

Элементарная эквивалентность полугрупп обратимых матриц с неотрицательными элементами над коммутативными частично упорядоченными кольцами

Е. И. БУНИНА

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: Helen.Bunina@yandex.ru

П. П. СЕМЁНОВ

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: pamenov@yandex.ru

УДК 512.534.7+510.67

Ключевые слова: элементарная эквивалентность, частично упорядоченные кольца, полугруппа неотрицательных матриц.

Аннотация

В работе доказано, что если две полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами над частично упорядоченными коммутативными кольцами элементарно эквивалентны, то их размерности совпадают, а соответствующие полукольца неотрицательных элементов элементарно эквивалентны.

Abstract

E. I. Bunina, P. P. Semenov, Elementary equivalence of semigroups of invertible matrices with nonnegative elements over commutative partially ordered rings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 4, pp. 75—85.

In the paper we prove that if two semigroups of invertible matrices with nonnegative elements over partially ordered commutative rings are elementarily equivalent, then their dimensions coincide and the corresponding semirings of nonnegative elements are elementarily equivalent.

Пусть R — упорядоченное кольцо, $G_n(R)$ — подполугруппа группы $GL_n(R)$, состоящая из матриц с неотрицательными элементами. В [9] А. В. Михалёв и М. А. Шаталова описали все автоморфизмы полугруппы $G_n(R)$ в случае, когда R является линейно упорядоченным телом и $n \geq 2$. В [5] Е. И. Бунина и А. В. Михалёв описали все автоморфизмы полугруппы $G_n(R)$, если R — произвольное линейно упорядоченное ассоциативное кольцо с $1/2$, $n \geq 3$, а в [6] нашли необходимые и достаточные условия для того, чтобы эти полугруппы были элементарно эквивалентны. В [7] авторы описали автоморфизмы

Фундаментальная и прикладная математика, 2008, том 14, № 4, с. 75—85.

© 2008 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

полугруппы $G_n(R)$ в случае, когда R является коммутативным частично упорядоченным кольцом, содержащим $\mathbb{Q}$, $n \geq 3$. В данной работе показано, что если две рассматриваемые в работе [7] полугруппы элементарно эквивалентны, то их размерности совпадают, а полукольца неотрицательных элементов, по которым они построены, элементарно эквивалентны. Также приведён пример, демонстрирующий, что (в отличие от случая линейно упорядоченных колец, рассматриваемых в [6]) обратное неверно.

1. Необходимые определения и понятия, формулировка основной теоремы

Две модели $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ одного языка первого порядка $\mathcal{L}$ (например, две группы, полугруппы или два кольца, полукольца) называются *элементарно эквивалентными*, если любое предложение φ языка $\mathcal{L}$ истинно в модели $\mathcal{U}_1$ тогда и только тогда, когда оно истинно в модели $\mathcal{U}_2$.

Любые две конечные модели одного языка элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда они изоморфны. Любые две изоморфные модели элементарно эквивалентны, однако для бесконечных моделей обратное неверно. Например, поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел и поле $\mathbb{Q}$ алгебраических чисел элементарно эквивалентны, но не изоморфны (так как имеют различную мощность).

Первые результаты по элементарной эквивалентности линейных групп были получены А. И. Мальцевым в [8]. Он доказал, что группы $\mathcal{G}_m(K)$ и $\mathcal{G}_n(K')$ (где $\mathcal{G} = \text{GL}, \text{PGL}, \text{SL}, \text{PSL}$, $m, n > 2$, K и K' — поля характеристики 0) элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда $m = n$ и поля K и K' элементарно эквивалентны.

В 1992 г. К. И. Бейдар и А. В. Михалёв [10], используя некоторые результаты теории моделей (а именно конструкцию ультрастепени и теорему Кейслера—Шелаха об изоморфизме) сформулировали общий подход к задаче элементарной эквивалентности различных алгебраических структур. Взяв на вооружение некоторые результаты теории линейных групп над кольцами, они получили доказательства теорем, подобных теореме Мальцева, в довольно общих ситуациях (для линейных групп над телами и первичными кольцами, мультипликативных полугрупп, решёток подмодулей и т. д.).

