и второй половинах блока  $\mathbf{D}_i$ . То же самое можно сказать и о матрице  $\Phi(C)$ . Так как на второй половине блока  $\mathbf{D}_i$  матрица  $A_{\tau(i,1,k_i-1)}$  скалярна (имеет вид  $\alpha I$ ), то при сопряжении она не изменит вид. Значит,  $\alpha^2 = \alpha$ , откуда  $\alpha = 1$ . Таким образом,  $A_{\tau(i,1,k_i-1)} = S_{\tau(i,1,k_i-1)}$ .

Теперь рассмотрим матрицу  $A_{\tau(i,1,k_i-2)} = \Phi(S_{\tau(i,1,k_i-2)})$ . Мы уже знаем, что эта матрица скалярна в блоках  $\mathbf{D}_j$ ,  $j \neq i$ . Так как она коммутирует со всеми диагональными матрицами, с которыми коммутирует  $A_{\tau(i,1,k_i-1)}$ , то она диагональна и на второй половине блока  $\mathbf{D}_i$ . Будем обозначать первую половину блока  $\mathbf{D}_i$  через  $\mathbf{D}'_i$ , вторую — через  $\mathbf{D}''_i$ .

Матрица  $A_{\tau(i,1,k_i-2)}$  коммутирует со всеми  $S_{\sigma_q}$ ,  $q = 1, \dots, k_i - 2$ , поэтому

- 1) на  $\mathbf{D}'_i$  она состоит из диагональных блоков размера  $2 \times 2$ , из которых первая половина блоков совпадает друг другом и вторая половина блоков совпадает друг с другом;
- 2) на  $\mathbf{D}''_i$  она имеет вид  $\text{diag}[aI_{2^{k_i-2}}, bI_{2^{k_i-2}}]$ ,  $a^2 = b^2 = 1$ .

Пусть на  $\mathbf{D}_i$   $A_{\tau(i,1,k_i-1)} = \alpha S_{\tau(i,1,k_i-1)}$ .

Рассмотрим соотношение

$$A_{\tau(i,1,k_i-2)} A_{\sigma_{k_i-1}^{(i)}} A_{\tau(i,1,k_i-2)} A_{\sigma_{k_i-1}^{(i)}} = S_{\tau(i,1,k_i-1)}.$$

Проведём рассуждения, аналогичные предыдущему шагу, и проведём замену базиса с помощью подходящей матрицы  $b'^2 E + a'^2 S_{\tau(i,k_i-1,k_i-1)}$ . Такая замена не изменит  $A_{\sigma_q^{(i)}}$ ,  $q > 1$ , при этом рассматриваемая матрица  $A_{\tau(i,1,k_i-2)}$  примет искомый вид.

Продолжая эту процедуру для  $k_i - 3, \dots, 1$ , мы придём к базису, в котором все  $A_{\tau(i,1,q)}$ ,  $q > 1$ , совпадают с  $S_{\tau(i,1,q)}$ , а  $A_{\tau(i,1,1)}$  отличается от  $S_{\tau(i,1,1)}$  на множитель из  $\mathcal{Q}$ .

Заметим, что мы доказали и последнее утверждение леммы, так как нечётными являются ровно подстановки  $S_{\tau(i,1,1)}$ .  $\square$

**Лемма 10.** Пусть автоморфизм  $\Phi$  полугруппы  $G_n(R)$  таков, что каждая матрица  $S_{\tau(i,1,m)}$ ,  $i = 1, \dots, l$ ,  $m = 1, \dots, k_i$ , под действием  $\Phi$  переходит в  $D \cdot S_{\tau(i,1,m)}$ , где  $D \in \mathcal{Q}$  и если подстановка  $\tau(i, p, m)$  чётна, то  $D = I$ . Тогда найдётся такая матрица  $M \in \Gamma_n(R)$ , что любая матрица подстановки  $\tau$ , действующей независимо в блоках  $\mathbf{D}_1, \dots, \mathbf{D}_l$ , переходит под действием автоморфизма  $\Phi_M \circ \Phi$  в матрицу  $DS_{\tau}$ , причём если подстановка  $\tau$  чётна, то  $D = I$ .

**Доказательство.** Будем рассматривать матрицы подстановок, тождественно действующих во всех блоках, кроме некоторого фиксированного блока  $\mathbf{D}_i$ . Их образы коммутируют со всеми диагональными матрицами, коммутирующими одновременно с образами  $S_{\sigma_1^{(i)}}, \dots, S_{\sigma_{k_i}^{(i)}}$ , а также с образами всех  $S_{\sigma_j^{(p)}}$ ,  $p \neq i$ . Следовательно, во всех блоках  $\mathbf{D}_p$ ,  $p \neq i$ , образы таких матриц скалярны. Сосредоточимся на блоке  $\mathbf{D}_i$ .

Заметим, что если размер блока  $\mathbf{D}_i$  не превосходит двух, то всё уже доказано. Поэтому мы можем считать, что этот размер не меньше  $4 \times 4$ . Для удобства будем считать, что элементы базиса в блоке  $\mathbf{D}_i$  нумеруются с единицы (т. е. это самый первый блок).

По условию всё уже доказано для матрицы транспозиции  $(1, 2)$ , т. е.  $\Phi(S_{(1,2)}) = \alpha S_{(1,2)}$ ,  $\alpha^2 = 1$ . Так как транспозиции  $(3, 4), (5, 6), \dots, (2^{k_i} - 1, 2^{k_i})$  сопряжены к транспозиции  $(1, 2)$  с помощью подстановок  $\sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_{k_i}$  и различных их произведений, то  $\Phi(S_{(2p-1, 2p)}) = \alpha S_{(2p-1, 2p)}$  для всех  $p = 2, \dots, 2^{k_i-1}$ .

