Параллельные перенесения на поверхности проективного пространства

К. В. ПОЛЯКОВА
Российский государственный университет им. И. Канта, Калининград
e-mail: olesya@epc.albertina.ru

УДК 514.7

Ключевые слова: проективное пространство, поверхность, голономное многообразие, главное расслоение, связность и протосвязность, оснащения, параллельные перенесения, ковариантный и проективно-ковариантный дифференциалы.

Аннотация

Работа посвящена изучению параллельных перенесений направлений и плоскостей в линейных и нелинейных (в узком смысле) связностях вдоль линий на поверхности проективного пространства, рассматриваемой как многообразие точек и многообразие касательных плоскостей. Параллельные перенесения описываются с помощью ковариантных дифференциалов квазитензоров в случае нелинейных связностей и проективно-ковариантных дифференциалов в линейных связностях. Работа относится к исследованиям в области дифференциальной геометрии. Методика исследований основана на применении способа Г. Ф. Лаптева задания связности в главных расслоениях и разработанного им метода продолжений и охватов, обобщающего метод подвижного репера и внешних форм Э. Картана и опирающегося на исчисление внешних дифференциальных форм.

Abstract

K. V. Polyakova, Parallel displacements on the surface of a projective space, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 2, pp. 129—177.

The paper is devoted to studies of parallel displacements of directions and planes in linear and nonlinear (in narrow sense) connections along lines on a surface of a projective space considered as the point manifold and the manifold of tangential planes. Parallel displacements are described by means of covariant differentials of quasitensors in the case of nonlinear connections and projective-covariant differentials in linear connections. The work concerns to researches in the area of differential geometry. The research is based on an application of the G. F. Laptev's method of defining a connection in a principal fiber bundle and his method of continuations and scopes, which generalizes the moving frame method and the Cartan's method of exterior forms; the research depends on calculation of exterior differential forms.

Введение

В дифференциальной геометрии важное место занимает теория связностей в расслоённых пространствах, а также применение этой теории при исследовании погружённых многообразий. Теория связностей с привлечением методов

Фундаментальная и прикладная математика, 2008, том 14, № 2, с. 129—177.

Э. Картана и теории геометрических объектов была разработана Г. Ф. Лаптевым [6]. Одновременно с развитием общей теории погружённых многообразий Г. Ф. Лаптев изучал пространства с фундаментально-групповой связностью. Им было введено и развито понятие многообразия геометрических объектов, т. е. многообразия расслоённой структуры, снабжённого полем образующего элемента, и изложены основы теории дифференциальной связности в многообразиях геометрических элементов, созданной с помощью введения определяющих связность отображений. В дальнейшем связность в расслоённых пространствах вводилась Г. Ф. Лаптевым также как поле некоторого объекта, называемого объектом связности [7]. Понятие связности, возникшее в дифференциальной геометрии как обобщение понятия параллельного перенесения, позже стало отождествляться с понятием геометрического объекта специального вида. Объект связности (того или иного порядка) является геометрическим объектом относительно дифференциальной группы (соответствующего порядка) или обобщённой (в каком-то смысле) дифференциальной группы (например, проективной дифференциальной группы) [8].

Наряду с теорией связностей в главных расслоениях создаётся теория связностей в более общих однородных расслоениях. Связность в однородном расслоении вводится как дифференцируемое распределение, удовлетворяющее некоторым дополнительным условиям. Так её определил Ю. Г. Лумисте [9, 10]. Нелинейные связности в широком смысле аппаратом, разработанным Г. Ф. Лаптевым, исследовал Л. Е. Евтушик [1].

Многие исследователи применяли связности в касательных расслоениях при изучении геометрии подмногообразий, вложенных в риманово пространство, в частности в пространство постоянной кривизны. Первые применения понятия связности к геометрии подмногообразий в проективном пространстве предложил Э. Картан. А. П. Норденом [12] разработан метод нормализации, позволяющий на подмногообразиях проективного пространства индуцировать аффинные связности без кручения. Э. Картан [4] вводил внутренне нормальное дифференцирование и гауссово кручение подмногообразия. В настоящее время эти понятия можно истолковать с помощью связности в нормальном расслоении и её форм кривизны. Подмногообразия с общим параллельным нормальным векторным полем в пространствах постоянной кривизны рассматривались Ю. Г. Лумисте [11] и А. В. Чакмазяном [27, 28].

Для исследования многообразий, погружённых в какое-либо пространство представления, Г. Ф. Лаптев предлагает следующую схему [7]:

1) в исходном пространстве представления задаётся какое-либо погружённое многообразие системой линейных зависимостей между формами, определяющими это пространство представления;
2) система уравнений погружённого многообразия продолжается путём последовательного внешнего дифференцирования, сопровождаемого применением леммы Картана, в результате чего получается последовательность представлений, определяемая вполне интегрируемой системой форм (фундаментальные представления);

3) строятся всевозможные представления, охватываемые фундаментальными;
4) изучаются полученные представления и связи между ними.

Эта схема исследования погружённых многообразий названа методом продолжений и охватов.

Большое внимание оснащениям уделено в работах Ю. И. Шевченко [35—37]. С помощью удачного определения понятия ковариантного дифференциала геометрического объекта относительно связности главного расслоения [31, 33] удалось дать геометрические интерпретации нелинейным связностям в узком смысле, а также линейной комбинации групповой связности на поверхности проективного пространства.

Работа посвящена изучению параллельных перенесений направлений и плоскостей в линейных и нелинейных (в узком смысле) связностях вдоль линий на поверхности проективного пространства, рассматриваемой как многообразие точек и многообразие касательных плоскостей. Параллельные перенесения описываются с помощью ковариантных дифференциалов квазитензоров в случае нелинейных связностей и проективно-ковариантных дифференциалов в линейных связностях.

Работа относится к исследованиям в области дифференциальной геометрии. Методика исследований основана на применении способа Г. Ф. Лаптева задания связности в главных расслоениях и разработанного им метода продолжений и охватов, который обобщает метод подвижного репера и внешних форм Э. Картана и опирается на исчисление внешних дифференциальных форм.

В разделе 1 поверхность проективного пространства P_n изучается как семейство точек (т. е. в репере нулевого порядка) и обозначается X_m^0 [17, 18, 21, 23, 26, 42, 43]. Найдены дифференциальные уравнения фундаментального объекта p-го порядка $\Lambda^p = \{\Lambda^a_{i_1}, \Lambda^a_{i_1 i_2}, \Lambda^a_{i_1 \ldots i_p}\}$ поверхности. Строится последовательность форм, получающихся при продолжении структурных уравнений базисных форм поверхности. Эти формы оказываются симметричными по нижним индексам. Таким образом, доказано, что поверхность X_m^0, является голономным гладким многообразием [37].

В главном расслоении центропроективных реперов 1-го порядка, ассоциированном с поверхностью, способом Г. Ф. Лаптева задаётся центропроективная связность $\Gamma = \{\Gamma^I_{Ji}, \Gamma_{Ii}\}$, объект кривизны $R = \{R^I_{Jij}, R_{Iij}\}$ которой оказывается псевдотензором, т. е. объектом, обращение которого в нуль инвариантно. Псевдотензором является также подобъект линейной кривизны R^I_{Jij}.

Произведено оснащение Бортолотти, состоящее в присоединении к каждой точке поверхности гиперплоскости P_{n-1}, задаваемой квазитензором λ_I. Оно индуцирует центропроективные связности двух типов в ассоциированном расслоении. Доказано, что связности двух типов совпадают тогда и только тогда, когда неподвижна гиперплоскость Бортолотти. Необходимым и достаточным условием обращения кривизны центропроективной связности (первого и второго типов) в нуль является неподвижность гиперплоскости Бортолотти. Введены вырожденные параллельные перенесения первого типа (гиперплоскость неподвижна) и второго типа (гиперплоскость произвольно смещается во всём пространстве).

Построен проективно-ковариантный дифференциал оснащающего квазитензора λ_I, с помощью которого даётся геометрическая интерпретация линейной связности Γ^I_{Ji} посредством параллельного перенесения направления. Также изучены параллельные перенесения направления в центропроективной связности первого и второго типов с помощью ковариантного дифференциала $\nabla\lambda_I$. Параллельные перенесения нормали второго рода Нордена описаны в линейной связности Γ^I_{Ji} и в линейной комбинации центропроективной связности [33].

Построены объект касательной линейной протосвязности Π^i_{jk} и объект центропроективной протосвязности $\{\Pi^i_{jk}, \Pi_{ij}\}$, которые геометрически охарактеризованы параллельными перенесениями касательного направления, определёнными с помощью проективно-ковариантного и ковариантного дифференциалов соответственно. Показано, что кручение индуцированной касательной линейной протосвязности равно нулю.

В разделе 2 поверхность проективного пространства P_n изучается в репере первого порядка, т. е. как многообразие касательных плоскостей, и обозначается X^1_m [14, 16, 18—20, 22, 24—26, 41—43]. Над поверхностью построено расслоение голономных линейных реперов произвольного порядка. С поверхностью ассоциируется главное расслоение первого порядка $G(X^1_m)$, в котором задаётся групповая связность $\Gamma = \{\Gamma^i_{jk}, \Gamma_{ij}, \Gamma^a_{bi}, \Gamma^i_{aj}, \Gamma_{ai}\}$, объект кривизны R которой является тензором.

Произведено композиционное оснащение, состоящее в задании плоскостей Картана C_{n-m-1} и нормалей второго рода Нордена N_{m-1}. Получены и рассмотрены три типа охвата компонент объекта групповой связности. Приведён способ нахождения охватов. Доказано, что условиями совпадения типов связностей является неподвижность гиперплоскости Бортолотти P_{n-1}, натянутой на плоскость Картана C_{n-m-1} и нормаль второго рода N_{m-1}. Установлено, что при этом кривизна индуцированной связности равна нулю. Обратное, однако, неверно.

Построен тензор параллельности $M = \{M_{ijk}, M^i_{ajk}, M_{aij}\}$, компоненты которого есть комбинации компонент объекта кривизны R с коэффициентами — компонентами композиционно оснащающего квазитензора λ, при обращении которого в нуль параллельное перенесение становится абсолютным. Подтензор M_{aij}, например, выражается следующим образом: $M_{aij} = R_{ijk} - \lambda_l R^l_{ijk}$. В разделе 2.9 определены параллельные перенесения плоскости Картана и нормали второго рода Нордена в связностях первого и второго типа.

С помощью проективно-ковариантных дифференциалов $\overline{\nabla}\mu^i$, $\overline{\nabla}\mu^a$ квазитензоров μ^i, μ^a, задающих касательное и нормальное направления, получены геометрические характеристики касательной Γ^i_{jk} и нормальной Γ^a_{bj} линейных связностей, которые совпадают с перенесениями А. П. Нордена и А. В. Чакмазяна. С помощью ковариантных дифференциалов изучены параллельное перенесение касательного направления в коаффинной связности и параллельные перенесения нормального направления.

1. Поверхность проективного пространства как многообразие точек

1.1. Структурные уравнения

Пусть P_n — проективное пространство размерности n. Отнесём P_n к подвижному реперу $R = \{A, A_I\}$ $(I, J, K = 1, \dots, n)$. Инфинитезимальные перемещения репера R определяются формулами

$$dA = \theta A + \omega^I A_I, \quad dA_I = \theta A_I + \omega_I A + \omega_I^J A_J, \tag{1.1.1}$$

причём базисные формы ω^I, ω_I, ω_I^J проективной группы $\mathrm{GP}(n)$, действующей в пространстве P_n, удовлетворяют структурным уравнениям Картана [5, с. 173]:

$$\begin{gathered} D\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I, \quad D\omega_I = \omega_I^J \wedge \omega_J, \\ D\omega_J^I = \omega_J \wedge \omega^I + \omega_J^K \wedge \omega_K^I + \delta_J^I \omega_K \wedge \omega^K. \end{gathered} \tag{1.1.2}$$

В проективном пространстве P_n рассмотрим m-мерную поверхность X_m $(1 \leqslant m < n)$ как семейство точек [6], т. е. в репере нулевого порядка. Будем обозначать её X_m^0. Произведём специализацию подвижного репера R, совмещая вершину A с точкой, описывающей поверхность X_m^0. Система уравнений поверхности X_m^0 в полученном репере R^0 нулевого порядка имеет вид

$$\omega^a = \Lambda_i^a \omega^i, \tag{1.1.3}$$

$i, j, k, \dots = 1, \dots, m$, $a, b, c, \dots = m+1, \dots, n$. Базисные формы ω^i удовлетворяют структурным уравнениям

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \Omega_j^i, \tag{1.1.4}$$

где

$$\Omega_j^i = \omega_j^i + \Lambda_j^a \omega_a^i. \tag{1.1.5}$$

Продолжая уравнения (1.1.3), получим

$$\Delta\Lambda_{\underline{i}}^a + \omega_i^a = \Lambda_{ij}^a \omega^j, \tag{1.1.6}$$

$$\Lambda_{ij}^a = \Lambda_{ji}^a. \tag{1.1.7}$$

Дифференциальный оператор Δ действует следующим образом:

$$\Delta\Lambda_{\underline{i}}^a = d\Lambda_i^a + \Lambda_i^b \omega_b^a - \Lambda_j^a \Omega_i^j.$$

Геометрический объект Λ_i^a является фундаментальным объектом первого порядка поверхности X_m^0.

Выражение для дифференциала точки A преобразуем к виду

$$dA = \theta A + \omega^i T_i \quad (T_i = A_i + \Lambda_i^a A_a).$$

Следовательно, касательная плоскость T_m к поверхности в точке A натянута на точки A, T_i. Выражение для дифференциалов точек T_i имеет вид

$$dT_i = \theta T_i + \Omega_i^j T_j + (\omega_i + \Lambda_i^a \omega_a) A + (\Delta\Lambda_{\underline{i}}^a + \omega_i^a) A_a. \tag{1.1.8}$$

Значит, уравнения (1.1.6) являются условиями инвариантности плоскости $T_m = [A, T_i]$. Продолжая уравнения (1.1.6), получим

$$\Delta\Lambda^{\underline{a}}_{\underline{ij}} = \Lambda^a_{ijk}\omega^j \quad (\Lambda^a_{ijk} = \Lambda^a_{ikj}), \tag{1.1.9}$$

где

$$\Delta\Lambda^{\underline{a}}_{\underline{ij}} = d\Lambda^a_{ij} + \Lambda^b_{ij}\Omega^a_b - \Lambda^a_{kj}\Omega^k_i - \Lambda^a_{ik}\Omega^k_j, \tag{1.1.10}$$

$$\Omega^a_b = \omega^a_b - \Lambda^a_k\omega^k_b. \tag{1.1.11}$$

В силу леммы Картана [8] $\Lambda^a_{i[jk]} = 0$. Из формулы (1.1.9) с учётом условий (1.1.7) получаем, что $\Lambda^a_{[ij]k} = 0$. Таким образом, объект Λ^a_{ijk} симметричен по всем нижним индексам. Геометрический объект $\{\Lambda^a_i, \Lambda^a_{ij}\}$ является фундаментальным объектом второго порядка поверхности X^0_m. Прежде чем находить дифференциальные уравнения для компонент фундаментального объекта p-го порядка поверхности X^0_m, выведем структурные уравнения для форм $\Omega^i_{j_1\ldots j_p}$, $\Omega^a_{bi_1\ldots i_p}$. Дифференцируя внешним образом уравнения (1.1.4), (1.1.11), получим

$$D\Omega^i_j = \Omega^k_j \wedge \Omega^i_k + \omega^k \wedge \Omega^i_{jk}, \quad D\Omega^a_b = \Omega^c_b \wedge \Omega^a_c + \omega^i \wedge \Omega^a_{bi}, \tag{1.1.12}$$

где

$$\begin{gathered}\Omega^i_{jk} = \Lambda^a_{jk}\omega^i_a - (\delta^i_j\Lambda^a_k + \delta^i_k\Lambda^a_j)\omega_a - (\delta^i_j\omega_k + \delta^i_k\omega_j),\\ \Omega^a_{bi} = -\Lambda^a_{ij}\omega^j_b - \delta^a_b(\omega_i + \Lambda^c_i\omega_c).\end{gathered} \tag{1.1.13}$$

Дифференцируя теперь внешним образом уравнения (1.1.12), будем пользоваться обобщённой леммой Картана [8]. Выражения для форм $\Omega^i_{j_1\ldots j_p}$, $\Omega^a_{bi_1\ldots i_p}$ выведем в разделе 1.2, используя соотношения (1.1.13). С помощью (1.1.12) найдём, что

$$\begin{gathered}D\Omega^i_{jk} = \Omega^l_{jk} \wedge \Omega^i_l + \Omega^l_j \wedge \Omega^i_{kl} + \Omega^l_k \wedge \Omega^i_{jl} + \omega^l \wedge \Omega^i_{jkl},\\ D\Omega^a_{bi} = \Omega^c_{bi} \wedge \Omega^a_c + \Omega^c_b \wedge \Omega^a_{ci} + \Omega^j_i \wedge \Omega^a_{bj} + \omega^j \wedge \Omega^a_{bij}.\end{gathered} \tag{1.1.14}$$

Полученные уравнения также дифференцируем внешним образом и разрешаем по обобщённой лемме Картана:

$$\begin{aligned}&D\Omega^i_{jkl} = \Omega^s_{jkl} \wedge \Omega^i_s + 3!\,\Omega^s_{(jk} \wedge \Omega^i_{l)s} + 3!\,\Omega^s_j \wedge \Omega^i_{kl)s} + \omega^s \wedge \Omega^i_{jkls},\\ &D\Omega^a_{bij} = \Omega^c_{bij} \wedge \Omega^a_c + \Omega^c_b \wedge \Omega^a_{cij} - \Omega^a_{bk} \wedge \Omega^k_{ij} +\\ &\quad + 2!\,\Omega^c_{b(i} \wedge \Omega^a_{|c|j)} - 2!\,\Omega^a_{bk(i} \wedge \Omega^k_{j)} + \omega^k \wedge \Omega^a_{bijk}.\end{aligned} \tag{1.1.15}$$

По индексам, стоящим в круглых скобках, производится симметрирование. Анализируя уравнения (1.1.12), (1.1.14), (1.1.15), можно предположить, что возникающие при дальнейших продолжениях формы $\Omega^i_{j_1\ldots j_p}$, $\Omega^a_{bi_1\ldots i_p}$ $(p = 1, 2, \ldots)$ удовлетворяют структурным уравнениям Г. Ф. Лаптева [8, с. 148]:

$$D\Omega^i_{j_1\ldots j_p} = \sum_{s=1}^{p} C^s_p \Omega^k_{(j_1\ldots j_s} \wedge \Omega^i_{j_{s+1}\ldots j_p)k} + \omega^k \wedge \Omega^i_{j_1\ldots j_p k}, \tag{1.1.16}$$

$$\Omega^a_{bi_1\ldots i_p} = \sum_{s=1}^{p} C^s_p \big(\Omega^c_{b(i_1\ldots i_s} \wedge \Omega^a_{|c|i_{s+1}\ldots i_p)} - \Omega^a_{bj(i_1\ldots i_s} \wedge \Omega^j_{i_{s+1}\ldots i_p)}\big) +$$
$$+ \Omega^c_b \wedge \Omega^a_{ci_1\ldots i_p} - \Omega^a_{bj} \wedge \Omega^j_{i_1\ldots i_p} + \omega^j \wedge \Omega^a_{bi_1\ldots i_p j}. \tag{1.1.17}$$

Формулы (1.1.16), (1.1.17) доказаны методом индукции.

1.2. Фундаментальный объект высшего порядка

Продолжая уравнения (1.1.10), получим

$$\Delta\Lambda^{\underline{a}}_{\underline{ijk}} + \Lambda^b_{ij}\Omega^a_{bk} - \frac{3!}{2!}\Lambda^a_{r(i}\Omega^r_{jk)} + \Lambda^a_{nk}\Omega^n_{ij} = \Lambda^a_{ijkl}\omega^l,$$

$$\Delta\Lambda^{\underline{a}}_{\underline{ijkl}} + \Lambda^b_{ij}\Omega^a_{bkl} + \Lambda^b_{ij(k}\Omega^a_{|b|l} - \frac{4!}{3!}\Lambda^a_{r(i}\Omega^r_{jkl)} + \Lambda^a_{q(l}\Omega^r_{jkl)} + \Lambda^a_{q(l}\Omega^a_{k)ji} -$$
$$- \frac{4!}{2!2!}\Lambda^a_{q(ij}\Omega^q_{kl)} + \Lambda^a_{qlk}\Omega^q_{ij)} = \Lambda^a_{ijklq}\omega^q,$$

$$\Lambda^a_{ij[kl]} = 0, \quad \Lambda^a_{ijk[lq]} = 0.$$

На основании (1.1.7) ,(1.1.9) заключаем, что Λ^a_{ijkl}, Λ^a_{ijklq} симметричны по всем нижним индексам. Таким образом, можно предположить, что объект $\Lambda^a_{i_1\ldots i_p}$ удовлетворяет уравнениям

$$\Delta\Lambda^{\underline{a}}_{\underline{i_1\ldots i_p}} + \Lambda^b_{\underline{i_1 i_2}}\Omega^a_{bi_3\ldots i_p} + \sum_{s=3}^{p-1} C^{s-2}_{p-2}\Lambda^b_{i_1 i_2(i_3\ldots i_s}\Omega^a_{|b|i_{s+1}\ldots i_p)} -$$
$$- \sum_{s=1}^{p-2} C^s_p \Lambda^a_{j(i_1\ldots i_s}\Omega^j_{i_{s+1}\ldots i_p)} + \sum_{s=3}^{p} C^{s-3}_{p-2}\Lambda^a_{j(i_p\ldots i_s}\Omega^j_{i_{s-1}\ldots i_3)i_2 i_1} = \Lambda^a_{i_1\ldots i_p j}\omega^j. \tag{1.2.1}$$

Продолжая эти уравнения в предположении их правильной продолжаемости [6], найдём, что

$$\Delta\Lambda^{\underline{a}}_{\underline{i_1\ldots i_{p+1}}} + \Lambda^b_{i_1 i_2}\Omega^a_{bi_3\ldots i_{p+1}} + \sum_{s=3}^{p} C^{s-2}_{p-1}\Lambda^b_{i_1 i_2(i_3\ldots i_s}\Omega^a_{|b|i_{s+1}\ldots i_{p+1})} -$$
$$- \sum_{s=1}^{p} C^s_{p+1}\Lambda^a_{j(i_1\ldots i_s}\Omega^j_{i_{s+1}\ldots i_{p+1})} + \sum_{s=3}^{p+1} C^{s-3}_{p-1}\Lambda^a_{j(i_{p+1}\ldots i_s}\Omega^j_{i_{s-1}\ldots i_3)i_2 i_1} = \Lambda^a_{i_1\ldots i_{p+1}j}\omega^j.$$

Следовательно, получили аналогичную (1.2.1) формулу для компонент фундаментального объекта $(p+1)$-го порядка.