В 1998—2004 гг. Е. И. Бунина продолжила исследования элементарных свойств линейных групп. В 1998 г. результаты А. И. Мальцева были распространены на унитарные линейные группы над полями с инволюциями [2], а затем на унитарные линейные группы над кольцами и телами с инволюциями [1].

В 2001—2006 гг. аналогичные результаты были получены для групп Шевалле над полями и локальными кольцами (см. [3, 4]).

В [6] Е. И. Бунина и А. В. Михалёв доказали, что полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами над линейно упорядоченными кольца-

ми с $1/2$ размера, большего 2×2 , элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда их размерности совпадают и полукольца неотрицательных элементов элементарно эквивалентны.

В этой работе мы доказываем аналогичный результат для полугрупп обратимых матриц с неотрицательными элементами над частично упорядоченными коммутативными кольцами, содержащими $\mathbb{Q}$. В отличие от случая линейно упорядоченных колец, условия совпадения размерностей полугрупп и элементарной эквивалентности соответствующих полуколец неотрицательных элементов являются необходимыми, но не достаточными для элементарной эквивалентности полугрупп обратимых неотрицательных матриц. В конце работы мы приводим пример, когда полукольца неотрицательных элементов являются элементарно эквивалентными (и даже изоморфными), а построенные по ним полугруппы обратимых неотрицательных матриц не являются элементарно эквивалентными.

Приведём необходимые определения.

Пусть R — ассоциативное (коммутативное) кольцо с 1.

Определение 1. Кольцо R называется *частично упорядоченным*, если на нём задано отношение частичного порядка $\leq$, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $\forall x, y, z \in R (x \leq y \implies x + z \leq y + z)$;
- 2) $\forall x, y \in R (0 \leq x \wedge 0 \leq y \implies 0 \leq xy)$.

Мы будем рассматривать такие частично упорядоченные кольца, в которых $1/m \geq 0$ для всех $m \in \mathbb{N}$.

Такие элементы r кольца R , для которых $0 \leq r$, называются *неотрицательными*.

Определение 2. Пусть R — частично упорядоченное кольцо. Через $G_n(R)$ обозначается подполугруппа группы $\mathrm{GL}_n(R)$, состоящая из всех матриц с неотрицательными элементами.

Множество всех обратимых элементов кольца R обозначается через R^* . Если $1/2 \in R$, то множество R^* бесконечно, так как оно содержит все $1/2^n$ для $n \in \mathbb{N}$. Множество $R_+ \cap R^*$ обозначается через R_+^* . Если $1/2 \in R$, то оно также бесконечно.

Определение 3. Пусть $I = I_n$, $\Gamma_n(R)$ — группа, состоящая из всех обратимых матриц из $G_n(R)$, Σ_n — симметрическая группа порядка n , S_σ — матрица перестановки $\sigma \in \Sigma_n$ (т. е. матрица $(\delta_{i\sigma(j)})$, где $\delta_{i\sigma(j)}$ — символ Кронекера), $S_n = \{S_\sigma \mid \sigma \in \Sigma_n\}$, $\mathrm{diag}[d_1, \dots, d_n]$ — диагональная матрица с элементами $d_1, \dots, d_n$ на диагонали, $d_1, \dots, d_n \in R_+^*$. Через $D_n(R)$ обозначим группу всех обратимых диагональных матриц из $G_n(R)$.

Определение 4. Если $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — подмножества в $G_n(R)$, то положим

$$C_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) = \{a \in \mathcal{A} \mid \forall b \in \mathcal{B} (ab = ba)\}.$$

Пусть E_{ij} — матричная единица.

Основным результатом этой работы является следующая теорема.

Теорема 1. Если полугруппы $G_n(R)$ и $G_m(S)$ (R, S — коммутативные кольца, содержащие рациональные числа, $n \geq 3$) элементарно эквивалентны, то $m = n$ и полукольца R_+ и S_+ элементарно эквивалентны.

2. Некоторые вспомогательные формулы, определение размерности

Лемма 1. Формула

$$\text{Invert}(M) := \exists X (MX = XM = 1)$$

истинна в полугруппе $G_n(R)$ для элементов группы $\Gamma_n(R)$ и только для них.