Рассмотрим матрицу  $A_{(1,3)}$  — образ матрицы транспозиции  $(1, 3)$ . Из того что она коммутирует со всеми диагональными матрицами, с которыми коммутирует  $S_{\sigma_2}$ , а также с самой  $S_{\sigma_2}$ , следует, что она разбивается на диагональные блоки размера  $4 \times 4$  вида

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & d \\ b & 0 & a & 0 \\ 0 & d & 0 & c \end{pmatrix}, \quad a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1, \quad ab = cd = 0.$$

Из того что матрица  $A_{(1,2)}A_{(1,3)}$  имеет порядок три, сразу следует, что все блоки, кроме самого первого, — это скалярные матрицы с коэффициентом  $\alpha$ . Рассмотрим первый блок. Из того же самого условия получаем  $ac = bd = 0$ ,  $a = d$ ,  $b = c$ . Сделаем новую замену базиса с помощью матрицы  $b^2I + a^2S_{\sigma_1^{(i)}}$ . Такая замена не изменит ни одну из рассмотренных ранее матриц, а нашу матрицу приведёт к виду  $\alpha S_{(1,3)}$ . Понятно, что все остальные матрицы порождающих транспозиций можно получить сопряжением с помощью уже полученных выше матриц.  $\square$

**Лемма 11.** Пусть  $n > 4$ ,  $\Phi$  — автоморфизм полугруппы  $G_n(R)$ . Тогда существуют матрица  $M \in \Gamma_n(R)$  и инволюция  $a \in R_+^*$ , такие что

$$\Phi_1(S_\sigma) = \Phi_M \circ \Phi(S_\sigma) = S_\sigma$$

для любой чётной подстановки  $\sigma$  и

$$\Phi_1(S_\sigma) = \Phi_M \circ \Phi(S_\sigma) = aS_\sigma$$

для любой нечётной подстановки  $\sigma$ .

**Доказательство.** Благодаря предыдущим леммам мы можем считать, что  $\Phi(S_{(p,p+1)}) = D_p S_{(p,p+1)}$ ,  $D_p \in \mathcal{Q}$ , для всех транспозиций  $(p, p+1)$ , меняющих элементы внутри одного блока  $\mathbf{D}_i$ ,  $i = 1, \dots, l$ . Так как произведение любых двух транспозиций чётно, а матрица чётной подстановки переходит сама в себя, то все матрицы  $D_p$  совпадают. Так как все транспозиции сопряжены, то соответствующие матрицы должны иметь одинаковый след. Если  $D_p = D = \text{diag}[\alpha_1 I_{2^{k_1}}, \dots, \alpha_l I_{2^{k_l}}]$ , рассмотрим два различных блока  $\mathbf{D}_i$  и  $\mathbf{D}_j$  неединичных размеров. Рассмотрим транспозиции  $\tau_i$  и  $\tau_j$ , произвольные в соответствующих блоках. След матрицы  $A_{\tau_i}$  равен  $\alpha_1 2^{k_1} + \dots + \alpha_l 2^{k_l} - 2\alpha_i$ , а след матрицы  $A_{\tau_j} = \alpha_1 2^{k_1} + \dots + \alpha_l 2^{k_l} - 2\alpha_j$ . Таким образом,  $\alpha_i = \alpha_j$  всегда, кроме, может быть, блока  $1 \times 1$ .

Пусть  $n$  нечётно (тогда в разложении есть блок  $1 \times 1$ ). Рассмотрим  $A_{(n-1,n)} = \Phi(S_{(n-1,n)})$ . Здесь следует рассмотреть два случая: когда есть блок размера  $2 \times 2$  и когда его нет.

1. Пусть имеется блок размера  $2 \times 2$ . Тогда он расположен прямо перед блоком размера  $1 \times 1$ .

Матрица  $A_{(n-1,n)}$  коммутирует со всеми транспозициями из блоков  $\mathbf{D}_1, \dots, \mathbf{D}_{l-2}$  и при этом имеет порядок 2. Посмотрим, например, что это означает для транспозиции  $S_{(1,2)}$  (по нашему предположению  $n > 4$ , т. е. для нашего случая  $n > 6$ , поэтому транспозиция  $(1, 2)$  не пересекается с транспозицией  $(n-2, n-1)$ ).

Если

$$A_{(n-1,n)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

то из того что  $A_{(n-1,n)}$  коммутирует с  $S_{(1,2)}$ , следует, что  $a_{2i} = a_{1i}$ ,  $a_{i2} = a_{i1}$ ,  $i = 3, \dots, n$ ,  $a_{22} = a_{11}$ ,  $a_{12} = a_{21}$ . С другой стороны, матрица  $A_{(n-1,n)}$  имеет порядок 2, поэтому

$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}a_{31} + \dots + a_{1n}a_{n1} = 1$$

(умножение первого столбца на первую строку),

$$a_{11}a_{12} = a_{13}a_{31} = \dots = a_{1n}a_{n1} = 0$$

(умножение второго столбца на первую строку). Кроме того, как обычно, для матриц второго порядка  $a_{ik}a_{kj} = 0$  при  $i \neq j$ . Следовательно,  $a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1$ , а так как

$$a_{1i}a_{11} = a_{i1}a_{11} = a_{1i}a_{12} = a_{i1}a_{12} = 0, \quad i = 3, \dots, n,$$

то  $a_{1i} = a_{i1} = 0$  для всех  $i = 3, \dots, n$ .