Объект $\Lambda^p = \{\Lambda^a_{i_1}, \Lambda^a_{i_1 i_2}, \Lambda^a_{i_1\ldots i_p}\}$ называется [6] фундаментальным объектом порядка p поверхности X^0_m. Число p не превышает максимального порядка касательной плоскости к поверхности, не заполняющей всего пространства P_n.

Теорема 1.2.1. *Поверхность* X_m^0 *проективного пространства* P_n, *рассматриваемая как семейство точек, является голономным гладким многообразием* [37].

Доказательство заключается в построении симметричных по нижним индексам форм Ω^i_{jk}, $\Omega^i_{jkl}, \ldots$ исходя из структурных уравнений (1.1.4) базисных форм и обозначений (1.1.5). Уравнения (1.1.4) уже продолжены в разделе 1.1. Остаётся найти выражения для форм $\Omega^i_{j_1 j_2}$, $\Omega^i_{j_1 \ldots j_p}$, которые получаются непосредственно при сделанных продолжениях.

Однако представляется более рациональным сделать это сейчас с помощью (1.1.13), так как эти выражения содержат компоненты фундаментального объекта p-го порядка, полученного в данном разделе. Итак, из уравнений (1.1.13) видно, что формы Ω^i_{jk} симметричны по нижним индексам. Их продолжения имеют вид

$$\Omega^i_{jkl} = \Lambda^a_{jkl}\omega^i_a - (\delta^i_j \Lambda^a_{kl} + \delta^i_k \Lambda^a_{jl} + \delta^i_l \Lambda^a_{jk})\omega_a. \tag{1.2.2}$$

Формы Ω^i_{jkl} симметричны по нижним индексам, так как объект Λ^a_{jkl} симметричен по нижним индексам. Продолжая этот процесс и анализируя выражения (1.1.13), (1.2.2), можно предположить, что формы $\Omega^i_{j_1 \ldots j_p}$ $(p \geqslant 3)$ выражаются по формуле

$$\Omega^i_{j_1 \ldots j_p} = \Lambda^a_{j_1 \ldots j_p}\omega^i_a - \left(\delta^i_{j_1}\Lambda^a_{j_2 \ldots j_p} + \delta^i_{j_p}\Lambda^a_{j_1 \ldots j_{p-1}} + \sum_{s=2}^{p-1} \delta^i_{j_s}\Lambda^a_{j_1 \ldots j_{s-1} j_{s+1} \ldots j_p}\right)\omega_a. \tag{1.2.3}$$

Тогда с учётом симметрии по нижним индексам компонент фундаментального объекта p-го порядка Λ^p все формы $\Omega^i_{j_1 \ldots j_p}$ $(p \geqslant 2)$ будут симметричны по нижним индексам.

Докажем формулу (1.2.3) методом индукции. При $p = 3$ она совпадает с формулой (1.2.2). Дифференцируя (1.2.3), получим

$$\begin{aligned} \omega^k \wedge \Omega^i_{j_1 \ldots j_p k} = \Lambda^a_{j_1 \ldots j_p k}\omega^k \wedge \omega^i_a - \Lambda^a_{j_1 \ldots j_p}\omega_a \wedge \omega^i - \\ - \left(\delta^i_{j_1}\Lambda^a_{j_2 \ldots j_p k} + \delta^i_{j_p}\Lambda^a_{j_1 \ldots j_{p-1} k} + \sum_{s=2}^{p-1} \delta^i_{j_s}\Lambda^a_{j_1 \ldots j_{s-1} j_{s+1} \ldots j_p k}\right)\omega^k \wedge \omega_a, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \omega^{j_{p+1}} \wedge \Omega^i_{j_1 \ldots j_{p+1}} = \omega^{j_{p+1}} \wedge \Bigg(\Lambda^a_{j_1 \ldots j_{p+1}}\omega^i_a - \\ - \left(\delta^i_{j_1}\Lambda^a_{j_2 \ldots j_{p+1}} + \delta^i_{j_{p+1}}\Lambda^a_{j_1 \ldots j_p} + \sum_{s=2}^{p} \delta^i_{j_s}\Lambda^a_{j_1 \ldots j_{s-1} j_{s+1} \ldots j_{p+1}}\right)\omega_a\Bigg). \end{aligned}$$

Разрешение последних уравнений по лемме Картана показывает полноту индукции для (1.2.3). □

1.3. Центропроективная связность

С поверхностью X^0_m ассоциируется главное расслоение центропроективных реперов $G(X^0_m)$ со структурными уравнениями (1.1.4) и

$$D\omega^I_J = \omega^K_J \wedge \omega^I_K + \omega^i \wedge \omega^I_{Ji}, \qquad (1.3.1)$$
$$D\omega_I = \omega^J_I \wedge \omega^J_K,$$

где

$$\omega^I_{Ji} = -\delta^I_J(\omega_i + \Lambda^a_i\omega_a) - \omega_J(\delta^I_i + \delta^I_a\Lambda^a_i),$$

δ^I_J — обычный, δ^I_i, δ^I_a — обобщённые символы Кронекера [39]. Базой главного расслоения $G(X^0_m)$ является поверхность X^0_m, а типовым слоем — центропроективная (коаффинная) подгруппа $G = GA^*(n) \subset \mathrm{GP}(n)$ стационарности точки A. Расслоение $G(X^0_m)$ содержит подрасслоение линейных реперов $L(X^0_m)$ (1.1.4), (1.3.1) с той же базой, типовым слоем которого является линейная группа $L = \mathrm{GL}(n)$, действующая во множестве всех направлений, исходящих из точки A. Относительно двойственного характера действия группы L справедлива следующая теорема.

Теорема 1.3.1. *Линейная группа L действует как во множестве всех направлений, исходящих из точки A, так и в связке гиперплоскостей с центром A.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную точку $M = A + x^I A_I$ пространства P_n. Уравнениями её стационарности являются

$$dx^I = x^I x^J \omega_J - x^J \omega^I_J - \omega^J. \qquad (1.3.2)$$

Зададим гиперплоскость, проходящую через точку A, уравнениями

$$\xi_I x^I = 0. \qquad (1.3.3)$$

Дифференцируя (1.3.3) с помощью (1.3.2), найдём уравнения инвариантности гиперплоскости (1.3.3):

$$\delta\xi_I - \xi_J \pi^J_I = \Omega\xi_I, \qquad (1.3.4)$$

где 1-форма Ω играет роль множителя пропорциональности. Из уравнений (1.3.4) следует, что в связке гиперплоскостей с центром A действует группа L со структурными формами π^J_I. □

Фундаментально-групповую связность (т. е. связность в главном расслоении) в расслоении $G(X^0_m)$ зададим по Г. Ф. Лаптеву [2,8] с помощью новых слоевых форм

$$\tilde\omega^I_J = \omega^I_J - \Gamma^I_{Ji}\omega^i, \quad \tilde\omega_I = \omega_I - \Gamma_{Ii}\omega^i.$$

Дифференцируя их внешним образом и применяя теорему Картана—Лаптева, получим систему уравнений для компонент объекта $\Gamma = \{\Gamma^I_{Ji}, \Gamma_{Ii}\}$:

$$\Delta\Gamma^I_{Ji} + \omega^I_{Ji} = \Gamma^I_{Jij}\omega^j, \quad \Delta\Gamma_{Ii} + \Gamma^J_{Ii}\omega_J = \Gamma_{Iij}\omega^j.$$

Объект Γ задаёт центропроективную связность в расслоении $G(X^0_m)$ и содержит подобъект линейной связности Γ^I_{Ji}, определяющий связность в подрасслоении

$L(X^0_m)$ линейных реперов. Формы центропроективной связности $\tilde\omega^I_J$, $\tilde\omega_I$ удовлетворяют структурным уравнениям

$$D\tilde\omega^I_J = \tilde\omega^K_J \wedge \tilde\omega^I_K + R^I_{Jij}\omega^i \wedge \omega^j, \quad D\tilde\omega_I = \tilde\omega^J_I \wedge \tilde\omega_J + R_{Iij}\omega^i \wedge \omega^j,$$

где

$$R^I_{Jij} = \Gamma^I_{J[ij]} - \Gamma^K_{J[i}\Gamma^I_{|K|j]}, \quad R_{Iij} = \Gamma_{I[ij]} - \Gamma^J_{I[i}\Gamma_{|J|j]} - \tag{1.3.5}$$

компоненты объекта центропроективной кривизны $R = \{R^I_{Jij}, R_{Iij}\}$.

Определение 1.3.1. Усечённым объектом [13], или псевдотензором [37, с. 46], называется объект, не являющийся геометрическим объектом, обращение которого в нуль имеет инвариантный смысл.

Теорема 1.3.2. *Объект центропроективной кривизны R и подобъект линейной кривизны R^I_{Jij} являются псевдотензорами, так как удовлетворяют уравнениям*

$$\Delta R^I_{J\underline{ij}} \equiv 0, \quad \Delta R_{I\underline{ij}} + R^J_{Iij}\omega_J \equiv 0.$$

Замечание 1.3.1. Ю. И. Шевченко [35] формулировал теорему о тензорном характере объекта кривизны фундаментально групповой связности, допуская, однако, псевдотензорность в приложениях.

1.4. Оснащение Бортолотти и индуцированные связности

Произведём оснащение Бортолотти [38] поверхности X^0_m, т. е. к каждой точке A поверхности присоединим гиперплоскость P_{n-1}, не проходящую через эту точку. Эту гиперплоскость можно задать точками $B_I = A_I + \lambda_I A$, дифференцируя которые, получим

$$dB_I = \theta B_I + (\omega^J_I + \lambda_I\omega^J)B_J + (\Delta\lambda_I + \omega_I - \lambda_I\lambda_J\omega^J)A. \tag{1.4.1}$$

Отсюда получаем условия инвариантности гиперплоскости P_{n-1}:

$$\Delta\lambda_I + \omega_I = \lambda_{Ii}\omega^i. \tag{1.4.2}$$

Продолжая уравнения (1.4.2), найдём, что

$$\Delta\lambda_{I\underline{i}} - \lambda_J\omega^J_{Ii} = \lambda_{Iij}\omega^j \quad (\lambda_{Iij} = \lambda_{Iji}).$$

Теорема 1.4.1. *Оснащение Бортолотти поверхности X^0_m индуцирует центропроективные связности двух типов в ассоциированном расслоении $G(X^0_m)$.*

Доказательство. Фундаментальный объект Λ^a_i и оснащающий квазитензор $\lambda_I = \{\lambda_i, \lambda_a\}$ охватывают компоненты объекта связности Γ по формулам[29]

$$\overset{0}{\Gamma}{}^I_{Ji} = -\delta^I_J\mu_i - \lambda_J(\delta^I_i + \delta^I_a\Lambda^a_i), \tag{1.4.3}$$

$$\overset{1}{\Gamma}_{Ii} = \overset{0}{\Gamma}{}^I_{Ji}\lambda_J + \lambda_I\mu_i, \tag{1.4.4}$$

где введено обозначение

$$\mu_i = \lambda_i + \Lambda^a_i\lambda_a.$$

Коэффициенты μ_i удовлетворяют уравнениям

$$\Delta\mu_{\underline{i}} - \omega_i + \Lambda_i^a\omega_a = \mu_{ij}\omega^j. \qquad (1.4.5)$$

Геометрический смысл объекта μ_i, образующего геометрический объект в совокупности с фундаментальным объектом первого порядка, будет выяснен в разделе 1.8. Объект

$$\overset{1}{\Gamma} = \left\{\overset{0}{\Gamma}{}^I_{Ji},\ \overset{1}{\Gamma}_{Ii}\right\}$$

назовём *объектом связности первого типа*.

Компоненты Γ_{Ii} можно охватить иначе с помощью продолженного оснащающего квазитензора $\{\lambda_{Ii},\ \lambda_I\}$ и функций (1.4.3):

$$\overset{2}{\Gamma}_{Ii} = \overset{0}{\Gamma}{}^J_{Ii}\lambda_J + \lambda_{Ii}. \qquad (1.4.6)$$

Получили *объект связности второго типа*

$$\overset{2}{\Gamma} = \left\{\overset{0}{\Gamma}{}^I_{Ji},\ \overset{2}{\Gamma}_{Ii}\right\}. \qquad \square$$

Замечание 1.4.1. Формулы (1.4.4), (1.4.6) с учётом (1.4.3) можно записать в виде

$$\overset{1}{\Gamma}_{Ii} = -\lambda_I\mu_i, \quad \overset{2}{\Gamma}_{Ii} = \lambda_{Ii} - 2\lambda_I\mu_i.$$

1.5. Совпадения связностей и равенство нулю кривизны индуцированной связности

Введём объект деформации D_{Ii} построенных связностей двух типов:

$$D_{Ii} = \overset{2}{\Gamma}_{Ii} - \overset{1}{\Gamma}_{Ii} = \lambda_{Ii} - \lambda_I\mu_i. \qquad (1.5.1)$$

Он удовлетворяет сравнениям $\Delta D_{I\underline{i}} \equiv 0$, т. е. является псевдотензором, поэтому его обращение в нуль имеет инвариантный смысл. Равенства $D_{Ii} = 0$, или, что то же самое, равенства

$$\lambda_{Ii} = \lambda_I\mu_i, \qquad (1.5.2)$$

являются необходимыми и достаточными условиями совпадения двух типов охватов.

Найдём геометрический смысл условий (1.5.2). Выражения (1.4.1) для дифференциалов точек B_I с помощью уравнений (1.4.2) и (1.5.1) можно записать следующим образом:

$$dB_I = (\delta_I^J\theta + \omega_I^J + \lambda_I\omega^J)B_J + D_{Ii}\omega^i A.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1.5.1. *Связности двух типов совпадают тогда и только тогда, когда гиперплоскость Бортолотти неподвижна.*

Замечание 1.5.1. Неподвижность гиперплоскости Бортолотти P_{n-1} понимается в том смысле, что к каждой точке поверхности X_m^0 присоединяется одна и та же гиперплоскость P_{n-1}.

В силу теоремы 1.3.1 обращение кривизны R в нуль инвариантно, в этом случае из формул для компонент объекта центропроективной кривизны (1.3.5) получим

$$\Gamma^I_{J[ij]} = \Gamma^K_{J[i}\Gamma^I_{Kj]}, \quad \Gamma_{I[ij]} = \Gamma^J_{I[i}\Gamma_{Jj]}. \tag{1.5.3}$$

Однако исходя из охватов (1.4.3), (1.4.4), (1.4.6) альтернированные пфаффовы производные $\Gamma^I_{J[ij]}$, $\Gamma_{I[ij]}$ компонент объекта Γ выражаются следующим образом:

$$\overset{0}{\Gamma}{}^I_{J[ij]} = -\delta^I_J\mu_{[ij]} + \lambda_{J[i}(\delta^I_{j]} + \delta^I_a\Lambda^a_{j]}), \tag{1.5.4}$$
$$\overset{1}{\Gamma}_{I[ij]} = \overset{0}{\Gamma}{}^J_{I[ij]}\lambda_J, \quad \overset{2}{\Gamma}_{I[ij]} = \overset{0}{\Gamma}{}^J_{I[ij]}\lambda_J + \lambda_{J[j}\overset{0}{\Gamma}{}^J_{Ii]}.$$

Сравнивая полученные формулы (1.5.4) с (1.5.3), обнаруживаем, что если выражения (1.5.3) имеют место (т. е. $R = 0$), то выполняются условия (1.5.2). Если $m = 1$, т. е. в случае кривой, кривизна обращается в нуль без дополнительных условий. И обратно, в общем случае, т. е. если пфаффовы производные компонент Γ выражаются по формулам (1.5.4), кривизна не равна нулю. При выполнении условий (1.5.2) формулы (1.5.4) принимают вид (1.5.3) и $R = 0$.

Теорема 1.5.2. *Кривизна индуцированной центропроективной связности (первого и второго типов) равна нулю тогда и только тогда, когда гиперплоскость Бортолотти неподвижна.*

Теорема 1.5.3. *Если кривизна индуцированной линейной связности равна нулю, то и кривизна индуцированной центропроективной связности равна нулю.*

Замечание 1.5.2. В случае кривой кривизна равна нулю без ограничений на смещение плоскости Бортолотти.

1.6. Вырожденные параллельные перенесения

Опишем параллельные перенесения оснащающей гиперплоскости P_{n-1} в связностях обоих типов. Вводя в соотношения (1.4.2) формы центропроективной связности $\tilde\omega^I_J$, $\tilde\omega_I$, получим

$$\nabla\lambda_I = \nabla_i\lambda_I\omega^i,$$

где ковариантный дифференциал $\nabla\lambda_I$ и ковариантные производные $\nabla_i\lambda_I$ квазитензора λ_I относительно центропроективной связности имеют вид

$$\nabla\lambda_I = d\lambda_I - \tilde\omega^J_I + \tilde\omega_I, \quad \nabla_i\lambda_I = \lambda_{Ii} + \lambda_J\Gamma^J_{Ii} - \Gamma_{Ii}.$$

Внешний дифференциал ковариантного дифференциала $\nabla\lambda_I$ приведём к виду

$$D\nabla\lambda_I = -\nabla\lambda_J \wedge \tilde\omega^J_I + T_{Iij}\omega^i \wedge \omega^j,$$

где $T_{Iij} = R_{Iij} - \lambda_J R^J_{Iij}$. Коэффициенты T_{Iij} образуют псевдотензор, так как удовлетворяют сравнениям $\Delta T_{I\underline{ij}} \equiv 0$. Равенства $T_{Iij} = 0$ инвариантны. В этом случае дифференциальные уравнения $\nabla\lambda_I = 0$ вполне интегрируемы и задают абсолютное параллельное перенесение гиперплоскости P_{n-1}.

Линия ρ на поверхности задаётся уравнениями $\omega^i = \rho^i\omega$, где параметрическая форма ω удовлетворяет внешнему уравнению $D\omega = \omega \wedge \omega_1$, которое позволяет найти дифференциальные уравнения на коэффициенты ρ^i:

$$d\rho^i + \rho^j\Omega^i_j - \rho^i\omega_1 = \rho^i_1\omega.$$

Теорема 1.6.1. *Ковариантные производные $\nabla_i\lambda_I$ оснащающего по Бортолотти квазитензора λ_I образуют псевдотензор, т. е. удовлетворяют сравнениям*

$$\Delta\nabla_i\lambda_I - \nabla_j\lambda_I\Lambda^a_i\omega^j_a \equiv 0.$$

В связности первого типа ковариантные производные объекта λ_I выражаются по формуле

$$\overset{1}{\nabla}_i\lambda_I = \lambda_{Ii} - \lambda_I\mu_i.$$

Равенства $\overset{2}{\nabla}_i\lambda_I = 0$ эквивалентны условиям (1.5.2). В связности второго типа ковариантные производные объекта λ_I обращаются в нуль, т. е. $\overset{2}{\nabla}_i\lambda_I = 0$, откуда

$$d\lambda_I = \lambda_J\overset{0}{\tilde{\omega}}{}^J_I - \overset{2}{\tilde{\omega}}_I.$$

Следовательно, объект λ_I является инвариантным [6, с. 337] относительно $\overset{2}{\Gamma}$. Внешнее дифференцирование определяющих его дифференциальных уравнений даёт

$$\Big(\overset{2}{R}_{Iij} - \lambda_J\overset{0}{R}{}^J_{Iij}\Big)\omega^i \wedge \omega^j = 0,$$

или $\overset{2}{T}_{Iij} = 0$.

Образуем в выражении для дифференциалов точек B_I ковариантные дифференциалы $\overset{1}{\nabla}\lambda_I$, $\overset{2}{\nabla}\lambda_I$ объекта λ_I относительно связностей первого и второго типа:

$$dB_I = \theta B_I + (\omega^J_I + \lambda_I\omega^J)B_J + \Big(\overset{1}{\nabla}\lambda_I + \overset{2}{\nabla}\lambda_I\Big)A \quad \Big(\overset{2}{\nabla}\lambda_I = 0\Big).$$

Определение 1.6.1. Назовём параллельное перенесение гиперплоскости P_{n-1} вдоль линии ρ на поверхности вырожденным первого типа, если она неподвижна (т. е. каждой точке линии ρ соответствует одна и та же гиперплоскость), и второго типа, если она смещается произвольно в P_n (т. е. все гиперплоскости построенного поля в каждой точке линии ρ параллельны).

