

Об отношении накрытия для локальных внутренних G -алгебр

Х. ВЭНЬЛИНЬ

Пекинский университет
e-mail: wenlin@math.pku.edu.cn

УДК 512.552+512.547.23

Ключевые слова: локальная внутренняя G -алгебра, тензорная G -алгебра, дефектная группа, централизатор.

Аннотация

Мы обобщаем понятие отношения накрытия для модулей над конечными группами и блоков модулярных групповых алгебр на случай локальных внутренних G -алгебр при помощи метода вложения. Мы выявляем некоторые свойства метода вложения, а также устанавливаем взаимосвязь между соответствием главных блоков и отношением накрытия.

Abstract

H. Wenlin, On the cover relationship for local interior G -algebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 2, pp. 101–111.

In this paper, we generalize the notion of cover relationship on modules over finite groups and blocks of modular group algebras to the case of local interior G -algebras by the embedding method. We get some properties on the embedding method and attain a relationship between the principal block correspondence and the cover relationship.

1. Введение и предварительные сведения

В [4] М. Коллинз получил новое описание отношения накрытия для блоков групповых алгебр конечных групп, разлагая модули, принадлежащие соответствующему блоку. Отношение накрытия блоков также изучалось в [1], где блочные алгебры трактовались как двусторонние модули над соответствующими группами. В настоящей статье, вводя понятие отношения накрытия для локальных внутренних G -алгебр, принадлежащих блочным алгебрам, мы воспроизводим некоторые свойства, которыми обладает отношение накрытия для блоков, а также сравниваем эти определения.

Благодаря хорошо известной технике отмеченных групп внутренние G -алгебры стали важным объектом современной теории модулярных представлений конечных групп. В локальной внутренней G -алгебре мы можем анализировать взаимоотношения между подалгебрами, определяемыми для отмеченных групп, над ней и самими по себе, при помощи техники вложения. Этим методом ряд

Фундаментальная и прикладная математика, 2008, том 14, № 2, с. 101–111.

© 2008 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

результатов получили Т. Икеда и Ц. Хуан в [8, 9], читатель может обратиться также к [12].

В разделе 2 мы выводим некоторые свойства метода вложения в контексте нормальных подгрупп, характеризуем вложения внутренних H -алгебр в локальные внутренние G -алгебры. Мы анализируем отношение накрытия для локальных внутренних G -алгебр, сравнивая его с отношением накрытия для блочных алгебр.

В разделе 3, используя так называемое расширенное соответствие Грина, которое представляет собой обобщённый на локальные внутренние G -алгебры вариант соответствия Грина, мы определяем зависимость между отношением принадлежности блоков и расширенным соответствием Грина. Мы устанавливаем соотношение между отношением вложения и главными блоками, мы обобщаем теорему 1 из [7] на случай локальных внутренних G -алгебр и получаем симпатичное описание отношения накрытия при помощи расширенного соответствия Грина.

В оставшейся части данного раздела мы дадим необходимые для этой статьи предварительные сведения, за деталями читатели могут обратиться к [10, 12].

В этой статье $\mathcal{O}$ всегда будет кольцом, полным относительно дискретного p -адического нормирования, с максимальным идеалом (π) и полем вычетов $\mathcal{F} = \mathcal{O}/(\pi)$ простой характеристики p . Мы предполагаем все группы конечными, все алгебры свободными конечного ранга над $\mathcal{O}$. Под G -алгеброй (A, φ) мы понимаем $\mathcal{O}$ -алгебру A с групповым гомоморфизмом $\varphi: G \rightarrow \text{Aut}(A)$, где $\text{Aut}(A)$ обозначает группу автоморфизмов A как $\mathcal{O}$ -алгебры, так что G естественно действует на A по правилу ${}^g a := \varphi(g)(a)$, $a \in A$. Внутренняя G -алгебра (A, ρ) есть $\mathcal{O}$ -алгебра A со структурным гомоморфизмом $\mathcal{O}$ -алгебр $\rho: \mathcal{O}G \rightarrow A$, таким что $\rho(1_{\mathcal{O}G}) = 1_A$, которая становится G -алгеброй, если действие G определить как ${}^g a = \rho(g)a\rho(g)^{-1}$ для любых $a \in A$, $g \in G$. Эту G -алгебру мы также обозначаем (A, ρ) . Иногда мы просто говорим, что A — внутренняя G -алгебра, вместо (A, ρ) , если это не приводит к недоразумению; то же самое относится к G -алгебре (A, φ) .

