Первичные градуированные модули*

И. Н. БАЛАБА
Тульский государственный педагогический
университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: ibalaba@tula.net

УДК 512.55

Ключевые слова: градуированные кольца и модули, первичные кольца и модули.

Аннотация

В работе изучаются свойства первичных и строго первичных градуированных модулей. Определён класс строго первичных градуированных модулей, характеризующий градуированный строго первичный радикал.

Abstract

I. N. Balaba, Prime graded modules, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 4, pp. 65—74.

In this paper, properties of prime and strongly prime graded modules are studied. The class of strongly prime graded modules that determines a graded strongly prime radical is described.

Понятие первичного модуля появилось в работах Р. Е. Джонсона [11] и В. А. Андрунакиевича [1]. В. А. Андрунакиевич [1] использовал первичные модули для характеризации первичного радикала, а в [2] было установлено, что любой специальный радикал в категории колец можно охарактеризовать с помощью некоторого подкласса первичных модулей. В работах [5—8, 10] были рассмотрены различные определения первичности для модулей, обобщающие понятие первичного идеала ассоциативного кольца, а в [15] были установлены связи между этими понятиями.

В категории градуированных колец с помощью первичных градуированных модулей был определён градуированный первичный радикал [12], а в [3] были определены подклассы первичных градуированных модулей, определяющие некоторые специальные радикалы категории градуированных колец.

Всюду далее G — мультипликативная группа с единичным элементом e, все рассматриваемые кольца ассоциативные G-градуированные с единицей 1, $\mathrm{gr.mod}\text{-}A$ — категория правых G-градуированных A-модулей, объектами которой являются унитарные правые G-градуированные A-модули, а морфизмами — гомоморфизмы A-модулей, сохраняющие градуировку.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 08-01-00790-а.

Фундаментальная и прикладная математика, 2008, том 14, № 4, с. 65—74.

Напомним некоторые определения. Для градуированного кольца $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ через $h(A)$ обозначается множество однородных элементов $\bigcup_{g\in G} A_g$, ненулевой элемент $a \in A_g$ называется *однородным элементом степени* g (пишут $\deg a = g$). Идеал I кольца A называется *градуированным* (или *однородным*), если $I = \bigoplus_{g\in G}(I \cap A_g)$. Аналогично определяется множество однородных элементов $h(M)$ градуированного модуля M и градуированный подмодуль $N \subseteq M$.

Если $M = \bigoplus_{g\in G} M_g \in \mathrm{gr.mod}\text{-}A$ и $\sigma \in G$, то *σ-сдвигом* $M(\sigma)$ модуля M называется модуль M, рассматриваемый с градуировкой $M(\sigma)_g = M_{\sigma g}$ $(g \in G)$.

Для $M, N \in \mathrm{gr.mod}\text{-}A$ обозначим через $\mathrm{HOM}_A(M,N)_g$ — множество *гомоморфизмов степени* g, т. е. A-линейных отображений, для которых $f(M_h) \subseteq N_{gh}$ при всех $h \in G$. Из определения следует, что

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{gr.mod}\text{-}A}(M,N) = \mathrm{HOM}_A(M,N)_e,$$
$$\mathrm{HOM}_A(M,N)_g = \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr.mod}\text{-}A}\big(M, N(g)\big) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{gr.mod}\text{-}A}(M(g^{-1}), N).$$

Ясно, что

$$\mathrm{HOM}_A(M,N) = \bigoplus_{g\in G} \mathrm{HOM}_A(M,N)_g$$

является G-градуированной абелевой группой, а

$$\mathrm{END}_A(M) = \bigoplus_{g\in G} \mathrm{HOM}_A(M,M)_g \,—$$

G-градуированным кольцом, которое называется *градуированным кольцом эндоморфизмов* градуированного A-модуля M.

Хорошо известно, что если группа G конечна, или модуль M конечно порождён, или оба модуля M и N имеют конечные носители, то $\mathrm{HOM}_A(M,N) = \mathrm{Hom}_A(M,N)$, где $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ — множество всех гомоморфизмов из модуля M_A в модуль N_A [14, следствия 2.4.4—2.4.6]. В общем случае может иметь место строгое включение.

