Кольца без бесконечных множеств нецентральных ортогональных идемпотентов*

А. А. ТУГАНБАЕВ
Российский государственный торгово-экономический университет
e-mail: tuganbaev@gmail.com

УДК 512.55

Ключевые слова: I_0-модуль, полуартиново кольцо, идеал $\mathrm{SI}(A_A)$.

Аннотация

Пусть A — кольцо без бесконечных множеств нецентральных ортогональных идемпотентов. A — кольцо со свойством замены в точности тогда, когда все его пирсовские слои — полусовершенные кольца. Все правые A-модули являются I_0-модулями в точности тогда, когда либо A — полуартиново справа кольцо, в котором каждый собственный правый идеал является пересечением максимальных правых идеалов, либо $A/\,\mathrm{SI}(A_A)$ — полуцепное артиново кольцо с нулевым квадратом радикала Джекобсона.

Abstract

A. A. Tuganbaev, Rings without infinite sets of noncentral orthogonal idempotents, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 2, pp. 207—221.

Let A be a ring without infinite sets of noncentral orthogonal idempotents. A is an exchange ring if and only if all Pierce stalks of A are semiperfect rings. All A-modules are I_0-modules if and only if either A is a right semi-Artinian ring in which every proper right ideal is the intersection of maximal right ideals or $A/\,\mathrm{SI}(A_A)$ is an Artinian serial ring such that the square of the Jacobson radical of $A/\,\mathrm{SI}(A_A)$ is equal to zero.

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей. Говоря об артиновых кольцах или подобных объектах, мы предполагаем, что соответствующие условия выполнены справа и слева. Кольцо называется *чистым* (в англоязычной терминологии «clean»), если каждый его элемент является суммой идемпотента и обратимого элемента. Кольцо A называется кольцом *со свойством замены* при выполнении следующих эквивалентных условий (см. [20]):

1) для любого элемента $a \in A$ существует такой идемпотент $e \in aA$, что $1-e \in (1-a)A$;
2) для любого элемента $a \in A$ существует такой идемпотент $e \in Aa$, что $1-e \in A(1-a)$;

*Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований.

Фундаментальная и прикладная математика, 2008, том 14, № 2, с. 207—221.

3) для каждого модуля X и любого такого прямого разложения

$$X = M \oplus Y = \bigoplus_{i \in I} X_i,$$

что $M \cong A_A$, существуют такие подмодули $X_i' \subseteq X_i$ $(i \in I)$, что

$$X = M \oplus \Bigl(\bigoplus_{i \in I} X_i'\Bigr).$$

Николсон доказал следующий результат.

Теорема A [16]. *Каждое чистое кольцо — кольцо со свойством замены. Если A — кольцо со свойством замены и все его идемпотенты центральны, то A — чистое кольцо.*

Для кольца A обозначим через $\mathrm{S}(A)$ непустое множество всех собственных идеалов в A, порождённых центральными идемпотентами. Максимальные (по включению) элементы множества $\mathrm{S}(A)$ называются *пирсовскими* идеалами. Фактор-кольца по пирсовским идеалам называются *пирсовскими слоями*.

У. Бёрджесс и У. Стефенсон доказали следующий результат.

Теорема B [11]. *A — кольцо со свойством замены и все его идемпотенты центральны тогда и только тогда, когда все пирсовские слои кольца A — локальные кольца.*

В. Камилло и Х.-П. Ю доказали следующий результат.

Теорема C [12]. *Пусть A — кольцо без бесконечных множеств ортогональных идемпотентов. Тогда эквивалентны следующие утверждения*:

1) *A — кольцо со свойством замены*;
2) *A — чистое кольцо*;
3) *A — полусовершенное кольцо.*

Теорема 1, являющаяся первым основным результатом нашей работы, связана с теоремами A, B и C.

Теорема 1. *Если кольцо A не содержит бесконечных множеств нецентральных ортогональных идемпотентов, то равносильны следующие условия*:

1) *A — кольцо со свойством замены*;
2) *A — чистое кольцо*;
3) *все пирсовские слои кольца A — полусовершенные кольца.*

Подмодуль X модуля M называется *малым в M*, если $X+Y \neq M$ для любого собственного подмодуля P модуля M. Следуя [15], мы называем модуль M *I_0-модулем*, если каждый его немалый подмодуль содержит ненулевое прямое слагаемое модуля M. (В [1—3, 9] I_0-модули называются *слабо регулярными* модулями.) I_0-модули изучались в [1—5; 9; 14; 15; 18, гл. 3; 19] и других работах.

Автор доказал следующие две теоремы.

Теорема D [4]. *A — артиново полуцепное кольцо с нулевым квадратом радикала Джекобсона тогда и только тогда, когда все правые A-модули являются I_0-модулями и A_A — прямая сумма неразложимых модулей.*

Теорема E [6]. *Если кольцо A не содержит бесконечных множеств идемпотентов, ортогональных по модулю идеала $\mathrm{SI}(A_A)$, то все правые A-модули являются I_0-модулями тогда и только тогда, когда либо A — полуартиново справа правое V-кольцо, либо $A/\mathrm{SI}(A_A)$ — полуцепное артиново кольцо с нулевым квадратом радикала Джекобсона.*

Связанная с теоремами D и E теорема 2 является вторым основным результатом нашей работы и применима как к кольцам без бесконечных множеств ортогональных идемпотентов, так и к кольцам, у которых все идемпотенты центральны.

Теорема 2. *Если кольцо A не содержит бесконечных множеств нецентральных ортогональных идемпотентов, то все правые A-модули являются I_0-модулями тогда и только тогда, когда либо A — полуартиново справа правое V-кольцо, либо фактор-кольцо кольца A по идеалу $\mathrm{SI}(A_A)$ — полуцепное артиново кольцо с нулевым квадратом радикала Джекобсона.*

Доказательство теорем 1 и 2 разбито на ряд утверждений, некоторые из которых представляют самостоятельный интерес. Приведём необходимые определения и обозначения. Пересечение всех максимальных подмодулей модуля M обозначается через $\mathrm{J}(M)$ и называется *радикалом Джекобсона* модуля M. Кольцо A называется *правым V-кольцом* при выполнении следующих эквивалентных условий (см. [7, 7.32A]):

1) все простые правые A-модули инъективны;
2) в кольце A каждый собственный правый идеал — пересечение максимальных правых идеалов.