Для любой подгруппы $H \leq G$ мы обозначаем через A^H подалгебру неподвижных относительно H элементов G -алгебры (A, φ) . Кроме того, $\text{Tr}_H^G(A^H)$ (другое обозначение A_H^G) означает идеал относительного следа в A^G , где $\text{Tr}_H^G(\cdot)$ — это хорошо известный функтор относительного следа, отображающий $a \in A^H$ в $\sum_{g \in G/H} ({}^g a)$ (см., например, [5]). То же самое относится к любому FG -модулю (см., например, [2]).

Внутренняя G -алгебра (A, ρ) называется эпиморфной, если ρ — эпиморфизм; она называется локальной (в [12] она также названа примитивной), если A^G — локальная алгебра. В последнем случае мы говорим, что A является H -проективной для любой подгруппы H в G , такой что $1_A \in A_H^G$. Минимальные подгруппы H в G , для которых A является H -проективной, мы называем дефектными группами A ; они являются p -группами в G и единственны с точностью до G -сопряжённости, любую из них мы обозначаем $D(A)$. В частности, любая p -блочная

алгебра B (т. е. $\mathcal{O}Ge_B$, где e_B — центральный примитивный идемпотент в $\mathcal{O}G$), каноническим образом является эпиморфной локальной внутренней G -алгеброй, и для неё мы также имеем дефектную группу $D(B)$.

Если H — подгруппа в G и (B, ρ_B) — внутренняя H -алгебра, то индуцированная внутренняя G -алгебра $(\text{Ind}_H^G B, \rho_{\text{Ind}_H^G B})$ определяется как $\mathcal{O}$ -алгебра $\mathcal{O}G \otimes_{\mathcal{O}H} B \otimes_{\mathcal{O}H} \mathcal{O}G$, снабжённая дистрибутивным произведением

$$(x \otimes b \otimes y)(x' \otimes b' \otimes y') = \begin{cases} 0, & \text{если } yx' \notin H, \\ x \otimes b \cdot yx \cdot b' \otimes y', & \text{если } yx' \in H, \end{cases}$$

где $x, y, x', y' \in G$, $b, b' \in B$, и гомоморфизмом $\mathcal{O}$ -алгебр

$$\mathcal{O}G \rightarrow \mathcal{O}G \otimes B \otimes \mathcal{O}G, \quad g \rightarrow \sum_{t \in G/H} gt \otimes 1_B \otimes t^{-1}.$$

Если $H \trianglelefteq G$, для любого $g \in G/H$ естественным образом $g \otimes B \otimes g^{-1}$ является внутренней H -алгеброй с единицей $g \otimes 1_B \otimes g^{-1}$, и она будет локальной тогда и только тогда, когда таковой является B .

Двойственно, если $H < G$, мы можем получить внутреннюю H -алгебру $(\text{Res}_H^G A, \rho_{\text{Res}_H^G A})$ из внутренней G -алгебры (A, ρ_A) , называемую ограничением (A, ρ_A) на H , и $\rho_{\text{Res}_H^G A}$ — просто ограничение ρ_A .

Гомоморфизм $\mathcal{O}$ -алгебр f из внутренней G -алгебры (A, ρ_A) во внутреннюю G -алгебру (B, ρ_B) называется гомоморфизмом внутренних G -алгебр, если $f(g \cdot a) = g \cdot f(a)$ и $f(a \cdot g) = f(a) \cdot g$ для всех $a \in A$ и $g \in G$. Заметим, что гомоморфизм внутренних G -алгебр не всегда является унитарным, в то время как любой изоморфизм внутренних G -алгебр f из (A, ρ_A) в (B, ρ_B) должен быть унитарным, так как $\rho_B = f\rho_A$. Кроме того, мы назовём (A, ρ_A) вложением в алгебру (B, ρ_B) , если существует такой идемпотент алгебры B^G , что $(A, \rho_A) \simeq (iBi, \rho_{iBi})$, где $\rho_{iBi}(g) = \rho_B(g) \cdot i$. В общем случае локальную внутреннюю H -алгебру C , где $H \leq G$, мы назовём вложением в локальную внутреннюю H -алгебру B , если имеет место изоморфизм внутренних H -алгебр $A \simeq i(\text{Res}_H^G B)i$, где i — примитивный идемпотент в B^H .

Следуя [9], мы дадим следующее определение, относящееся к локальным внутренним G -алгебрам.

Определение 1.1. Пусть (A, ρ) — локальная внутренняя G -алгебра. Мы скажем, что (A, ρ) принадлежит некоторому блоку $B (= FGb)$ группы G , если $\rho(b) = 1_A$.