Аналогичными рассуждениями для других транспозиций, коммутирующих с  $A_{(n-1,n)}$ , приходим к тому, что  $A_{(n-1,n)}$  в каждом блоке  $\mathbf{D}_i$ ,  $i = 1, \dots, l-2$ , скалярна, а в конце её стоит блок размера  $3 \times 3$ . Понятно, что можно его рассматривать отдельно. Но тогда мы приходим ровно к ситуации леммы 4 и с помощью замены базиса (вида  $\text{diag}[1, 1, \dots, 1, \gamma](aE + bS_{(n-2,n-1)})$ ), т. е. коммутирующей со всеми рассмотренными выше матрицами) можем прийти к ситуации  $A_{(n-1,n)} = DS_{(n-1,n)}$ ,  $D \in \mathcal{Q}$ ,  $D$  скалярна на объединении последних двух блоков. Из того что матрица  $A_{(n-2,n-1)}A_{(n-1,n)}$  имеет порядок 3, получаем сразу, что  $D = \alpha E$ . Это нам и требовалось.

2. Пусть блока  $2 \times 2$  нет. Этот случай даже проще предыдущего. Начальные рассуждения аналогичны предыдущим, благодаря им мы получаем, что  $A_{(n-1,n)}$  в каждом блоке  $\mathbf{D}_i$ ,  $i = 1, \dots, l-2$ , скалярна. Теперь рассмотрим предпоследний блок, имеющий размер по крайней мере  $4 \times 4$ . Так как  $A_{(n,n-1)}$  коммутирует со всеми матрицами транспозиций вида  $(p, p+1)$  в этом блоке, кроме последней, мы получаем, что матрица  $A_{(n-1,n)}$  скалярна на всех элементах блока, кроме последнего, т. е. матрица  $A_{(n-1,n)}$  диагональна везде, кроме последнего блока размера  $2 \times 2$ . Далее легко заключаем, что она имеет вид  $DS_{(n-1,n)}$  для некоторой диагональной матрицы  $D$ , а после замены базиса с помощью  $\text{diag}[1, 1, \dots, 1, \gamma]$  приходим к  $A_{(n-1,n)} = \alpha S_{(n-1,n)}$ .

Совершенно аналогично мы можем получить транспозиции, стоящие на «стыках» других блоков. На каждом шаге (стыке между блоками  $\mathbf{D}_i$  и  $\mathbf{D}_{i+1}$ ) будет достаточно применять диагональные замены, единичные в блоках  $\mathbf{D}_1, \dots, \mathbf{D}_i$  и домножающие на некоторый скаляр  $\gamma$  в остальных блоках. Понятно, что такие замены коммутируют со всеми рассмотренными на предыдущих шагах транспозициями, что нам и требуется.

В результате мы получаем, что  $A_{(p,p+1)} = \alpha S_{(p,p+1)}$  для всех  $p = 1, \dots, n-1$ , что и требовалось.  $\square$

### 3. Действие автоморфизма $\Phi'$ на диагональных матрицах

В предыдущем разделе по нашему автоморфизму  $\Phi$  мы построили новый автоморфизм  $\Phi' = \Phi_M \Phi$ , такой что  $\Phi'(S_\sigma) = \alpha^{\text{sgn} \sigma} S_\sigma$ ,  $\alpha^2 = 1$ , для всех  $\sigma \in \Sigma_n$ . Мы предположим, что такой автоморфизм  $\Phi'$  фиксирован.

**Лемма 12.** Если  $n \geq 3$ ,  $1/2 \in R$ , автоморфизм  $\Phi' \in \text{Aut}(G_n(R))$  таков, что  $\Phi'(S_\sigma) = \alpha^{\text{sgn} \sigma} S_\sigma$ ,  $\alpha^2 = 1$ , для всех  $\sigma \in \Sigma_n$ , то для всех  $\alpha, \beta \in R_+^*$  мы имеем

$$\Phi'(\text{diag}[\alpha, \beta, \dots, \beta]) = \text{diag}[\gamma, \delta, \dots, \delta], \quad \gamma, \delta \in R_+^*.$$

Если  $\alpha \neq \beta$ , то  $\gamma \neq \delta$ .

**Доказательство.** По лемме 2

$$\Phi'(\text{diag}[\alpha, \beta, \dots, \beta]) = \text{diag}[\gamma_1, \dots, \gamma_n].$$

Рассмотрим подстановку  $\sigma = (2, 3, \dots, n)$ . Так как  $\Phi'(S_\sigma) = \alpha S_\sigma$ , то  $\Phi'(C_{D_n(R)}(S_\sigma)) = C_{D_n(R)}(S_\sigma)$ . Таким образом,  $\text{diag}[\gamma_1, \dots, \gamma_n]$  коммутирует с  $S_\sigma$ , а значит,  $\gamma_2 = \gamma_3 = \dots = \gamma_n$ . Остаётся доказать, что  $\gamma_1 \neq \gamma_2$ . Это сразу же следует из того, что матрица  $\text{diag}[\alpha, \beta, \dots, \beta]$  не коммутирует с  $S_{(12)}$ .  $\square$

**Лемма 13.** Если  $n \geq 3$ ,  $1/2 \in R$ , автоморфизм  $\Phi' \in \text{Aut}(G_n(R))$  таков, что  $\Phi'(S_\sigma) = \alpha^{\text{sgn} \sigma} S_\sigma$ ,  $\alpha^2 = 1$ , для всех  $\sigma \in \Sigma_n$ , то для всех  $X \in G_2(R)$  имеет место равенство

$$\Phi' \begin{pmatrix} X & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & a \end{pmatrix}, \quad \text{где } Y \in G_2(R), \quad a \in R_+^*.$$

**Доказательство.** Обозначим

$$C = \begin{pmatrix} X & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично доказательству леммы 12 можно доказать, что для любой матрицы

$$A = \text{diag}[\alpha, \alpha, \beta, \dots, \beta] \in D_n(R), \quad \alpha \neq \beta,$$