Модуль называется *полуартиновым*, если каждый его ненулевой фактор-модуль содержит простой подмодуль. Модуль называется *цепным*, если любые два его подмодуля сравнимы по включению. Прямая сумма цепных модулей называется *полуцепным* модулем. Модуль M называется *инъективным*, если для любого модуля X и каждого подмодуля Y модуля X все гомоморфизмы $Y \to M$ продолжаются до гомоморфизмов $X \to M$.

Для любого модуля M и каждого ординального числа α определим с помощью трансфинитной индукции подмодуль $\mathrm{SI}_\alpha(M)$. Полагаем, что $\mathrm{SI}_0(M) = 0$, $\mathrm{SI}_1(M)$ — сумма всех простых инъективных подмодулей модуля M (полагаем $\mathrm{SI}_1(M) = 0$, если M не имеет простых инъективных подмодулей). Допустим, что α — ординальное число и для всех $\beta < \alpha$ подмодули SI_β определены. Если $\alpha - 1$ существует, то обозначим через $\mathrm{SI}_\alpha(M)$ такой подмодуль в M, что $\mathrm{SI}_\alpha(M)/\mathrm{SI}_{\alpha-1}(M) = \mathrm{SI}_1\big(M/\mathrm{SI}_{\alpha-1}(M)\big)$. Если $\alpha - 1$ не существует, то обозначим через $\mathrm{SI}_\alpha(M)$ подмодуль $\bigcup\limits_{\beta<\alpha} \mathrm{SI}_\beta(M)$ модуля M. Найдётся такое α, что $\mathrm{SI}_\alpha(M) = \mathrm{SI}_{\alpha+1}(M)$. Подмодуль $\mathrm{SI}_\alpha(M) = \mathrm{SI}_{\alpha+1}(M)$ обозначается через $\mathrm{SI}(M)$.

Так как каждый гомоморфный образ любой суммы простых инъективных модулей является прямой суммой простых инъективных модулей, то все подмодули $\mathrm{SI}_\alpha(M)$ вполне инвариантны в M. В частности, $\mathrm{SI}(M)$ — *вполне инвариантный подмодуль в M и $\mathrm{SI}(A_A)$ — идеал кольца A.*

Пусть A/B — фактор-кольцо кольца A, $h\colon A \to A/B$ — естественный эпиморфизм и $\{e_i\}_{i\in I}$ — некоторое множество идемпотентов в A. Идемпотенты e_i называются *ортогональными* (*центральными*, *нецентральными*) *по модулю идеала B*, если все идемпотенты $h(e_i)$ ортогональны (центральны, нецентральны) в кольце A/B. Если $\{\bar{e}_i\}_{i\in I}$ — некоторое множество идемпотентов кольца A/B и существует такое множество идемпотентов $\{e_i\}_{i\in I}$ кольца A, что $h(e_i) = \bar{e}_i$ для всех i, то говорят, что множество $\{\bar{e}_i\}_{i\in I}$ *поднимается* до множества $\{e_i\}_{i\in I}$. Модуль M называется *полупростым*, если каждый его подмодуль является прямым слагаемым в M. Кольцо A называется *полусовершенным*, если $A/\mathrm{J}(A)$ — артиново полупростое кольцо, все идемпотенты которого поднимаются до идемпотентов кольца A.

Кольцо называется *нормальным*, если все его идемпотенты центральны. Ненулевой идемпотент e кольца A называется *вполне центральным*, если для любого идемпотента $f \in A$ элемент ef лежит в центре кольца A; в этом случае ef — центральный идемпотент в A, идемпотент $e = e \cdot 1$ централен и $eA = Ae$ — нормальное кольцо. Фактор-кольцо A/P кольца A называется *максимальным неразложимым* фактор-кольцом, если $P = Q$ для любого такого идеала Q кольца A, что $Q \subseteq P$ и A/Q — неразложимое кольцо (т. е. A/Q не имеет нетривиальных центральных идемпотентов). Кольцо A называется *регулярным* (по фон Нейману), если $a \in aAa$ для любого элемента $a \in A$. Подмодуль N модуля M называется *существенным*, если для любого подмодуля X модуля M равенство $X \cap N = 0$ влечёт равенство $X = 0$. В этом случае говорят, что M — *существенное расширение* модуля N. Подмодуль X модуля M называется *замкнутым*, если $X = N$ для любого такого подмодуля N в M, что X — существенный подмодуль в N. Для правого модуля M над кольцом A через $\mathrm{Sing}(M)$ обозначается *сингулярный подмодуль* модуля M, образованный всеми элементами $m \in M$, аннуляторы которых являются существенными правыми идеалами кольца A. Модуль M называется *сингулярным* (*несингулярным*), если $\mathrm{Sing}(M) = M$ ($\mathrm{Sing}(M) = 0$). Через $\mathrm{Soc}(M)$ обозначается цоколь модуля M.

Для краткости назовём кольцо A *специальным справа*, если все правые A-модули являются I_0-модулями.

Лемма 1. *Пусть $\{B_i\}_{i\in I}$ — множество всех таких собственных идеалов кольца A, что A/B_i — неразложимое кольцо.*

1. *Множество $\{B_i\}_{i\in I}$ содержит пересечение любой цепи идеалов, лежащих в $\{B_i\}_{i\in I}$.*
2. *Для любого неразложимого фактор-кольца A/B кольца A существует такое максимальное неразложимое фактор-кольцо A/P кольца A, что $P \subseteq B$.*

Доказательство. 1. Без ограничения общности можно считать, что $B = 0$, поскольку можно перейти к фактор-кольцу A/B. Пусть $\bigcap_{j\in J} B_j = 0$, где $\{B_j\}_{j\in J\subseteq I}$ — цепь по включению, множество J является вполне упорядоченным и $B_k \subseteq B_j$ при $k \geqslant j$. Пусть $h_j\colon A \to A/B_j$ — естественные эпиморфизмы.