Система дифференциальных уравнений $\nabla\lambda_I = 0$ вдоль линии ρ приводится к системе n линейных однородных уравнений с m переменными ρ^i:

$$\nabla_i\lambda_I\rho^i = 0. \tag{1.6.1}$$

Пусть $r = \operatorname{rang}(\nabla_i \lambda_I)$, тогда из системы следует, что существует такое $(m-r)$-мерное подпространство T_{m-r} касательной плоскости T_m, что вдоль линий, касающихся T_{m-r}, гиперплоскость P_{n-1} можно переносить параллельно. В зависимости от ранга r возможны следующие принципиально разные случаи:

1) $r = m$ — система (1.6.1) имеет только нулевое решение, т. е. линия вырождается в точку и параллельное перенесение невозможно;
2) $0 < r < m$ — система (1.6.1) имеет $(m-r)$-мерное пространство решений, т. е. есть линии, вдоль которых параллельное перенесение осуществлять можно, и линии, вдоль которых переносить нельзя;
3) $r = 0$ — система (1.6.1) совместна при любых значениях ρ^i, т. е. $T_{m-r} = T_m$ и гиперплоскость P_{n-1} можно параллельно переносить вдоль любой линии на поверхности X_m^0. Параллельное перенесение в этом случае называется абсолютным.

Замечание 1.6.1. Параллельное перенесение гиперплоскости в связности $\overset{2}{\Gamma}$ соответствует случаю 3), т. е. является абсолютным.

Теорема 1.6.2. *Параллельное перенесение гиперплоскости Бортолотти в связности* $\overset{1}{\Gamma}$ $(\overset{2}{\Gamma})$ *является вырожденным первого* (*второго*) *типа, причём в связности второго типа параллельное перенесение абсолютно.*

1.7. Параллельные перенесения произвольного направления и проективно-ковариантный дифференциал

В предыдущем разделе были геометрически охарактеризованы центропроективные связности обоих типов с помощью параллельных перенесений гиперплоскости Бортолотти. Целью настоящего раздела является геометрическая интерпретация линейной связности, полученная посредством введённого понятия проективно-ковариантного дифференциала для задания параллельного перенесения произвольного направления.

Рассмотрим направление — прямую, проходящую через точку A. Она пересекает гиперплоскость P_{n-1}, поэтому определяется точкой

$$B = \xi^I B_I, \tag{1.7.1}$$

причём

$$\Delta\xi^I - \xi^I\Omega = \xi^I_i\omega^i. \tag{1.7.2}$$

Условие продолжаемости уравнений (1.7.2) записывается в виде $D\Omega = \omega^i \wedge \Sigma_i$. Вводя в уравнения (1.7.2) формы линейной связности $\tilde{\omega}^I_J$, получим выражение

$$d\xi^I + \xi^J\tilde{\omega}^I_J - \xi^I\Omega = (\xi^I_i - \xi^J\Gamma^I_{Ji})\omega^i.$$

Слагаемое $\xi^I\Omega$ не входит в выражение для ковариантного дифференциала объекта ξ^I. В этом случае естественно ввести новое понятие — *проективно-ковариантный дифференциал* (будем обозначать его $\overline{\nabla}$). Тогда получаем

$$\overline{\nabla}\xi^I = \overline{\nabla}_i\xi^I\omega^i,$$

где выражения

$$\overline{\nabla}\xi^I = d\xi^I + \xi^J\tilde{\omega}_J^I - \xi^I\Omega, \quad \overline{\nabla}_i\xi^I = \xi_i^I - \xi^J\Gamma_{Ji}^I$$

назовём соответственно проективно-ковариантным дифференциалом и проективно-ковариантными производными объекта ξ^I относительно линейной связности Γ_{Ji}^I [43]. Найдём внешний дифференциал форм $\overline{\nabla}\xi^I$:

$$D\overline{\nabla}\xi^I = \overline{\nabla}\xi^J \wedge \tilde{\omega}_J^I - \overline{\nabla}\xi^I \wedge \Omega + \xi^J R_{Jij}^I \omega^i \wedge \omega^j - \xi^I D\Omega.$$

Замечание 1.7.1. Равенство нулю проективно-ковариантного дифференциала $\overline{\nabla}\xi^I = 0$ равносильно пропорциональности ковариантного дифференциала $\nabla\xi^I = \xi^I\Omega$.

Дифференциал точки B имеет вид

$$dB = (\ldots)B + \overset{0}{\overline{\nabla}}\xi^I B_I + \xi^I(\lambda_{Ii} - \lambda_I\mu_i)\omega^i A,$$

где нуль над знаком проективно-ковариантного дифференциала означает, что объект линейной связности Γ_{Ji}^I охвачен по формулам (1.4.3).

Теорема 1.7.1. *Прямая AB ($B \in P_{n-1}$) переносится параллельно в линейной связности $\overset{0}{\Gamma}{}_{Ji}^I$ тогда и только тогда, когда точка B смещается по прямой AB.*

Запишем систему дифференциальных уравнений $\overline{\nabla}\xi^I = 0$ в виде системы линейных однородных уравнений $\overline{\nabla}_i\xi^I\rho^i = 0$. Она имеет ненулевое решение, если $\operatorname{rang}(\overline{\nabla}_i\xi^I) < m$. Если $\operatorname{rang}(\overline{\nabla}_i\xi^I) = m$, то параллельное перенесение осуществить невозможно.

В разложении (1.7.1) произведём нормировку $\xi^I\lambda_I = 1$, тогда $B = \xi^I A_I + A$, причём $\Delta\xi^I - \xi^I\xi^J\omega_J = \xi_i^I\omega^i$. Ковариантный дифференциал и ковариантные производные квадратичного объекта ξ^I выражаются соответственно по формулам

$$\nabla\xi^I = d\xi^I + \xi^J\tilde{\omega}_J^I - \xi^I\xi^J\tilde{\omega}_J, \quad \nabla_i\xi^I = \xi_i^I - \xi^J\Gamma_{Ji}^I + \xi^I\xi^J\Gamma_{Ji}.$$

Найдём внешний дифференциал от ковариантного дифференциала $\nabla\xi^I$:

$$D\nabla\xi^I = \nabla\xi^J \wedge (\tilde{\omega}_J^I - \xi^I\tilde{\omega}_J) - \nabla\xi^I \wedge \tilde{\omega}_J + P_{ij}^I\omega^i \wedge \omega^j,$$

где

$$P_{ij}^I = \xi^J(R_{Jij}^I - \xi^I R_{Jij}). \tag{1.7.3}$$

Объект P_{ij}^I является псевдотензором, так как удовлетворяет дифференциальным сравнениям

$$\Delta P_{\underline{ij}}^I - \xi^J P_{ij}^J\omega_J - \xi^I P_{ij}^K\omega_K \equiv 0.$$

Следовательно, если $P_{ij}^I = 0$, то система уравнений $\nabla\xi^I = 0$ является вполне интегрируемой вдоль всей поверхности X_m^0. В этом случае можно говорить об абсолютном параллельном перенесении прямой AB, заданном этой системой $\nabla\xi^I = 0$. Найдём выражение для объекта P_{ij}^I относительно связностей первого и второго типов:

$$\overset{1}{P}{}_{ij}^I = \overset{2}{P}{}_{ij}^I = \xi^I\xi^J\lambda_{J[j}\mu_{i]} + \left(\delta_{[i}^I + \delta_a^I\Lambda_{[i]}^a\right)(\mu_{j]} - \xi^J\lambda_{Jj]}). \tag{1.7.4}$$

Теорема 1.7.2. *Если комбинации* (1.7.3) *компонент объектов кривизны связностей первого и второго типов обращаются в нуль, т. е. выражения* (1.7.4) *равны нулю, то система* $\nabla\xi^I = 0$ *задаёт абсолютное параллельное перенесение прямой* AB *в этих связностях.*

Образуя в выражении для дифференциала точки B ковариантный дифференциал $\nabla\xi^I$ относительно связностей обоих типов, получим

$$dB = (\theta + \xi^I\omega_I)B + \overset{1}{\nabla}\xi^I A_I,$$
$$dB = (\theta + \xi^I\omega_I + (\mu_i - \xi^I\lambda_{Ii})\omega^i)B + (\xi^I\lambda_{Ii} - \mu_i)\omega^i A + \overset{2}{\nabla}\xi^I A_I.$$

Теорема 1.7.3. *Параллельное перенесение прямой* AB *в связности* $\overset{1}{\Gamma}$ *является вырожденным первого типа, т. е. имеет место, когда точка* B *неподвижна. Прямая* AB *переносится параллельно в связности* $\overset{2}{\Gamma}$, *если точка* B *смещается по прямой* AB.

Систему $\nabla\xi^I = 0$ вдоль линии ρ относительно связности первого типа запишем в виде
$$(\xi^I_i + \delta^I_i + \delta^I_a\Lambda^a_i)\rho^i = 0.$$
Следовательно, если $\xi^i_j = -\delta^i_j$, $\xi^a_j = -\Lambda^a_j$, то параллельное перенесение прямой AB в связности $\overset{1}{\Gamma}$ абсолютно.

Теорема 1.7.4. *Среди полей всех прямых, проходящих через точку* A, *существует единственное определяемое поверхностью* X^0_m *поле, прямые которого переносятся абсолютно параллельно в связности первого типа вдоль поверхности* X^0_m.

1.8. Параллельные перенесения нормали второго рода

Рассмотрим нормаль второго рода Нордена [12] N_{m-1} ($A \notin N_{m-1} \subset T_m$), натянутую на точки $N_i = T_i + \eta_i A$, причём
$$\Delta\eta_{\underline{i}} + \omega_i + \Lambda^a_i\omega_a \equiv 0. \tag{1.8.1}$$
Сопоставляя сравнения (1.4.5) и (1.8.1), убеждаемся в возможности равенств $\mu_i = \eta_i$, которые будем предполагать выполненными. При этом точки
$$N_i = T_i + \eta_i A = B_i + \Lambda^a_i B_a$$
принадлежат пересечению плоскостей T_m и P_{n-1}, т. е. $N_{m-1} = T_m \cap P_{n-1}$. Выражение для дифференциалов точек N_i имеет вид
$$dN_i = (\ldots)^j_i N_j + (\Delta\Lambda^a_{\underline{i}} + \omega^a_i)B_a + \\ + (\Delta\lambda_i - \lambda_a\omega^a_i + \omega_i + \Lambda^a_i(\Delta\lambda_a - \lambda_j\omega^j_a + \omega_a) - \mu_i\mu_j\omega^j)A. \tag{1.8.2}$$

Следовательно, уравнения (1.1.6), (1.4.2) являются условиями инвариантности нормали N_{m-1}. Для ковариантного дифференциала $\nabla\Lambda_i^a$, а также для линейной комбинации $\theta_i = \nabla\lambda_i + \Lambda_i^a\nabla\lambda_a$ компонент ковариантного дифференциала $\nabla\lambda_I$ выполняются равенства

$$\nabla\Lambda_i^a = \nabla_j\Lambda_i^a\omega^j, \quad \theta = M_{ij}\omega^j,$$

где

$$\nabla\Lambda_i^a = d\Lambda_i^a + \Lambda_i^b\tilde{\omega}_b^a - \Lambda_j^a\tilde{\Omega}_i^j + \tilde{\omega}_i^a,$$
$$\nabla\lambda_i = d\lambda_i - \lambda_j\tilde{\omega}_i^j - \lambda_a\tilde{\omega}_i^a + \tilde{\omega}_i, \quad \nabla\lambda_a = d\lambda_a - \lambda_b\tilde{\omega}_a^b - \lambda_i\tilde{\omega}_a^i + \tilde{\omega}_a -$$

ковариантные дифференциалы, а

$$\nabla_j\Lambda_i^a = \Lambda_{ij}^a - \Lambda_i^b - \Gamma_{bj}^a + \Lambda_k^a(\Gamma_{ij}^k + \Lambda_i^b\Gamma_{bj}^k) - \Gamma_{ij}^a, \quad M_{ij} = \nabla_j\lambda_i + \Lambda_i^a\nabla_j\lambda_a -$$

ковариантные производные и линейная комбинация ковариантных производных соответственно. Формы $\tilde{\Omega}_i^j$ имеют вид

$$\tilde{\Omega}_i^j = \tilde{\omega}_i^j + \Lambda_i^a\tilde{\omega}_a^j.$$

Внешние дифференциалы форм $\nabla\Lambda_i^a$, θ_i преобразуем к виду

$$D\nabla\Lambda_i^a = \nabla\Lambda_i^b \wedge (\tilde{\omega}_b^a - \Lambda_j^a\tilde{\omega}_b^j) - \nabla\Lambda_j^a \wedge \tilde{\Omega}_i^j + A_{ijk}^a\omega^j \wedge \omega^k,$$
$$D\theta_i = \tilde{\Omega}_i^j \wedge \theta_j + (\ldots)_{ijk}\omega^j \wedge \omega^k,$$

где

$$A_{ijk}^a = R_{ijk}^a + \Lambda_i^b R_{bjk}^a - \Lambda_i^a(R_{ijk}^l + \Lambda_i^b R_{bjk}^l),$$

причём

$$\Delta A_{I\underline{jk}}^{\underline{a}} \equiv 0.$$

Если $A_{ijk}^a = 0$, то система $\nabla\Lambda_i^a = 0$ вполне интегрируема вдоль поверхности X_m^0.

Замечание 1.8.1. Ковариантные производные $\overset{0}{\nabla}_j\Lambda_i^a$ фундаментального объекта первого порядка Λ_i^a относительно индуцированной линейной связности $\overset{0}{\Gamma}{}_{Ji}^I$ совпадают с его пфаффовыми производными Λ_{ij}^a.

Замечание 1.8.2. Ковариантные производные $\nabla_j\Lambda_i^a$ обращаются в нуль, т. е. параллельное перенесение, заданное системой уравнений $\nabla\Lambda_i^a = 0$, является абсолютным, если компоненты линейной связности Γ_{Ji}^I подчиняются условию

$$\Lambda_{ij}^a = \Gamma_{ij}^a + \Lambda_i^b\Gamma_{bj}^a - \Lambda_k^a(\Gamma_{ij}^k + \Lambda_i^b\Gamma_{bj}^k), \tag{1.8.3}$$

обобщающему условие адаптации [37]. В таком случае будем говорить об адаптированной линейной связности третьего типа $\overset{3}{\Gamma}{}_{Ji}^I$.

Замечание 1.8.3. Для компонент $\overset{0}{\Gamma}{}_{Ji}^I$ равенство (1.8.3) имеет место, лишь когда $\Lambda_{ij}^a = 0$, либо $\Lambda_i^a = 0$, $\Gamma_{ij}^a = \Lambda_{ij}^a$, т. е. репер адаптирован к касательной плоскости, а связность адаптирована к подмногообразию.

Замечание 1.8.4. Линейные комбинации $\overset{2}{M}_{ij}$ ковариантных производных $\overset{2}{\nabla}_j \lambda_i$, $\overset{2}{\nabla}_j \lambda_a$ относительно $\overset{2}{\Gamma}$ обращаются в нуль.

По замечанию 1.8.1 систему дифференциальных уравнений $\nabla\Lambda_i^a = 0$ относительно линейной связности $\overset{0}{\Gamma}{}^I_{Ji}$ вдоль линии $\rho \subset X_m^0$ можно записать в виде системы линейных однородных уравнений

$$\Lambda^a_{ij}\rho^j = 0. \tag{1.8.4}$$

Пусть $r = \operatorname{rang}(\Lambda^a_{ij})$, где пара индексов $\binom{a}{I}$ нумерует строки, а индекс j — столбцы. Тогда из системы (1.8.4) следует, что в случае $r < m$ существует такое $(m-r)$-мерное подпространство T_{m-r} касательной плоскости T_m, что вдоль линий, касающихся подпространства T_{m-r}, плоскость N_{m-1} можно переносить параллельно. В общем случае $r = m$, поэтому параллельное перенесение нормали второго рода невозможно осуществить в связности $\overset{0}{\Gamma}{}^I_{Ji}$. Если $r = 0$, то параллельное перенесение плоскости N_{m-1}, заданное системой $\nabla\Lambda_i^a = 0$, является абсолютным.

Рассмотрим вопрос о том, какие линии определяются системой уравнений $\nabla\Lambda_i^a = 0$. Второй дифференциал точки A имеет вид

$$d^2A = \big(d\theta + \theta^2 + \omega^i(\omega_i + \Lambda_i^a\omega_a)\big)A + (2\theta\omega^i + d\omega^i + \omega^j\Omega_j^i)T_i + \Lambda^a_{ij}\omega^i\omega^j A_a.$$

Значит, соприкасающаяся плоскость к линии ρ, определяемой системой уравнений (1.8.4), натянута на точки A, T_i, т. е. в точке A совпадает с касательной плоскостью к поверхности X_m^0 в этой точке. Линии, обладающие таким свойством, называются асимптотическими. Следовательно, рассматриваемые линии $\rho \subset X_m^0$ являются асимптотическими.

Рассмотрим касательную плоскость к поверхности X_m^0 и, используя (1.1.6), запишем выражение для дифференциалов точек T_i вдоль некоторой линии $\rho \subset X_m^0$:

$$dT_i = (\delta_i^j\theta + \Omega_i^j)T_i + (\omega_i + \Lambda_i^a\omega_a)A + \Lambda^a_{ij}\rho^j A_a. \tag{1.8.5}$$

Таким образом, из формулы (1.8.5) с учётом (1.8.4) получаем, что касательная плоскость к поверхности X_m^0 вдоль рассматриваемых асимптотических линий постоянна. Таким свойством обладают линии плоской образующей тангенциально вырожденной поверхности.

Опишем параллельные перенесения нормали второго рода N_{m-1}, задаваемые подсистемами системы

$$\nabla\Lambda_i^a = 0, \quad \theta_i = 0, \quad \nabla\Lambda_i^a = 0, \quad \theta_i = 0$$

в различных связностях.

Выражение для дифференциалов точек N_i относительно связности $\overset{1}{\Gamma}$ принимают вид

$$dN_i = (\ldots)_i^j N_j + \overset{0}{\nabla}\Lambda_i^a B_a + \overset{1}{\theta}_i A,$$

где формы $\overset{1}{\theta}_i$ получены из форм θ_i с учётом охватов (1.4.3), (1.4.4).

Теорема 1.8.1. *Нормаль второго рода N_{m-1} переносится параллельно в индуцированной линейной связности $\overset{0}{\Gamma}{}^I_{Ji}$, когда она смещается в касательной плоскости T_m.*

Теорема 1.8.2. *Линейная комбинация связности $\overset{1}{\Gamma}$ [33] характеризуется параллельным перенесением нормали N_{m-1}, заданным системой уравнений $\theta_i = 0$, когда она смещается в гиперплоскости P_{n-1}, и вырожденным (первого типа) параллельным перенесением нормали N_{m-1}, заданным системой $\nabla\Lambda^a_i = 0$, $\theta_i = 0$, когда она неподвижна.*

Относительно связности $\overset{2}{\Gamma}$ выражение (1.8.2) для дифференциалов точек N_i запишем в виде

$$dN_i = (\ldots)^j_i N_i + \overset{0}{\nabla}\Lambda^a_i B_a + \Big(\overset{2}{\theta}_i + \mu_i\mu_j\omega^j\Big)A.$$

1.9. Протосвязность

Внося формы $\tilde{\Omega}^i_j = \tilde{\omega}^i_j + \Lambda^a_j\tilde{\omega}^i_a$ в уравнения (1.1.4), получим

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \tilde{\Omega}^i_j + S^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k, \tag{1.9.1}$$

где

$$S^i_{jk} = \Gamma^i_{[jk]} + \Lambda^a_{[j}\Gamma^i_{|a|k]}. \tag{1.9.2}$$

Внешний дифференциал форм $\tilde{\Omega}^i_j$ приведём к виду

$$D\tilde{\Omega}^i_j = \tilde{\Omega}^k_j \wedge \tilde{\Omega}^i_k + (R^i_{jkl} + \Lambda^a_j R^i_{akl})\omega^k \wedge \omega^l + \nabla_k\Lambda^a_j\omega^k \wedge \tilde{\omega}^i_a. \tag{1.9.3}$$

Это выражение, за исключением последнего слагаемого, имеет вид уравнений для форм связности.

Относительно связности $\overset{0}{\Gamma}{}^I_{Ji}$ выражение (1.9.3) принимает вид

$$D\overset{0}{\tilde{\Omega}}{}^i_j = \overset{0}{\tilde{\Omega}}{}^k_j \wedge \overset{0}{\tilde{\Omega}}{}^i_k + \Big(\overset{0}{R}{}^i_{jkl} + \Lambda^a_j\overset{0}{R}{}^i_{akl}\Big)\omega^k \wedge \omega^l + \Lambda^a_{jk}\omega^k \wedge \tilde{\omega}^i_a.$$

Тогда вдоль асимптотических линий вида (1.8.4) формы $\overset{0}{\tilde{\Omega}}{}^i_j$ являются формами касательной линейной связности, так как вдоль них последнее слагаемое обращается в нуль. Относительно связности $\overset{3}{\Gamma}{}^I_{Ji}$, вследствие замечания 1.8.2, ковариантные производные $\overset{3}{\nabla}_k\Lambda^a_j$ обращаются в нуль и $\overset{3}{\tilde{\Omega}}{}^i_j$ являются формами касательной линейной связности. Наконец, если произвести дополнительную канонизацию репера, помещая точки A_i репера R^0 в касательную плоскость T_m, то $\Lambda^a_i = 0$ и (1.9.3) запишется следующим образом:

$$D\tilde{\omega}^i_j = \tilde{\omega}^k_j \wedge \tilde{\omega}^i_k + R^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l.$$

В таком случае формы $\tilde{\Omega}^i_j = \tilde{\omega}^i_j$ становятся формами касательной линейной связности для поверхности, рассматриваемой как многообразие касательных плоскостей. Это позволяет говорить о новом понятии касательной линейной протосвязности, которая становится связностью при переходе к реперу первого порядка.