Замечание 1.2. Легко видеть, что если локальная внутренняя G -алгебра (A, ρ) принадлежит некоторому блоку G , то такой блок единственный, а любая блочная алгебра групповой алгебры $\mathcal{O}G$ является локальной внутренней G -алгеброй, принадлежащей самой себе. Если M — неразложимый свободный $\mathcal{O}G$ -модуль конечного ранга над $\mathcal{O}$, то кольцо эндоморфизмов $E(M) := \text{End}_{\mathcal{O}}(M)$ естественным образом будет локальной внутренней G -алгеброй. В этом случае

$E(M)$ тогда и только тогда принадлежит блоку B группы G , когда M принадлежит B . Таким образом, определение осмысленно, причём по критерию Хигмана $D(E(M)) = Vtx_G(M)$ с точностью до G -сопряжения.

Замечание 1.3. Пусть B — блок группы G с дефектной группой D . Тогда D является максимальной в множестве дефектных групп локальных внутренних G -алгебр, принадлежащих B . Это легко увидеть из [1, следствие 3.8; 9, лемма 2.7] и из замечания 1.2.

Если (C, ρ) — локальная внутренняя H -алгебра, принадлежащая блоку b группы H , где $H \trianglelefteq G$, мы определим так называемую G -сопряжённую внутреннюю H -алгебру $({}^gC, {}^g\rho)$, полагая, что ${}^gC = C$ как $\mathcal{O}$ -алгебра и $({}^g\rho)(h) = \rho(g^{-1}hg)$. Легко видеть, что gC принадлежит G -сопряжённому блоку ${}^{g^{-1}}b$ группы H и $D({}^gC) = {}_H({}^{g^{-1}}D(C))$.

2. Вложение и отношение накрытия для нормальных подгрупп

Лемма 2.1. Пусть A — локальная внутренняя G -алгебра, $H \trianglelefteq G$. Тогда

- 1) если B является вложением локальной внутренней H -алгебры в A , то $D(B) \leq_G D(A)$;
- 2) если B — такая локальная внутренняя H -алгебра, что A является вложением внутренней G -алгебры в $\text{Ind}_H^G B$, то $D(A) \leq_G D(B)$;
- 3) если $D(A) \leq_G H$, то существует некоторая вложенная в A H -алгебра B , такая что A является вложением внутренней G -алгебры в $\text{Ind}_H^G B$.

Доказательство опирается на [8, теорема 3.2, следствие 3.9; 11, лемма 3.8].

Предложение 2.2. Пусть A — локальная внутренняя G -алгебра, являющаяся H -проективной. Если $H \trianglelefteq G$, то вложения локальных внутренних H -алгебр в A попарно G -сопряжены и имеют дефектную группу $D(A)$ с точностью до G -сопряжения.

Доказательство. Так как A является H -проективной, то A — вложение внутренней G -алгебры в $\text{Ind}_H^G C$ для некоторой локальной внутренней H -алгебры C , такой что $D(C) =_G D(A)$ по лемме 2.1. Поэтому любое вложение локальной внутренней H -алгебры в A также является вложением внутренней H -алгебры в $\text{Ind}_H^G C$.

Так как $H \trianglelefteq G$, по [12, лемма 16.1] мы имеем изоморфизм внутренних H -алгебр ${}^gC \simeq g \otimes_{\mathcal{O}H} C \otimes_{\mathcal{O}H} g^{-1}$ для любого g , принадлежащего трансверсали H в G , где $g \otimes_{\mathcal{O}H} C \otimes_{\mathcal{O}H} g^{-1}$ рассматривается как $\mathcal{O}$ -подалгебра в $\text{Ind}_H^G C$ со структурным гомоморфизмом, который является ограничением структурного гомоморфизма $\text{Ind}_H^G C$ на $\mathcal{O}H$.

Тогда легко видеть, что $1_{\text{Ind}_H^G C} = \sum_{g \in T} g \otimes_{\mathcal{O}H} 1_C \otimes_{\mathcal{O}H} g^{-1}$ и $g \otimes_{\mathcal{O}H} 1_C \otimes_{\mathcal{O}H} g^{-1}$ — единица локальной внутренней H -алгебры $g \otimes_{\mathcal{O}H} C \otimes_{\mathcal{O}H} g^{-1}$ и, следовательно,

примитивный идемпотент в $(\text{Ind}_H^G C)^H$ для любого $g \in T$ согласно [12, предложение 4.12].