Допустим, что кольцо A не является неразложимым. Тогда A содержит такие ненулевые центральные идемпотенты e и f, что $e + f = 1$. Так как все кольца A/B_j неразложимы, то $h_j(e) \neq h_j(0)$ и $h_k(f) \neq h_k(0)$ для некоторых $j, k \in J$. Тогда $e \notin B_j$ и $f \notin B_k$. Допустим, что $j \leqslant k$. Тогда $B_k \subseteq B_j$, $e \notin B_k$, $h_k(e)$ и $h_k(f)$ — ненулевые центральные идемпотенты неразложимого кольца A/B_j и $h_k(e) + h_k(f) = h_k(1)$. Получено противоречие. Аналогично приходим к противоречию, если $k \leqslant j$.

2. Утверждение следует из утверждения 1 и леммы Цорна. □

Лемма 2. *Для кольца A равносильны следующие условия*:

1) *A — кольцо со свойством замены*;
2) *все фактор-кольца кольца A — кольца со свойством замены*;
3) *все пирсовские слои кольца A — кольца со свойством замены*;
4) *все неразложимые фактор-кольца кольца A — кольца со свойством замены*;
5) *все максимальные неразложимые фактор-кольца кольца A — кольца со свойством замены.*

Доказательство. Эквивалентность условий 1), 2), 3 и 4) доказана в [17, 6.92] (см. также [18, 32.1]). Импликация 4) $\Longrightarrow$ 5) очевидна. Импликация 5) $\Longrightarrow$ 4) вытекает из утверждения 2 леммы 1 и того, что все фактор-кольца кольца со свойством замены — кольца со свойством замены. □

Лемма 3. *Пусть P — собственный идеал кольца A, порождённый некоторым множеством центральных идемпотентов кольца A, $h\colon A \to A/P$ — естественный эпиморфизм.*

1. *Любое конечное множество ортогональных идемпотентов $\{\bar{e}\}_{i=1}^{n}$ кольца A/P поднимается до некоторого множества $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ ортогональных идемпотентов кольца A.*
2. *Любое счётное множество ортогональных идемпотентов $\{\bar{e}\}_{i=1}^{\infty}$ кольца A/P поднимается до некоторого счётного множества $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ ортогональных идемпотентов кольца A.*
3. *Если кольцо A не содержит бесконечных множеств нецентральных ортогональных идемпотентов, то кольцо A/P не содержит бесконечных множеств нецентральных ортогональных идемпотентов.*

Доказательство. 1. Существуют такие элементы $a_1, \ldots, a_n \in A$, что $\bar{e}_i = h(a_i)$ для всех i. Тогда $a_i - a_i^2 \in P$ для всех i, причём $a_i a_j \in P$ при $i \neq j$. Существуют такие центральные идемпотенты $f_1, \ldots, f_m \in P$, что идеал $\sum\limits_{k=1}^{m} f_k A$ содержит все элементы $a_i - a_i^2$ и $a_i a_j \in P$, где $i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$. Существует такой центральный идемпотент f кольца A, что $fA = \sum\limits_{k=1}^{m} f_k A$. Обозначим $e_i = a_i(1-f)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Тогда $h(e_i) = h(a_i)$ для всех i. Кроме того, все элементы $e_i - e_i^2$ $(i = 1, \ldots, n)$ и $e_i e_j$ $(i \neq j)$ лежат в идеале $fA \cap (1-f)A = 0$. Поэтому $e_1, \ldots, e_n$ — искомые ортогональные идемпотенты кольца A.

2. Существует такое счётное множество $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ элементов кольца A, что $\bar{e}_i = h(a_i)$ для всех i. Пусть $n \in \mathbb{N}$. По утверждению 1 существует такое множество ортогональных идемпотентов $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ кольца A, что $h(e_i) = \bar{e}_i$ при $i = 1, \ldots, n$. Теперь достаточно доказать существование такого идемпотента $e_{n+1} \in A$, что идемпотенты $e_1, \ldots, e_{n+1}$ ортогональны и $h(e_{n+1}) = \bar{e}_{n+1}$. Идеал P содержит элементы $a_{n+1} - a_{n+1}^2$, $e_i a_{n+1}$, $a_{n+1} e_i$ при $i = 1, \ldots, n$. Существуют такие центральные идемпотенты $f_1, \ldots, f_m \in P$, что идеал $\sum\limits_{k=1}^{m} f_k A$ содержит элементы $a_{n+1} - a_{n+1}^2$, $e_i a_{n+1}$, $a_{n+1} e_i$ при $i = 1, \ldots, n$. Существует такой центральный идемпотент f кольца A, что $fA = \sum\limits_{k=1}^{m} f_k A$. Обозначим $e_{n+1} = a_{n+1}(1-f)$. Тогда $h(e_{n+1}) = h(a_{n+1})$. Кроме того, элементы $e_{n+1} - e_{n+1}^2$, $e_i e_{n+1}$, $e_{n+1} e_i$ $(i \neq j)$ лежат в идеале $fA \cap (1-f)A = 0$ при $i = 1, \ldots, n$. Поэтому $e_1, \ldots, e_{n+1}$ — ортогональные идемпотенты кольца A.

3. Утверждение следует из утверждения 2. □

Лемма 4. *Пусть $a_1, \ldots, a_m$ — элементы кольца A и $f_1, \ldots, f_k$ — многочлены с целыми коэффициентами от некоммутирующих переменных $x_1, \ldots, x_m$, $y_1, \ldots, y_n$. Для каждого фактор-кольца A/P кольца A обозначим через h_P естественный эпиморфизм $A \to A/P$. Для кольца A равносильны следующие условия:*

1) *существуют такие элементы $b_1, \ldots, b_n \in A$, что*
$$f_i(a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n) = 0$$
при $i = 1, \ldots, k$;

2) *для каждого пирсовского слоя A/P существуют такие элементы $\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n \in A/P$, что*
$$f_i(h_P(a_1), \ldots, h_P(a_m), \bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n) = h_P(0)$$
при $i = 1, \ldots, k$;

3) *для каждого неразложимого фактор-кольца A/P кольца A существуют такие элементы $\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n \in A/P$, что*
$$f_i(h_P(a_1), \ldots, h_P(a_m), \bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n) = h_P(0)$$
при $i = 1, \ldots, k$;

4) *для каждого максимального неразложимого фактор-кольца A/P кольца A существуют такие элементы $\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n \in A/P$, что*
$$f_i(h_P(a_1), \ldots, h_P(a_m), \bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_n) = h_P(0)$$
при $i = 1, \ldots, k$.