имеет место равенство

$$\Phi'(A) = \text{diag}[\gamma, \gamma, \delta, \dots, \delta] \in D_n(R), \quad \gamma \neq \delta.$$

Заметим, что матрица  $C$  коммутирует с  $A$  и  $S_{(3,4,\dots,n)}$ , а значит,  $\Phi'(C)$  имеет искомый вид.  $\square$

**Лемма 14.** Если  $n \geq 3$ ,  $1/2 \in R$ , автоморфизм  $\Phi' \in \text{Aut}(G_n(R))$  таков, что  $\Phi'(S_\sigma) = \alpha^{\text{sgn} \sigma} S_\sigma$ ,  $\alpha^2 = 1$ , для всех  $\sigma \in \Sigma_n$ , то для любых  $x_1, x_2 \in R_+^*$ , таких что  $x_1 \neq x_2$ ,

$$\Phi'(A_1) = \Phi'(\text{diag}[x_1, 1, \dots, 1]) = \text{diag}[\xi_1, \eta_1, \dots, \eta_1],$$

$$\Phi'(A_2) = \Phi'(\text{diag}[x_2, 1, \dots, 1]) = \text{diag}[\xi_2, \eta_2, \dots, \eta_2],$$

имеем  $\xi_1 \eta_1^{-1} \neq \xi_2 \eta_2^{-1}$ .

**Доказательство.** Предположим, что для некоторых различных  $x_1, x_2 \in R_+^*$  имеет место равенство  $\xi_1 \eta_1^{-1} = \xi_2 \eta_2^{-1}$ , т. е.

$$\begin{aligned}\Phi'(A_1) &= \Phi'(\text{diag}[x_1, 1, \dots, 1]) = \text{diag}[\xi, \eta, \dots, \eta] = A'_1, \\ \Phi'(A_2) &= \Phi'(\text{diag}[x_2, 1, \dots, 1]) = \alpha \cdot \text{diag}[\xi, \eta, \dots, \eta] = A'_2.\end{aligned}$$

Значит,

$$\Phi'^{-1}(\alpha I) = \Phi'^{-1}(A'_1 A'_2{}^{-1}) = \text{diag}[x_1 x_2^{-1}, 1, \dots, 1] = \text{diag}[\beta, 1, \dots, 1],$$

где  $1 \neq \beta \in R_+^*$ , что невозможно. Таким образом,  $\xi_1 \eta_1^{-1} \neq \xi_2 \eta_2^{-1}$ .  $\square$

## 4. Основная теорема

В этом разделе мы докажем основную теорему.

**Лемма 15.** Если  $n \geq 3$ ,  $1/2 \in R$ , автоморфизм  $\Phi' \in \text{Aut}(G_n(R))$  таков, что  $\Phi'(S_\sigma) = \alpha^{\text{sgn } \sigma} S_\sigma$ ,  $\alpha^2 = 1$ , для всех  $\sigma \in \Sigma_n$ , то существует некоторое отображение  $c(\cdot): R_+ \rightarrow R_+$ , такое что  $\Phi'(B_{12}(x)) = B_{12}(c(x))$  для всех  $x \in R_+$ .

**Доказательство.** По лемме 13 имеем

$$\Phi'(B_{12}(1)) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & & & \\ \gamma & \delta & & & \\ & & a & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a \end{pmatrix}, \quad a \in R_+^*, \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in G_2(R).$$

Пусть для каждого  $x \in R_+^*$

$$\Phi'(\text{diag}[x, 1, \dots, 1]) = \text{diag}[\xi(x), \gamma(x), \dots, \gamma(x)], \quad \xi(x), \eta(x) \in R_+^*$$

(см. лемма 12). Тогда для любого  $x \in R_+^*$

$$\begin{aligned}\Phi'(B_{12}(x)) &= \Phi'(\text{diag}[x, 1, \dots, 1] B_{12}(1) \text{diag}[x^{-1}, 1, \dots, 1]) = \\ &= \text{diag}[\xi(x), \eta(x), \dots, \eta(x)] \begin{pmatrix} \alpha & \beta & & & \\ \gamma & \delta & & & \\ & & a & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a \end{pmatrix} \text{diag}[\xi(x)^{-1}, \eta(x)^{-1}, \dots, \eta(x)^{-1}] = \\ &= \begin{pmatrix} \alpha & \nu(x)\beta & & & \\ \nu(x)^{-1}\gamma & \delta & & & \\ & & a & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a \end{pmatrix}\end{aligned}$$

для  $\nu(x) = \xi(x)\eta(x)^{-1}$ .

По лемме 14 для  $x_1 \neq x_2$  имеем  $\nu(x_1) \neq \nu(x_2)$ .

Для каждого  $x \in R_+$  матрицы  $\Phi'(B_{12}(1))$  и  $\Phi'(B_{12}(x))$  коммутируют. Напишем это условие в матричной форме для  $x \in R_+^*$ :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \nu(x)\beta \\ \nu(x)^{-1}\gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \nu(x)\beta \\ \nu(x)^{-1}\gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 + \nu(x)^{-1}\beta\gamma & \nu(x)\alpha\beta + \beta\delta \\ \gamma\alpha + \nu(x)^{-1}\delta\gamma & \nu(x)\gamma\beta + \delta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \nu(x)\beta\gamma & \alpha\beta + \nu(x)\beta\delta \\ \nu(x)^{-1}\gamma\alpha + \delta\gamma & \nu(x)^{-1}\gamma\beta + \delta^2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,  $\nu(x)^{-1}\beta\gamma = \nu(x)\beta\gamma$  для различных  $x \in R_+^*$ . Значит (так как  $\nu(x) - \nu(x)^{-1}$  для некоторых  $x$  принимает обратимые значения),  $\beta\gamma = 0$ .