Так как $\{g \otimes 1_C \otimes g^{-1}, g \in T\}$ — примитивное ортогональное разложение $1_{\text{Ind}_H^G C}$, мы видим, что все $\{^g C, g \in T\}$ являются вложениями локальных внутренних H -алгебр в $\text{Ind}_H^G C$ в смысле изоморфизма внутренних H -алгебр, поэтому вложения локальных внутренних H -алгебр в A попарно G -сопряжены. Ввиду замечания 1.3 доказательство окончено. $\square$

Предложение 2.3. Пусть A — локальная внутренняя G -алгебра и C — вложение локальной внутренней H -алгебры в A , где $D(A) \leq K \leq H \leq G$ и $K \trianglelefteq G$. Тогда $D(A) =_G D(C)$.

Доказательство. По лемме 2.1 имеем $D(C) \leq_G D(A) \leq K$.

Так как $K \trianglelefteq G$, по предложению 2.2 пусть C' — вложение локальной внутренней K -алгебры в C , которое является также вложением внутренней K -алгебры в A , причём $D(C') =_G D(A)$.

Поскольку $K \leq H$, снова по предложению 2.2 мы имеем $D(C') =_H D(C)$, и поэтому $D(A) =_G D(C)$. $\square$

Определение 2.4. Пусть $H \triangleleft G$, A — локальная внутренняя G -алгебра и C — локальная внутренняя H -алгебра. Скажем, что локальная внутренняя G -алгебра A накрывает локальную внутреннюю H -алгебру C , если C является вложением внутренней H -алгебры в A и $D(C) =_G H \cap D(A)$.

Замечание 2.5. Так как любое вложение внутренней H -алгебры в $\text{Res}_H^G(A)$ имеет дефектную группу, содержащуюся в $H \cap D(A)$ с точностью до G -сопряжения, когда $H \triangleleft G$, из леммы 2.1 следует, что определение 2.4 осмысленно. Очевидно, это определение покрывает случаи модулей над конечными группами и блоков групповых алгебр конечных групп, кроме того, оно обобщает отношение накрытия для модулей из [7] ввиду замечания 1.2, а также согласно приведённому ниже предложению 2.6.

В [4], следуя [6], М. Коллинз дал следующее определение отношения накрытия для блоков конечной группы и её нормальной подгруппы.

- (i) Пусть $H \triangleleft G$, B и b — блоки G и H соответственно. Скажем, что B накрывает b , если в B существует такой неразложимый модуль U , что $\text{Res}_H^G U$ имеет прямое слагаемое, принадлежащее b .

В [1], трактуя блочные алгебры как двусторонние модули над соответствующими группами, авторы дали следующее определение отношения накрытия для блоков конечной группы и её подгруппы.

- (ii) Если B — блок конечной группы G и b — блок подгруппы H в G , то мы скажем, что B накрывает b , если b изоморфен как $\mathcal{O}(H \times H)$ -модуль некоторому прямому слагаемому в $\text{Res}_{H \times H}^{G \times G} B$.

На самом деле в общем случае мы видим, что (i) и (ii) равносильны, так как они равносильны требованию, что произведение $e_B e_b$ где e_B и e_b — идемпотенты блоков B и b соответственно, отлично от нуля в kG . Действительно, $e_B e_b \neq 0$

означает, что $e_B = \sum ({}^g e_b)$ для некоторых $g \in G$, следовательно, $B \subseteq GbG$. Неравенство $e_B e_b \neq 0$ также означает (i) согласно [4].

Предложение 2.6. Пусть (A, ρ_A) — локальная внутренняя G -алгебра, принадлежащая блоку B группы G , а (C, ρ_C) — локальная внутренняя H -алгебра, принадлежащая блоку b группы H , где $H \trianglelefteq G$.

1. Если $C_G(D(b)) \trianglelefteq_G H$ и C — вложение внутренней H -алгебры в A , то B покрывает b в смысле (ii);
2. Если $H \trianglelefteq G$ и A покрывает C , то B покрывает b в смысле (i).

Доказательство. С точностью до изоморфизма внутренних H -алгебр мы положим

$$(C, \rho_C) = (iAi, \rho_{iAi}), \quad \text{где } \rho_{iAi}(h) = \rho_A(h)i,$$

где i — некоторый примитивный идемпотент A^H .

Поскольку A принадлежит блоку B группы G , а C принадлежит блоку b группы H , мы имеем

$$\rho_A(e_B) = 1_A, \quad \rho_A(e_b) = \rho_{iAi}(e_b) = i,$$

где e_B и e_b — единицы B и b соответственно. Тогда $\rho_A(e_B e_b) = i$ и, значит, $e_B e_b \neq 0$.

Если $C_G(D(b)) \trianglelefteq_G H$, то, так как $e_B e_b \neq 0$, b — прямое слагаемое в $\text{Res}_{H \times H}^{G \times G} B$ по [10, гл. 5, теорема 10.12], т. е. B покрывает b в смысле (ii).