Доказательство. Эквивалентность условий 1), 2) и 3) доказана в [18, 11.4]. Импликация 3) $\Longrightarrow$ 4) очевидна. Импликация 4) $\Longrightarrow$ 3) следует из того, что по второму утверждению леммы 1 каждое неразложимое фактор-кольцо кольца A изоморфно фактор-кольцу некоторого максимального неразложимого фактор-кольца кольца A. $\square$

Лемма 5. *Для кольца A равносильны следующие условия*:

1) *A — чистое кольцо*;
2) *все пирсовские слои кольца A — чистые кольца*;
3) *все неразложимые фактор-кольца кольца A — чистые кольца*;
4) *все максимальные неразложимые фактор-кольца кольца A — чистые кольца.*

Доказательство. Импликации 1) $\Longrightarrow$ 2) и 1) $\Longrightarrow$ 3) следуют из того, что все фактор-кольца чистых колец — чистые кольца. Так как все фактор-кольца чистых колец — чистые кольца, то импликация 4) $\Longrightarrow$ 3) следует из того, что по второму утверждению леммы 1 каждое неразложимое фактор-кольцо кольца A изоморфно фактор-кольцу некоторого максимального неразложимого фактор-кольца кольца A.

Докажем импликации 2) $\Longrightarrow$ 1) и 3) $\Longrightarrow$ 1). Пусть X_1, X_2, Y_1, Y_2 и Y_3 — некоммутирующие переменные. Обозначим через $f_i(X_1, X_2, Y_1, Y_2)$ $(i = 1, \ldots, 4)$ многочлены $X_1 - Y_1 - Y_2$, $Y_1 - Y_1^2$, $X_2 - Y_2Y_3$, $X_2 - Y_3Y_2$. В случае условия 2) пусть A/P — пирсовский слой кольца A. В случае условия 3) пусть A/P — неразложимое фактор-кольцо кольца A. Пусть $h\colon A \to A/P$ — естественный эпиморфизм и $a \in A$. Обозначим $a_1 = a \in A$ и $a_2 = 1 \in A$. Так как $h(A)$ — чистое кольцо, то существуют такие элементы $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3 \in h(A)$, что

$$\begin{aligned}
&f_1(h(a_1), h(a_2), \bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3) = h(a_1) - \bar{b}_1 - \bar{b}_2 = h(0) = h(a) - \bar{b}_1 - \bar{b}_2,\\
&f_2(h(a_1), h(a_2), \bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3) = \bar{b}_1 - \bar{b}_1^2 = h(0),\\
&f_3(h(a_1), h(a_2), \bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3) = h(a_2) - \bar{b}_2\bar{b}_3 = h(1) - \bar{b}_2\bar{b}_3 = h(0),\\
&f_4(h(a_1), h(a_2), \bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3) = h(a_2) - \bar{b}_3\bar{b}_2 = h(1) - \bar{b}_3\bar{b}_2 = h(0).
\end{aligned}$$

По лемме 4 существуют такие элементы $b_1, b_2, b_3 \in A$, что

$$\begin{aligned}
&f_1(a_1, a_2, b_1, b_2, b_3) = a_1 - b_1 - b_2 = a - b_1 - b_2 = 0,\\
&f_2(a_1, a_2, b_1, b_2, b_3) = b_1 - b_1^2 = 0,\\
&f_3(a_1, a_2, b_1, b_2, b_3) = a_2 - b_2b_3 = 1 - b_2b_3 = 0,\\
&f_4(a_1, a_2, b_1, b_2, b_3) = a_2 - b_3b_2 = 1 - b_3b_2 = 0.
\end{aligned}$$

Тогда $a = b_1 + b_2$, где b_1 — идемпотент и b_2 — обратимый элемент. Поэтому A — чистое кольцо. $\square$

Лемма 6 [22]. *Если A — кольцо со свойством замены, то любое счётное множество ортогональных идемпотентов любого фактор-кольца кольца A поднимается до некоторого счётного множества ортогональных идемпотентов кольца A.*

Лемма 7. *Пусть A — полуартиново справа кольцо.*

1. *Каждый правый A-модуль является полуартиновым.*
2. *A — кольцо со свойством замены.*
3. *Если A не содержит бесконечных множеств ортогональных идемпотентов, то A — совершенное слева кольцо.*
4. *Любое счётное множество ортогональных идемпотентов любого фактор-кольца кольца A поднимается до некоторого счётного множества ортогональных идемпотентов кольца A.*

Доказательство. Утверждение 1 проверяется непосредственно. Утверждение 2 доказано в [10, 1.4]. Утверждение 3 доказано в [21, 43.9]. Утверждение 4 следует из утверждения 2 и леммы 6. □

Предложение 8. *Пусть кольцо A не содержит бесконечных множеств нецентральных ортогональных идемпотентов.*