Используем условие

$$(B_{12}(1))^2 = \text{diag}[2, 1, \dots, 1]B_{12}(1) \text{diag}[1/2, 1, \dots, 1].$$

Имеем

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 & \beta(\alpha + \delta) & & & \\ \gamma(\alpha + \delta) & \delta^2 & & & \\ & & a^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \nu(2)\beta & & & \\ \nu(2)^{-1}\gamma & \delta & & & \\ & & a & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a \end{pmatrix},$$

откуда получаем, что  $\alpha^2 = \alpha$ ,  $\delta^2 = \delta$ ,  $a = 1$  (так как  $a$  обратим).

Воспользуемся соотношением

$$B_{12}(1)B_{13}(1) = B_{13}(1)B_{12}(1),$$

из которого следует, что

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 & \beta & \alpha\beta \\ \alpha\gamma & \delta & \gamma\beta \\ \gamma & 0 & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \beta\alpha & \beta \\ \gamma & \delta & 0 \\ \alpha\gamma & 0 & \delta \end{pmatrix},$$

откуда получаем  $\alpha\gamma = \gamma$ .

Далее воспользуемся соотношением

$$B_{12}(1)B_{13}(1) = B_{13}(1)B_{23}(1)B_{12}(1),$$

которое даёт

$$\begin{pmatrix} \alpha & \alpha\beta & \beta^2 \\ \gamma & \alpha\delta & \beta\delta \\ 0 & \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \beta\delta \\ \gamma & \alpha\delta & \beta \\ \alpha\gamma + \gamma^2\delta & \gamma\delta^2 & \delta^2 \end{pmatrix}.$$

Значит,  $\alpha\gamma + \gamma^2\delta = 0$ , откуда  $\alpha\gamma = \gamma = 0$ . Так как  $\gamma = 0$ , то элементы  $\alpha$  и  $\delta$  обратимы, а так как  $\alpha$  и  $\delta$  — идемпотенты, то  $\alpha = \delta = 1$ . Таким образом,  $\Phi'(B_{12}(1)) = B_{12}(\beta)$ .

Теперь рассмотрим  $B_{12}(x)$ ,  $x \in R_+$ . Из соотношения

$$B_{12}(1)B_{23}(x) = B_{13}(x)B_{23}(x)B_{12}(1)$$

получаем

$$\begin{pmatrix} 1 & a\beta & b\beta \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a\beta + bc & bd \\ 0 & a & b \\ c & c\beta + cd & d^2 \end{pmatrix}.$$

Значит,  $c = 0$ , поэтому  $a$  и  $d$  обратимы. Из соотношения

$$B_{12}(x)^2 = \text{diag}[2, 1, \dots, 1]^{-1} B_{12}(x) \text{diag}[2, 1, \dots, 1]$$

получаем, что  $a^2 = a$ ,  $d^2 = d$ . Значит,  $a = d = 1$ . Таким образом,  $\Phi'(B_{12}(x)) = B_{12}(b(x))$ .  $\square$

Напомним (см. определение 8), что если  $G$  — полугруппа, то гомоморфизм  $\lambda(\cdot): G \rightarrow G$  называется *центральной гомоморфизмом* полугруппы  $G$ , если  $\lambda(G) \subset Z(G)$ . Отображение  $\Omega(\cdot): G \rightarrow G$ , такое что для всех  $X \in G$

$$\Omega(X) = \lambda(X) \cdot X,$$

где  $\lambda(\cdot)$  — центральный гомоморфизм, называется *центральной гомотетией*.

Напомним, что для любого автоморфизма  $y(\cdot) \in \text{Aut}(R_+)$  через  $\Phi^y$  мы обозначаем такой автоморфизм полугруппы  $G_n(R)$ , что

$$\Phi^y(X) = \Phi^y((x_{ij})) = (y(x_{ij}))$$

для всех  $X = (x_{ij}) \in G_n(R)$ .

**Теорема.** Пусть  $\Phi$  — любой автоморфизм полугруппы  $G_n(R)$ ,  $n \geq 3$ ,  $1/2 \in R$ . Тогда на полугруппе  $\text{GE}_n^+(R)$  (см. определение 7)  $\Phi = \Phi_M \Phi^c \Omega$ , где  $M \in \Gamma_n(R)$ ,  $c(\cdot) \in \text{Aut}(R_+)$ ,  $\Omega(\cdot)$  — центральная гомотетия полугруппы  $\text{GE}_n^+(R)$ .

**Доказательство.** По леммам 4, 6, 11 существует такая матрица  $M' \in \Gamma_n(R)$ , что для любой перестановки  $\sigma \in \Sigma_n$

$$\Phi'(S_\sigma) = \Phi_{M'} \Phi(S_\sigma) = \alpha^{\text{sgn } \sigma} S_\sigma, \quad \alpha^2 = 1.$$

Теперь рассмотрим автоморфизм  $\Phi'$ . По лемме 15 существует отображение  $b(\cdot): R_+ \rightarrow R_+$ , такое что для любого элемента  $x \in R_+$

$$\Phi'(B_{12}(x)) = B_{12}(b(x)).$$

Рассмотрим это отображение. Так как  $\Phi'$  — автоморфизм полугруппы  $G_n(R)$ , то отображение  $b(\cdot): R_+ \rightarrow R_+$  биективно.

Так как для всех  $x_1, x_2 \in R_+$

$$B_{12}(x_1 + x_2) = B_{12}(x_1)B_{12}(x_2),$$

то

$$\begin{aligned} B_{12}(b(x_1 + x_2)) &= \Phi'(B_{12}(x_1 + x_2)) = \Phi'(B_{12}(x_1)B_{12}(x_2)) = \\ &= \Phi'(B_{12}(x_1))\Phi'(B_{12}(x_2)) = B_{12}(b(x_1)) \cdot B_{12}(b(x_2)) = B_{12}(b(x_1) + b(x_2)), \end{aligned}$$

откуда следует, что  $b(x_1 + x_2) = b(x_1) + b(x_2)$  для всех  $x_1, x_2 \in R_+$ , поэтому  $b(\cdot)$  аддитивно.