Определение 1.9.1. Назовём формы $\tilde{\Omega}^i_j$ и объект $\Pi^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} + \Lambda^a_j \Gamma^i_{ak}$ формами и объектом касательной линейной протосвязности.

Для компонент объектов индуцированной и адаптированной линейных связностей $\overset{0}{\Gamma}{}^I_{Ji}$, $\overset{3}{\Gamma}{}^I_{Ji}$ имеет место равенство

$$B^a_{ij} \overset{\text{def}}{=} \Gamma^a_{[ij]} + \Lambda^b_{[i}\Gamma^a_{|b|j]} - \Lambda^a_k(\Gamma^k_{ij} + \Lambda^b_{[i}\Gamma^k_{|b|j]}) = 0,$$

используя которое, мы найдём дифференциальные сравнения для коэффициентов S^i_{jk}:

$$\Delta S^{\underline{i}}_{\underline{jk}} \equiv 0.$$

Коэффициенты S^i_{jk} в уравнениях (1.9.1), выраженные по формуле (1.9.2), назовём кручением касательной линейной протосвязности. Из формул (1.4.3) вытекает следующая теорема.

Теорема 1.9.1. *Кручение касательной линейной протосвязности* $\overset{0}{\Pi}{}^i_{jk}$ *равно нулю.*

Объект протосвязности Π^i_{jk} удовлетворяет сравнениям

$$\Delta\Pi^{\underline{i}}_{\underline{jk}} + (\Gamma^a_{jk} + \Gamma^a_{bk}\Lambda^b_j)\omega^i_a - \delta^i_j(\omega_k + \Lambda^a_k\omega_a) - \delta(\omega_j + \Lambda^a_j\omega_a) \equiv 0$$

и в общем случае не образует геометрического объекта даже вместе с Λ^a_i. Для компонент объекта адаптированной линейной связности $\overset{3}{\Gamma}{}^I_{Ji}$ имеют место сравнения

$$\Delta\overset{3}{\Pi}{}^{\underline{i}}_{\underline{jk}} + \Lambda^a_{jk}\omega^i_a - \delta^i_j(\omega_k + \Lambda^a_k\omega_a) - \delta^i_k(\omega_j + \Lambda^a_j\omega_a) \equiv 0.$$

Дополнительно рассмотрим формы $\Omega_i = \omega_i + \Lambda^a_i\omega_a$. Образуем с помощью их новые формы

$$\tilde{\Omega}_i = \tilde{\omega}_i + \Lambda^a_i\tilde{\omega}_a, \tag{1.9.4}$$

или $\tilde{\Omega}_i = \Omega_i - \Pi_{ij}\omega^j$, где $\Pi_{ij} = \Gamma_{ij} + \Lambda^a_i\Gamma_{aj}$. Внешние дифференциалы форм (1.9.4) имеют вид

$$D\tilde{\Omega}_i = \tilde{\Omega}^j_i \wedge \tilde{\Omega}_j + \nabla_j\Lambda^a_i\omega^j \wedge \tilde{\omega}_a + (R_{ijk} + \Lambda^a_i R_{ajk})\omega^j \wedge \omega^k,$$

причём

$$\Delta\Pi_{\underline{ij}} + \Pi^k_{ij}\omega_k + (\Gamma^k_{ij} + \Lambda^b_i\Gamma^a_{bj})\omega_a \equiv 0.$$

Для компонент объекта адаптированной линейной связности $\overset{3}{\Gamma}{}^I_{Ji}$ имеют место сравнения

$$\Delta\overset{3}{\Pi}_{\underline{ij}} + \overset{3}{\Pi}{}^k_{ij}\Omega_k + \Lambda^a_{ij}\omega_a \equiv 0.$$

Аналогично формам касательной линейной протосвязности $\tilde{\Omega}^i_j$ формы $\tilde{\Omega}^i_j$, $\tilde{\Omega}_i$ можно назвать формами центропроективной протосвязности в тех же случаях. Таким образом, можно говорить о *центропроективной протосвязности* с объектом $\Pi = \{\Pi^i_{jk}, \Pi_{ij}\}$.

1.10. Параллельные перенесения касательного направления

Охарактеризуем геометрически касательную линейную и центропроективную протосвязности. Рассмотрим касательное направление AN, проходящее через точку A и пересекающее нормаль второго рода N_{m-1} в точке

$$N = \nu^i N_i = \nu^i(\Lambda^a_i A_a + A_i + \mu_i A). \tag{1.10.1}$$

Выражение для дифференциала точки N запишем в виде

$$dN = \theta N + \Delta\nu^{\underline{i}} N_i + \nu^i \mu_i \omega^j N_j + \nu^i \Lambda^a_{ij} \omega^j A_a + \nu^i \mu_{ij} \omega^j A. \tag{1.10.2}$$

Условиями инвариантности направления AN являются уравнения

$$\Delta\nu^{\underline{i}} - \nu^i \Theta = \nu^i_j \omega^j. \tag{1.10.3}$$

Они правильно продолжаемы при выполнении условия $D\Theta = \Theta_i \wedge \omega^i$.

Вводя в уравнения (1.10.3) формы протосвязности $\tilde{\Omega}^i_j$, получим $\overline{\nabla}\nu^i = \overline{\nabla}_j \nu^i \omega^j$, где проективно-ковариантный дифференциал и проективно-ковариантные производные объекта ν^i относительно протосвязности выражаются по формулам

$$\overline{\nabla}\nu^i = d\nu^i + \nu^j \tilde{\Omega}^i_j - \nu^i \Theta, \quad \overline{\nabla}_j \nu^i = \nu^i_j - \nu^k \Pi^i_{kj}.$$

Образуем в выражении (1.10.2) дифференциала точки N проективно-ковариантный дифференциал объекта ν^i относительно протосвязности $\overset{0}{\Pi}{}^i_{jk}$:

$$dN = (\theta + \Theta - \mu_i \omega^i) N + \overset{0}{\overline{\nabla}} \nu^i N_i + \nu^i \Lambda^a_{ij} \omega^j A_a + \nu^i \mu_{ij} \omega^j A. \tag{1.10.4}$$

Так как формы $\overset{0}{\tilde{\Omega}}{}^i_j$ являются формами связности вдоль асимптотических линий вида (1.8.4), то выражение (1.10.4) принимает вид

$$dN = (\theta + \Theta - \mu_i \omega^i) N + \overset{0}{\overline{\nabla}} \nu^i N_i + \nu^i \mu_{ij} \omega^j A.$$

Теорема 1.10.1. *Касательное направление AN переносится параллельно в индуцированной касательной линейной протосвязности $\overset{0}{\Pi}{}^i_{jk}$, если точка N смещается по прямой AN.*

Произведём теперь в разложении (1.10.1) точки N нормировку $\mu_i \nu^i = 1$. Запишем выражение для дифференциала точки N:

$$\begin{aligned} dN = (\theta + \nu^i \omega_i + \nu^i \Lambda^a_i \omega_a) N + \big(\Delta\nu^{\underline{i}} + \nu^i \nu^j \Omega_j + \omega^i\big) A_i +& \\ + \big[\Lambda^a_i \big(\delta\nu^{\underline{i}} + \nu^i \nu^j \Omega_j\big) + \nu^i \big(\Delta\Lambda^a_{\underline{i}} + \omega^a_i\big) + \omega^a\big] A_a,& \end{aligned} \tag{1.10.5}$$

где мы намеренно не использовали уравнения (1.1.6). Тогда условиями инвариантности точки N являются уравнения (1.1.6) и уравнения

$$\Delta\nu^{\underline{i}} + \nu^i\nu^j\Omega_j = \nu^i_j\omega^j. \tag{1.10.6}$$

Однако, используя уравнения (1.1.6), уже полученные для поверхности X^0_m, равенство (1.10.5) можно также записать в виде

$$dN = (\theta + \nu^i\omega_i + \nu^i\Lambda^a_i\omega_a)N + \big(\Delta\nu^{\underline{i}} + \nu^i\nu^j\Omega_j + \omega^i\big)A_i + \\ + \big[\Lambda^a_i\big(\delta\nu^{\underline{i}} + \nu^i\nu^j\Omega_j\big) + \nu^i\Lambda^a_{ij}\omega^j + \omega^a\big]A_a, \tag{1.10.5$'$}$$

а условиями инвариантности считать лишь уравнения (1.10.6).

Следовательно, для описания параллельных перенесений направления AN для дифференциала точки N есть два выражения (1.10.5), (1.10.5$'$), эквивалентных на поверхности X^0_m. Ковариантный дифференциал и ковариантные производные объекта ν^i выражаются соответственно по формулам

$$\nabla\nu^i = d\nu^i + \nu^j\tilde{\Omega}^i_j - \nu^i\nu^j\tilde{\Omega}_j, \quad \nabla_j\nu^i = \nu^i_j - \nu^k(\Pi^i_{kj} - \nu^i\Pi_{kj}),$$

а внешний дифференциал ковариантного дифференциала имеет вид

$$D\nabla\nu^i = \nabla\nu^j \wedge \tilde{\Omega}^i_j + \tilde{\Omega}_j \wedge (\nu^j\nabla\nu^i + \nu^i\nabla\nu^j) + \\ + \nabla\Lambda^a_j \wedge (\tilde{\omega}^i_a - \nu^i\tilde{\omega}_a)\nu^j + (\ldots)^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k.$$

Опишем параллельные перенесения касательного направления AN в различных связностях и установим условия, при которых формулы (1.10.5), (1.10.5$'$) приводят к одному и тому же параллельному перенесению.

1. Относительно связности $\overset{1}{\Gamma} = \Big\{\overset{0}{\Gamma}{}^I_{Ji}, \overset{1}{\Gamma}_{Ii}\Big\}$ и протосвязности $\overset{1}{\Pi} = \Big\{\overset{0}{\Pi}{}^i_{jk}, \overset{1}{\Pi}_{ij}\Big\}$ первого типа формулы (1.10.5), (1.10.5$'$) принимают вид

$$dN = (\ldots)N + \overset{1}{\nabla}\nu^i T_i + \nu^i\overset{0}{\nabla}\Lambda^a_i A_a, \tag{1.10.7}$$

$$dN = (\ldots)N + \overset{1}{\nabla}\nu^i T_i + \nu^i\Lambda^a_{ij}\omega^j A_a. \tag{1.10.7$'$}$$

Первое перенесение задаётся системой

$$\overset{1}{\nabla}\nu^i\big|_\rho = 0, \quad \overset{0}{\nabla}\Lambda^a_i\big|_\rho = 0,$$

которая приводит к системе линейных однородных уравнений

$$(\delta^i_j + \nu^i_j)\rho^j = 0, \quad \Lambda^a_{ij}\rho^j = 0. \tag{1.10.8}$$

Таким образом, если рассматривать на поверхности X^0_m только асимптотические линии вида (1.10.8$_2$), то уравнения (1.10.8$_1$) выделяют среди них те линии, вдоль которых происходит вырожденное первого типа параллельное перенесение направления AN (одно и то же независимо от выбора формулы (1.10.5) или (1.10.5$'$)). В первом случае (1.10.5), (1.10.7) оно является геометрической характеристикой связности $\overset{1}{\Gamma} = \left\{\overset{0}{\Gamma}{}^I_{Ji}, \overset{1}{\Gamma}_{Ii}\right\}$, во втором (1.10.5′), (1.10.7′) — протосвязности $\overset{1}{\Pi} = \left\{\overset{0}{\Pi}{}^i_{jk}, \overset{1}{\Pi}_{ij}\right\}$.

2. Относительно связности $\overset{2}{\Gamma} = \left\{\overset{0}{\Gamma}{}^I_{Ji}, \overset{2}{\Gamma}_{Ii}\right\}$ и протосвязности $\overset{2}{\Pi} = \left\{\overset{0}{\Pi}{}^i_{jk}, \overset{2}{\Pi}_{ij}\right\}$ второго типа формулы (1.10.5), (1.10.5′) принимают вид

$$dN = (\ldots)N + \overset{2}{\nabla}\nu^i T_i + \nu^i \overset{0}{\nabla}\Lambda^a_i Aa + (\nu^j \mu_{ji} + \mu_i)\omega^i A, \tag{1.10.9}$$

$$dN = (\ldots)N + \overset{2}{\nabla}\nu^i T_i + \nu^i \Lambda^a_{ij}\omega^j A_a + (\nu^j \mu_{ji} + \mu_i)\omega^i A. \tag{1.10.9′}$$

Аналогично пункту 1 заключаем, что если среди всех линий на поверхности рассматривать только асимптотические вида (1.10.8$_2$), то формулы (1.10.5), (1.10.9), (1.10.5′), (1.10.9′) приводят к одному и тому же параллельному перенесению касательной прямой AN, которое происходит при смещении точки N по прямой AN и является геометрической характеристикой как связности $\overset{2}{\Gamma} = \left\{\overset{0}{\Gamma}{}^I_{Ji}, \overset{2}{\Gamma}_{Ii}\right\}$, так и протосвязности $\overset{2}{\Pi} = \left\{\overset{0}{\Pi}{}^i_{jk}, \overset{2}{\Pi}_{ij}\right\}$.

Вывод 1.10.1. Центропроективные связность и протосвязность первого (второго) типа имеют одну и ту же геометрическую интерпретацию вдоль асимптотических линий вида (1.10.8$_2$).

2. Поверхность проективного пространства как многообразие касательных плоскостей

2.1. Расслоения, ассоциированные с поверхностью

В проективном пространстве P_n рассмотрим m-поверхность X_m $(1 \leqslant m < n)$ как многообразие касательных плоскостей, т. е. в репере первого порядка. Произведём специализацию подвижного репера $R = \{A, A_I\}$, помещая вершины A, A_i в касательную плоскость T_m, причём A — в её центр. Обозначим полученный репер R^1, а поверхность — X^1_m.

Замечание 2.1.1. Г. Ф. Лаптев отмечал [7], что при отнесении поверхности аффинного пространства к реперу первого порядка мы фактически рассматриваем поверхность не как место точек, а как место касательных плоскостей с зафиксированными в них точками касания. Таким образом, поверхность X^1_m рассматривается как многообразие центрированных касательных плоскостей.

Разобьём значения индекса I следующим образом:

$$I = (i, a)\colon\ i, \ldots = 1, \ldots, m,\ a, \ldots = m+1, \ldots, n.$$

Запишем подробно деривационные формулы (1.1.1) подвижного репера:

$$
\begin{gathered}
dA = \theta A + \omega^i A_i + \omega^a A_a,\\
dA_i = \theta A_i + \omega_i A + \omega_i^j A_j + \omega_i^a A_a, \quad dA_a = \theta A_a + \omega_a A + \omega_a^i A_i + \omega_a^b A_b.
\end{gathered}
\tag{2.1.1}
$$

Из них следуют уравнения стационарности центрированной касательной плоскости T_m:

$$\omega^i = 0, \quad \omega^a = 0, \quad \omega_i^a = 0.$$

Выбирая формы ω^i в качестве базисных, запишем систему уравнений поверхности X_m^1 в полученном репере R^1 следующим образом:

$$\omega^a = 0, \quad \omega_i^a = \Lambda_{ij}^a \omega^j \tag{2.1.2}$$

(мы учли, что первая дифференциальная окрестность точки A принадлежит плоскости T_m).

Замечание 2.1.2. Уравнения (2.1.2) можно также получить из уравнений (1.1.6) при условии $\Lambda_i^a = 0$.

Замыкание первой подсистемы системы (2.1.2) даёт

$$\Lambda_{ij}^a = \Lambda_{ji}^a. \tag{2.1.3}$$

Продолжая вторую подсистему системы (2.1.2), получим

$$\Delta\Lambda_{ij}^a = \Lambda_{ijk}^a \omega^k \quad (\Lambda_{ijk}^a = \Lambda_{ikj}^a). \tag{2.1.4}$$

Исходя из (2.1.3), (2.1.4), заключаем, что Λ_{ijk}^a симметричен по всем нижним индексам.

Дифференциальный оператор Δ действует по правилу

$$\Delta\Lambda_{ij}^a = d\Lambda_{ij}^a + \Lambda_{ij}^b \omega_b^a - \Lambda_{kj}^a \omega_i^k - \Lambda_{ik}^a \omega_j^k$$

и удовлетворяет свойствам

$$\Delta(\Lambda + M) = \Delta\Lambda + \Delta M, \quad \Delta(\Lambda M) = M\Delta\Lambda + \Lambda\Delta M, \quad \Delta(\alpha\Lambda) = \alpha\Delta\Lambda,$$

где Λ, M — функции, $\alpha = \mathrm{const}$.

Из структурных уравнений (1.1.2) группы $\mathrm{GP}(n)$ и уравнений (2.1.2) поверхности X_m^1 следует, что с последней ассоциируется главное расслоение $G(X_m^1)$, базой которого является сама поверхность X_m^1, а типовым слоем — подгруппа стационарности $G \subset \mathrm{GP}(n)$ центрированной плоскости T_m. Структурные уравнения этого расслоения $G(X_m^1)$ имеют вид [34]

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i, \tag{2.1.5}$$

$$D\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \omega^k \wedge \omega_{jk}^i, \tag{2.1.6}$$

$$D\omega_i = \omega_i^j \wedge \omega_j + \omega^j \wedge \omega_{ij}, \tag{2.1.7}$$

$$D\omega_b^a = \omega_b^c \wedge \omega_c^a + \omega^i \wedge \omega_{bi}^a, \tag{2.1.8}$$

$$D\omega_a^i = \omega_a^j \wedge \omega_j^i + \omega_a^b \wedge \omega_b^i + \omega^j \wedge \omega_{aj}^i, \tag{2.1.9}$$

$$D\omega_a = \omega_a^i \wedge \omega_i + \omega_a^b \wedge \omega_b,$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \omega^i_{jk} = \Lambda^a_{jk}\omega^i_a - \delta^i_j\omega_k - \delta^i_k\omega_j, \quad \omega_{ij} = \Lambda^a_{ij}\omega_a, \\ \omega^a_{bi} = -\Lambda^a_{ij}\omega^j_b - \delta^a_b\omega_i, \quad \omega^i_{aj} = -\delta^i_j\omega_a. \end{aligned} \tag{2.1.10}$$

Теорема 2.1.1. *Ассоциированное расслоение* $G(X^1_m)$ *содержит четыре главных подрасслоения с базой* X^1_m:

1) *расслоение касательных линейных реперов* $L(X^1_m)$ *со структурными уравнениями* (2.1.5), (2.1.6) *и типовым слоем — линейной группой* $L = \mathrm{GL}(m)$, *действующей в связке касательных прямых*;
2) *расслоение коаффинных реперов* $A^*(X^1_m)$ *со структурными уравнениями* (2.1.5)—(2.1.7), *типовой слой которого — коаффинная* (*центропроективная*) *группа* $A^* = GA^*(m) \supset L$, *действующая в центрированной касательной плоскости* T_m;
3) *расслоение двойственных линейных реперов* $L^*(X^1_m)$ *со структурными уравнениями* (2.1.5), (2.1.8), *типовым слоем которого является линейная фактор-группа* $L^* = \mathrm{GL}(n-m)$, *действующая во множестве нормальных прямых и в пучке гиперплоскостей с осью* T_m;
4) *расслоение* $H(X^1_m)$ *со структурными уравнениями* (2.1.5), (2.1.6), (2.1.8), (2.1.9), *типовой слой которого — группа Ли* $H \subset G$, *действующая во множестве всех направлений, исходящих из точки* A, *и в связке гиперплоскостей с центром* A.

Доказательство. Из формул (2.1.1) с учётом уравнений поверхности (2.1.2) при фиксации плоскости T_m получим

$$\delta A = \vartheta A, \quad \delta A_i = \vartheta A_i + \pi^j_i A_j + \pi_i A, \tag{2.1.11}$$

$$\delta A_a = \vartheta A_a + \pi_a A + \pi^i_a A_i + \pi^b_a A_b, \tag{2.1.12}$$

где

$$\delta = d|_{\omega^i=0}, \quad \vartheta = \theta|_{\omega^i=0}, \quad \pi = \omega|_{\omega^i=0}.$$

Из (2.1.11) видно, что во множестве касательных прямых действует группа L со структурными формами π^j_i, в центрированной касательной плоскости T_m действует группа A^* со структурными формами π^j_i, π_j. Из (2.1.12) следует, что группа L^* со структурными формами π^b_a действует во множестве прямых, не принадлежащих касательной плоскости, т. е. во множестве нормальных прямых.