1. *Никакой пирсовский слой A/P кольца A не содержит бесконечных множеств ортогональных идемпотентов.*
2. *A — кольцо со свойством замены тогда и только тогда, когда все пирсовские слои кольца A — полусовершенные кольца.*
3. *A — чистое кольцо тогда и только тогда, когда все пирсовские слои кольца A — полусовершенные кольца.*
4. *Если A — полуартиново справа кольцо, то все его пирсовские слои — совершенные слева кольца.*
5. *Если правый идеал B кольца A содержит бесконечное множество ортогональных идемпотентов, то B содержит бесконечное множество ненулевых вполне центральных ортогональных идемпотентов.*
6. *Если A содержит бесконечное множество ортогональных идемпотентов, то в A существуют такие замкнутые правые идеалы B и C, что $B \cap C = 0$, $B \oplus C$ — существенный правый идеал, B не содержит бесконечных множеств ортогональных идемпотентов, C содержит бесконечное множество $\{e_i\}_{i \in I}$ ненулевых вполне центральных ортогональных идемпотентов e_i кольца A и C_A — существенное расширение $\bigoplus\limits_{i \in I} e_i A$.*

Доказательство. 1. Допустим, что пирсовский слой A/P содержит счётное множество $\{\bar{e}_i\}_{i=1}^{\infty}$ нетривиальных ортогональных идемпотентов. Пусть $h\colon A \to A/P$ — естественный эпиморфизм. По утверждению 2 леммы 3 в кольце A существует такое счётное множество ортогональных идемпотентов $\{e_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq A \setminus P$, что $h(e_i) = \bar{e}_i$ для всех i. Так как A не содержит бесконечных множеств нецентральных ортогональных идемпотентов, то существует центральный идемпотент $e \in \{e_i\}_{i=1}^{\infty}$. Поскольку A/P — пирсовский слой, то $A = P + eA$. Тогда $h(e) = h(1)$, что противоречит нетривиальности идемпотента $h(e)$ кольца $h(A)$.

2. Импликация $\Longrightarrow$ следует из утверждения 1, леммы 2 и теоремы C.

Докажем импликацию $\Longleftarrow$. По теореме C все пирсовские слои кольца A — кольца со свойством замены. По лемме 2 A — кольцо со свойством замены.

3. Импликация $\Longrightarrow$ следует из утверждения 2 и того, что по теореме A любое чистое кольцо является кольцом со свойством замены.

Докажем импликацию $\Longleftarrow$. По теореме C все пирсовские слои кольца A — чистые кольца. По лемме 5 A — чистое кольцо.

4. Пусть A — полуартиново справа кольцо и A/P — его пирсовский слой. Так как A/P — полуартиново справа кольцо, то по утверждению 2 леммы 7 A — кольцо со свойством замены, не содержащее по утверждению 1 бесконечных множеств ортогональных идемпотентов. По утверждению 3 леммы 7 A/P — совершенное слева кольцо.

5. Из условий следует, что B содержит бесконечное множество $\{e_i\}_{i\in I}$ ненулевых центральных ортогональных идемпотентов. Если почти все идемпотенты e_i вполне центральны, то всё доказано. В противном случае существует такое бесконечное подмножество $J \subseteq I$, что при $j \in J$ все идемпотенты e_j не вполне центральны. Это означает существование такого множества идемпотентов $\{f_j\}_{j\in J}$ в A, что все элементы e_jf_j не лежат в центре кольца A. Так как все e_j и f_j — идемпотенты и все идемпотенты e_j центральны и ортогональны, то все элементы e_jf_j — нецентральные ортогональные идемпотенты, лежащие в B. Это противоречит условию.

6. По утверждению 5 A содержит бесконечное множество ненулевых вполне центральных ортогональных идемпотентов. Из леммы Цорна следует существование такого бесконечного множества $\{e_i\}_{i\in I}$ ненулевых вполне центральных ортогональных идемпотентов e_i кольца A, что для любого ненулевого вполне центрального идемпотента f кольца A идеал $D \equiv \bigoplus\limits_{i\in I} e_iA$ имеет ненулевое пересечение с идеалом fA. Существует такой замкнутый правый идеал C кольца A, что C_A — существенное расширение D_A. По лемме Цорна существует такой замкнутый правый идеал B кольца A, что $B \cap C = 0$ и $B \oplus C$ — существенный правый идеал. Из утверждения 5 следует, что B не содержит бесконечных множеств ортогональных идемпотентов. $\square$

Лемма 9 [5, лемма 1.4]. *Для кольца A равносильны следующие условия*:

1) *A — специальное справа кольцо*;
2) *для каждого правого A-модуля M верно, что $\mathrm{J}(M)$ — полупростой модуль и если $\mathrm{J}(M) = 0$, то каждый ненулевой подмодуль модуля M содержит ненулевое прямое слагаемое модуля M*;
3) *каждый правый A-модуль либо имеет ненулевое инъективное прямое слагаемое, либо является полупростым модулем и лежит в радикале Джекобсона своей инъективной оболочки*;
4) *каждый циклический правый A-модуль либо имеет ненулевое инъективное прямое слагаемое, либо является полупростым модулем.*

Лемма 10 [6, лемма 5 (3)]. *Пусть A — кольцо и $A \neq \mathrm{SI}(A_A) \equiv S$. Каждый ненулевой инъективный правый A/S_α-модуль X содержит ненулевое прямое* *слагаемое, являющееся инъективным A-модулем. В частности, каждый неразложимый инъективный правый A/S-модуль является инъективным A-модулем и поэтому* $\mathrm{SI}\big((A/S)_{A/S}\big) = 0$.

Лемма 11 [6, лемма 1.4]. *Для кольца A равносильны следующие условия*:

1) *A — специальное справа кольцо*;
2) *либо $\mathrm{SI}(A_A) = A$, либо $\mathrm{SI}(A_A) \neq A$ и $A/\,\mathrm{SI}(A_A)$ — специальное справа кольцо*;
3) *любое фактор-кольцо кольца A является специальным справа кольцом*;
4) *любое кольцо, Морита-эквивалентное кольцу A, является специальным справа кольцом*;
5) *для любого ненулевого идемпотента $e \in A$ кольцо eAe является специальным справа кольцом.*