Для того чтобы доказать мультипликативность отображения  $b(\cdot)$ , используем следующие условия:

- 1)  $\Phi'(B_{13}(x)) = \Phi'(S_{(2,3)}B_{12}(x)S_{(2,3)}) = \alpha S_{(2,3)}B_{12}(b(x))\alpha S_{(2,3)} =$   
 $= \alpha^2 B_{13}(b(x)) = B_{13}(b(x));$
- 2) аналогично  $\Phi'(B_{32}(x)) = B_{32}(b(x));$
- 3) (сравните с доказательством леммы 15)

$$\begin{aligned} B_{13}(x_1)B_{32}(x_2) &= B_{32}(x_2)B_{13}(x_1)B_{12}(x_1x_2) \implies \\ &\implies \Phi'(B_{13}(x_1))\Phi'(B_{32}(x_2)) = \Phi'(B_{32}(x_2))\Phi'(B_{13}(x_1))\Phi'(B_{12}(x_1x_2)) \implies \\ &\implies B_{13}(b(x_1))B_{32}(b(x_2)) = B_{32}(b(x_2))B_{13}(b(x_1))B_{12}(b(x_1x_2)) \implies \\ &\implies \forall x_1, x_2 \in R_+ \begin{pmatrix} 1 & b(x_1)b(x_2) & b(x_1) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & b(x_2) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b(x_1x_2) & b(x_1) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & b(x_2) & 1 \end{pmatrix} \implies \\ &\implies \forall x_1, x_2 \in R_+ b(x_1x_2) = b(x_1)b(x_2). \end{aligned}$$

Значит,  $b(\cdot)$  является мультипликативным отображением.

Так как  $b(\cdot)$  биективно, аддитивно и мультипликативно, то  $b(\cdot)$  является автоморфизмом полукольца  $R_+$ .

Рассмотрим теперь отображение  $\Phi^{b^{-1}}$ , которое переводит каждую матрицу  $A = (a_{ij})$  в матрицу  $\Phi^{b^{-1}}(A) = (b^{-1}(a_{ij}))$ . Это отображение является автоморфизмом полукольца  $G_n(R)$ . Тогда

$$\Phi'' = \Phi^{b^{-1}} \circ \Phi' = \Phi^{b^{-1}} \circ \Phi_{M'} \circ \Phi$$

является автоморфизмом полугруппы  $G_n(R)$ , оставляющим на месте все матрицы  $B_{ij}(x)$  ( $x \in R_+$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $i \neq j$ ) и таким, что  $\Phi''(S_\sigma) = \alpha^{\text{sgn } \sigma} S_\sigma$  ( $\sigma \in \Sigma_n$ ). Именно,

$$\Phi''(S_\sigma) = \Phi^{b^{-1}}(\Phi'(S_\sigma)) = \Phi^{b^{-1}}(\alpha S_\sigma) = b^{-1}(\alpha)S_\sigma,$$

так как матрица  $S_\sigma$  содержит только 0 и 1. Для  $i = 3, \dots, n$

$$\begin{aligned} \Phi''(B_{i2}(x)) &= \Phi''(S_{(1,i)}B_{12}(x)S_{(1,i)}) = S_{(1,i)}\Phi''(B_{12}(x))S_{(1,i)} = \\ &= S_{(1,i)}\Phi^{b^{-1}}(B_{12}(b(x)))S_{(1,i)} = S_{(1,i)}B_{12}(x)S_{(1,i)} = B_{i,2}(x); \end{aligned}$$

для  $j = 3, \dots, n$

$$\Phi''(B_{1j}(x)) = \Phi''(S_{(2,j)}B_{12}(x)S_{(2,j)}) = S_{(2,j)}B_{12}(x)S_{(2,j)} = B_{1j}(x);$$

для  $i, j = 3, \dots, n$

$$\Phi''(B_{ij}(x)) = \Phi''(S_{(i,1)}B_{1j}(x)S_{(i,1)}) = S_{(i,1)}B_{1j}(x)S_{(i,1)} = B_{ij}(x).$$

Как мы знаем (см. лемму 12), для всех  $\alpha \in R_+^*$

$$\Phi''(\text{diag}[a, 1, \dots, 1]) = \text{diag}[\beta(a), \gamma(a), \dots, \gamma(a)], \quad \beta(a), \gamma(a) \in R_+^*.$$

Имеем

$$\begin{aligned}
& \text{diag}[a, 1, \dots, 1]B_{12}(1) \text{diag}[a^{-1}, 1, \dots, 1] = B_{12}(a) \implies \\
& \implies \Phi''(\text{diag}[a, 1, \dots, 1])\Phi''(B_{12}(1))\Phi''(\text{diag}[a^{-1}, 1, \dots, 1]) = \Phi''(B_{12}(a)) \implies \\
& \implies \text{diag}[\beta(a), \gamma(a), \dots, \gamma(a)]B_{12}(1) \text{diag}[\beta(a)^{-1}, \gamma(a)^{-1}, \dots, \gamma(a)^{-1}] = B_{12}(a) \implies \\
& \implies \beta(a)\gamma(a)^{-1} = a \implies \beta(a) = a\gamma(a) \implies \\
& \implies \forall a \in R_+^* \quad \Phi''(\text{diag}[a, 1, \dots, 1]) = \text{diag}[a\gamma(a), \gamma(a), \dots, \gamma(a)].
\end{aligned}$$