Если $H \trianglelefteq G$, то очевидно, что B покрывает b в смысле (i). $\square$

Замечание 2.7. Пусть A и C будут соответственно B и b из предложения 2.6. Тогда в контексте отношения накрытия для блоков определение 2.4 не слабее, чем (i) или (ii), в общем случае.

Предложение 2.8. Пусть A — локальная внутренняя G -алгебра, а C — локальная внутренняя H -алгебра, где $H \trianglelefteq G$. Если A покрывает C , то A покрывает любую G -сопряжённую с C внутреннюю H -алгебру ${}^g C$.

Доказательство. Пусть $C = iAi$ с точностью до изоморфизма внутренних H -алгебр, где i — примитивный идемпотент A^H с дефектной группой P . Тогда ${}^g i$ для любого $g \in G$ также примитивный идемпотент $A^H = A^{({}^g H)}$ с дефектной группой ${}^g P$. Легко видеть, что существует классический изоморфизм внутренних H -алгебр между $({}^g i)A({}^g i)$ и G -сопряжённой с C внутренней алгеброй ${}^g C$ и $D(A) \cap H =_G D({}^g C)$. Следовательно, A покрывает любую G -сопряжённую с C внутреннюю алгебру ${}^g C$. $\square$

Следствие 2.9. Пусть B — блок G , а b — блок H , где $H \trianglelefteq G$. Тогда если B покрывает b в смысле определения 2.4, то B покрывает в точности весь класс сопряжённости b .

Доказательство. Утверждение следует из замечания 2.7 и предложения 2.8. $\square$

Теорема 2.10. Пусть C — локальная внутренняя H -алгебра с дефектной группой D , где D нормальна в G . Если $H \trianglelefteq G$, то D является также дефектной группой любого вложения локальной G -алгебры A в $\text{Ind}_H^G C$, и потому A накрывает C .

Доказательство. Так как $H \trianglelefteq G$, то согласно [12, лемма 16.1] мы имеем изоморфизм внутренних H -алгебр ${}^g C \simeq g \otimes_{\mathcal{O}H} C \otimes_{\mathcal{O}H} g^{-1}$ для любого g , принадлежащего трансверсали T подгруппы H в G , где $g \otimes_{\mathcal{O}H} C \otimes_{\mathcal{O}H} g^{-1}$ рассматривается как $\mathcal{O}$ -подалгебра в $\text{Ind}_H^G C$ со структурным гомоморфизмом, полученным ограничением структурного гомоморфизма $\text{Ind}_H^G C$ на $\mathcal{O}H$.

Тогда легко видеть, что $1_{\text{Ind}_H^G C} = \sum_{g \in T} g \otimes_{\mathcal{O}H} 1_C \otimes_{\mathcal{O}H} g^{-1}$, $g \otimes_{\mathcal{O}H} 1_C \otimes_{\mathcal{O}H} g^{-1}$ является единицей локальной внутренней H -алгебры $g \otimes_{\mathcal{O}H} C \otimes_{\mathcal{O}H} g^{-1}$ и, следовательно, примитивным идемпотентом в $(\text{Ind}_H^G C)^H$ для любого $g \in T$ в силу [12, предложение 4.12].

Так как D — дефектная группа алгебры C , пусть $1_C = \text{Tr}_D^H(c)$ и, следовательно, $1_{g \otimes C \otimes g^{-1}} = \text{Tr}_D^H(1 \otimes c \otimes 1)$, где $c \in C^D$. Тогда мы имеем

$$1_{g \otimes C \otimes g^{-1}} = \text{Tr}_D^H(g(1 \otimes c \otimes 1)) = \text{Tr}_D^H(g \otimes c \otimes g^{-1}).$$

Теперь легко видеть, что по формуле разложения Макки (см. [12])

$$1_{\text{Ind}_H^G C} = \sum_{g \in T} g \otimes 1_C \otimes g^{-1} = \text{Tr}_D^G(1 \otimes c \otimes 1).$$

Так как A — вложение локальной внутренней G -алгебры в $\text{Ind}_H^G C$, то с точностью до изоморфизма внутренних G -алгебр мы можем утверждать, что $A = i(\text{Ind}_H^G C)i$, где i — примитивный идемпотент в $(\text{Ind}_H^G C)^G$, который имеет конечное разложение на примитивные ортогональные идемпотенты $i = g \otimes 1_C \otimes g^{-1} + \dots$ для некоторых $g \in T$ с точностью до сопряжения некоторым обратимым элементом из $(\text{Ind}_H^G C)^H$ по [12, теорема 4.1].