Доказательство. Утверждение очевидно. $\square$

Лемма 2. Существует формула $\text{Diag}(M)$, истинная в полугруппе $G_n(R)$ для матриц $M \in D_n(R)$ и только для них.

Доказательство. Рассмотрим формулу

$$\text{Diag}(M) := \text{Invert}(M) \wedge \forall A (\exists B (A = BMB^{-1}) \implies AM = MA).$$

Эта формула утверждает, что матрица M обратима и коммутирует со всеми матрицами, с ней сопряжёнными. По [7, лемма 2] формула $\text{Diag}(M)$ выполняется для всех $M \in D_n(R)$ и только для них. $\square$

В следующей лемме мы будем предполагать, что нам заранее известна размерность n рассматриваемой полугруппы.

Лемма 3. Пусть $N = n!$ и все подстановки из Σ_n пронумерованы: $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N$. Тогда существует формула

$$\text{Subst}_n(M_1, \dots, M_N),$$

истинная для матриц $M_1, \dots, M_N$ тогда и только тогда, когда в некотором базисе (к которому можно перейти матрицей перехода из $\Gamma_n(R)$) они имеют вид $M_i = \alpha^{\text{sgn } \sigma_i} S_{\sigma_i}$, $\alpha \in R_+^*$, $\alpha^2 = 1$.

Доказательство. Заметим, что в [7, леммы 3—11] при доказательстве того, что матрицы подстановок переходят в матрицы подстановок, умноженные на специальные диагональные матрицы, в некотором базисе, используются только их свойства, выражимые на языке первого порядка, т. е. формулами. Именно, там используются свойства коммутирования с некоторыми матрицами, а также свойства минимальности (или максимальности) централизаторов каких-то (также формульных) множеств матриц.

Например, используя [7, лемма 3], легко показать, что формула

$$\begin{aligned} \text{Diag}_\tau(D) &:= \text{Diag}(D) \wedge \\ &\wedge \forall N \left(\text{Invert}(N) \wedge \text{Inv}(N) \implies \exists C (\text{Inv}(C) \wedge D(CNC^{-1}) = (CNC^{-1}D)) \right) \end{aligned}$$

истинна для всех таких диагональных матриц D , что для любого элемента полугруппы порядка 2 существует матрица, сопряжённая к этому элементу и коммутирующая с D . По той же лемме формула

$$\text{DDiag}_\tau(D) = \text{Diag}_\tau(D) \wedge \wedge \forall D' (\text{Diag}_\tau(D') \implies \exists A (\text{Invert}(A) \wedge AD' = D'A \wedge AD \neq DA))$$

истинна для таких матриц, имеющих минимальный централизатор. Снова по той же лемме формула

$$\text{Subst}^\tau(M) := \exists D (\text{Inv}(M) \wedge \text{DDiag}_\tau(D) \wedge DM = MD)$$

истинна для тех и только тех матриц M , которые в некотором базисе имеют вид bS_τ , $b^2 = 1$, $\tau = (1, 2)(3, 4) \dots$

По [7, лемма 4] для $n = 3$ можно написать формулу $\text{Subst}_3^\rho(M_1, M_2)$, истинную для матриц M_1 и M_2 тогда и только тогда, когда в некотором базисе они одновременно имеют вид $bS_{(1,2)}$ и $bS_{(2,3)}$ соответственно, $b^2 = 1$. Поскольку подстановки $(1, 2)$ и $(2, 3)$ порождают всю группу Σ_3 , легко написать требуемую в лемме формулу для всех подстановок при $n = 3$.

Пусть теперь $n = 4$. По [7, лемма 5] существует формула $\text{Subst}_4^\rho(M_1, M_2)$, истинная для матриц M_1 и M_2 тогда и только тогда, когда в некотором базисе они одновременно имеют вид $S_{(1,2)(3,4)}$ и $S_{(1,3)(2,4)}$.