Поскольку для всех  $a_1, a_2 \in R_+^*$

$$\begin{aligned}
& \text{diag}[a_1 a_2 \gamma(a_1 a_2), \gamma(a_1 a_2), \dots, \gamma(a_1 a_2)] = \Phi''(\text{diag}[a_1 a_2, 1, \dots, 1]) = \\
& = \Phi''(\text{diag}[a_1, 1, \dots, 1])\Phi''(\text{diag}[a_2, 1, \dots, 1]) = \\
& = \text{diag}[a_1 \gamma(a_1), \gamma(a_1), \dots, \gamma(a_1)] \text{diag}[a_2 \gamma(a_2), \gamma(a_2), \dots, \gamma(a_2)] = \\
& = \text{diag}[a_1 a_2 \gamma(a_1) \gamma(a_2), \gamma(a_1) \gamma(a_2), \dots, \gamma(a_1) \gamma(a_2)],
\end{aligned}$$

то для всех  $a_1, a_2 \in R_+^*$

$$\gamma(a_1 a_2) = \gamma(a_1) \gamma(a_2).$$

Следовательно, отображение  $\gamma(\cdot)$  — центральный гомоморфизм  $\gamma(\cdot): R_+^* \rightarrow R_+^*$ .

Если  $A = \text{diag}[a_1, \dots, a_n] \in D_n(R)$ , то

$$\begin{aligned}
& \Phi''(A) = \\
& = \Phi''(\text{diag}[a_1, 1, \dots, 1]S_{1,2} \text{diag}[a_2, 1, \dots, 1]S_{(1,2)} \times \\
& \times S_{(1,3)} \text{diag}[a_3, 1, \dots, 1]S_{(1,3)} \cdots S_{(1,n)} \text{diag}[a_n, 1, \dots, 1]S_{(1,n)}) = \\
& = \alpha^{2(n-1)} \gamma(a_1) \text{diag}[a_1, 1, \dots, 1]S_{(1,2)} \times \\
& \times \gamma(a_2) \text{diag}[a_2, 1, \dots, 1]S_{(1,2)} \cdots S_{(1,n)} \gamma(a_n) \text{diag}[a_n, 1, \dots, 1] \gamma(a_n) = \\
& = \gamma(a_1) \cdots \gamma(a_n) A = \gamma(a_1 \cdots a_n) A.
\end{aligned}$$

Напомним (см. определение 5), что  $\mathbf{P}$  является подполугруппой в  $G_n(R)$ , порождённой матрицами  $S_\sigma$  ( $\sigma \in \Sigma_n$ ),  $B_{ij}(x)$  ( $x \in R_+$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $i \neq j$ ) и  $\text{diag}[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$  ( $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in R_+^*$ ).

Заметим, что определитель любой матрицы из полугруппы  $\text{GE}_n^+(R)$  есть обратимое число, сравнимое с нулём (либо большее нуля, либо меньшее). Это следует из того, что все диагональные матрицы имеют определитель, больший нуля, матрицы подстановок имеют определитель  $\pm 1$ , матрицы  $B_{ij}(x)$  и их обратные имеют определитель 1.

Пусть  $\Phi''(S_{(1,2)}) = \alpha S_{(1,2)}$ ,  $\alpha^2 = 1$ ,  $\alpha \geq 0$ . Рассмотрим отображение  $\mu: R_+^* \cup R_-^* \rightarrow R_+^*$ , ставящее в соответствие каждому  $a \in R_+^*$  этот же элемент, а каждому  $a \in R_-^*$  — элемент  $-\alpha a$ . Очевидно, что  $\mu$  — гомоморфизм.

Тогда отображение, ставящее в соответствие каждой матрице  $A$  матрицу  $\mu(\det A)A$ , является центральной гомотетией группы  $\text{GE}_n^+(R)$ . Обозначим эту гомотетию через  $\Omega'$  и рассмотрим композицию  $\Phi''' = \Omega' \circ \Phi''$ . Это автоморфизм полугруппы  $\text{GE}_n^+(R)$ , оставляющий на месте все  $S_\sigma$ ,  $\sigma \in \Sigma_n$ , и все  $B_{ij}(x)$ ,  $i \neq j$ ,  $x \in R_+$ .

Ясно, что любая матрица  $A \in \mathbf{P}$  может быть представлена в виде

$$A = \text{diag}[\alpha_1, \dots, \alpha_n] A_1 \cdots A_k,$$

где

$$\alpha_1, \dots, \alpha_n \in R_+^*,$$

$$A_1, \dots, A_k \in \{S_\sigma, B_{ij}(x) \mid \sigma \in \Sigma_n, x \in R_+, i, j = 1, \dots, n, i \neq j\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Phi'''(A) &= \Phi'''(\text{diag}[\alpha_1, \dots, \alpha_n] A_1 \cdots A_k) = \\ &= \gamma(\alpha_1 \cdots \alpha_n) \text{diag}[\alpha_1, \dots, \alpha_n] A_1 \cdots A_k = \gamma(\alpha_1 \cdots \alpha_n) A. \end{aligned}$$

Теперь введём отображение  $\bar{\gamma}(\cdot): \mathbf{P} \rightarrow R_+^*$  с помощью следующего правила: если  $A \in \mathbf{P}$  и  $A = \text{diag}[\alpha_1, \dots, \alpha_n] A_1 \cdots A_k$ , где

$$A_1, \dots, A_k \in \{S_\sigma, B_{ij}(x) \mid \sigma \in \Sigma_n, x \in R_+, i, j = 1, \dots, n, i \neq j\},$$

то  $\bar{\gamma}(A) = \gamma(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ .

Отображение  $\bar{\gamma}(\cdot)$  определено однозначно, так как если

$$A = \text{diag}[\alpha_1, \dots, \alpha_n] A_1 \cdots A_k = \text{diag}[\alpha'_1, \dots, \alpha'_n] A'_1 \cdots A'_m,$$

то

$$\Phi'''(A) = \gamma(\alpha_1 \cdots \alpha_n) A, \quad \Phi'''(A) = \gamma(\alpha'_1 \cdots \alpha'_n) A$$

и поэтому

$$\gamma(\alpha_1 \cdots \alpha_n) = \gamma(\alpha'_1 \cdots \alpha'_n).$$

Так как

$$\bar{\gamma}(AA') AA' = \Phi'''(AA') = \Phi'''(A) \Phi'''(A') = \bar{\gamma}(A) A \cdot \bar{\gamma}(A') A' = \bar{\gamma}(A) \bar{\gamma}(A') AA',$$

то  $\bar{\gamma}$  является гомоморфизмом  $\mathbf{P} \rightarrow R_+^*$ .

Теперь мы видим, что на полугруппе  $\mathbf{P}$  автоморфизм  $\Phi'''$  совпадает с центральной гомотетией  $\Omega(\cdot): \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$ , где  $\Omega(A) = \bar{\gamma}(A) \cdot A$  для всех  $A \in \mathbf{P}$ .

Пусть  $B \in \text{GE}_n^+(R)$ . Тогда (см. определения 6, 7) матрица  $B$   $\mathcal{P}$ -эквивалентна некоторой матрице  $A \in \mathbf{P}$ , т. е. существуют матрицы  $A_0, \dots, A_k \in G_n(R)$ ,  $A_0 = A \in \mathbf{P}$ ,  $A_k = B$ , и матрицы  $P_i, \tilde{P}_i, Q_i, \tilde{Q}_i \in \mathbf{P}$ ,  $i = 0, \dots, k-1$ , такие что  $P_i A_i \tilde{P}_i = Q_i A_{i+1} \tilde{Q}_i$  для всех  $i = 0, \dots, k-1$ . Тогда

$$\begin{aligned} \Phi'''(P_0 A_0 \tilde{P}_0) &= \Phi'''(Q_0 A_1 \tilde{Q}_0) \implies \\ &\implies \bar{\gamma}(P_0) P_0 \bar{\gamma}(A_0) A_0 \bar{\gamma}(\tilde{P}_0) \tilde{P}_0 = \bar{\gamma}(Q_0) Q_0 \Phi'''(A_1) \bar{\gamma}(\tilde{Q}_0) \tilde{Q}_0 \implies \\ &\implies \bar{\gamma}(P_0 A_0 \tilde{P}_0) P_0 A_0 \tilde{P}_0 = \bar{\gamma}(Q_0 \tilde{Q}_0) Q_0 \Phi'''(A_1) \tilde{Q}_0 \implies \\ &\implies \bar{\gamma}(P_0 A_0 \tilde{P}_0) \bar{\gamma}(Q_0 \tilde{Q}_0)^{-1} Q_0 A_1 \tilde{Q}_0 = Q_0 \Phi'''(A_1) \tilde{Q}_0 \implies \\ &\implies \Phi'''(A_1) = \bar{\gamma}(P_0 A_0 \tilde{P}_0) \bar{\gamma}(Q_0 \tilde{Q}_0)^{-1} A_1, \dots, \\ &\Phi'''(B) = \Phi'''(A_n) = \bar{\gamma}(P_{n-1}) \bar{\gamma}(A_{n-1}) \bar{\gamma}(\tilde{P}_{n-1}) \bar{\gamma}(Q_{n-1})^{-1} \bar{\gamma}(\tilde{Q}_{n-1}). \end{aligned}$$

Значит, мы можем продолжить отображение  $\bar{\gamma}(\cdot): \mathbf{P} \rightarrow R_+^*$  до некоторого отображения  $\lambda(\cdot): \text{GE}_n^+(R) \rightarrow R_+^*$ , такого что для каждого  $B \in \text{GE}_n^+(R)$

$$\Phi'''(B) = \lambda(B) \cdot B.$$

Так как  $\Phi'''$  является автоморфизмом полугруппы  $\text{GE}_n^+(R)$ , то  $\lambda(\cdot)$  является центральным гомоморфизмом  $\lambda(\cdot): \text{GE}_n^+(R) \rightarrow R_+^*$ , и значит, автоморфизм  $\Phi''': \text{GE}_n^+(R) \rightarrow \text{GE}_n^+(R)$  является центральной гомотетией  $\Omega''(\cdot): \text{GE}_n^+(R) \rightarrow \text{GE}_n^+(R)$ , где  $\Omega''(X) = \lambda(X) \cdot X$  для всех  $X \in \text{GE}_n^+(R)$ .

Так как  $\Phi''' = \Omega''$  на  $\text{GE}_n^+(R)$  и  $\Phi''' = \Omega' \circ \Phi^{b^{-1}} \circ \Phi_{M'} \circ \Phi$  на  $G_n(R)$ , то  $\Phi = \Phi_M \circ \Phi^b \circ \Omega$  на  $\text{GE}_n^+(R)$ , где  $M = M'^{-1}$ ,  $\Omega = \Omega' \Omega''$ .

Теорема доказана.  $\square$

## Литература

- [1] Бунина Е. И., Михалёв А. В. Автоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами // *Фундамент. и прикл. мат.* — 2005. — Т. 11, вып. 2. — С. 3—23.
- [2] Ильин С. Н. Обратимые матрицы над (неассоциативными) антикольцами // *Универсальная алгебра и её приложения.* — Волгоград: Перемена, 2000. — С. 81—89.
- [3] Михалёв А. В., Шаталова М. А. Автоморфизмы и антиавтоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами // *Мат. сб.* — 1970. — Т. 81, № 4. — С. 600—609.