Покажем двойственный характер действия подгрупп L^* и H. Рассмотрим произвольную точку $M = A + x^I A_I$ пространства P_n. Зададим гиперплоскость, проходящую через точку A, уравнением

$$\xi_I x^I = 0. \tag{2.1.13}$$

Уравнения инвариантности гиперплоскости (2.1.13) имеют вид

$$\delta\xi_I - \xi_J \pi^J_I = \Omega\xi_I.$$

Запишем их подробнее:

$$\delta\xi_i = \Omega\xi_i + \xi_j\pi_i^j, \qquad (2.1.14)$$

$$\delta\xi_a = \Omega\xi_a + \xi_b\pi_a^b + \xi_i\pi_a^i. \qquad (2.1.15)$$

Из уравнений (2.1.14), (2.1.15) следует, что в связке гиперплоскостей с центром A действует группа H со структурными формами π_i^j, π_a^b, π_a^i. Уравнения (2.1.14) показывают, что функции ξ_i образуют тензор, поэтому равенства $\xi_i = 0$ имеют инвариантный смысл, состоящий в том, что гиперплоскость (2.1.13) содержит касательную плоскость T_m. В этом случае уравнения (2.1.13), (2.1.15) упростятся:

$$\xi_a x^a = 0, \quad \delta\xi_a = \Omega\xi_a + \xi_b\pi_a^b.$$

Следовательно, линейная группа L^* со структурными формами π_a^b действует в пучке гиперплоскостей с осью T_m. □

2.2. Расслоение голономных линейных реперов

Найдём структурные уравнения для форм $\Omega^i_{j_1\dots j_p}$, $\Omega^a_{bi_1\dots i_p}$. Уравнения (2.1.6), (2.1.8), (2.1.10) имеют такое же строение, как и уравнения (1.1.12), (1.1.13). Заменяя формы Ω в уравнениях (1.1.16), (1.1.17) на формы ω с соответствующими индексами, получим структурные уравнения для форм $\Omega^i_{j_1\dots j_p}$, $\Omega^a_{bi_1\dots i_p}$ [8]:

$$D\omega^i_{j_1\dots j_p} = \sum_{s=1}^{p} C_p^s \omega^k_{(j_1\dots j_s} \wedge \omega^i_{j_{s+1}\dots j_p)k} + \omega^k \wedge \omega^i_{j_1\dots j_p k},$$

$$D\Omega^a_{bi_1\dots i_p} = \sum_{s=1}^{p} C_p^s \big(\omega^c_{b(i_1\dots i_s} \wedge \omega^a_{|c|i_{s+1}\dots i_p)} - \omega^a_{bj(i_1\dots i_s} \wedge \omega^j_{i_{s+1}\dots i_p)}\big) +$$
$$+ \omega^c_b \wedge \omega^a_{ci_1\dots i_p} - \omega^a_{bj} \wedge \omega^j_{i_1\dots i_p} + \omega^j \wedge \Omega^a_{bi_1\dots i_p j}.$$

Дифференциальные уравнения (1.1.10) компонент фундаментального объекта порядка p поверхности X_m^0 аналогичны уравнениям (2.1.5). Из вышесказанного следует, что фундаментальный объект $\Lambda^a_{i_1\dots i_p}$ порядка p поверхности X_m^1 удовлетворяет уравнениям

$$\Delta\Lambda^a_{i_1\dots i_p} + \Lambda^b_{i_1 i_2}\omega^a_{bi_3\dots i_p} + \sum_{s=3}^{p-1} C_{p-2}^{s-2} \Lambda^b_{i_1 i_2(i_3\dots i_s}\omega^a_{|b|i_{s+1}\dots i_p)} -$$
$$- \sum_{s=1}^{p-2} C_p^s \Lambda^a_{j(i_1\dots i_s}\omega^j_{i_{s+1}\dots i_p)} + \sum_{s=3}^{p} C_{p-2}^{s-3} \Lambda^a_{j(i_p\dots i_s}\omega^j_{i_{s-1}\dots i_3)i_2 i_1} = \Lambda^a_{i_1\dots i_p j}\omega^j.$$

Дифференцируя формы ω^i_{jk} (2.1.10), получим выражение для форм ω^i_{jkl}

$$\omega^i_{jk} = \Lambda^a_{jkl}\omega^i_a - (\delta^i_l\Lambda^a_{jk} + \delta^i_k\Lambda^a_{jl} + \delta^i_j\Lambda^a_{kl})\omega_a,$$

которое аналогично выражению для форм Ω^i_{jkl}. Очевидно, формы $\Omega^i_{j_1\dots j_p}$ записываются в виде

$$\Omega^i_{j_1\ldots j_p}=\Lambda^a_{j_1\ldots j_p}\omega^i_a-\left(\delta^i_{j_1}\Lambda^a_{j_2\ldots j_p}+\delta^i_{j_p}\Lambda^a_{j_1\ldots j_{p-1}}+\sum_{s=2}^{p-1}\delta^i_{j_s}\Lambda^a_{j_1\ldots j_{s-1}j_{s+1}\ldots j_p}\right)\omega_a\quad (p\geqslant 3)$$

и являются симметричными по нижним индексам.

Вывод 2.2.1. Поверхность X^1_m проективного пространства P_n, рассматриваемая как многообразие касательных плоскостей, является голономным гладким многообразием [37].

2.3. Связность в ассоциированном расслоении

Введём в рассмотрение новую слоевую форму $\tilde{\omega}=\omega-\Gamma_i\omega^i$ с компонентами

$$\begin{gathered}\tilde{\omega}^i_j=\omega^i_j-\Gamma^i_{jk}\omega^k,\quad \tilde{\omega}_i=\omega_i-\Gamma_{ij}\omega^j,\quad \tilde{\omega}^a_b=\omega^a_v-\Gamma^a_{bi}\omega^i,\\ \tilde{\omega}^i_a=\omega^i_a-\Gamma^i_{aj}\omega^j,\quad \tilde{\omega}_a=\omega_a-\Gamma_{ai}\omega^i.\end{gathered}\tag{2.3.1}$$

Компоненты объекта связности

$$\Gamma=\{\Gamma^i_{jk},\,\Gamma_{ij},\,\Gamma^a_{bi},\,\Gamma^i_{aj},\,\Gamma_{ai}\}$$

удовлетворяют уравнениям [34]

$$\Delta\Gamma^i_{jk}+\omega^i_{jk}=\Gamma^i_{jkl}\omega^l,\tag{2.3.2}$$

$$\Delta\Gamma_{ij}+\Gamma^k_{ij}\omega_k+\omega_{ij}=\Gamma_{ijk}\omega^k,\tag{2.3.3}$$

$$\Delta\Gamma^a_{bi}+\omega^a_{bi}=\Gamma^a_{bij}\omega^j,\tag{2.3.4}$$

$$\Delta\Gamma^i_{aj}+\Gamma^b_{aj}\omega^i_b-\Gamma^i_{kj}\omega^k_a+\omega^i_{aj}=\Gamma^i_{ajk}\omega^k,\tag{2.3.5}$$

$$\Delta\Gamma_{ai}+\Gamma^j_{ai}\omega_j+\Gamma^b_{ai}\omega_b-\Gamma_{ji}\omega^j_a=\Gamma_{aij}\omega^j.\tag{2.3.6}$$

Объект Γ называется объектом фундаментально-групповой связности. Из определяющих его дифференциальных уравнений (2.3.2)—(2.3.6) следует, что объект связности содержит четыре подобъекта: объект касательной линейной связности $\Gamma_1=\{\Gamma^i_{jk}\}$, объект коаффинной (центропроективной) связности $\Gamma_2=\{\Gamma^i_{jk},\,\Gamma_{ij}\}$, объект нормальной линейной связности $\Gamma_3=\{\Gamma^a_{bi}\}$, объект $\Gamma_4=\{\Gamma^i_{jk},\,\Gamma^a_{bi},\,\Gamma^i_{aj}\}$. Эти подобъекты задают связности в указанных выше подрасслоениях.

Структурные уравнения для форм связности запишем в виде

$$\begin{gathered}D\tilde{\omega}^i_j=\tilde{\omega}^k_j\wedge\tilde{\omega}^i_k+R^i_{jkl}\omega^k\wedge\omega^l,\quad D\tilde{\omega}_i=\tilde{\omega}^j_i\wedge\tilde{\omega}_j+R_{ijk}\omega^j\wedge\omega^k,\\ D\tilde{\omega}^a_b=\tilde{\omega}_b\wedge\tilde{\omega}^a+R^a_{bij}\omega^i\wedge\omega^j,\quad D\tilde{\omega}^i_a=\tilde{\omega}^j_a\wedge\tilde{\omega}^i_j+\tilde{\omega}^b_a\wedge\tilde{\omega}^i_b+R^i_{ajk}\omega^j\wedge\omega^k,\\ D\tilde{\omega}_a=\tilde{\omega}^i_a\wedge\tilde{\omega}_i+\tilde{\omega}^b_a\wedge\tilde{\omega}_b+R_{aij}\omega^i\wedge\omega^j.\end{gathered}$$

Компоненты объекта кривизны

$$R=\{R^i_{jkl},\,R_{ijk},\,R^a_{bij},\,R^i_{ajk},\,R_{aij}\}$$

связности Γ выражаются по формулам

$$R^i_{jkl}=\Gamma^i_{j[kl]}-\Gamma^s_{j[k}\Gamma^i_{|s|l]},\quad R_{ijk}=\Gamma_{i[jk]}-\Gamma^l_{i[j}\Gamma_{|l|k]},$$
$$R^a_{bij}=\Gamma^a_{b[ij]}-\Gamma^c_{b[i}\Gamma^a_{|c|j]},\quad R^i_{ajk}=\Gamma^i_{a[jk]}-\Gamma^l_{a[j}\Gamma^i_{|l|k]}-\Gamma^b_{a[j}\Gamma^i_{|b|k]},\tag{2.3.7}$$
$$R_{aij}=\Gamma_{a[ij]}-\Gamma^k_{a[i}\Gamma_{|k|j]}-\Gamma^b_{a[i}\Gamma_{|b|j]}.$$

Продолжая уравнения (2.3.2)—(2.3.6), получим

$$\begin{gathered}\Delta\Gamma^i_{j[kl]}+\Gamma^s_{j[k}\omega^i_{l]s}-\Gamma^i_{s[k}\omega^s_{l]j}\equiv 0,\quad \Delta\Gamma_{i[jk]}-\Gamma_{l[j}\omega^l_{k]i}+\Gamma^l_{i[j}\omega_{k]l}\equiv 0,\\ \Delta\Gamma^a_{b[ij]}+\Gamma^c_{b[i}\omega^a_{|c|j]}-\Gamma^a_{c[i}\omega^c_{|b|j]}\equiv 0,\\ \Delta\Gamma^i_{a[jk]}+\Gamma^l_{a[j}\omega^i_{k]l}-\Gamma^i_{b[j}\omega^b_{|a|k]}+\Gamma^b_{a[j}\omega^i_{|b|k]}-\Gamma^i_{l[j}\omega^l_{|a|k]}\equiv 0,\\ \Delta\Gamma_{a[ij]}-\Gamma_{b[i}\omega^b_{|a|j]}+\Gamma^k_{a[i}\omega_{j]k}+\Gamma^b_{a[i}\omega_{|b|j]}-\Gamma_{k[i}\omega^k_{|a|j]}\equiv 0.\end{gathered}\tag{2.3.8}$$

Из (2.3.7), используя (2.3.2)—(2.3.6), (2.3.8), выведем уравнения на компоненты объекта кривизны R:

$$\begin{gathered}\Delta R^i_{jkl}\equiv 0,\quad \Delta R_{ijk}+R^l_{ijk}\omega_l\equiv 0,\quad \Delta R^a_{bij}\equiv 0,\\ \Delta R^i_{ajk}+R^b_{ajk}\omega^i_b-R^i_{ljk}\omega^l_a\equiv 0,\\ \Delta R_{aij}+R^k_{aij}\omega_k+R^b_{aij}\omega_b-R_{kij}\omega^k_a\equiv 0.\end{gathered}$$

Теорема 2.3.1. *Объект кривизны R является тензором и содержит четыре подтензора*: $R_1=\{R^i_{jkl}\}$, $R_2=\{R^i_{jkl},R_{ijk}\}$, $R_3=\{R^a_{bij}\}$, $R_4=\{R^i_{jkl},R^a_{bij},R^i_{ajk}\}$.

2.4. Оснащение Э. Картана, нормализация А. П. Нордена и композиционное оснащение поверхности

Произведём оснащение Э. Картана [3] поверхности X^1_m, состоящее в задании поля плоскостей C_{n-m-1}, $C_{n-m-1}\oplus T_m=P_n$. Плоскость Картана C_{n-m-1} определим точками

$$B_a=A_a+\lambda^i_aA_i+\lambda_aA.$$

Выражение для дифференциалов точек B_a имеет вид

$$dB_a=\theta B_a+(\omega^b_a+\lambda^i_a\omega^b_i)B_b+(\Delta\lambda^i_a+\omega^i_a+(\delta^i_j\lambda_a-\lambda^k_a\Lambda^b_{jk}\lambda^i_b)\omega^j)A_i+$$
$$+(\Delta\lambda_a+\lambda^i_a\omega_i+\omega_a-\lambda^j_a\Lambda^b_{ij}\lambda_b\omega^i)A.\tag{2.4.1}$$

Следовательно, инвариантность плоскости C_{n-m-1} при фиксации образующего элемента T_m поверхности X^1_m обеспечивают уравнения

$$\Delta\lambda^i_a+\omega^i_a=\lambda^i_{aj}\omega^j,\tag{2.4.2}$$
$$\Delta\lambda_a+\lambda^i_a\omega_i+\omega_a.\tag{2.4.3}$$

Продолжая уравнения (2.4.2), (2.4.3), получим

$$\begin{gathered}\Delta\lambda^i_{aj}-\lambda^i_b\omega^b_{aj}+\lambda^k_a\omega^i_{kj}+\omega^i_{aj}\equiv 0,\\ \Delta\lambda_{ai}-\lambda_b\omega^b_{ai}+\lambda^j_{ai}\omega_j+\lambda^j_a\omega_{ji}\equiv 0.\end{gathered}$$

Осуществим нормализацию А. П. Нордена [12] поверхности X_m^1, которая заключается в задании на поверхности полей двух плоскостей, называемых нормалями.

Нормаль первого рода — $(n-m)$-мерная плоскость N_{n-m}, $N_{n-m} \cap T_m = A$. Определим её системой линейных уравнений $x^i - \mu_a^i x^a = 0$, где функции μ_a^i удовлетворяют дифференциальным уравнениям $\Delta\mu_a^i + \omega_a^i = \mu_{aj}^i \omega^j$. Если $\mu_a^i = \lambda_a^i$, то нормаль N_{n-m} натянута на плоскость Картана и точку A, т. е. $N_{n-m} = C_{n-m-1} \oplus A$.

Нормаль второго рода — $(m-1)$-мерная плоскость N_{m-1}, $N_{m-1} \oplus A = T_m$, которую зададим совокупностью точек $B_i = A_i + \lambda_i A$.

Выражение для дифференциалов точек B_i преобразуем к виду

$$\begin{aligned} dB_i = \theta B_i + (\omega_i^j + \lambda_i \omega^j - \lambda_a^j + \omega^a)_i B_i + \omega_i^a B_a + \\ + (\Delta\lambda_i + \omega_i + (\Lambda_{ij}^a \lambda_a^k \lambda_k - \Lambda_{ij}^a \lambda_a - \lambda_i \lambda_j)\omega^j)A. \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Следовательно, коэффициенты λ_i удовлетворяют уравнениям

$$\Delta\lambda_i + \omega_i = \lambda_{ij}\omega^j, \quad (2.4.5)$$

продолжая которые, получим

$$\Delta\lambda_{ij} - \lambda_k \omega_{ij}^k + \omega_{ij} \equiv 0.$$

Определение 2.4.1. Композиционным оснащением [32] называется присоединение к поверхности полей плоскостей Картана и нормалей второго рода Нордена.

2.5. Индуцированные связности трёх типов

Целью раздела является описание способа нахождения охвата объектов связности фундаментальным объектом и композиционно оснащающим квазитензором. Этот способ даёт возможность получить ранее известные и новые формулы.

Теорема 2.5.1. *Композиционное оснащение индуцирует связности трёх типов в ассоциированном расслоении $G(X_m^1)$.*

Доказательство. Доказательство для первого типа. Компоненты объекта связности Γ могут быть охвачены фундаментальным объектом Λ_{ij}^a и композиционно оснащающим квазитензором λ по формулам [34]

$$\overset{0}{\Gamma}{}_{jk}^i = \Lambda_{jk}^a \lambda_a^i - \delta_j^i \lambda_k - \delta_k^i \lambda_j, \quad \overset{0}{\Gamma}{}_{bi}^a = -\Lambda_{ij}^a \lambda_b^j - \delta_b^a \lambda_i, \quad (2.5.1)$$

$$\begin{gathered} \overset{1}{\Gamma}{}_{ij} = \Lambda_{ij}^a \lambda_a - \lambda_i \lambda_j, \quad \overset{1}{\Gamma}{}_{aj}^i = \delta_j^i (\lambda_a^k \lambda_k - \lambda_a) - \lambda_b^i \Lambda_{jk}^b \lambda_a^k, \\ \overset{1}{\Gamma}{}_{ai} = \lambda_i (\lambda_a^j \lambda_j - \lambda_a) - \lambda_b \Lambda_{ij}^b \lambda_a^j. \end{gathered} \quad (2.5.2)$$

Из дифференциальных уравнений (2.3.3)—(2.3.6) компонент объекта связности Γ видно, что подобъекты Γ_{jk}^i, Γ_{bi}^a касательной и нормальной линейных связностей имеют самые простые уравнения, не содержащие других компонент объекта Г. Поэтому прежде всего найдём охваты этих подобъектов, т. е. докажем формулы (2.5.1). Уравнения (2.3.2), (2.3.4) распишем подробно с помощью обозначений (2.1.10):

$$\Delta\Gamma^i_{jk} = -\Lambda^a_{jk}\omega^i_a + \delta^i_j\omega_k + \delta^i_k\omega_j + \Gamma^i_{jkl}\omega^l, \quad \Delta\Gamma^a_{bi} = \Lambda^a_{ij}\omega^j_b + \delta^a_b\omega_i + \Gamma^a_{bij}\omega^j. \tag{2.5.3}$$

Выражая слоевые формы ω^i_a, ω_i из уравнений (2.4.2), (2.4.5) компонент оснащающего квазитензора λ_i, λ^i_a и подставляя их в (2.5.3), получим

$$\Delta\Gamma^i_{jk} = \Lambda^a_{jk}\Delta\lambda^i_a - \delta^i_j\Delta\lambda_k - \delta^i_k\Delta\lambda_j + (\Gamma^i_{jkl} - \Lambda^a_{jk}\lambda^i_{al} + \delta^i_j\lambda_{kl} + \delta^i_k\lambda_{jl})\omega^l,$$
$$\Delta\Gamma^a_{bi} = -\Lambda^a_{ij}\Delta\lambda^j_b - \delta^a_b\Delta\lambda_i + (\Gamma^a_{bij} + \Lambda^a_{ik}\lambda^k_{bj} + \delta^a_b\lambda_{ij})\omega^j.$$

Так как $\Delta\Lambda^a_{ij} \equiv 0$, то, используя свойства дифференциального оператора Δ, последние равенства перепишем в виде

$$\Delta\Gamma^i_{jk} = \Delta(\Lambda^a_{jk}\lambda^i_a - \delta^i_j\lambda_k - \delta^i_k\lambda_j) + (\Gamma^i_{jkl} - \Lambda^a_{jk}\lambda^i_{al} + \delta^i_j\lambda_{kl} + \delta^i_k\lambda_{jl})\omega^l,$$
$$\Delta\Gamma^a_{bi} = \Delta(-\Lambda^a_{ij}\lambda^j_b - \delta^a_b\lambda_i) + (\Gamma^a_{bij} + \Lambda^a_{ik}\lambda^k_{bj} + \delta^a_b\lambda_{ij})\omega^j.$$

Предполагая равенство выражений, стоящих под знаком оператора Δ слева и справа, получаем формулы (2.5.1). Из линейной независимости базисных форм ω^i следуют формулы охватов пфаффовых производных Γ^i_{jkl}, Γ^a_{bij} объектов линейных связностей

$$\Gamma^i_{jkl} = \Lambda^a_{jk}\lambda^i_{al} - \delta^i_j\lambda_{kl} - \delta^i_k\lambda_{jl}, \quad \Gamma^a_{bij} = -\Lambda^a_{ik}\lambda^k_{bj} - \delta^a_b\lambda_{ij}. \tag{2.5.4}$$

Исходя из дифференциальных уравнений (2.3.3), (2.3.5) для Γ_{ij}, Γ^i_{aj} в обозначениях (2.1.10), уже полученных охватов (2.5.1) для объектов Γ^i_{jk}, Γ^a_{bi} и уравнений (2.4.2), (2.4.3), (2.4.5) для компонент оснащающего квазитензора, можно доказать формулы ($2.5.2_1$), ($2.5.2_2$). И наконец, аналогичным образом можно доказать формулу ($2.5.2_3$), используя охваты компонент Γ^a_{bi}, Γ_{ij}, Γ^i_{aj} и уравнения (2.3.6), (2.4.2), (2.4.3), (2.4.5). Одновременно находятся охваты для пфаффовых производных нелинейных компонент объекта связности Г, которые, как видно из (2.5.1), (2.5.4), можно получить непосредственно из (2.5.1), (2.5.2). Поэтому для доказательства (2.5.2) достаточно использовать сравнения на компоненты объекта связности (2.3.3), (2.3.5), (2.3.6) и компоненты оснащающего квазитензора (2.4.2), (2.4.3), (2.4.5).