По [7, лемма 6] можно сначала написать формулу $\text{Subst}_4^{(4,3,2,1)}(M_1, M_2, M_3)$, истинную для матриц M_1, M_2, M_3 тогда и только тогда, когда они в некотором базисе имеют вид $S_{(1,2)(3,4)}$, $S_{(1,3)(2,4)}$, $bS_{(4,3,2,1)}$ соответственно, $b^2 = 1$, затем с помощью этой формулы написать формулу $\text{Subst}_4^{(1,2)}(M_1, M_2, M_3, M_4)$, истинную для матриц M_1, M_2, M_3, M_4 тогда и только тогда, когда они в некотором базисе имеют вид $S_{(1,2)(3,4)}$, $S_{(1,3)(2,4)}$, $bS_{(4,3,2,1)}$, $bS_{(1,2)}$ соответственно, $b^2 = 1$. После этого требуемая в лемме формула пишется очевидным образом, так как любая подстановка из Σ_4 выражается через подстановки $(4, 3, 2, 1)$ и $(1, 2)$.

Теперь перейдём к общему случаю $n > 4$.

Напомним некоторые определения и обозначения, введённые для удобства доказательства в [7] (см. [7, определения 9 и 10]).

Пусть число n разложено в сумму степеней двойки:

$$n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \dots + 2^{k_l}, \quad k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_l > 0.$$

Диагональный блок размера $2^{k_i} \times 2^{k_i}$, $i = 1, \dots, l$, матрицы размера $n \times n$, соответствующий векторам базиса с номерами $2^{k_1} + 2^{k_2} + \dots + 2^{k_{i-1}} + 1, \dots, 2^{k_1} + 2^{k_2} + \dots + 2^{k_i}$, будем обозначать через $\mathbf{D}_i$.

Через $\sigma_i^{(j)}$, $j = 1, \dots, l$, $i = 1, \dots, k_i$, обозначим подстановку, которая тождественно действует во всех блоках $\mathbf{D}_m$, кроме блока $\mathbf{D}_j$, а в блоке $\mathbf{D}_j$ есть произведение 2^{k_j-1} транспозиций, каждая из которых имеет вид $(p, p + 2^{i-1})$.

Через σ_i обозначим подстановку $\sigma_{i_1}^{(1)} \dots \sigma_{i_l}^{(l)}$, где $i_q = \min(i, k_q)$.

По [7, лемма 7] существует формула $\text{Subst}_n^{\sigma_i}(M_1, \dots, M_{k_1})$, истинная для матриц $M_1, \dots, M_{k_1}$ тогда и только тогда, когда в некотором (едином) базисе каждая M_p имеет вид $b_p S_{\sigma_p}$, $b_p^2 = 1$, $p = 1, \dots, k_1$.

Назовём диагональную матрицу $D \in \Gamma_n(R)$ *блочно-скалярной инволюцией* (см. [7, определение 11]), если $D^2 = I$ и матрица D является скалярной в каждом блоке $\mathbf{D}_i$, $i = 1, \dots, l$. Множество (группу) всех блочно-скалярных инволюций будем обозначать через $\mathcal{Q}$.

По [7, лемма 8] существует формула

$$\text{Subst}_n^{\sigma_i^j}(M_1, \dots, M_{k_1}, N_1^{(1)}, \dots, N_q^{(p)}, \dots),$$

истинная для матриц $M_1, \dots, M_{k_1}, N_1^{(1)}, \dots, N_q^{(p)}, \dots$ тогда и только тогда, когда в некотором (едином) базисе каждая M_i имеет вид $b_i S_{\sigma_i}$, $b_i^2 = 1$, а каждая $N_q^{(p)}$ имеет вид $D_{q,p} S_{\sigma_q^{(p)}}$, где $D_{q,p} \in \mathcal{Q}$.

Через $\tau(i, p, m)$, $i = 1, \dots, l$, $p = 1, \dots, k_i$, $m = p, \dots, k_i$, обозначим подстановку (см. [7, определение 12]), которая на всех блоках, кроме $\mathbf{D}_i$, тождественна, а на блоке $\mathbf{D}_i$ на первых 2^m элементах базиса совпадает с σ_p , а на остальных элементах базиса тождественна. Таким образом, $\tau(i, 1, 1)$ — это просто транспозиция, $\tau(i, p, k_i) = \sigma_p^{(i)}$.