Лемма 12. *Пусть A — специальное справа кольцо.*

1. $\mathrm{Sing}(A_A) \subseteq \mathrm{J}(A) \subseteq \mathrm{Soc}(A_A)$, $\big(\mathrm{J}(A)\big)^2 = 0$, $\mathrm{J}(A)$ *совпадает с первичным радикалом* $\mathrm{N}(A)$ *кольца A, для любого элемента $a \in A \setminus \mathrm{J}(A)$ правый идеал aA содержит ненулевой идемпотент, каждый неразложимый правый A-модуль является артиновым нётеровым цепным модулем композиционной длины не больше* 2.
2. *Если $\mathrm{J}(A) = 0$, то любой ненулевой правый идеал B кольца A содержит такой ненулевой идемпотент e, что eAe — специальное справа инъективное справа регулярное кольцо.*
3. *Если $\mathrm{Soc}(A_A) = 0$, то A не содержит ненулевых вполне центральных идемпотентов.*

Доказательство. 1. По лемме 9 $\mathrm{J}(A) \subseteq \mathrm{Soc}(A_A)$. Так как $\mathrm{J}(A) \subseteq \mathrm{Soc}(A_A)$, то $\big(\mathrm{J}(A)\big)^2 \subseteq \mathrm{Soc}(A_A)\mathrm{J}(A) = 0$. Поскольку $\big(\mathrm{J}(A)\big)^2 = 0$, то $\mathrm{J}(A) \subseteq \mathrm{N}(A)$. Обратное включение верно для любых колец. Так как A_A — I_0-модуль, то для любого элемента $a \in A \setminus \mathrm{J}(A)$ правый идеал aA содержит ненулевой идемпотент. По [4, следствие 7] каждый неразложимый правый A-модуль является артиновым нётеровым цепным модулем композиционной длины не больше 2.

Допустим, что $\mathrm{Sing}(A_A) \not\subseteq \mathrm{J}(A)$ и $x \in \mathrm{Sing}(A_A) \setminus \mathrm{J}(A)$. Тогда правый идеал xA содержит ненулевой идемпотент $e \in \mathrm{Sing}(A_A)$ и правый аннулятор $(1-e)A$ идемпотента e является существенным правым идеалом. Это противоречит равенству $eA \cap (1-e)A = 0$.

2. Так как $\mathrm{J}(A) = 0$ и $\mathrm{Sing}(A_A) \subseteq \mathrm{J}(A)$, то по лемме 9 ненулевой правый идеал B содержит такой ненулевой идемпотент e, что eA — инъективный несингулярный A-модуль. Тогда eAe — инъективное справа регулярное кольцо, поскольку кольцо eAe изоморфно кольцу эндоморфизмов инъективного несингулярного модуля eA (см. [8, 19.29]). По лемме 11 eAe — специальное справа кольцо.

3. Допустим, что кольцо A содержит ненулевой вполне центральный идемпотент f. Обозначим через R кольцевой прямой сомножитель $fA = Af$ кольца A.

Так как A — специальное справа кольцо и $\mathrm{Soc}(A_A) = 0$, то R — специальное справа кольцо и $\mathrm{Soc}(R_R) = 0$. Поскольку f — вполне центральный идемпотент в A, то кольцо R нормально. Так как по утверждению 1 $\mathrm{J}(R) \subseteq \mathrm{Soc}(R_R) = 0$, то по утверждению 2 кольцо R содержит такой ненулевой центральный идемпотент e, что $eR = Re$ — специальное справа нормальное регулярное кольцо. Нормальное регулярное кольцо eR — V-кольцо [13, 6.18]. Специальное справа правое V-кольцо eR полуартиново справа [6, лемма 6]. Поэтому кольцевое прямое слагаемое eR кольца A содержит минимальный правый идеал, являющийся минимальным правым идеалом кольца A. Это противоречит равенству $\mathrm{Soc}(A_A) = 0$. □

Лемма 13. *Пусть A — полупервичное неартиново кольцо и $\mathrm{Soc}(A_A)$ — существенный правый идеал в A.*

1. *Для каждого ненулевого правого идеала X кольца A существует такой идемпотент $f \in X$, что fA — простой модуль и $X = fA \oplus X \cap (1-f)A$. В частности, если X — неразложимый правый идеал, то $X = fA$.*
2. $\mathrm{Sing}(A_A) = 0$.
3. *Если ненулевой правый идеал B кольца A не содержит бесконечных множеств ортогональных идемпотентов, то существует такой идемпотент $f \in B$, что $B = fA$ — конечная прямая сумма простых модулей.*
4. *Пусть $f = f^2 \in A$ и C — такой замкнутый правый идеал в A, что $fA \cap C = 0$ и $fA \oplus C$ — существенный правый идеал. Если существует такой идеал D кольца A, что C_A — существенное расширение модуля D_A, то f — центральный идемпотент, $C = (1-f)A$ и A — прямое произведение колец fA и C.*
5. *Если кольцо A не содержит бесконечных множеств нецентральных ортогональных идемпотентов, то $A = B \times C$, причём B — полупростое артиново кольцо (или $B = 0$) и C — полупервичное неартиново кольцо, содержащее существенный правый идеал $D = \bigoplus_{i\in I} e_iA$, где $\{e_i\}_{i\in I}$ — бесконечное множество ненулевых вполне центральных ортогональных идемпотентов кольца A.*

Доказательство. 1. Так как $\mathrm{Soc}(A_A)$ — существенный правый идеал, то ненулевой правый идеал X содержит минимальный правый идеал F. Минимальный правый идеал F полупервичного кольца A порождается идемпотентом.

2. Так как $\mathrm{Sing}(A_A)$ не содержит ненулевых идемпотентов, то утверждение 2 следует из утверждения 1.

3. Утверждение 3 проверяется с помощью утверждения 1.

4. Так как C_A — существенное расширение модуля D_A, то A-модуль C/D сингулярен. Пусть $a \in A$ и $\varphi\colon C_A \to fA$ — гомоморфизм, определяемый правилом $\varphi(c) = fac$ для всех $c \in C$. Так как $\varphi(D) = faD \subseteq fA \cap D = 0$, то $D \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi)$. Поэтому $\varphi(C)$ — гомоморфный образ сингулярного модуля C/D. Тогда $\varphi(C) \subseteq \mathrm{Sing}(A_A) = 0$. Поэтому $fAC = 0$ и $C = (1-f)C \subseteq (1-f)A$. Так

как $fA \oplus C$ — существенный подмодуль в $fA \oplus (1-f)A$ и $C \subseteq (1-f)A$, то C — существенный подмодуль в $(1-f)A$. Кроме того, C — замкнутый подмодуль в A_A. Поэтому $C = (1-f)A$ и $fA(1-f)A = fAC = 0$. Так как $\big((1-f)AfA\big)^2 = 0$ и кольцо A полупервично, то $(1-f)AfA = 0 = fA(1-f)A$. Поэтому f — центральный идемпотент.