Так как $i = \text{Tr}_D^G(i(1 \otimes c \otimes 1)i)$, то A является D -проективной алгеброй. Кроме того, $g \otimes C \otimes g^{-1}$ будет вложением $\mathcal{O}H$ -алгебры в $\text{Res}_H^G A$, поэтому D — дефектная группа A . В то же самое время A накрывает ${}^g C$ и, следовательно, накрывает C . $\square$

3. Взаимосвязь с расширенным соответствием Грина

В [8] Ц. Хуан вывел теорему, названную расширенным соответствием Грина, которая устанавливает естественное соответствие между локальными внутренними H -алгебрами и локальными внутренними G -алгебрами с одной и той же дефектной группой D , где $N_G(D) \leq H \leq G$, используя методы ограничения внутренних G -алгебр и индуцирования внутренних H -алгебр. Следующее расширенное соответствие Грина устанавливает взаимно-однозначное соответствие

между классами изоморфизма локальных внутренних G -алгебр с дефектной группой D и классами изоморфизма локальных внутренних H -алгебр с дефектной группой D , тем самым корректно обобщая модулярную версию соответствия Грина.

Расширенное соответствие Грина. Пусть D — некоторая p -подгруппа в G , $N_G(D) \leq H \leq G$. Положим

$$\mathcal{X} = \{P \leq G \mid P \leq D^g \cap D, g \in G/H\},$$

$$\mathcal{Y} = \{P \leq G \mid P \leq D^g \cap H, g \in G/H\}$$

и

$$\mathcal{S}_1 = \{A \mid A \text{ — локальная внутренняя } G\text{-алгебра с дефектной группой } D\},$$

$$\mathcal{S}_2 = \{B \mid B \text{ — локальная внутренняя } H\text{-алгебра с дефектной группой } D\}.$$

Тогда существует взаимно-однозначное соответствие между $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$, которое характеризуется следующим образом.

1. Для любой $A \in \mathcal{S}_1$ пусть $1_A = \sum_{j \in J} j$ — разложение 1_A на примитивные идемпотенты в A^H . Существует единственная алгебра $f(A) \in \mathcal{S}_2$, такая что $f(A) \simeq A_\delta = j_0 A j_0$ для некоторого $j_0 \in J$, где $\delta \in P_H(A)$, причём $j_0 \in \delta$. Для любого другого $j \in J$ все дефектные группы A_β , где $\beta \in P_H(A)$ таково, что $j \in \beta$, лежат в $\mathcal{Y}$.
2. Для любой $B \in \mathcal{S}_2$ пусть $1_{\text{Ind}_H^G B} = \sum_{i \in I} i$ — разложение $1_{\text{Ind}_H^G B}$ на примитивные идемпотенты в $(\text{Ind}_H^G B)^G$. Тогда существует единственная алгебра $g(B) \in \mathcal{S}_1$, такая что $g(B) \simeq (\text{Ind}_H^G B)_\alpha = i_0 (\text{Ind}_H^G B) i_0$ для некоторого $i_0 \in I$, где $\alpha \in P_G(\text{Ind}_H^G B)$ таково, что $i_0 \in \alpha$. Для любого другого $i \in I$ $(\text{Ind}_H^G B)_\alpha$ имеет дефектную группу из $\mathcal{X}$, где $\alpha \in P_G(\text{Ind}_H^G B)$ и $i \in \alpha$.
3. В частности, мы имеем изоморфизмы $g(f(A)) \simeq A$ и $f(g(B)) \simeq B$ во внутренних G -алгебрах и внутренних H -алгебрах соответственно.

Предложение 3.1. Пусть D — некоторая p -подгруппа в G , $N_G(D) \leq H \leq G$, A — локальная внутренняя G -алгебра, принадлежащая блоку B группы G , и C — локальная внутренняя H -алгебра, принадлежащая блоку b группы H , обладающие общей дефектной группой D , причём A отвечает C при расширенном соответствии Грина. Тогда B и b соответствуют друг другу по Брауэру, или, иными словами, B накрывает b в смысле (ii). Кроме того, b будет главным блоком группы H тогда и только тогда, когда B будет главным блоком группы G .

Доказательство. Поскольку $D(b) \geq_H D$ по [9, лемма 2.7] и $N_G(D) \leq H \leq G$, а расширенное соответствие Грина является специальным случаем отношения вложения, применимо предложение 2.6. Более того, в этом самом случае соответствие Брауэра есть просто отношение накрытия в (ii) согласно [10, гл. 5, теорема 10.12]. Кроме того, если b — главный блок H , то B будет главным блоком G и обратно. $\square$

Теорема 3.2. Пусть A — локальная внутренняя G -алгебра, принадлежащая главному блоку B_0 группы G , дефектная группа которого не является нормальной в G . Тогда для подгруппы H , имеющей p' -индекс в G , существует некоторое вложение локальной внутренней H -алгебры C в A , принадлежащее главному блоку b_0 группы H .