Градуированный модуль, не имеющий нетривиальных градуированных подмодулей, называется *gr-неприводимым*. Градуированный идеал P называется *gr-первичным*, если для любых градуированных идеалов I, J из включения $IJ \subseteq P$ следует, что либо $I \subseteq P$, либо $J \subseteq P$; *gr-первичное* кольцо — это градуированное кольцо, нулевой идеал которого является gr-первичным. Более полную информацию, касающуюся градуированных колец и модулей, можно найти в [14].

Если $\mathcal{U}$ — непустой класс объектов категории $\mathcal{C}$, то говорят, что объект B категории $\mathcal{C}$ *порождается* (*копорождается*) *классом* $\mathcal{U}$, если для любой пары различных морфизмов $f, g\colon A \to B$ категории $\mathcal{C}$ существует морфизм $h\colon U \to A$ $(h\colon B \to U)$, $U \in \mathcal{U}$, для которого $fh \neq gh$ $(hf \neq hg)$. Если класс $\mathcal{U}$ состоит из одного объекта U, то говорят, что U *порождает* (*копорождает*) объект B (см., например, [16, гл. 3]).

Определение 1. Будем говорить, что градуированный A-модуль M gr-порождается (gr-копорождается) модулем U, если модуль M как объект категории gr.mod-A порождается (копорождается) множеством $\mathcal{U} = \{U(g) \mid g \in G\}$.

Для градуированных модулей $M, U \in$ gr.mod-A рассмотрим канонический морфизм

$$\varphi\colon \bigoplus_{f \in H} U_f \to M, \quad \varphi\colon (\ldots, x_f, \ldots) \mapsto \sum_{f \in H} f(x_f),$$

где $H = h\bigl(\mathrm{HOM}_A(U, M)\bigr)$ и $U_f = U\bigl((\deg f)^{-1}\bigr)$. Образ этого морфизма называется *gr-следом* модуля U в M и обозначается $\mathrm{gr.\,tr}_M\, U$. Таким образом, $\mathrm{gr.\,tr}_M\, U = \sum\limits_{f \in \mathrm{HOM}_A(U,M)} \mathrm{Im}\, f$. Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Для градуированного A-модуля M_A следующие условия эквивалентны*:

1) *модуль M gr-порождается модулем U*;
2) *существует эпиморфизм прямой суммы модулей из $\mathcal{U} = \{U(g) \mid g \in G\}$ в модуль M*;
3) $M = \mathrm{gr.\,tr}_M\, U$;
4) *модуль $V = \bigoplus\limits_{g \in G} U(g)$ порождает модуль M (как объект категории* gr.mod-A).

Двойственным образом определяется канонический морфизм

$$\psi\colon M \to \prod_{f \in H} U_f, \quad \psi\colon x \mapsto \bigl(f(x)\bigr)_{f \in H},$$

здесь $H = h\bigl(\mathrm{HOM}_A(M, U)\bigr)$ и $U_f = U(\deg f)$. Ядро этого морфизма

$$\mathrm{Ker}\, \psi = \bigcap_{f \in \mathrm{HOM}_A(M,U)} \mathrm{Ker}\, f$$

является градуированным подмодулем в M.

Лемма 2. *Для градуированного A-модуля M_A следующие условия эквивалентны*:

1) *модуль M gr-копорождается модулем U*;
2) *существует вложение модуля M в прямое произведение модулей из $\mathcal{U} = \{U(g) \mid g \in G\}$*;
3) *для любого ненулевого однородного элемента $m \in h(M)$ существует такой гомоморфизм $f \in \mathrm{HOM}_A(M, U)$, что $f(m) \neq 0$*;
4) *модуль $V = \prod\limits_{g \in G} U(g)$ копорождает модуль M (как объект категории* gr.mod-A).

Ясно, что аннулятор $\mathrm{Ann}_A(M) = \{a \in A \mid Ma = 0\}$ градуированного A-модуля M является градуированным идеалом кольца A. Градуированный модуль M называется *точным*, если $\mathrm{Ann}_A(M) = 0$, и *коточным*, если существуют такие однородные элементы $m_1, m_2, \ldots, m_n \in h(M)$, что $\mathrm{Ann}_A\{m_1, m_2, \ldots, m_n\} = 0$ [4]. Очевидно, что каждый коточный модуль является точным.