5. Так как A — неполупростое кольцо, то по утверждению 3 A содержит бесконечное множество ортогональных идемпотентов. По утверждению 6 предложения 8 существуют такие замкнутые правые идеалы B и C кольца A, что $B \cap C = 0$, $B \oplus C$ — существенный правый идеал, B не содержит бесконечных множеств ортогональных идемпотентов, C содержит бесконечное множество $\{e_i\}_{i \in I}$ ненулевых вполне центральных ортогональных идемпотентов e_i кольца A и C_A — существенное расширение идеала $D \equiv \bigoplus\limits_{i \in I} e_i A$.

Можно считать, что $B \neq 0$. По утверждению 3 существует такой идемпотент $f \in B$, что $B = fA$ — конечная прямая сумма простых модулей. По утверждению 4 f — центральный идемпотент, $C = (1-f)A$ и A — прямое произведение колец fA и C. $\square$

Лемма 14. *Пусть A — специальное справа кольцо, не содержащее бесконечных множеств нецентральных ортогональных идемпотентов.*

1. *Все пирсовские слои кольца A — артиновы полуцепные кольца с нулевым квадратом радикала Джекобсона.*
2. *A — кольцо со свойством замены.*
3. *Любое счётное множество ортогональных идемпотентов любого фактор-кольца кольца A поднимается до некоторого счётного множества ортогональных идемпотентов кольца A.*
4. *Любое фактор-кольцо кольца A либо является артиновым полуцепным кольцом с нулевым квадратом радикала Джекобсона, либо содержит бесконечное множество вполне центральных ортогональных идемпотентов.*
5. *$\mathrm{Soc}(A/B)_{A/B} \neq 0$ для любого ненулевого фактор-кольца A/B кольца A, т. е. A — полуартиново справа кольцо.*
6. *Любое счётное множество ортогональных идемпотентов любого фактор-кольца кольца A поднимается до некоторого счётного множества ортогональных идемпотентов кольца A.*
7. *Если кольцо A не содержит инъективных минимальных правых идеалов, то A — артиново полуцепное кольцо с нулевым квадратом радикала Джекобсона.*

Доказательство. По лемме 11 все фактор-кольца специальных справа колец являются специальными справа.

1. По утверждению 1 предложения 8 никакой пирсовский слой кольца A не содержит бесконечных множеств ортогональных идемпотентов. Теперь утверждение 1 следует из теоремы D.

2. Утверждение 2 следует из утверждения 1 и утверждения 2 предложения 8.

3. Утверждение 3 следует из утверждения 2 и леммы 6.

4. Если фактор-кольцо A/B кольца A не содержит бесконечных множеств ортогональных идемпотентов, то по теореме D A/B — артиново полуцепное кольцо с нулевым квадратом радикала Джекобсона. Если A/B содержит бесконечное множество ортогональных идемпотентов, то по утверждению 5 предложения 8 A/B содержит бесконечное множество вполне центральных ортогональных идемпотентов.

5. Так как A/B — специальное справа кольцо, то утверждение 5 следует из утверждения 4 и утверждения 3 леммы 12.

6. Так как A — полуартиново справа кольцо по утверждению 5, то утверждение 6 следует из утверждения 4 леммы 7.

7. Допустим, что A не является артиновым полуцепным кольцом с нулевым квадратом радикала Джекобсона. По утверждению 4 A содержит бесконечное множество ненулевых вполне центральных ортогональных идемпотентов. Пусть $J = \mathrm{J}(A)$, $R = A/J$ и $h\colon A \to R$ — естественный эпиморфизм. По лемме 11 и утверждению 5 R — специальное справа полуартиново справа полупервичное кольцо. Так как J не содержит ненулевых идемпотентов, то R содержит бесконечное множество ненулевых вполне центральных ортогональных идемпотентов, являющихся естественными образами ненулевых вполне центральных ортогональных идемпотентов кольца A. По утверждению 5 леммы 13 $R = B\times C$, причём B — полупростое артиново кольцо (или $B = 0$) и C — специальное справа полупервичное неартиново кольцо, содержащее существенный правый идеал $D = \bigoplus\limits_{i\in I} h(e_i)A$, где $\{e_i\}_{i\in I}$ — бесконечное множество ненулевых вполне центральных ортогональных идемпотентов кольца A. Так как C_A — неполупростой модуль над специальным справа кольцом A, то по утверждению 3 леммы 9 модуль C_A имеет ненулевое инъективное прямое слагаемое X. По утверждению 1 леммы 13 существует такой идемпотент $\bar f \in X \subseteq C \subseteq R$, что $\bar fR$ — простой R-модуль и $\bar fR$ — прямое слагаемое модуля X_R, являющегося инъективным A-модулем. Тогда $\bar fA$ — простой инъективный A-модуль. Так как идемпотенты кольца R поднимаются до идемпотентов кольца A, то $\bar f = h(f)$ для некоторого ненулевого идемпотента $f \in A$. Тогда fA/fJ — простой инъективный A-модуль и $fJ \neq 0$, поскольку в противном случае кольцо A содержит инъективный минимальный правый идеал. Поэтому fA — ненулевой неразложимый A-модуль, не являющийся простым модулем. Так как D — существенный правый идеал кольца C, то $\bar fh(e) \neq h(0)$ для некоторого $e \in \{e_i\}_{i\in I}$. Тогда fe — ненулевой центральный идемпотент в A, поскольку e — вполне центральный идемпотент. Так как fA — ненулевой неразложимый A-модуль, то $f = fe$ — ненулевой центральный идемпотент в A. Тогда fA — специальное справа локальное кольцо с радикалом Джекобсона fJ и простой fA-модуль fA/fJ инъективен. Так как fA — специальное справа локальное кольцо, то по теореме D fJ — простой fA-модуль, изоморфный простому инъективному fA-модулю fA/fJ. Тогда fJ — прямое слагаемое неразложимого fA-модуля fA, $fA = fJ$, и получаем противоречие. □