Доказательство для второго типа. Фундаментальный объект Λ^a_{ij}, оснащающий квазитензор λ и его пфаффовы производные $\{\lambda_{ij}, \lambda^i_{aj}, \lambda_{ai}\}$ охватывают компоненты объекта Г по формулам (2.5.1) и [34]

$$\overset{2}{\Gamma}_{ij} = \lambda_{ij} + \Lambda^a_{ij}\lambda^k_a\lambda_k - 2\lambda_i\lambda_j, \quad \overset{2}{\Gamma}{}^i_{aj} = \lambda^i_{jk} + \lambda^k_a(\delta^i_j\lambda_k - 2\lambda^i_b\Lambda^b_{jk}), \tag{2.5.5}$$

$$\overset{2}{\Gamma}_{ai} = \lambda_{ai} - \lambda^j_a\lambda_{ji} - \lambda_a\lambda_i + 2\lambda_i\lambda^j_a\lambda_j - \Lambda^b_{ij}\lambda^j_a(\lambda_b + \lambda^k_b\lambda_k). \tag{2.5.6}$$

Доказательство для третьего типа. Аналогично можно доказать, что фундаментальный тензор Λ^a_{ij} и нормализующие квазитензоры λ^i_a, λ_i вместе с их пфаффовыми производными позволяют охватить компоненты объекта Γ по формулам (2.5.1), (2.5.5) и

$$\overset{3}{\Gamma}_{ai} = \lambda^j_{ai}\lambda_j - \lambda^j_a\lambda_{ji} + 2\lambda^j_a(\lambda_i\lambda_j - \Lambda^b_{ij}\lambda^k_b\lambda_k). \tag{2.5.7}$$

Теорема доказана. □

Определение 2.5.1. Будем говорить, что объект связности Γ имеет первый (второй, третий) тип $\overset{1}{\Gamma}$ ($\overset{2}{\Gamma}$, $\overset{3}{\Gamma}$), если его компоненты охвачены по формулам (2.5.1), (2.5.2) ((2.5.1), (2.5.5), (2.5.6); (2.5.1), (2.5.5), (2.5.7)) соответственно, т. е.

$$\overset{1}{\Gamma} = \Big\{\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jk},\, \overset{1}{\Gamma}_{ij},\, \overset{0}{\Gamma}{}^a_{bi},\, \overset{1}{\Gamma}{}^i_{aj},\, \overset{1}{\Gamma}_{ai}\Big\}, \quad \overset{2}{\Gamma} = \Big\{\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jk},\, \overset{2}{\Gamma}_{ij},\, \overset{0}{\Gamma}{}^a_{bi},\, \overset{2}{\Gamma}{}^i_{aj},\, \overset{2}{\Gamma}_{ai}\Big\},$$
$$\overset{3}{\Gamma} = \Big\{\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jk},\, \overset{2}{\Gamma}_{ij},\, \overset{0}{\Gamma}{}^a_{bi},\, \overset{2}{\Gamma}{}^i_{aj},\, \overset{3}{\Gamma}_{ai}\Big\}.$$

Замечание 2.5.1. Индуцированные касательная линейная связность $\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jk}$ и двойственная ей нормальная линейная связность $\overset{0}{\Gamma}{}^a_{bi}$ не зависят от типа групповой связности.

2.6. Тензоры деформации

Рассматривая разности между компонентами объектов связностей трёх типов, введём тензоры деформации

$$\overset{1}{D} = \Big\{D_{ij},\, D^i_{aj},\, \overset{1}{D}_{ai}\Big\}, \quad \overset{2}{D} = \Big\{D_{ij},\, D^i_{aj},\, \overset{2}{D}_{ai}\Big\}, \quad \overset{3}{D} = \Big\{\overset{3}{D}_{ai}\Big\}$$

с компонентами

$$\begin{gathered} D_{ij} = \overset{2}{\Gamma}_{ij} - \overset{1}{\Gamma}_{ij} = \lambda_{ij} + \Lambda^a_{ij}(\lambda^k_a\lambda_k - \lambda_a) - \lambda_i\lambda_j, \\ D^i_{aj} = \overset{2}{\Gamma}{}^i_{aj} - \overset{1}{\Gamma}{}^i_{aj} = \lambda^i_{aj} + \delta^i_j\lambda_a - \lambda^i_b\Lambda^b_{jk}\lambda^k_a, \\ \overset{1}{D}_{ai} = \overset{2}{\Gamma}_{ai} - \overset{1}{\Gamma}_{ai} = \hat{D}_{ai} - D_{ji}\lambda^j_a, \quad \overset{2}{D}_{ai} = \overset{3}{\Gamma}_{ai} - \overset{1}{\Gamma}_{ai} = D^j_{ai}\lambda_j - D_{ji}\lambda^j_a, \\ \overset{3}{D}_{ai} = \overset{3}{\Gamma}_{ai} - \overset{2}{\Gamma}_{ai} = D^j_{ai}\lambda_j - \hat{D}_{ai}, \end{gathered} \tag{2.6.1}$$

где $\hat{D}_{ai} = \lambda_{ai} - \lambda_b\Lambda^b_{ij}\lambda^j_a$. Объект $\hat{D}_{ai}$ является линейной комбинацией объектов деформаций, так как его можно представить в виде

$$\hat{D}_{ai} = D^j_{ai}\lambda_j + \frac{1}{2}\Big(\overset{1}{D}_{ai} - \overset{2}{D}_{ai} - \overset{3}{D}_{ai}\Big),$$

поэтому отнесём его к объектам деформации. Компоненты объектов деформаций удовлетворяют сравнениям

$$\Delta D_{ij} \equiv 0, \quad \Delta D^i_{aj} \equiv 0, \quad \Delta\hat{D}_{ai} + D^j_{ai}\omega_j \equiv 0,$$
$$\Delta\overset{1}{D}_{ai} + D^j_{ai}\omega_j - D_{ji}\omega^j_a \equiv 0, \quad \Delta\overset{2}{D}_{ai} + D^j_{ai}\omega_j - D_{ji}\omega^j_a \equiv 0, \quad \Delta\overset{3}{D}_{ai} \equiv 0.$$

Из этих сравнений видно, что тензоры деформации $\overset{1}{D}$, $\overset{2}{D}$ содержат два подтензора D_{ij} и D^j_{ai}, которые являются тензорами деформации центропроективной связности $\Gamma_2 = \{\Gamma^i_{jk}, \Gamma_{ij}\}$ и связности $\Gamma_4 = \{\Gamma^i_{jk}, \Gamma^a_{bi}, \Gamma^i_{aj}\}$.

Объект деформации $\overset{1}{D}$ ($\overset{2}{D}$, $\overset{3}{D}$) является тензором, поэтому обращение его в нуль имеет инвариантный смысл, состоящий в том, что связности первого и второго (первого и третьего, второго и третьего) типов совпадают. Равенства нулю объектов $\overset{1}{D}$, $\overset{2}{D}$, $\overset{3}{D}$ эквивалентны соответственно следующим:

$$D_{ij} = 0, \quad D^i_{aj} = 0, \quad \hat{D}_{ai} = 0, \tag{2.6.2}$$

$$D_{ij} = 0, \quad D^i_{aj} = 0, \tag{2.6.3}$$

$$D^j_{ai}\lambda_j - \hat{D}_{ai} = 0. \tag{2.6.4}$$

Запишем (2.6.2) подробнее:

$$\lambda_{ij} = \lambda_i\lambda_j + \Lambda^a_{ij}(\lambda_a - \lambda^k_a\lambda_k), \quad \lambda^i_{aj} = \lambda^i_b\Lambda^b_{jk}\lambda^k_a - \delta^i_j\lambda_a, \quad \lambda_{ai} = \lambda_b\Lambda^b_{ij}\lambda^j_a. \tag{2.6.5}$$

Равенства (2.6.2) ((2.6.3), (2.6.4)) являются необходимыми и достаточными условиями совпадения первого и второго (соответственно первого и третьего, второго и третьего) охватов компонент объекта связности Г. Связности всех трёх типов совпадают тогда и только тогда, когда выполняются условия (2.6.2). Найдём геометрический смысл равенств (2.6.2)—(2.6.4) и каждого из равенств (2.6.3). Для этого запишем выражения (2.4.1), (2.4.4) дифференциалов точек B_i, B_a, используя уравнения (2.4.2), (2.4.3), (2.4.5) и обозначения (2.6.1):

$$dB_i = (\delta^j_i\theta + \omega^j_i + \lambda_i\omega^j - \lambda^j_a\omega^a_i)B_i + \omega^a_i B_a + D_{ij}\omega^j A, \tag{2.6.6}$$

$$dB_a = (\delta^j_i\theta + \omega^b_a + \lambda^i_a\omega^b_i)B_b + D^i_{aj}\omega^j B_i - (D^j_{ai}\lambda_j - \hat{D}_{ai})\omega^i A. \tag{2.6.7}$$

На основании выражений (2.6.6), (2.6.7) справедливы следующие определение и теоремы.

Определение 2.6.1. Гиперплоскость $P_{n-1} = N_{m-1} \oplus C_{n-m-1}$, натянутую на нормаль второго рода Нордена и плоскость Картана, назовём гиперплоскостью Бортолотти.

Теорема 2.6.1. *Для того чтобы нормаль второго рода N_{m-1} смещалась в гиперплоскости Бортолотти $P_{n-1} = [B_i, B_a]$, а плоскость Картана C_{n-m-1} — в нормали первого рода $N_{n-m} = [A, B_a]$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соответственно условия $D_{ij} = 0$, $D^i_{aj} = 0$, т. е. обращались в нуль тензоры деформации центропроективной связности $\Gamma_2 = \{\Gamma^i_{jk}, \Gamma_{ij}\}$ и связности $\Gamma_4 = \{\Gamma^i_{jk}, \Gamma^a_{bi}, \Gamma^i_{aj}\}$ соответственно.*

Теорема 2.6.2. *Если плоскость Картана C_{n-m-1} смещается в нормали первого рода N_{n-m}, то нормализация первого рода Нордена порождает оснащение Картана, совпадающее с исходным.*

Доказательство. Аналитическими условиями, ограничивающими смещения плоскости C_{n-m-1} до смещений её в нормали N_{n-m}, являются условия $D^i_{aj} = 0$

или (2.6.5$_2$), из которых следует формула охвата объекта λ_a с помощью объекта λ_a^i, задающего N_{n-m}, его пфаффовых производных и фундаментального тензора [29]

$$\lambda_a = \frac{1}{m}(\lambda_b^i \Lambda_{ij}^b \lambda_a^j - \lambda_{ai}^i). \qquad \square$$

Теорема 2.6.3. *Связности всех типов совпадают тогда и только тогда, когда нормаль второго рода N_{m-1} смещается в гиперплоскости Бортолотти P_{n-1}, а плоскость Картана C_{n-m-1} неподвижна, т. е. гиперплоскость Бортолотти P_{n-1} неподвижна.*

Замечание 2.6.1. Полученная теорема 2.6.3 совпадает с теоремой 1.5.1.

Теорема 2.6.4. *Связности первого и третьего типов совпадают тогда и только тогда, когда нормаль второго рода N_{m-1} смещается в гиперплоскости P_{n-1}, а плоскость C_{n-m-1} — в нормали первого рода N_{n-m}.*

Доказательство следует из формул (2.6.3), (2.6.6), (2.6.7). □

Теорема 2.6.5. *Связности второго и третьего типов совпадают тогда и только тогда, когда плоскость C_{n-m-1} смещается в гиперплоскости P_{n-1}.*

Доказательство следует из формул (2.6.3), (2.6.7). □

2.7. О неподвижности гиперплоскости Бортолотти

Выясним значение неподвижности гиперплоскости Бортолотти $P_{n-1} = N_{m-1} \oplus C_{n-m-1}$ для объектов кривизны индуцированных связностей.

Как следует из формул (2.5.1), (2.5.2) для охватов компонент объекта $\overset{1}{\Gamma}$, альтернированные пфаффовы производные компонент объекта связности первого типа $\overset{1}{\Gamma}$ выражаются по формулам

$$\begin{gathered}
\Gamma^i_{j[kl]} = \Lambda^a_{j[k}\lambda^i_{|a|l]} - \delta^i_{[k}\lambda_{|j|l]}, \quad \Gamma^a_{b[ij]} = -\Lambda^a_{k[i}\lambda^k_{|b|j]}, \quad \Gamma_{i[jk]} = \Lambda^a_{i[j}\lambda_{|a|k]} - \lambda_{i[k}\lambda_{j]}, \\
\Gamma^i_{a[jk]} = \delta^i_{[j}(\lambda^l_{|a|k]}\lambda_l + \lambda^l_a\lambda_{|l|k]} - \lambda_{|a|k]}) - \Lambda^b_{l[j}(\lambda^l_{|a|k]}\lambda^i_b + \lambda^l_a\lambda^i_{|b|k]}), \\
\Gamma_{a[ij]} = \lambda^k_{a[j}(\lambda_{i]}\lambda_k - \Lambda^b_{i]k}\lambda_b) + \lambda^k_a\lambda_{[i}\lambda|k|j - \lambda^k_a\Lambda^b_{k[i}\lambda_{|b|j} - \lambda_{a[j}\lambda_{i]}.
\end{gathered} \tag{2.7.1}$$

Если выполняются соотношения (2.6.5), т. е. гиперплоскость Бортолотти P_{n-1} неподвижна, то формулы (2.7.1) принимают вид

$$\begin{gathered}
\Gamma^i_{j[kl]} = \Lambda^a_{j[k}\Lambda^b_{l]q}\lambda^i_b\lambda^q_a + \delta^i_{[k}(\Lambda^a_{l]j}\lambda^q_a\lambda_q - \lambda_{l]}\lambda_j), \quad \Gamma^a_{b[ij]} = -\Lambda^a_{k[i}\Lambda^c_{j]l}\lambda^k_c\lambda^l_b, \\
\Gamma_{i[jk]} = \Lambda^a_{i[j}\Lambda^b_{k]l}\lambda^l_a\lambda_b + \lambda_{[j}\Lambda^a_{k]i}(\lambda^l_a\lambda_l - \lambda_a), \\
\Gamma^i_{a[jk]} = \delta^i_{[j}(\lambda_{k]}(\lambda^l_a\lambda_l - \lambda_a) - \Lambda^b_{k]l}\lambda^l_a\lambda_b), \quad \Gamma_{a[ij]} = 0.
\end{gathered} \tag{2.7.2}$$

Подставляя (2.7.2) в выражения (2.3.7) компонент объекта кривизны индуцированной связности первого типа, обнаруживаем, что $\overset{1}{R} = 0$. Обратное, вообще говоря, неверно. Приравнивая $\overset{1}{R}$ к нулю, получаем, что пфаффовы производные компонент объекта связности $\overset{1}{\Gamma}$ должны выражаться по формулам (2.7.2), которые не имеют места при выполнении условий (2.6.5). Если $m = 1$, т. е. в случае кривой X_1, как видно из (2.3.7), кривизна $\overset{1}{R}$ равна нулю. Если выполняются условия (2.6.5), то по теореме 2.6.2 все типы связностей совпадают, поэтому для всех трёх типов связностей справедлива следующая теорема.

Теорема 2.7.1. *Если гиперплоскость Бортолотти $P_{n-1} = N_{m-1} \oplus C_{n-m-1}$ неподвижна, то кривизна R индуцированной групповой связности Γ равна нулю.*

Замечание 2.7.1. Для поверхности X_m^0 справедлива и обратная теорема 1.5.2.

Следствие 2.7.1. *Если плоскость Картана C_{n-m-1} смещается лишь в нормали первого рода N_{n-m}, то кривизна индуцированной нормальной линейной связности равна нулю*: $\overset{0}{R}{}^a_{bij} = 0$.

Замечание 2.7.2. Если $m = 1$, то кривизна R групповой связности Γ равна нулю.

Пусть кривизна $\overset{1}{R} = \left\{\overset{0}{R}{}^i_{jkl} \overset{0}{R}{}^a_{bij}, \overset{1}{R}{}^i_{ajk}\right\}$ индуцированной связности $\overset{1}{\Gamma}_4 = \left\{\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jk}, \overset{0}{\Gamma}{}^a_{bi}, \overset{1}{\Gamma}{}^i_{aj}\right\}$ равна нулю, а плоскость Картана C_{n-m-1} смещается лишь в нормали первого рода N_{n-m}, т. е. $D^i_{aj} = 0$, или, что то же самое, связности Γ_4 двух типов совпадают. Тогда для компонент $\Gamma^i_{j[kl]}$ и $\Gamma^i_{a[jk]}$ совпадающие выражения (2.7.1) и (2.7.2) принимают вид

$$\delta^i_{[l}(\lambda_{|j|k]} + \Lambda^a_{k]j}(\lambda^p_a\lambda_p - \lambda_a) - \lambda_{k]}\lambda_j) = 0, \quad \delta^i_{[j}(\lambda_{|a|k]} - \lambda_b\Lambda^b_{k]l}\lambda^l_a) = 0.$$

Тогда $D_{jk} = 0$, $\hat{D}_{ak} = 0$, т. е. плоскость Бортолотти неподвижна. Следовательно, связности Γ всех типов совпадают и кривизна R равна нулю.

Теорема 2.7.2. *Если плоскость C_{n-m-1} смещается в нормали N_{n-m} (т. е. связности $\Gamma_4 = \{\Gamma^i_{jk}, \Gamma^a_{bi}, \Gamma^i_{aj}\}$ двух типов совпадают) и $R_4 = 0$, то $R = 0$.*

Замечание 2.7.3. Данная теорема аналогична теореме 1.5.3.

2.8. Тензор параллельности

В расслоении $G(X_m^1)$ задано поле композиционно оснащающего квазитензора $\lambda = \{\lambda^i_a, \lambda_a, \lambda_i\}$

$$\Delta\lambda_i + \omega_i = \lambda_{ij}\omega^j, \quad \Delta\lambda^i_a + \omega^i_a = \lambda^i_{aj}\omega^j, \quad \Delta\lambda_a + \lambda^i_a\omega_i + \omega_a = \lambda_{ai}\omega^i.$$

Вводя в эти уравнения формы связности (2.3.1), получим

$$\nabla\lambda_i = \nabla_j\lambda_i\omega^j, \quad \nabla\lambda^i_a = \nabla_j\lambda^i_a\omega^j, \quad \nabla\lambda_a = \nabla_i\lambda_a\omega^i.$$

Выражения

$$\nabla\lambda_i = d\lambda_i - \lambda_j\tilde{\omega}_i^j + \tilde{\omega}_i, \quad \nabla\lambda_a^i = d\lambda_a^i + \lambda_a^j\tilde{\omega}_j^i - \lambda_b^i\tilde{\omega}_a^b + \tilde{\omega}_a^i,$$
$$\nabla\lambda_a = d\lambda_a - \lambda_b\tilde{\omega}_a^b + \lambda_a^i\tilde{\omega}_i + \tilde{\omega}_a \tag{2.8.1}$$

называются ковариантными дифференциалами, а выражения

$$\nabla_j\lambda_i = \lambda_{ij} + \lambda_k\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ij}, \quad \nabla_j\lambda_a^i = \lambda_{aj}^i + \lambda_b^i\Gamma_{aj}^b - \lambda_a^k\Gamma_{kj}^i - \Gamma_{aj}^i,$$
$$\nabla_i\lambda_a = \lambda_{ai} + \lambda_b\Gamma_{ai}^b - \lambda_a^j\Gamma_{ji} - \Gamma_{ai} \,— \tag{2.8.2}$$

ковариантными производными компонент объекта λ относительно групповой связности Γ.

Внешние дифференциалы от ковариантных дифференциалов (2.8.1) имеют вид

$$D\nabla\lambda_i = -\nabla\lambda_j\wedge\tilde{\omega}_i^j + M_{ijk}\omega^j\wedge\omega^k,$$
$$D\nabla\lambda_a^i = \nabla\lambda_a^j\wedge\tilde{\omega}_j^i - \nabla\lambda_b^i\wedge\tilde{\omega}_a^b + M_{ajk}^i\omega^j\wedge\omega^k, \tag{2.8.3}$$
$$D\nabla\lambda_a = -\nabla\lambda_b\wedge\tilde{\omega}_a^b + \nabla\lambda_a^i\wedge\tilde{\omega}_i + M_{aij}\omega^i\wedge\omega^j,$$

где

$$M_{ijk} = R_{ijk} - \lambda_l R_{ijk}^l,$$
$$M_{ajk}^i = R_{ajk}^i - \lambda_b^i R_{ajk}^b + \lambda_a^l R_{ljk}^i, \quad M_{aij} = R_{aij} - \lambda_b R_{aij}^b + \lambda_a^k R_{kij}.$$

Зададим линию $\rho \subset X_m^1$ уравнениями $\omega^i = \rho^i\omega$. Рассмотрим три системы дифференциальных уравнений

$$\nabla\lambda_i = 0; \quad \nabla\lambda_a^i = 0; \quad \nabla\lambda_a^i = 0, \;\; \nabla\lambda_a = 0. \tag{2.8.4}$$

Компоненты объекта $M = \{M_{ijk},\, M_{ajk}^i,\, M_{aij}\}$ удовлетворяют сравнениям

$$\Delta M_{ijk} \equiv 0, \quad \Delta M_{ajk}^i \equiv 0, \quad \Delta M_{aij} + M_{aij}^k\omega_k \equiv 0,$$

поэтому M — тензор, содержащий подтензоры $\{M_{ijk}\}$, $\{M_{ajk}^i\}$, $\{M_{ajk}^i,\, M_{aij}\}$. Обращение тензора M в нуль инвариантно. Выясним геометрический смысл этого. Если $M = 0$, то уравнения (2.8.3) примут вид

$$D\nabla\lambda_i = -\nabla\lambda_j\wedge\tilde{\omega}_i^j,$$
$$D\nabla\lambda_a^i = \nabla\lambda_a^j\wedge\tilde{\omega}_j^i - \nabla\lambda_b^i\wedge\tilde{\omega}_a^b, \quad D\nabla\lambda_a = -\nabla\lambda_b\wedge\tilde{\omega}_a^b + \nabla\lambda_a^i\wedge\tilde{\omega}_i,$$

а системы уравнений (2.8.4) станут вполне интегрируемы вдоль поверхности X_m^1. В этом случае будем говорить об абсолютных параллельных перенесениях плоскостей, заданных соответствующими квазитензорами.

Определение 2.8.1. Объект $M = \{M_{ijk},\, M_{ajk}^i,\, M_{aij}\}$, компоненты которого являются линейными комбинациями компонент объекта кривизны с коэффициентами — компонентами композиционно оснащающего квазитензора, обращение которого в нуль приводит к абсолютным параллельным перенесениям, назовём тензором параллельности.