Предложение 1. *Пусть M — градуированный A-модуль. Тогда*

1) *M — точный модуль в том и только том случае, если A_A gr-копорождается модулем M_A;*
2) *M — коточный модуль в том и только том случае, если существуют натуральное n и $g_1, g_2, \ldots, g_n \in G$, такие что A_A может быть вложен (как объект категории gr.mod-A) в модуль $M(g_1) \oplus M(g_2) \oplus \ldots \oplus M(g_n)$.*

Доказательство. Утверждение 1) очевидно, поскольку $M \approx \mathrm{HOM}_A(A, M)$.

Докажем утверждение 2). Пусть M — коточный модуль. Тогда существуют однородные элементы $m_1, m_2, \ldots, m_n \in h(M)$, для которых $\mathrm{Ann}_A\{m_1, m_2, \ldots, m_n\} = 0$. Если $\deg(m_i) = g_i$, то, полагая $f(a) = (m_1 a, m_2 a, \ldots, m_n a)$, получим вложение

$$f\colon A \to M(g_1) \oplus M(g_2) \oplus \ldots \oplus M(g_n).$$

Обратно, пусть существует вложение

$$f\colon A \to M(g_1) \oplus M(g_2) \oplus \ldots \oplus M(g_n), \quad g_i \in G.$$

Тогда $f(1) = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ для некоторых $m_i \in M(g_i)_e$, и следовательно, $\mathrm{Ann}_A\{m_1, m_2, \ldots, m_n\} = 0$. □

Важную роль при исследовании свойств модуля M играет категория $\sigma[M]$ — полная подкатегория в категории модулей, объектами которой являются подмодули M-порождённых модулей [16, гл. 3]. Для градуированного модуля M_A через $\sigma[M]$ обозначим полную подкатегорию категории gr.mod-A, объектами которой являются градуированные подмодули gr-порождаемых модулем M модулей. Заметим, что $\sigma[M]$ является жёсткой подкатегорией в gr.mod-A, т. е. полной подкатегорией, замкнутой относительно подмодулей, гомоморфных образов, прямых сумм и сдвигов градуировки.

Определение 2 [12]. Градуированный правый A-модуль M называется *gr-первичным*, если для каждого ненулевого градуированного подмодуля N модуля M и каждого градуированного идеала I кольца A из того, что $IN = 0$, следует $I \subseteq \mathrm{Ann}_A(M)$. Это эквивалентно тому, что $\mathrm{Ann}_A(N) = \mathrm{Ann}_A(M)$ для каждого ненулевого градуированного подмодуля N модуля M.

Заметим, что каждый градуированный подмодуль и каждый сдвиг gr-первичного модуля является gr-первичным модулем. Если градуированный модуль является первичным, то он является и gr-первичным. Ясно также, что каждый gr-неприводимый A-модуль M является gr-первичным.

Градуированный подмодуль N модуля M называется *вполне инвариантным*, если $f(N) \subseteq N$ для всех $f \in \mathrm{END}_A(M)$.

Предложение 2. *Для градуированного A-модуля M следующие условия эквивалентны*:

1) *M gr-первичный;*
2) $\mathrm{Ann}_A(N) = \mathrm{Ann}_A(M)$ *для каждого ненулевого вполне инвариантного ненулевого градуированного подмодуля N модуля M;*
3) $A/\mathrm{Ann}_A(M)$ *gr-копорождён каждым своим ненулевым градуированным подмодулем;*
4) $A/\mathrm{Ann}_A(M)$ *gr-копорождён каждым своим ненулевым вполне инвариантным градуированным подмодулем.*

Доказательство. Для доказательства предложения достаточно доказать импликацию 2) $\Longrightarrow$ 3). Пусть N — ненулевой градуированный подмодуль модуля M. Тогда если $S = \mathrm{END}_A(M)$, то SN — ненулевой вполне инвариантный градуированный подмодуль модуля M. Но $\mathrm{Ann}_A(N) \subseteq \mathrm{Ann}_A(SN) = \mathrm{Ann}_A(M)$, следовательно, $\mathrm{Ann}_A(N) = \mathrm{Ann}_A(M)$. □

Предложение 3. *Градуированное кольцо A gr-первично тогда и только тогда, когда существует точный (коточный) gr-первичный A-модуль.*