Доказательство. Из условия на H следует, что H содержит силовскую p -подгруппу из $K = N_G(D(A))$ при надлежащем выборе $D(A)$ из класса G -сопряжённых подгрупп. Значит $L = H \cap N_G(D(A)) = N_H(D(A))$ является подгруппой p' -индекса в K .

Возьмём локальную внутреннюю K -алгебру U , которая отвечает A при расширенном соответствии Грина. Так как A принадлежит B_0 , то U принадлежит главному блоку K по предложению 3.1.

Так как L — подгруппа p' -индекса в K , а K является собственной подгруппой в G , то, используя индукцию по порядку G , можно предполагать, что имеется такое вложение локальной внутренней L -алгебры V в U , что V принадлежит главному блоку L .

Так как $D(A) \trianglelefteq K$ и $D(A) \leq L \leq K$, то по предложению 2.3 $D(A)$ также является дефектной группой V .

Пусть C отвечает V при расширенном соответствии Грина. Тогда C принадлежит b_0 по предложению 3.1, поскольку $L = N_H(D(A))$.

Так как V — вложение локальной внутренней L -алгебры в U , а U — вложение локальной внутренней K -алгебры в A , существует некоторое вложение локальной внутренней H -алгебры W в A , такое что V есть вложение внутренней L -алгебры в W . Тогда $D(A) =_H D(W)$, $D(A)$ является дефектной группой W и, следовательно, V отвечает W при расширенном соответствии Грина, т. е. C и W изоморфны как внутренние H -алгебры. Кроме того, C является вложением локальной внутренней H -алгебры в A . $\square$

Следующая теорема 3.3 — это не что иное, как хорошо известная теорема Барри—Карлсона—Пюига, но нам будет удобнее привести её версию на языке локальных внутренних G -алгебр, имитируя идею из [3].

Теорема 3.3. Пусть P — p -подгруппа конечной группы G , H — такая подгруппа в G , что $N_G(P) \leq H$. Если A — локальная внутренняя G -алгебра и внутренняя H -алгебра $\text{Res}_H^G(A)$ имеет вложенную алгебру C с дефектной группой P , то A имеет дефектную группу P и отвечает C при расширенном соответствии Грина.

Доказательство. Положим

$$T = \{P^t \cap H \mid t \notin H\}, \quad I = \sum_{Q \in T} A_Q^G.$$

Очевидно, любая подгруппа из T является собственной подгруппой в P , поэтому следующее отображение будет эпиморфизмом алгебр в силу формулы

разложения Макки (см. [12]):

$$f: A_P^G \mapsto (A_P^H + I)/I, \quad \text{Tr}_P^G(a) \rightarrow \text{Tr}_P^H(a) + I.$$

Пусть $C = iAi$ с точностью до изоморфизма внутренних H -алгебр, где i — примитивный идемпотент в A^H , такой что $i \notin I$, но $i \in C_P^H$ и тем самым $i \in A_P^H$. Тогда имеется некоторый элемент $a \in A_P^G$, для которого $f(a) = i + I$.

Так как A^G — локальное кольцо, мы имеем, что $a + \text{Ker}(f)$ — ненулевой идемпотент, обратимый в $A^G/\text{Ker}(f)$. Тогда a обратим в A^G и мы видим, что $A^G = A^G \cdot a \leq A_P^G$. Поэтому $1_A \in A_P^G$, и следовательно, P является дефектной группой A . В то же самое время A отвечает C при расширенном соответствии Грина согласно [8]. $\square$

Теперь, снова при помощи методов ограничения внутренних G -алгебр и индуцирования внутренних H -алгебр и используя рассмотренное выше расширенное соответствие Грина, мы выведем следующее более общее соответствие.

Если D — некоторая p -подгруппа в H , где $H \triangleleft G$, положим $K = N_H(D)$ и $L = N_G(D)$. Зафиксируем некоторую локальную внутреннюю H -алгебру A с дефектной группой D и локальную внутреннюю K -алгебру C с дефектной группой D , отвечающую A при расширенном соответствии Грина.

Теорема 3.4. *Существует взаимно-однозначное соответствие между классами изоморфизма локальных внутренних G -алгебр, накрывающих A , и классами изоморфизма локальных внутренних L -алгебр, накрывающих C .*

Доказательство. По методу расширенного соответствия Грина мы поставим в соответствие локальной внутренней L -алгебре, накрывающей C , некоторую локальную внутреннюю G -алгебру, накрывающую A .