Таким образом, если компоненты объекта кривизны групповой связности удовлетворяют соотношениям

$$M_{ijk} = 0, \quad M^i_{ajk} = 0, \quad M_{aij} = 0, \tag{2.8.5}$$

или, короче, $M = 0$, то параллельные перенесения, задаваемые подсистемами системы (2.8.4), являются абсолютными в рассматриваемой связности. И обратно, если параллельные перенесения нормали второго рода и плоскости Картана, задаваемые подсистемами системы (2.8.4), абсолютные, то кривизны соответствующих связностей удовлетворяют соотношениям (2.8.5). Покажем это. Пусть указанные параллельные перенесения абсолютны, тогда ковариантные производные (2.8.2) обращаются в нуль. Дифференциальные уравнения, определяющие квазитензор λ, принимают вид

$$d\lambda_i - \lambda_j \tilde{\omega}^j_i + \tilde{\omega}_i = 0, \quad d\lambda^i_a + \lambda^j_a \tilde{\omega}^i_j - \lambda^i_b \tilde{\omega}^b_a + \tilde{\omega}^i_a = 0, \quad d\lambda_a - \lambda_b \tilde{\omega}^b_a + \lambda^i_a \tilde{\omega}_i + \tilde{\omega}_a = 0.$$

Следовательно, объект λ является инвариантным относительно некоторой связности Γ (выясним её тип позднее). Дифференцируя определяющие его уравнения, получим

$$M_{ijk}\omega^j \wedge \omega^k = 0, \quad M^i_{ajk}\omega^j \wedge \omega^k = 0, \quad M_{aij}\omega^i \wedge \omega^j = 0,$$

или $M_{ijk} = 0$, $M^i_{ajk} = 0$, $M_{aij} = 0$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2.8.1. *Чтобы параллельные перенесения, заданные подсистемами системы* (2.8.4), *были абсолютными в связностях* Γ_2, Γ_4, Γ, *необходимо и достаточно, чтобы обращались в нуль соответствующие подтензоры* M_{ijk}, M^i_{ajk}, $\{M^i_{ajk}, M_{aij}\}$ *тензора параллельности* M.

Замечание 2.8.1. Тензор параллельности $\overset{2}{M}$ индуцированной связности второго типа равен нулю.

Замечание 2.8.2. Если тензор параллельности $\overset{1}{M}$ связности первого типа равен нулю, то имеет место равенство $\hat{D}_{ai} = D^j_{ai}\lambda_j$, т. е. смещения плоскости Картана ограничены до смещений её в нормали первого рода.

2.9. Абсолютные параллельные перенесения нормали второго рода и плоскости Картана

Действуя на ковариантные производные (2.8.2) дифференциальным оператором Δ, получим

$$\Delta\nabla_j\lambda_i \equiv 0, \quad \Delta\nabla_j\lambda^i_a \equiv 0, \quad \Delta\nabla_i\lambda_a + \nabla_i\lambda^j_a\omega_j \equiv 0.$$

Теорема 2.9.1. *Ковариантные производные* 1) $\nabla_j\lambda_i$, 2) $\nabla_j\lambda^i_a$, 3) $\nabla_i\lambda_a$, $\nabla_j\lambda^i_a$ *квазитензоров* λ_i, λ^i_a, $\{\lambda^i_a, \lambda_a\}$ *относительно связностей* 1) Γ_2, 2) Γ_4, 3) Γ *соответственно образуют тензоры.*

В силу теоремы 2.9.1 равенства

$$\nabla_j \lambda_i = 0, \tag{2.9.1}$$

$$\nabla_j \lambda_a^i = 0, \tag{2.9.2}$$

$$\nabla_j \lambda_a^i = 0, \quad \nabla_i \lambda_a = 0 \tag{2.9.3}$$

имеют инвариантный смысл. Из равенств (2.9.1) получаем

$$\Gamma_{ij} = \lambda_{ij} + \lambda_k \Gamma_{ij}^k. \tag{2.9.4}$$

Замечание 2.9.1. Формула (2.9.4) справедлива для компонент объектов центропроективных связностей Γ_2 второго и третьего типов.

Из формул (2.9.1), (2.9.3), или, что то же самое, (2.9.4), и

$$\Gamma_{aj}^i = \lambda_{aj}^i + \lambda_b^i \Gamma_{aj}^b - \lambda_a^k \Gamma_{kj}^i, \quad \Gamma_{ai} = \lambda_{ai} + \lambda_b \Gamma_{ai}^b - \lambda_a^j \Gamma_{ji}$$

непосредственно следуют формулы (2.5.2) охватов объекта связности второго типа. Наоборот, относительно связности второго типа ковариантные производные компонент композиционно оснащающего квазитензора λ равны нулю.

Замечание 2.9.2. Относительно связности первого типа $\overset{1}{\Gamma}$ ковариантные производные (2.8.2) принимают вид

$$\overset{1}{\nabla}_j \lambda_i = D_{ij}, \quad \overset{1}{\nabla}_j \lambda_a^i = D_{aj}^i, \quad \overset{1}{\nabla}_1 \lambda_a = \hat{D}_{ai}.$$

Следовательно, условия (2.6.5) обращают уравнения

$$\overset{1}{\nabla}_j \lambda_i \rho^j = 0, \quad \overset{1}{\nabla}_j \lambda_a^i \rho^j = 0, \quad \overset{1}{\nabla}_i \lambda_a \rho^i = 0 \tag{2.9.5}$$

в тождества, задавая параллельные перенесения соответствующих плоскостей вдоль любых линий на поверхности, т. е. это случай абсолютных параллельных перенесений. Таким образом, можно сказать, что плоскости N_{m-1}, C_{n-m-1} переносятся абсолютно параллельно в связностях $\overset{1}{\Gamma}_2$, $\overset{1}{\Gamma}_4$, если выполняются условия (2.6.5), т. е. когда они смещаются, как описано в формулах (2.6.2), (2.6.3). При таких же смещениях, но вдоль линий, определяемых из подсистем системы (2.9.5), они переносятся параллельно вдоль этих линий.

Действительно, образуя в выражениях (2.4.4), (2.4.1) дифференциалов точек B_i, B_a ковариантные дифференциалы $\overset{1}{\nabla} \lambda_i$, $\overset{1}{\nabla} \lambda_a^i$, $\overset{1}{\nabla} \lambda_a$ относительно подсвязностей первого типа, получим

$$dB_i = (\delta_i^j \theta + \omega_i^j + \lambda_i \omega^j - \lambda_a^j \omega_i^a) B_j + \omega_i^a B_a + \overset{1}{\nabla} \lambda_i A,$$
$$dB_a = (\delta_a^b \theta + \omega_a^b + \lambda_a^i \omega_i^b) B_b + \overset{1}{\nabla} \lambda_a^i A_i + \overset{1}{\nabla} \lambda_a A.$$

Относительно связности $\overset{2}{\Gamma}$ дифференциалы точек B_i, B_a записываются в виде

$$dB_i = (\delta_i^j\theta + \omega_i^j + \lambda_i\omega^j - \lambda_a^j\omega_i^a)B_j + \omega_i^a B_a + \overset{2}{\nabla}\lambda_i A + D_{ij}\omega^j A,$$

$$dB_a = (\delta_a^b\theta + \omega_a^b + \lambda_a^i\omega_i^b)B_b + \overset{2}{\nabla}\lambda_a^i A_i + \overset{2}{\nabla}\lambda_a A + D_{aj}^i\omega^j A_i + \hat{D}_{ai}\omega^j A.$$

Теорема 2.9.2. *Параллельные перенесения нормали второго рода N_{m-1} в связности $\overset{2}{\Gamma}_2$ и плоскости C_{n-m-1} в связностях $\overset{2}{\Gamma}_4$, $\overset{2}{\Gamma}$ являются абсолютными и вырожденными второго типа* (*т. е. параллельные перенесения осуществляются при произвольном смещении плоскостей*).

Замечание 2.9.3. В работах [26, 42] поверхность проективного пространства рассматривается как многообразие точек, касательных и соприкасающихся плоскостей. Исследуются индуцированные связности в расслоениях с типовыми слоями — группами, действующими в связках прямых и гиперплоскостей. Связность $\Gamma = \{\Gamma_{jk}^i, \Gamma_{aj}^i, \Gamma_{bi}^a\}$ на поверхности X_m^1 получается из связности $\Gamma_{Ji}^I = \{\Gamma_{jk}^i, \Gamma_{aj}^i, \Gamma_{bi}^a, \Gamma_{ij}^a\}$ на поверхности X_m^0 при $\Gamma_{ij}^a = \Lambda_{ij}^a$. Параллельные перенесения направлений в этих связностях описаны с помощью проективно-ковариантного дифференциала. Показано, что геометрические характеристики этих связностей одинаковы вдоль асимптотических линий (1.8.4), касательная плоскость к поверхности вдоль которых неподвижна.

2.10. Перенесение А. П. Нордена

В разделе 2.9 с помощью ковариантных дифференциалов и параллельных перенесений оснащающих плоскостей геометрически охарактеризованы связности Γ_2, Γ_4, Γ обоих типов. Остаётся геометрически интерпретировать линейные касательную и нормальную связности Γ_1, Γ_3. Используем введённое нами в разделе 1.7 понятие проективно-ковариантного дифференциала для задания известного параллельного перенесения касательной прямой в касательной линейной связности, рассмотренного А. П. Норденом [12] в репере, адаптированном к нормали второго рода.

Возьмём касательную прямую, проходящую через точку A. Она пересекает нормаль второго рода N_{m-1} в точке

$$B = \mu^i B_i = \mu^i\lambda_i A + \mu^i A_i, \tag{2.10.1}$$

причём

$$\Delta\mu^i - \mu^i\Omega_1 = \mu_j^i\omega^j. \tag{2.10.2}$$

Условие продолжаемости уравнений (2.10.2) может быть записано в виде $D\Omega_1 = \theta_i \wedge \omega^i$. Вводя формы касательной линейной связности $\Gamma_1 = \{\Gamma_{jk}^i\}$ в уравнения (2.10.2), получим

$$\overline{\nabla}\mu^i = \overline{\nabla}_j\mu^i\omega^j.$$

Выражения

$$\overline{\nabla}\mu^i = d\mu^i + \mu^j\tilde{\omega}_j^i - \mu^i\Omega_1, \quad \overline{\nabla}_j\mu^i = \mu_j^i - \mu^k\Gamma_{kj}^i$$

назовём соответственно проективно-ковариантным дифференциалом и проективно-ковариантными производными объекта μ^i относительно линейной связности $\Gamma_1 = \{\Gamma^i_{jk}\}$. Внешний дифференциал форм $\overline{\nabla}\mu^i$ преобразуем к виду

$$D\overline{\nabla}\mu^i = \overline{\nabla}\mu^j \wedge \tilde{\omega}^i_j - \overline{\nabla}\mu^i \wedge \Omega_1 + (\ldots)\omega^j \wedge \omega^k + \mu^i D\Omega_1.$$

Дифференциал точки B преобразуем следующим образом:

$$dB = (\theta + \omega_1 - \lambda_i\omega^i)B + \mu^i \Lambda^a_{ij}\omega^j B_a + \mu^i D_{ij}\omega^j A + \overset{0}{\overline{\nabla}}\mu^i B_i. \tag{2.10.3}$$

Теорема 2.10.1. *Касательная прямая AB, определяемая точкой $B \in N_{m-1}$, переносится параллельно в индуцированной касательной линейной связности $\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jk}$ тогда и только тогда, когда точка B смещается в плоскости $L_{n-m+1} = N_{n-m} \oplus B$.*

Замечание 2.10.1. Данная теорема является классическим результатом А. П. Нордена [12]. Она доказана в [30] с помощью метода Лаптева, но без использования понятия проективно-ковариантного дифференциала.

Замечание 2.10.2. Выражение (2.10.3) для дифференциала точки B имеет такой же вид, как и (1.10.4), однако в силу того что касательная линейная протосвязность является связностью вдоль асимптотических линий, она и касательная линейная связность имеют различные геометрические интерпретации [26, 42].

2.11. Перенесение А. В. Чакмазяна

Используем проективно-ковариантный дифференциал для задания параллельного перенесения нормального направления в нормальной линейной связности, введённого А. В. Чакмазяном [27] в репере, адаптированном к нормали первого рода.

Рассмотрим параллельное перенесение нормальной прямой AC, пересекающей плоскость Картана C_{n-m-1} в точке

$$C = \mu^a B_a = \mu^a(A_a + \lambda^i_a A_i + \lambda_a A),$$

причём

$$\Delta\mu^a - \mu^a\Omega_2 = \mu^a_i\omega^i.$$

Если $D\Omega_2 = \theta_i \wedge \omega^i$, то последние уравнения правильно продолжаемы. Вводя в них формы нормальной линейной связности Γ_3, получаем проективно-ковариантный дифференциал объекта μ^a в виде

$$\overline{\nabla}\mu^a = d\mu^a + \mu^b\tilde{\omega}^a_b - \mu^a\Omega_2. \tag{2.11.1}$$

Внешний дифференциал форм $\overline{\nabla}\mu^a$ преобразуем следующим образом:

$$D\overline{\nabla}\mu^a = \overline{\nabla}\mu^b \wedge \tilde{\omega}^a_b - \overline{\nabla}\mu^a \wedge \Omega_2 + (\ldots)^a_{ij}\omega^i \wedge \omega^j - \mu^a D\Omega_2.$$

Используя выражение (2.11.1), найдём дифференциал точки C:

$$dC = (\theta + \Omega_2 - \lambda_i\omega^i)C + \overset{0}{\overline{\nabla}}\mu^a B_a + \mu^a D^i_{aj}\omega^j B_i + \mu^a(\hat{D}_{ai} - \lambda_j D^j_{ai})\omega^i A.$$

Теорема 2.11.1. *Нормальная прямая AC, заданная точкой $C \in C_{n-m-1}$, переносится параллельно в индуцированной нормальной линейной связности $\overset{0}{\Gamma}{}^a_{bi}$ тогда и только тогда, когда точка C смещается в плоскости $L_{m+1} = T_m \oplus C$.*

Замечание 2.11.1. Конструкция параллельного перенесения А. В. Чакмазяна [27] изложена здесь с некоторой модификацией в менее канонизированном репере. В [30] теорема доказана без использования понятия проективно-ковариантного дифференциала.

2.12. Перенесение направления общего положения

Обобщим результаты разделов 2.10, 2.11. Будем рассматривать прямую AK, пересекающую гиперплоскость P_{n-1}, натянутую на нормаль N_{m-1} и плоскость C_{n-m-1}, в точке $K = \nu^a B_a + \nu^i B_i$, причём

$$\Delta\nu^a \equiv \nu^a \Omega_3, \quad \Delta\nu^i \equiv \nu^i \Omega_3.$$

Внешний дифференциал проективно-ковариантных дифференциалов имеет вид

$$D\overline{\nabla}\nu^a = \overline{\nabla}\nu^b \wedge \tilde{\omega}^a_b - \overline{\nabla}\nu^a \wedge \Omega_3 + \nu^b R^a_{bij}\omega^i \wedge \omega^j - \nu^a D\Omega_3,$$
$$D\overline{\nabla}\nu^i = \overline{\nabla}\nu^j \wedge \tilde{\omega}^i_j - \overline{\nabla}\nu^i \wedge \Omega_3 + \nu^j R^i_{jkl}\omega^k \wedge \omega^l + \nu^i D\Omega_3.$$

Дифференциал точки K преобразуем к виду

$$dK = (\theta + \Omega_3 - \lambda_i\omega^i)K + \overset{0}{\overline{\nabla}}\nu^a B_a + \overset{0}{\overline{\nabla}}\nu^i B_i + \nu^i \Lambda^a_{ij}\omega^j B_a + \nu^a D^i_{aj}\omega^j B_i + \\ + (\nu^a(\hat{D}_{ai} - \lambda_j D^j_{ai}) + \nu^j D_{ji})\omega^i A. \quad (2.12.1)$$

Теорема 2.12.1. *Прямая AK, задаваемая точкой $K \in P_{n-1}$, переносится параллельно в индуцированной связности $\left\{\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jk}, \overset{0}{\Gamma}{}^a_{bi}\right\}$ при любом смещении точки K, т. е. параллельное перенесение прямой AK является вырожденным второго типа.*

Замечание 2.12.1. Параллельное перенесение произвольной прямой AK ($K \in P_{n-1}$) в индуцированной связности $\left\{\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jk}, \overset{0}{\Gamma}{}^a_{bi}\right\}$, описанное в теореме 2.12.1, отличается от параллельного перенесения аналогичной прямой в индуцированной связности $\overset{0}{\Gamma}{}^I_{Ji}$, введённого в теореме 1.7.1.

Замечание 2.12.2. Если в формуле (2.12.1) положить $\nu^a = 0$, $\nu^i = \mu^i$, мы получим теорему 2.10.1, равенства $\nu^i = 0$, $\nu^a = \mu^a$ дают теорему 2.11.1.

2.13. Коаффинное параллельное перенесение

Опишем параллельное перенесение касательного направления AB из раздела 2.10 с помощью ковариантного дифференциала. Произведём нормировку

$\mu^i\lambda_i = 1$ в разложении (2.10.1). Тогда $B = A + \mu^i A_i$, причём $\Delta\mu^i - \mu^i\mu^j\omega_j = \mu^i_j\omega^j$. Вводя в последние уравнения формы коаффинной связности, получим

$$\nabla\mu^i = \nabla_j\mu^i\omega^j,$$

где ковариантный дифференциал и ковариантные производные объекта μ^i относительно связности Γ_2 выражаются по формулам

$$\nabla\mu^i = d\mu^i + \mu^j\tilde{\omega}^i_j - \mu^i\mu^j\tilde{\omega}_j, \quad \nabla_j\mu^i = \mu^i_j - \mu^k\Gamma^i_{kj} + \mu^i\mu^k\Gamma_{kj}.$$

Внешний дифференциал ковариантного дифференциала $\nabla\mu^i$ преобразуем к виду

$$D\nabla\mu^i = \nabla\mu^j(\tilde{\omega}^i_j + \delta^i_j\mu^k\tilde{\omega}_k - \mu^i\tilde{\omega}_j) + \mu^j(R^i_{jkl} - \mu^i R_{jkl})\omega^k\wedge\omega^l.$$

Найдём выражение для дифференциала точки B относительно связности $\overset{1}{\Gamma}_2 = \left\{\overset{0}{\Gamma}{}^i_{kj}, \overset{1}{\Gamma}_{kj}\right\}$:

$$dB = (\mu^i\omega_i - \mu^i\omega^a_i\lambda_a + \theta)B + \mu^i\omega^a_i B_a + \overset{1}{\nabla}\mu^i A_i.$$

Уравнения параллельного перенесения имеют вид $\overset{1}{\nabla}\mu^i\big|_\rho = 0$.

Теорема 2.13.1. *Касательное направление AB, заданное точкой $B \in N_{m-1}$, переносится параллельно вдоль линии $\rho \subset X^1_m$ в коаффинной связности $\overset{1}{\Gamma}_2 = \left\{\overset{0}{\Gamma}{}^i_{kj}, \overset{1}{\Gamma}_{kj}\right\}$ тогда и только тогда, когда точка B смещается в плоскости $L_{n-m} = C_{n-m-1} \oplus B$.*

2.14. Псевдосвязность и сильное перенесение нормального направления

Рассмотрим параллельное перенесение нормального направления с помощью ковариантных дифференциалов. Произведя нормировку $\mu^a\lambda_a = 1$ в разделе 2.11, получим $C = \mu^a A_a + \mu^a\lambda^i_a A_i + A$. Найдём выражение для дифференциала точки C:

$$dC = (\ldots)C + (\Delta\mu^a - \mu^a\mu^b(\omega_b + \lambda^j_b\omega_j) + \mu^b\lambda^j_b\omega^a_j)(B_a - \lambda_a A) + \mu^a(\Delta\lambda^i_a + \omega^i_a - \lambda^j_a\lambda^i_b\omega^b_j + \lambda_a\omega^i)A_i. \quad (2.14.1)$$

Тогда уравнениями инвариантности AC являются уравнения (2.4.2) и

$$\Delta\mu^a - \mu^a\mu^b(\omega_b + \lambda^j_b\omega_j) = \mu^a_i\omega^i. \quad (2.14.2)$$

Объект μ^a образует геометрический объект лишь вместе с квазитензором λ^i_a.

Так как точка C принадлежит инвариантной плоскости Картана C_{n-m-1}, то имеют место уравнения (2.4.2), и следовательно, формулу (2.14.1) можно переписать в виде

$$dC = (\ldots)C + (\Delta\mu^a - \mu^a\mu^b(\omega_b + \lambda^j_b\omega_j) + \mu^b\lambda^j_b\omega^a_j)(B_a - \lambda_a A) + \mu^a D^i_{aj}\omega^j A_i. \quad (2.14.1')$$

Значит, уравнениями инвариантности точки C являются только (2.14.2). Учитывая наличие форм ω_b^a, ω_a, ω_i в уравнениях (2.14.2), дадим следующее определение.

Определение 2.14.1. Псевдосвязностью назовём структуру, определяемую совокупностью $\Pi = \{\Gamma_{bi}^a, \Gamma_{ai}, \Gamma_{ij}\}$ компонент объекта групповой связности Γ, не являющуюся геометрическим объектом с фундаментальным объектом Λ_{ij}^a. Короче говоря, псевдосвязность есть подобъект Π объекта связности Γ [25, 41].

Вводя формы псевдосвязности

$$\tilde{\omega}_b^a = \omega_b^a - \Gamma_{bi}^a \omega^i, \quad \tilde{\omega}_a = \omega_a - \Gamma_{ai}\omega^i, \quad \tilde{\omega}_i = \omega_i - \Gamma_{ij}\omega^j$$

в (2.14.2), получим $\nabla\mu^a = \nabla_i \mu^a \omega^i$, где

$$\nabla\mu^a = d\mu^a + \mu^b\tilde{\omega}_b^a - \mu^a\mu^b(\tilde{\omega}_b + \lambda_b^i\tilde{\omega}_i), \quad \nabla_i\mu^a = \mu_i^a - \mu^b\Gamma_{bi}^a + \mu^a\mu^b(\Gamma_{bi} + \lambda_b^j\Gamma_{ji}).$$

Будем называть эти выражения ковариантным дифференциалом и ковариантными производными объекта μ^a относительно псевдосвязности $\Pi = \{\Gamma_{bi}^a, \Gamma_{ai}, \Gamma_{ij}\}$.