Доказательство. Если A — gr-первичное кольцо, то A_A является точным (коточным) gr-первичным A-модулем. Обратно, пусть кольцо A обладает точным gr-первичным A-модулем M и $IJ = 0$ для градуированных идеалов $I, J \subseteq A$, причём $I \neq 0$. Если $0 \neq m \in h(M)$, то mI — ненулевой градуированный подмодуль в M и, следовательно, $\mathrm{Ann}_A(mI) = 0$. Но так как $mIJ = 0$, то $J \subseteq \subseteq \mathrm{Ann}_A(mI) = 0$, и A — gr-первичное кольцо. □

Следствие 1. *Градуированный идеал P кольца A gr-первичен в том и только том случае, если $P = \mathrm{Ann}_A(M)$ для некоторого gr-первичного A-модуля M.*

Предложение 4. *Если A — gr-первичное кольцо, то каждый проективный градуированный A-модуль является gr-первичным.*

Доказательство. Проективный градуированный A-модуль P является подмодулем gr-свободного модуля $F \cong \bigoplus_{i\in I} A(g_i)$ $(g_i \in G)$. Так как все $A(g_i)$ являются точными gr-первичными модулями, то таковым является и модуль F, а значит, и P. □

Двойственным образом определяется понятие копервичного модуля.

Определение 3. Градуированный правый A-модуль M называется *gr-копервичным*, если $\mathrm{Ann}_A(M/N) = \mathrm{Ann}_A(M)$ для каждого собственного градуированного подмодуля N модуля M.

Предложение 5. *Для градуированного A-модуля M следующие условия эквивалентны:*

1) *M gr-копервичный;*
2) $\mathrm{Ann}_A(M/N) = \mathrm{Ann}_A(M)$ *для каждого собственного вполне инвариантного градуированного подмодуля N модуля M;*
3) $A/\mathrm{Ann}_A(M)$ *gr-копорождён фактор-модулем M/N для каждого собственного градуированного подмодуля $N \subset M$;*

4) *$A/\operatorname{Ann}_A(M)$ gr-копорождён фактор-модулем M/N для каждого собственного вполне инвариантного градуированного подмодуля $N \subset M$.*

Предложение 6. *Для градуированного A-модуля M следующие условия эквивалентны*:

1) *$\bar{A} = A/\operatorname{Ann}_A(M)$ — gr-первичное кольцо*;
2) *для любого градуированного подмодуля N модуля M или $\operatorname{Ann}_A(N) = \operatorname{Ann}_A(M)$, или $\operatorname{Ann}_A(M/N) = \operatorname{Ann}_A(M)$*;
3) *для любого вполне инвариантного градуированного подмодуля N модуля M или $\operatorname{Ann}_A(N) = \operatorname{Ann}_A(M)$, или $\operatorname{Ann}_A(M/N) = \operatorname{Ann}_A(M)$.*

Доказательство. Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) следует из того, что

$$\operatorname{Ann}_A(N)\operatorname{Ann}_A(M/N) \subseteq \operatorname{Ann}_A(M)$$

для любого собственного градуированного подмодуля N модуля M.

Импликация 2) $\Longrightarrow$ 3) очевидна.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 1). Пусть $IJ \subseteq \operatorname{Ann}_A(M)$ для градуированных идеалов $I, J \subseteq A$. Так как MI является вполне инвариантным градуированным подмодулем модуля M, то либо $J \subseteq \operatorname{Ann}_A(MI) = \operatorname{Ann}_A(M)$, либо $I \subseteq \operatorname{Ann}_A(M/MI) = \operatorname{Ann}_A(M)$. □

Следствие 2. *Если M — gr-первичный (gr-копервичный) A-модуль, то $\bar{A} = A/\operatorname{Ann}_A(M)$ — gr-первичное кольцо.*

Определение 4. Градуированный правый A-модуль M назовём *gr-строго первичным*, если M gr-первичный и для каждого ненулевого градуированного подмодуля $N \subseteq M$ и любого однородного элемента $m \in h(M)$ существуют однородные элементы $x_1, x_2, \ldots, x_k \in h(N)$, такие что $\operatorname{Ann}_A\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subseteq \operatorname{Ann}_A(m)$.

Для градуированного A-модуля M_A через $E^{\mathrm{gr}}(M)$ обозначим его инъективную оболочку в категории gr.mod-A. Заметим, что, в отличие от проективных модулей, инъективные в категории gr.mod-A модули не обязательно являются инъективными A-модулями (см. [14, замечание 2.3.3.]). Модуль $\bar{M} = \Lambda M$, где $\Lambda = \operatorname{END}_A(E^{\mathrm{gr}}(M))$, является квазиинъективной оболочкой модуля M в категории gr.mod-A.