По [7, лемма 9] существует формула

$$\text{Subst}_n^{\tau(\dots, 1, \dots)}(M_1, \dots, M_{k_1}, P_{1,1,1}, \dots, P_{t,1,s}, \dots, P_{i,1,k_i}),$$

истинная для матриц $M_1, \dots, M_{k_1}, P_{1,1,1}, \dots, P_{t,1,s}, \dots, P_{i,1,k_i}$ тогда и только тогда, когда в некотором (едином) базисе каждая M_i имеет вид $b_i S_{\sigma_i}$, $b_i^2 = 1$, а каждая $P_{t,1,s}$ имеет вид $D_{t,1,s} S_{\tau(t,1,s)}$, где $D_{t,1,s} \in \mathcal{Q}$, при этом если подстановка $\tau(t, 1, s)$ чётна, то $D_{t,1,s} = I$.

Пронумеруем некоторым образом все подстановки из Σ_n , действующие независимо на блоках $\mathbf{D}_1, \dots, \mathbf{D}_l$. Пусть это подстановки $\sigma_1, \dots, \sigma_t$. По [7, лемма 10] существует формула

$$\text{Subst}_n^{\text{blocks}}(Q_1, \dots, Q_t),$$

истинная для матриц $Q_1, \dots, Q_t$ тогда и только тогда, когда в некотором (едином) базисе каждая матрица Q_i имеет вид $D_i S_{\sigma_i}$, где $D_i \in \mathcal{Q}$, при этом если подстановка σ_i чётна, то $D_i = I$.

Наконец, по [7, лемма 11] мы получаем искомую формулу. $\square$

Лемма 4. Для каждого $n \geq 3$ существует предложение Size_n , истинное в полугруппе $G_m(R)$ (R — частично упорядоченное коммутативное кольцо с $\mathbb{Q}$, $m \geq 3$) тогда и только тогда, когда $m = n$.

Доказательство. Заметим, что если $m \geq n$, то в полугруппе $G_m(R)$ выполняется предложение

$$\text{GSize}_n := \exists M_1, \dots, M_N \text{ Subst}_n(M_1, \dots, M_N).$$

При $m < n$ предложение GSize выполняться не может, так как в этом случае в полугруппе не найдётся $n!$ матриц, удовлетворяющих нужным условиям.

Таким образом, искомым является предложение

$$\text{Size}_n := \text{GSize}_n \wedge \neg \text{GSize}_{n-1}. \quad \square$$

Теперь мы можем считать известным размер полугруппы и фиксированным некоторый набор матриц $M_1, \dots, M_N$, удовлетворяющий формуле $\text{Subst}(\dots)$, и использовать его в дальнейших формулах как параметр.

Лемма 5. Если $n \geq 3$, $\mathbb{Q} \subset R$, то существует формула

$$\text{Diag}_{1,2,\dots,2}(M_1, \dots, M_N; D),$$

истинная для матрицы D тогда и только тогда, когда $D = \text{diag}[\alpha, \beta, \dots, \beta]$, $\alpha \neq \beta$.

Доказательство. Пусть $\sigma_i = (2, 3, \dots, n)$. По [7, лемма 12] искомой является формула

$$\begin{aligned} \text{Diag}_{1,2,\dots,2}(M_1, \dots, M_N; D) := \\ := \text{Diag}(D) \wedge DM_i = M_i D \wedge \neg(\forall X (XD = DX)). \quad \square \end{aligned}$$

Лемма 6. Если $n \geq 3$, $\mathbb{Q} \subset R$, то существует формула

$$\text{Block}_{2,1,\dots,1}(M_1, \dots, M_N; X),$$

истинная для матрицы X тогда и только тогда, когда

$$X = \begin{pmatrix} Y & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 \\ \dots & & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & a \end{pmatrix}, \quad \text{где } Y \in G_2(R), \quad a \in R_+^*.$$

Доказательство. Аналогично лемме 5 можно написать формулу

$$\text{Diag}_{1,1,2,3,\dots,n-1}(M_1, \dots, M_N; D),$$

истинную для матрицы D тогда и только тогда, когда $D = \text{diag}[\alpha, \alpha, \beta_1, \dots, \beta_{n-2}]$.