Внешний дифференциал ковариантного дифференциала $\nabla\mu^a$ преобразуем к виду

$$D\nabla\mu^a = \nabla\mu^b\big(\tilde{\omega}_b^a - \mu^a(\tilde{\omega}_b + \lambda_b^i\tilde{\omega}_i)\big) - \nabla\mu^a(\mu^b(\tilde{\omega}_b + \lambda_b^i\tilde{\omega}_i) - \\ - \mu^a\mu^b\nabla\lambda_b^i \wedge \tilde{\omega}_i + (\ldots)_{ij}^a\omega^i \wedge \omega^j.$$

Рассмотрим систему уравнений

$$\nabla\mu^a = 0, \quad \nabla\lambda_a^i = 0. \tag{2.14.3}$$

Образуя ковариантные дифференциалы объектов μ^a, λ_a^i в формулах (2.14.1), (2.14.1′), получим две формулы для описания параллельных перенесений нормального направления AC соответственно в связности Γ и псевдосвязности Π:

$$\begin{aligned} dC &= (\ldots)C + \mu^a(\lambda_a^k\Gamma_{kj}^i - \lambda_b^i\Gamma_{aj}^b + \Gamma_{aj}^i - \lambda_a^k\lambda_b^i\Lambda_{jk}^b + \delta_j^i\lambda_a)\omega^j A_i + \\ &+ \nabla\mu^a(B_a - \lambda_a A) + \mu^a\nabla\lambda_a^i A_i + \mu^b(\Gamma_{bi}^a + \lambda_b^j\Lambda_{ij}^a)\omega^i B_a + \\ &+ \mu^a(-\lambda_b\Gamma_{ai}^b + \Gamma_{ai} + \lambda_a^j\Gamma_{ji} - \lambda_b\lambda_a^j\Lambda_{ij}^b)\omega^i A, \end{aligned} \tag{2.14.4}$$

$$\begin{aligned} dC &= (\ldots)C + \nabla\mu^a(B_a - \lambda_a A) + \mu^b(\Gamma_{bi}^a + \lambda_b^j\Lambda_{ij}^a)\omega^i B_a + \\ &+ \mu^a D_{aj}^i\omega^j A_i + \mu^a(-\lambda_b\Gamma_{ai}^b + \Gamma_{ai} + \lambda_a^j\Gamma_{ji} - \lambda_b\lambda_a^j\Lambda_{ij}^b)\omega^i A. \end{aligned} \tag{2.14.4′}$$

Из формулы (2.14.4) видно, что параллельное перенесение направления AC в связности Γ задаётся системой (2.14.3), тогда как (2.14.4′) позволяет описать такое же перенесение направления AC в псевдосвязности Π с помощью подсистемы (2.14.3$_1$). Оба параллельных перенесения являются в общем случае вырожденными второго типа, т. е. имеют место, когда точка C смещается во всём пространстве P_n. Таким образом, геометрически одинаковые параллельные перенесения нормальной прямой AC, описанные формулами (2.14.4) и (2.14.4′), осуществляются соответственно в связности Γ и псевдосвязности Π и задаются в общем случае различными системами уравнений (2.14.3) и (2.14.3$_1$).

Дополним подсистему уравнений ($2.14.3_1$) второго параллельного перенесения прямой AC уравнениями ($2.14.3_2$), задающими параллельное перенесение плоскости C_{n-m-1}. В этом случае параллельное перенесение нормальной прямой независимо от выбора формулы (2.14.4) или (2.14.4$'$) для его описания, происходит в связности Γ и задаётся системой уравнений (2.14.3).

Перейдём от общего рассмотрения, т. е. от неохваченного объекта связности, к случаям трёх типов охватов.

Рассмотрим композицию параллельных перенесений прямой AC и плоскости C_{n-m-1}. Три способа охвата объекта связности Γ дают только два случая охвата подобъекта Γ_3:

1) параллельное перенесение плоскости C_{n-m-1} в связности Γ_3 второго и третьего типов является вырожденным второго типа и абсолютным, т. е. имеет место при произвольном смещении плоскости во всём пространстве P_n и вдоль любой линии на поверхности X_m^1; можно сказать, что все плоскости построенного поля параллельны;
2) параллельное перенесение плоскости C_{n-m-1} в связности Γ_3 первого типа, при котором она смещается в нормали первого рода, не является вырожденным и абсолютным.

Пусть Γ является объектом связности третьего типа ($\overset{3}{\Gamma}$), тогда ковариантные производные $\overset{2}{\nabla}_j\lambda^i_a$ в силу замечания 2.9.1 обращаются в нуль, а вырожденный второго типа параллельный перенос плоскости C_{n-m-1} в связности

$$\left\{\overset{0}{\Gamma}{}^i_{jk},\, \overset{0}{\Gamma}{}^a_{bi},\, \overset{2}{\Gamma}{}^i_{aj}\right\}$$

является абсолютным. Уравнения $\overset{2}{\nabla}\lambda^i_a = 0$, задающие это перенесение, обращаются в тождества. Однако мы будем писать их в выражении для дифференциала точки C, чтобы видна была связность, в которой происходит перенесение.

Запишем формулу (2.14.4) относительно связности $\overset{3}{\Gamma}$:

$$dC = (\ldots)C + \overset{3}{\nabla}\mu^a(B_a - \lambda_a A) + \mu^a\overset{2}{\nabla}\lambda^i_a A_i + \mu^a D^i_{aj}\omega^j B_i. \tag{2.14.5}$$

Значит, прямая AC переносится параллельно в связности $\overset{3}{\Gamma}$, когда точка C смещается в плоскости $L_m = [C, B_i]$, натянутой на точку C и нормаль второго рода N_{m-1}. Система дифференциальных уравнений (2.14.3) этого перенесения вдоль линии ρ приводит к системе линейных однородных уравнений

$$\overset{3}{\nabla}_i\mu^a\rho^i = 0, \quad \overset{2}{\nabla}_j\lambda^i_a\rho^j = 0. \tag{2.14.6}$$

Поскольку ковариантные производные $\overset{2}{\nabla}_j\lambda^i_a$ обращаются в нуль, то m неизвестных ρ^i удовлетворяют фактически лишь $n-m$ уравнениям ($2.14.6_1$), поэтому в общем случае при $n < 2m$ подсистема ($2.14.6_1$) имеет ненулевые решения.

Формула (2.14.4′) относительно псевдосвязности третьего типа

$$\overset{3}{\Pi} = \left\{\overset{0}{\Gamma}{}^a_{bi}, \overset{3}{\Gamma}_{ai}, \overset{2}{\Gamma}_{ij}\right\}$$

примет вид

$$dC = (\ldots)C + \overset{3}{\nabla}\mu^a(B_a - \lambda_a A) + \mu^a D^i_{aj}\omega^j B_i. \tag{2.14.5′}$$

Следовательно, прямая AC переносится параллельно в псевдосвязности $\overset{3}{\Pi}$, когда точка C смещается в той же плоскости L_m. Это перенесение задаёт подсистема уравнений вида (2.14.3$_1$). При этом неизвестные ρ^i находятся по-прежнему из системы (2.14.6$_1$).

Итак, оба перенесения геометрически одинаковые, задаются одной и той же системой уравнений, т. е. осуществляются вдоль одних и тех же линий. Однако эти перенесения реализуются в различных связностях (на что указывают присутствующие в формулах (2.14.5), (2.14.5′) ковариантные дифференциалы): первое — в связности $\overset{3}{\Gamma}$, второе — в псевдосвязности $\overset{3}{\Pi}$.

Вывод 2.14.1. Связность $\overset{3}{\Gamma}$ и псевдосвязность $\overset{3}{\Pi}$ третьего типа геометрически характеризуются с помощью одного и того же параллельного перенесения нормальной прямой AC, которое заключается в смещении точки C в плоскости $L_{m+1} = [C, B_i]$.

Дополним систему $\overset{3}{\nabla}\mu^a\big|_{\rho=0}$, задающую второе перенесение, уравнениями $\overset{2}{\nabla}\lambda^i_a = 0$ и рассмотрим композицию параллельных перенесений в связности $\overset{2}{\Gamma}_3$ направления AC ($C \in C_{n-m-1}$) и плоскости Картана C_{n-m-1}. Плоскость C_{n-m-1} при абсолютном параллельном перенесении (задаваемом уравнениями $\overset{2}{\nabla}\lambda^i_a = 0$) смещается во всём пространстве P_n и вдоль любой линии (в том числе вдоль которой переносится прямая AC), поэтому можно считать, что это перенесение осуществляется при смещении точки C в плоскости L_m вдоль соответствующей линии. В этом случае формулы (2.14.5), (2.14.5′) задают одно и то же параллельное перенесение нормальной прямой AC, являющееся геометрической характеристикой как связности $\overset{3}{\Gamma}$, так и псевдосвязности $\overset{3}{\Pi}$. Это перенесение определяется системой уравнений $\overset{3}{\nabla}_j\mu^a\rho^j = 0$.

Вывод 2.14.2. Параллельное перенесение нормальной прямой AC в связности третьего типа $\overset{3}{\Gamma}$ можно представить как композицию двух параллельных перенесений: плоскости Картана C_{n-m-1} в связности $\overset{2}{\Gamma}_3$ и нормальной прямой AC в псевдосвязности $\overset{3}{\Pi}$.

Замечание 2.14.1. Данное перенесение нормального направления аналогично введённому А. В. Чакмазяном для нормального поля точек, параллельного относительно нормальной центропроективной связности [27]. В связи с тем, что наше исследование ведётся в менее канонизированном репере, перенесение осуществляется в линейной комбинации связности.

В связности второго типа $(\overset{2}{\Gamma})$ формулы (2.14.4), (2.14.4′) примут вид

$$dC = (\ldots)C + \overset{2}{\nabla}\mu^a(B_a - \lambda_a A) + \mu^a\overset{2}{\nabla}\lambda_a^i A_i + \mu^a D_{aj}^i\omega^j B_i + \mu^a(\hat{D}_{ai} - \lambda_j D_{ai}^j)\omega^i A,$$

$$dC = (\ldots)C + \overset{2}{\nabla}\mu^a(B_a - \lambda_a A) + \mu^a D_{aj}^i\omega^j B_i + \mu^a(\hat{D}_{ai} - \lambda_j D_{ai}^j)\omega^i A.$$

Эти формулы отличаются от формул (2.14.5), (2.14.5′) лишь последним слагаемым. С учётом этого все рассуждения, касающиеся случая связности и псевдосвязности третьего типа, переносятся на случай связности и псевдосвязности второго типа.

В связности первого типа $(\overset{1}{\Gamma})$ выражение (2.14.4) преобразуется к виду

$$dC = (\ldots)C + \overset{1}{\nabla}\mu^a B_a + \overset{1}{\nabla}\lambda_a^i A_i. \tag{2.14.7}$$

Следовательно, прямая AC переносится параллельно в связности $\overset{1}{\Gamma}$, когда точка C неподвижна. Это перенесение задаёт система дифференциальных уравнений вида (2.14.3), а неизвестные можно найти из системы, аналогичной (2.14.6).

Формула (2.14.4′) относительно псевдосвязности первого типа принимает вид

$$dC = (\ldots)C + \overset{1}{\nabla}\mu^a B_a + \mu^a D_{aj}^i\omega^j A_i. \tag{2.14.7′}$$

Здесь осуществляется параллельное перенесение прямой AC в псевдосвязности

$$\overset{1}{\Pi} = \left\{\overset{0}{\Gamma}{}_{bi}^a,\, \overset{1}{\Gamma}_{ij},\, \overset{1}{\Gamma}_{ai}\right\},$$

когда точка C смещается в плоскости $L_{m+1} = C \oplus T_m$. Следовательно, геометрические интерпретации связности и псевдосвязности первого типа различны. Это перенесение задаётся системой $\overset{1}{\nabla}\mu^a\big|_\rho = 0$. Дополним эту систему уравнениями $\overset{1}{\nabla}\lambda_a^i\big|_\rho = 0$, которые задают параллельное перенесение плоскости C_{n-m-1}, когда она смещается в нормали первого рода N_{n-m}. Это перенесение осуществляется вдоль линий $\overset{1}{\nabla}_j\lambda_a^i\rho^j = 0$, или, что то же самое, $D_{aj}^i\rho^j = 0$. При этом точка C остаётся в плоскости L_{m+1}. Условиями смещения плоскости в нормали первого рода являются также соотношения $D_{aj}^i = 0$, при выполнении которых параллельные перенесения прямой AC, описанные формулами (2.14.7), (2.14.7′), совпадают.

Вывод 2.14.3. Параллельное перенесение нормальной прямой AC в связности первого типа $\overset{1}{\Gamma}$ можно представить как композицию двух параллельных перенесений: плоскости Картана C_{n-m-1} в связности $\overset{1}{\Gamma}_3$ и нормальной прямой AC в псевдосвязности $\overset{3}{\Pi}$.

Замечание 2.14.2. В работах [25, 41] показано, что объект псевдосвязности П является специальной геометрической связностью в однородном расслоении, слой которого есть связка гиперплоскостей с осью — плоскостью Картана C_{n-m-1} в нормали первого рода N_{n-m}.

Замечание 2.14.3. В работах [15, 20, 26, 40, 42, 43] поверхность рассматривается как многообразие пар касательной и соприкасающейся плоскостей. Найдены уравнения главного расслоения, ассоциированного с поверхностью. Показан двойственный характер действия некоторых групп, являющихся типовыми слоями подрасслоений главного расслоения. В ассоциированном расслоении задаётся групповая связность, объект кривизны которой является тензором, содержащим несколько подтензоров. Производится композиционное оснащение поверхности, состоящее в присоединении к каждой точке поверхности нормали второго рода Нордена и двух плоскостей, которые в прямой сумме с касательной и соприкасающейся плоскостями дают соответственно соприкасающуюся плоскость и всё пространство. Композиционное оснащение индуцирует групповые связности двух типов в ассоциированном расслоении. Доказано, что если оснащающая плоскость, дополняющая соприкасающуюся плоскость до всего пространства, смещается в нормали первого рода, то композиционное оснащение порождает обобщённую нормализацию, состоящую в задании нормалей первого, второго и третьего рода. Определены параллельные перенесения оснащающих плоскостей. В линейных связностях описаны параллельные перенесения касательного и двух нормальных направлений (принадлежащего и не принадлежащего соприкасающейся плоскости) с помощью проективно-ковариантных дифференциалов. Введены и геометрически охарактеризованы пучки групповых связностей.

Литература

[1] Евтушик Л. Е. Дифференциальные связности и инфинитезимальные преобразования продолженной псевдогруппы // Труды геометрического семинара. Т. 2. — М.: ВИНИТИ, 1963. — С. 119—150.

[2] Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. — М.: ВИНИТИ, 1979. — (Проблемы геометрии; Т. 9).

[3] Картан Э. Пространства проективной связности // Тр. семин. по вект. и тенз. анализу. — 1937. — Вып. 4. — С. 160—173.

[4] Картан Э. Риманова геометрия в ортогональном репере. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1960.

[5] Кобаяси Ш. Группы преобразований в дифференциальной геометрии. — М.: Наука, 1986.

[6] Лаптев Г. Ф. Дифференциальная геометрия погружённых многообразий // Тр. ММО. — 1953. — Т. 2. — С. 275—383.

[7] Лаптев Г. Ф. Многообразия, погружённые в обобщённые пространства // Тр. 4-го Всесоюз. мат. съезда (1961). Т. 2. — Л., 1964. — С. 226—233.

[8] Лаптев Г. Ф. Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Труды геометрического семинара. Т. 1. — М.: ВИНИТИ, 1966. — С. 139—189.

[9] Лумисте Ю. Г. Однородные расслоения со связностью и их погружения // Труды геометрического семинара. Т. 1. — М.: ВИНИТИ, 1966. — С. 191—237.

[10] Лумисте Ю. Г. Связности в однородных расслоениях // Мат. сб. — 1966. — Т. 69. — С. 434—469.

[11] Лумисте Ю. Г., Чакмазян А. В. Подмногообразия с параллельным нормальным векторным полем // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1974. — № 5. — С. 148—157.

[12] Норден А. П. Пространства аффинной связности. — М.: Наука, 1976.

[13] Остиану Н. М. Геометрических объектов теория // Математическая энциклопедия. Т. 1. — М., 1984. — С. 937.

[14] Полякова К. В. Параллельные перенесения направлений вдоль поверхности проективного пространства // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 27. — Калининград, 1996. — С. 63—70.

[15] Полякова К. В. Связности в расслоениях, ассоциированных с многообразием пар касательной и соприкасающейся плоскостей поверхности // Труды геометрического семинара. Вып. 23. — Казань, 1997. — С. 99—112.

[16] Полякова К. В. Вырожденные параллельные перенесения на поверхности проективного пространства // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 29. — Калининград, 1999. — С. 64—68.

[17] Полякова К. В. О голономности поверхности проективного пространства // XXX науч. конф. Калинингр. ун-та: Тез. докл. Часть 6. — Калининград, 1999. — С. 7—8.

[18] Полякова К. В. Специальные оснащения Бортолотти и Картана на поверхности // Материалы междунар. конференции, посвящённой 90-летию со дня рождения Г. Ф. Лаптева, «Инвариантные методы исследования на многообразиях структур геометрии, анализа и математической физики». Тез. докл. — М., 1999. — С. 36—37.

[19] Полякова К. В. Три типа связностей на поверхности проективного пространства // Материалы школы-конференции, посвящённой 130-летию со дня рождения Д. Ф. Егорова «Теория функций, её приложения и смежные вопросы». Тез. докл. — Казань, 1999. — С. 179—180.

[20] Полякова К. В. Касательная линейная и коаффинная связности на поверхности проективного пространства // Материалы науч. семин. Калинингр. гос. ун-та. — Калининград, 2000. — С. 30—33.

[21] Полякова К. В. Понятие протосвязности на поверхности проективного пространства // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 31. — Калининград, 2000. — С. 58—65.

[22] Полякова К. В. Тензор параллельности // Тр. мат. центра им. Н. И. Лобачевского. Т. 5. — Казань, 2000. — С. 174.

[23] Полякова К. В. Индуцированные центропроективная и линейная связности на поверхности // Тр. мат. центра им. Н. И. Лобачевского. Т. 12. — Казань, 2001. — С. 52—53.

[24] Полякова К. В. Тензор параллельности и абсолютные параллельные перенесения // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 32. — Калининград, 2001. — С. 80—83.

[25] Полякова К. В. Псевдосвязность как специальная геометрическая связность // Тр. мат. центра им. Н. И. Лобачевского. Т. 18. — Казань, 2002. — С. 71—72.

[26] Полякова К. В. О совпадении геометрических характеристик связностей индуцированных на поверхности // Сб. тр. Междунар. геом. семинара им. Г. Ф. Лаптева. — Пенза, 2004. — С. 102—106.

[27] Чакмазян А. В. Связность в нормальных расслоениях нормализованного подмногообразия V_m в P_n // Проблемы геометрии. Т. 10. — М.: ВИНИТИ, 1978. — С. 55—74.

[28] Чакмазян А. В. Нормальная связность в геометрии подмногообразий. — Ереван, 1990.

[29] Шевченко Ю. И. Об оснащении многомерной поверхности проективного пространства // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 8. — Калининград, 1977. — С. 135—150.

[30] Шевченко Ю. И. Параллельные перенесения на поверхности // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 10. — Калининград, 1979. — С. 154—158.

[31] Шевченко Ю. И. Геометрическая характеристика некоторых индуцированных связностей поверхности // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 12. — Калининград, 1981. — С. 126—130.

[32] Шевченко Ю. И. Структура оснащения многообразия линейных фигур // Тез. докл. VI прибалт. геом. конф. — Таллин, 1984. — С. 137—138.

[33] Шевченко Ю. И. Параллельный перенос фигуры в линейной комбинации связности // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 18. — Калининград, 1987. — С. 115—120.

[34] Шевченко Ю. И. Об основной задаче проективно-дифференциальной геометрии поверхности // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 20. — Калининград, 1989. — С. 122—128.

[35] Шевченко Ю. И. Связность в продолжении главного расслоения // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 22. — Калининград, 1991. — С. 117—127.

[36] Шевченко Ю. И. Оснащения подмногообразий голономного и неголономного дифференцируемых многообразий // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 26. — Калининград, 1995. — С. 113—126.

[37] Шевченко Ю. И. Оснащения голономного и неголономного гладких многообразий. — Калининград, 1998.

[38] Bortolotti E. Connessioni nelle varietà luogo di spazi // Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari. — 1933. — No. 3. — P. 81—89.

[39] Golab St. Tensor calculus. — Warszava, 1974.

[40] Polyakova K. V. Parallel displacements along manifold of osculating planes of a surface // Int. Congress of Mathematicians, Berlin, 1998. Abstracts of Short Communications and Poster Sessions. — P. 78—79.

[41] Polyakova K. V. Pseudoconnection as special geometric connection // Докл. междунар. мат. семин. к 140-летию со дня рождения Давида Гильберта из Кёнигсберга и 25-летию математического факультета. — Калининград, 2002. — С. 138—144.

[42] Polyakova K. V. Contraction structure of linear connection on a surface of projective space // Тр. объединённой междунар. науч. конф. «Новая геометрия природы». — Казань, 2003. — С. 173—175.

[43] Polyakova K. V. On projective-covariant differential of geometrical object // Тезисы междунар. науч. конф., приуроченной к 200-летию со дня рождения К. Г. Якоби и 750-летию со дня основания г. Калининграда (Кёнигсберга). — Калининград, 2005. — С. 43—45.