Теорема 1. *Для градуированного A-модуля M следующие условия эквивалентны*:

1) *M gr-строго первичный*;
2) *M содержится в каждом ненулевом вполне инвариантном градуированном подмодуле своей инъективной оболочки $E = E^{\mathrm{gr}}(M)$*;
3) *для любых однородных элементов $m, x \in h(M)$, $x \neq 0$, существуют однородные элементы $a_1, a_2, \ldots, a_k \in h(A)$, такие что $\operatorname{Ann}_A\{xa_1, xa_2, \ldots, xa_k\} \subseteq \operatorname{Ann}_A(m)$*;
4) *$M \in \sigma[N]$ для любого ненулевого градуированного подмодуля $N \subseteq M$*;

5) $\bar{M}$ *не содержит нетривиальных градуированных вполне инвариантных подмодулей.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть N — ненулевой вполне инвариантный градуированный подмодуль в E. Тогда

$$\operatorname{gr.tr}_E(N) = \sum_{f\in \mathrm{HOM}_A(N,E)} \operatorname{Im} f = N$$

и $K = M\cap N$ — ненулевой градуированный подмодуль в M. Следовательно, для любого $m\in h(M)$ существуют такие $x_1,x_2,\ldots,x_n\in h(K)$, что $\operatorname{Ann}_A\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}\subseteq \operatorname{Ann}_A(m)$. Тогда отображение

$$f\colon x_1A\oplus x_2A\oplus\ldots\oplus x_nA\to mA,\quad f\colon (x_1a,x_2a,\ldots,x_na)\rightarrowtail ma$$

определяет эпиморфизмом A-модулей. Ясно, что $f=\bigoplus\limits_{i=1}^{n} f_i$, где f_i принадлежат $\mathrm{HOM}_A(x_iA,mA)$ и, в силу инъективности модуля E в категории gr.mod-A, могут быть продолжены до гомоморфизмов $\tilde{f}_i\in\mathrm{HOM}_A(E,E)$, откуда следует, что $m\in N$.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 3). Пусть $0\neq x\in h(M)$ и $N=\sum\limits_{f\in\mathrm{END}_A(E)} f(xA)$. Тогда N — ненулевой вполне инвариантный градуированный подмодуль в E, и из условия 2) следует, что $M\subseteq N$. Следовательно, для любого $m\in h(M)$ имеем $m=\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(xa_i)$ для некоторых $a_i\in h(A)$, $f_i\in\mathrm{HOM}(xA,E)$. Таким образом, если $a\in\operatorname{Ann}_A\{xa_1,xa_2,\ldots,xa_n\}$, то $a\in\operatorname{Ann}_A(m)$.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 4). Пусть N — ненулевой градуированный подмодуль в M. Ясно, что $\tilde{N}=\operatorname{gr.tr}_E N$, где $E=E^{\mathrm{gr}}(M)$ gr-порождён модулем N. Пусть $m\in h(M)$ и $0\neq x\in h(N)$. Тогда из условия 3) следует, что существуют $a_1,a_2,\ldots,a_k\in h(A)$, такие что $\operatorname{Ann}_A\{xa_1,xa_2,\ldots,xa_k\}\subseteq\operatorname{Ann}_A(m)$. Отсюда, как и при доказательстве импликации 1) $\Longrightarrow$ 2), получим, что $m\in\tilde{N}$, и следовательно, $M\in\sigma[N]$.

Убедимся в справедливости импликации 4) $\Longrightarrow$ 1). Пусть N — ненулевой градуированный подмодуль в M. Так как $M\in\sigma[N]$, то существует gr-порождённый модулем N модуль $\tilde{N}$, такой что $M\subseteq\tilde{N}$. Если $\varphi\colon\bigoplus\limits_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha\to\tilde{N}$ — эпиморфизм (где $N_\alpha=N(g_\alpha)$ для некоторых $g_\alpha\in G$), то для любого $y\in$ $\in h(M)$ существует такой элемент $x\in h\Bigl(\bigoplus\limits_{\alpha\in\Lambda} N_\alpha\Bigr)$, что $\varphi(x)=y$, причём $\varphi(xa)=ya$ для любого $a\in A$. Следовательно, существуют однородные элементы $x_1,x_2,\ldots,x_n\in h(N)$, такие что $\operatorname{Ann}_A\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}\subseteq\operatorname{Ann}_A(y)$. Заметим, что так как $\operatorname{Ann}_A(N)\subseteq\operatorname{Ann}_A\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}\subseteq\operatorname{Ann}_A(y)$, то $\operatorname{Ann}_A(N)\subseteq\operatorname{Ann}_A(M)$, и M является gr-строго первичным модулем.