Пусть M — локальная внутренняя L -алгебра с дефектной группой P (причём $P \cap K = D$), накрывающая C . Легко убедиться, что $P \cap H = D$, $N_G(P) \leq L$ и C является вложением алгебры в $\text{Res}_K^L M$.

Пусть локальная внутренняя G -алгебра N отвечает M при расширенном соответствии Грина. Тогда C является вложением алгебры $\text{Res}_K^G N$, и следовательно, N накрывает A по теореме 3.3.

По приведённому выше построению мы ставим в соответствие алгебре M алгебру N , причём N накрывает A и N единственна с точностью до изоморфизма внутренних G -алгебр.

Теперь мы докажем, что это отображение является взаимно-однозначным соответствием между классами изоморфизма.

Предположим, что N — локальная внутренняя G -алгебра, накрывающая A , P — дефектная группа N , такая что $P \cap H = D$. Тогда $N_G(P) \leq L$. В силу расширенного соответствия Грина существуют внутренняя L -алгебра M и внутренняя HL -алгебра W , такие что любые две алгебры из тройки $\{N, W, M\}$ отвечают друг другу при расширенном соответствии Грина.

Поскольку $H \triangleleft G$ и A — вложение алгебры в $\text{Res}_H^G \text{Ind}_{HL}^G W$ в силу установленного выше отношения накрытия и расширенного соответствия Грина,

найдётся некоторый примитивный идемпотент $i \in W^H$, такой что имеет место изоморфизм внутренних H -алгебр $A \simeq g \otimes_{HL} iWi \otimes_{HL} g^{-1}$, где $g \in G/H$, и мы положим $g = 1$, если $g \in HL$. Таким образом,

$$D =_H D(A) =_H D(g \otimes_{HL} iWi \otimes_{HL} g^{-1}) \leq_H gPg^{-1} \cap H = gQg^{-1},$$

и значит, $g = 1$, так как $g \in HL$. Мы получаем, что A — вложение алгебры в $\text{Res}_H^{HL} W$.

Поскольку $HL/L \simeq H/H \cap L = H/K$, согласно [12, лемма 16.1] мы имеем изоморфизм $\mathcal{O}$ -алгебр

$$\text{Res}_H^{HL} \text{Ind}_L^{HL} M \simeq \text{Ind}_K^H \text{Res}_K^L M.$$

Легко убедиться, что он является также изоморфизмом внутренних H -алгебр. Тогда, очевидно, A является вложением алгебры $\text{Ind}_K^H \text{Res}_K^L M$.

Так как $P \cap K = D$ и $D \leq L$, существует некоторое вложение локальной K -алгебры C' в $\text{Res}_K^L M$ с $D(C') = D$, такое что A будет вложением внутренней H -алгебры в $\text{Ind}_K^H C'$ по лемме 2.1 и [8, лемма 3.13]. Следовательно, C и C' изоморфны как внутренние K -алгебры по расширенному соответствию Грина, т. е. M накрывает C , и теорема 3.4 доказана. $\square$

Литература

- [1] Alperin J., Burry D. Block theory with modules // J. Algebra. — 1980. — Vol. 65. — P. 225—233.
- [2] Broue M. On the Scott modules and p -permutation modules: An approach through the Brauer morphism. — Proc. Amer. Math. Soc. — 1985. — Vol. 93. — P. 401—408.
- [3] Burry D., Carlson J. Restriction of modules to local subgroups // Proc. Amer. Math. Soc. — 1982. — Vol. 84. — P. 181—184.
- [4] Collins M. Blocks, normal subgroups, and Brauer's third main theorem // J. Algebra. — 1999. — Vol. 213. — P. 69—76.
- [5] Green J. Some remark on defect groups // Math. Z. — 1968. — Vol. 107. — P. 135—150.
- [6] Green J. Local Representation Theory. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986.
- [7] Green J. The Green correspondence and normal subgroups // J. Algebra. — 1986. — Vol. 104. — P. 74—77.
- [8] Huang G. On interior G -algebras // Chinese Ann. Math. Ser. B. — 1991. — Vol. 12. — P. 335—347.
- [9] Ikeda T. Some properties of interior G -algebras // Hokkaido Math. J. — 1986. — Vol. 15. — P. 453—467.
- [10] Nagao H., Tsushima Y. Representations of Finite Groups. — London: Academic Press, 1989.
- [11] Puig L. Pointed groups and construction of characters // Math. Z. — 1981. — Vol. 176. — P. 265—292.
- [12] Thévenaz J. G -Algebras and Modular Representation Theory. — Oxford: Clarendon Press, 1995.