Предложение 15. *Для кольца A равносильны следующие условия*:

1) *A — специальное справа кольцо, не содержащее бесконечных множеств идемпотентов, ортогональных и нецентральных по модулю идеала* $\mathrm{SI}(A_A)$;
2) *A — специальное справа кольцо, не содержащее бесконечных множеств идемпотентов, ортогональных по модулю идеала* $\mathrm{SI}(A_A)$;
3) *либо A — полуартиново справа правое V-кольцо, либо $A/\,\mathrm{SI}(A_A)$ — полуцепное артиново кольцо с нулевым квадратом радикала Джекобсона.*

Доказательство. Эквивалентность условий 2) и 3) следует из теоремы E и леммы 11. Импликация 2) $\Longrightarrow$ 1) очевидна.

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). По лемме 10 можно считать, что $\mathrm{SI}(A_A) \neq A$. По лемме 9 можно считать, что $\mathrm{SI}(A_A) = 0$. Тогда кольцо A не содержит инъективных минимальных правых идеалов и бесконечных множеств нецентральных ортогональных идемпотентов. По утверждению 7 леммы 14 A — артиново кольцо. В частности, A не содержит бесконечных множеств ортогональных идемпотентов. □

Окончание доказательства теорем 1 и 2. Теорема 1 вытекает из утверждений 2 и 3 предложения 8.

Докажем теорему 2. Импликация $\Longleftarrow$ следует из предложения 15.

Докажем импликацию $\Longrightarrow$. По предложению 15 достаточно доказать, что кольцо A не содержит бесконечного множества $\{\bar{e}_i\}_{i=1}^{\infty}$ идемпотентов, ортогональных и нецентральных по модулю идеала $\mathrm{SI}(A_A)$. Допустим, что A содержит такое множество $\{\bar{e}_i\}_{i=1}^{\infty}$. Пусть $h\colon A \to A/\,\mathrm{SI}(A_A)$ — естественный эпиморфизм. Тогда $\{h(\bar{e}_i)\}_{i=1}^{\infty}$ — счётное множество ортогональных нецентральных идемпотентов кольца $h(A)$. По утверждению 6 леммы 14 существует такое счётное множество $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ ортогональных идемпотентов кольца A, что $h(e_i) = h(\bar{e}_i)$ для всех i. Так как A не содержит бесконечных множеств нецентральных ортогональных идемпотентов, то почти все идемпотенты e_i центральны в A. Тогда почти все идемпотенты $h(\bar{e}_i) = h(e_i)$ центральны в A, и получаем противоречие. □

Литература

[1] Абызов А. Н. Замкнутость слабо регулярных модулей относительно прямых сумм // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 2003. — № 9. — С. 3—5.

[2] Абызов А. Н. Слабо регулярные модули над полусовершенными кольцами // Чебышёвский сб. — 2003. — Т. 4, № 1. — С. 4—9.

[3] Абызов А. Н. Слабо регулярные модули // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 2004. — № 3. — С. 3—6.

[4] Туганбаев А. А. Модули с большим числом прямых слагаемых // Фундамент. и прикл. мат. — 2006. — Т. 12, вып. 8. — С. 233—241.

[5] Туганбаев А. А. Кольца, над которыми все модули полурегулярны // Фундамент. и прикл. мат. — 2007. — Т. 13, вып. 2. — С. 185—194.

[6] Туганбаев А. А. Кольца, над которыми все модули являются I_0-модулями // Фундамент. и прикл. мат. — 2007. — Т. 13, вып. 5. — С. 193—200.

[7] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. 1. — М.: Мир, 1977.

[8] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. 2. — М.: Мир, 1979.

[9] Хакми Х. И. Сильно регулярные и слабо регулярные кольца и модули // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1994. — № 5. — С. 60—65.

[10] Baccella G. Exchange property and natural preorder between simple modules over semi-Artinian rings // J. Algebra. — 2002. — Vol. 253. — P. 133—166.

[11] Burgess W. D., Stephenson W. Pierce sheaves of non-commutative rings // Commun. Algebra. — 1976. — Vol. 4, no. 1. — P. 51—75.

[12] Camillo V., Yu H.-P. Exchange rings, units and idempotents // Commun. Algebra. — 1994. — Vol. 22, no. 12. — P. 4737—4749.

[13] Goodearl K. R. Von Neumann Regular Rings. — London: Pitman, 1979.

[14] Hamza H. I_0-rings and I_0-modules // Math. J. Okayama Univ. — 1998. — Vol. 40. — P. 91—97.

[15] Nicholson W. K. I-rings // Trans. Amer. Math. Soc. — 1975. — Vol. 207. — P. 361—373.

[16] Nicholson W. K. Lifting idempotents and exchange rings // Trans. Amer. Math. Soc. — 1977. — Vol. 229. — P. 269—278.

[17] Tuganbaev A. A. Distributive Modules and Related Topics. — Amsterdam: Gordon and Breach, 1999.

[18] Tuganbaev A. A. Rings Close to Regular. — Dordrecht: Kluwer Academic, 2002.

[19] Tuganbaev A. A. Semiregular, weakly regular, and π-regular rings // J. Math. Sci. — 2002. — Vol. 109, no. 3. — P. 1509—1588.

[20] Warfield R. B. Exchange rings and decompositions of modules // Math. Ann. — 1972. — Vol. 199. — P. 31—36.

[21] Wisbauer R. Foundations of Module and Ring Theory. — Philadelphia: Gordon and Breach, 1991.

[22] Wu T. Exchange with primitive factor rings Artinian // Algebra Colloq. — 1996. — Vol. 3, no. 3. — P. 225—230.