Докажем эквивалентность 2) $\Longleftrightarrow$ 5). Пусть N — ненулевой вполне инвариантный градуированный подмодуль в $\bar{M}$. Тогда N является вполне инвариантным подмодулем и в $E=E^{\mathrm{gr}}(M)$, и следовательно, $M\subseteq N$. Отсюда вытекает, что $\bar{M}=\Lambda M\subseteq\Lambda N\subseteq N$ и $\bar{M}=N$.

Обратно, если N — ненулевой вполне инвариантный градуированный подмодуль в $E = E^{\mathrm{gr}}(M)$, то $N \cap \bar{M} \neq 0$ — вполне инвариантный градуированный подмодуль в $\bar{M}$, и следовательно, $\bar{M} \subseteq N$, а значит, $M \subseteq \bar{M} \subseteq N$. □

Из теоремы 1 сразу следует, что любой ненулевой градуированный подмодуль gr-строго первичного модуля сам является gr-строго первичным.

Определение 5 (см. [10]). Градуированный A-модуль M назовём *gr-SP-модулем*, если для каждого ненулевого однородного элемента $m \in h(M)$ существуют однородные элементы $a_1, a_2, \ldots, a_k \in h(A)$, такие что $\mathrm{Ann}_A\{ma_1, ma_2, \ldots, ma_k\} = 0$.

Ясно, что каждый gr-SP-модуль является точным модулем и класс gr-SP-модулей замкнут относительно подмодулей, гомоморфных образов и существенных расширений.

Градуированное кольцо A называется *gr-строго первичным справа*, если для любого ненулевого градуированного идеала I кольца A существует такое конечное множество $F \subseteq h(I)$, что правый аннулятор $r_A(F) = \{a \in A \mid Fa = 0\}$ равен нулю [13].

Теорема 2. *Для градуированного кольца A следующие условия эквивалентны*:

1) *A gr-строго первичный справа*;
2) *для любого ненулевого однородного элемента $a \in h(A)$ существуют однородные элементы $a_1, a_2, \ldots, a_k \in h(A)$, такие что если $aa_ib = 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$, то $b = 0$*;
3) *A_A — gr-строго первичный модуль*;
4) *$E^{\mathrm{gr}}(A_A)$ не содержит ненулевых градуированных вполне инвариантных подмодулей*;
5) *A_A — gr-SP-модуль*;
6) *существует коточный gr-строго первичный правый A-модуль*;
7) *существует ненулевой gr-SP-правый A-модуль.*

Доказательство. Эквивалентность условий 1), 2), 5), 7) очевидна.

Эквивалентность условий 2), 3), 4) следует из теоремы 1, если положить $m = 1$.

Так как модуль A_A является коточным, то справедлива импликация 3) $\Longrightarrow$ 6).

Докажем импликацию 6) $\Longrightarrow$ 2). Пусть M_A — коточный gr-строго первичный A-модуль. Так как M — коточный модуль, то существуют элементы $m_1, m_2, \ldots, m_n \in h(M)$, такие что $\mathrm{Ann}_A\{m_1, m_2, \ldots, m_n\} = 0$. Если $0 \neq a \in$ $\in h(A)$ и $0 \neq x \in h(M)$ таковы, что $xa \neq 0$, то из gr-строгой первичности модуля M следует, что существуют такие элементы $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ik_i} \in h(A)$, что $\mathrm{Ann}_A\{xaa_{i1}, xaa_{i2}, \ldots, xaa_{ik_i}\} \subseteq \mathrm{Ann}_A(m_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Следовательно, если $aa_{ij}b = 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, k_i$, то $b = 0$, и мы получим 2). □

Строго первичные кольца изучались в [10]. В [9] было показано, что класс всех строго первичных справа колец является специальным классом колец; верхний радикал, определяемый этим классом, называется *правым строго первичным радикалом*.