Пусть $\sigma_j = (3, 4, \dots, n)$. Теперь по [7, лемма 13] искомая формула имеет вид

$$\begin{aligned} \text{Block}_{2,1,\dots,1}(M_1, \dots, M_N; X) := \\ := \forall D (\text{Diag}_{1,1,2,3,\dots,n-1}(D) \implies DX = XD) \wedge (M_j X = X M_j). \quad \square \end{aligned}$$

3. Основная теорема

В этом разделе мы докажем основную теорему (теорема 1).

Лемма 7. При исходных условиях на кольцо и при $n \geq 3$ для полугруппы $G_n(R)$ существует формула $\text{Ring}(M_1, \dots, M_N; X)$, истинная для матриц X тогда и только тогда, когда $X = B_{12}(x)$, $x \in R_+$.

Доказательство. Пусть $\sigma_i = S_{(2,3)}$, $\sigma_j = S_{(1,2,3)}$. Напишем формулу

$$\begin{aligned} \text{Ring}^{\text{idem}}(M_1, \dots, M_N; X) &:= \text{Block}_{2,1,\dots,1}(M_1, \dots, M_n; X) \wedge \\ &\wedge \forall D \left(\text{Diag}_{1,2,\dots,2}(D) \implies (DXD^{-1})X = X(DXD^{-1}) \right) \wedge \\ &\wedge \exists D \left(\text{Diag}_{1,2,\dots,2}(D) \wedge X^2 = DXD^{-1} \right) \wedge X(M_i X M_i^{-1}) = (M_i X M_i^{-1})X \wedge \\ &\wedge X(M_i X M_i^{-1}) = (M_i X M_i^{-1})(M_j X M_j^{-1})X. \end{aligned}$$

По [7, лемма 15] любая матрица, удовлетворяющая этой формуле, имеет вид $B_{12}(\beta)$, β — идемпотент полукольца R_+ .

Теперь рассмотрим формулу

$$\begin{aligned} \text{Ring}^{\text{unit}}(M_1, \dots, M_N; X) &:= \text{Ring}^{\text{idem}}(M_1, \dots, M_n; X) \wedge \\ &\wedge \forall Y \left(\text{Ring}^{\text{idem}}(M_1, \dots, M_N; Y) \implies X(M_j Y M_j^{-1}) = (M_i Y M_i^{-1})(M_j Y M_j^{-1})X \right). \end{aligned}$$

Из этой формулы следует, что $X = B_{12}(x)$, $x^2 = 1$, и для любого $B_{12}(y)$, $y^2 = 1$, выполняется

$$B_{12}(x)B_{23}(y) = B_{13}(y)B_{23}(y)B_{12}(x).$$

Это условие даёт $xy = y$ для любого идемпотента $y \in R_+$. Значит, $x = 1$, так как в качестве y можно выбрать 1. Таким образом, формула $\text{Ring}^{\text{unit}}(M_1, \dots, M_n; X)$ истинна для матрицы $B_{12}(1)$ и только для неё.

Искомой формулой теперь является

$$\begin{aligned} \text{Ring}(M_1, \dots, M_N; X) &:= \text{Block}_{2,1,\dots,1}(M_1, \dots, M_n; X) \wedge \\ &\wedge \forall D \left(\text{Diag}_{1,2,\dots,2}(D) \implies (DXD^{-1})X = X(DXD^{-1}) \right) \wedge \\ &\wedge \exists D \left(\text{Diag}_{1,2,\dots,2}(D) \wedge X^2 = DXD^{-1} \right) \wedge \\ &\wedge \forall Y \left(\text{Ring}^{\text{unit}}(M_1, \dots, M_N; Y) \implies Y(M_j X M_j^{-1}) = (M_i X M_i^{-1})(M_j X M_j^{-1})Y \right) \end{aligned}$$

(для доказательства см. [7, лемму 15]). $\square$

Лемма 8. При исходных условиях на кольцо и при $n \geq 3$ для полугруппы $G_n(R)$ существуют формулы

$$\text{Add}(M_1, \dots, M_N; X, Y, Z), \quad \text{Mult}(M_1, \dots, M_N; X, Y, Z),$$

такие что каждая из формул истинна в полугруппе тогда и только тогда, когда X, Y, Z имеют вид $B_{12}(x), B_{12}(y), B_{12}(z)$ и либо $x + y = z$, либо $xy = z$ соответственно.