Аналогично в [13] определялся *правый gr-строго первичный радикал* $\mathcal{S}_{\mathrm{gr}}(A)$ градуированного кольца A, а именно

$$\mathcal{S}_{\mathrm{gr}}(A) = \bigcap\{P \mid A/P \text{ — gr-строго первичное справа кольцо}\}.$$

Было установлено, что $\mathcal{S}_{\mathrm{gr}}(A)$ является наибольшим градуированным идеалом $\mathcal{S}(A)_{\mathrm{gr}}$, содержащимся в правом строго первичном радикале $\mathcal{S}(A)$ [13, следствие 1].

Поскольку класс $\mathfrak{M}$ всех gr-строго первичных справа колец является специальным классом градуированных колец, то из [3] следует, что правый gr-строго первичный радикал определяется некоторым общим классом $\mathbf{\Sigma}$ градуированных модулей, являющимся подклассом gr-первичных модулей. Более того, градуированный идеал P кольца A является $\mathfrak{M}$-идеалом (т. е. $A/P \in \mathfrak{M}$) тогда и только тогда, когда $P = \mathrm{Ann}_A(M)$ для некоторого градуированного A-модуля $M \in \mathbf{\Sigma}$ [3, предложение 3].

Из теоремы 2 следует, что $\mathbf{\Sigma} = \bigcup \mathbf{\Sigma}_A$, где $\mathbf{\Sigma}_A$ — класс всех gr-строго первичных модулей M_A, таких что M является коточным $A/\mathrm{Ann}_A(M)$-модулем.

Таким образом,

$$\mathcal{S}_{\mathrm{gr}}(A) = \bigcap\{\mathrm{Ann}_A(M) \mid M \in \mathbf{\Sigma}_A\}.$$

Литература

[1] Андрунакиевич В. А. Первичные модули и радикал Бэра // Сиб. мат. журн. — 1961. — Т. 2, № 6. — С. 801—806.

[2] Андрунакиевич В. А., Рябухин Ю. М. Специальные модули и специальные радикалы // ДАН СССР. — 1962. — Т. 147, № 6. — С. 1274—1277.

[3] Balaba I. N. Special radicals of graded rings // Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat. — 2004. — Vol. 44, no. 1. — P. 26—33.

[4] Beachy J. Generating and cogenerating structures // Trans. Amer. Math. Soc. — 1971. — Vol. 158. — P. 75—92.

[5] Beachy J. Some aspects of noncommutative localization // Noncommutative Ring Theory, Int. Conf., Kent, 1975. — Berlin: Springer, 1976. — (Lect. Notes Math.; Vol. 545). — P. 2—31.

[6] Bican L., Jampor P., Kepka T., Neměc P. Prime and coprime modules // Fund. Math. — 1980. — Vol. 57. — P. 33—45.

[7] Dauns J. Prime modules // J. Reine Angew. Math. — 1978. — Vol. 298. — P. 156—181.

[8] Feller E. H., Swokowski E. W. Prime modules // Can. J. Math. — 1965. — Vol. 17. — P. 1041—1052.

[9] Groenewald N., Heyman G. Certain classes of ideals in group rings // Commun. Algebra. — 1981. — Vol. 9. — P. 137—148.

[10] Handelman D., Lawrence J. Strongly prime rings // Trans. Amer. Math. Soc. — 1975. — Vol. 211. — P. 209—223.

[11] Johnson R. E. Representations of prime rings // Trans. Amer. Math. Soc. — 1953. — Vol. 74, no. 2. — P. 351—357.

[12] Liu S.-X., van Oystaeyen F. Group graded rings, smash products and additive categories // Perspectives in Ring Theory. — Kluwer Academic, 1988. — P. 299—300.

[13] Năstăsescu C., van Oystaeyen F. The strongly prime radical of graded rings // Bull. Soc. Math. Belg. Ser. B. — 1984. — P. 243—251.

[14] Năstăsescu C., van Oystaeyen F. Methods of Graded Rings. — Berlin: Springer, 2004

[15] Wisbauer R. On prime modules and rings // Commun. Algebra. — 1983. — Vol. 11. — P. 2249—2265.

[16] Wisbauer R. Foundations of Module and Ring Theory. — Paris: Gordon and Breach, 1991.