Доказательство. Пусть $\sigma_k = (1, 3)$. Искомыми формулами, очевидно, являются

$$\begin{aligned} \text{Add}(M_1, \dots, M_N; X, Y, Z) &:= \text{Ring}(M_1, \dots, M_N; X) \wedge \\ &\wedge \text{Ring}(M_1, \dots, M_N; Y) \wedge \text{Ring}(M_1, \dots, M_N; Z) \wedge (XY = Z) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \text{Mult}(M_1, \dots, M_N; X, Y, Z) &:= \\ &:= \text{Ring}(M_1, \dots, M_N; X) \wedge \text{Ring}(M_1, \dots, M_N; Y) \wedge \text{Ring}(M_1, \dots, M_N; Z) \wedge \\ &\wedge (M_i X M_i^{-1})(M_k Y M_k^{-1}) = (M_k Y M_k^{-1})(M_i X M_i^{-1}) Z \end{aligned}$$

(для доказательства см. [7, доказательство теоремы 1]). $\square$

Теперь мы готовы доказать основную теорему.

Теорема 1. Если полугруппы $G_n(R)$ и $G_m(S)$ (R, S — коммутативные кольца, содержащие рациональные числа, $n \geq 3$) элементарно эквивалентны, то $m = n$ и полукольца R_+ и S_+ элементарно эквивалентны.

Доказательство. Пусть полугруппы $G_n(R)$ и $G_m(S)$ элементарно эквивалентны. Из леммы 4 тогда следует, что $m = n$, поэтому мы можем считать, что имеем дело с полугруппами $G_n(R)$ и $G_n(S)$.

Теперь докажем, что $R_+ \equiv S_+$. Пусть мы имеем некоторое предложение φ кольцевого языка. Переведём его в предложение $\bar{\varphi}$ группового языка по следующему алгоритму.

Предложение $\bar{\varphi}$ имеет вид

$$\exists M_1, \dots, M_N (\text{Subst}_n(M_1, \dots, M_N) \wedge \varphi'(M_1, \dots, M_N)),$$

где формула $\varphi'(M_1, \dots, M_N)$ получается из предложения φ следующими заменами подформул, входящих в φ :

1) подформула $\forall x \psi(\dots)$ переводится в подформулу

$$\forall X (\text{Ring}(M_1, \dots, M_N; X) \implies \psi'(M_1, \dots, M_N; \dots));$$

2) подформула $\exists x \psi(\dots)$ переводится в подформулу

$$\exists X (\text{Ring}(M_1, \dots, M_N; X) \wedge \psi'(M_1, \dots, M_N; \dots));$$

3) подформула $x = y$ переводится в подформулу $X = Y$;

4) подформула $x + y = z$ переводится в подформулу $\text{Add}(M_1, \dots, M_N; X, Y, Z)$;

5) подформула $xy = z$ переводится в подформулу $\text{Mult}(M_1, \dots, M_N; X, Y, Z)$.

Очевидно, что предложение φ истинно в полукольце R_+ тогда и только тогда, когда предложение $\bar{\varphi}$ истинно в полугруппе $G_n(R)$. Так как полугруппы $G_n(R)$ и $G_n(S)$ элементарно эквивалентны, то истинность предложения $\bar{\varphi}$ в полугруппе $G_n(R)$ равносильна его истинности в полугруппе $G_n(S)$, что, в свою очередь, равносильно истинности предложения φ в полукольце S_+ . Значит, полукольца R_+ и S_+ элементарно эквивалентны. $\square$

Теперь мы приведём пример, когда полукольца R_+ и S_+ элементарно эквивалентны (и даже изоморфны), а соответствующие полугруппы $G_n(R)$ и $G_n(S)$ не элементарно эквивалентны.

Пример. Пусть $R = \mathbb{Q}[x]$ — кольцо многочленов с рациональными коэффициентами с частичным порядком, при котором многочлен является неотрицательным, если все его коэффициенты неотрицательны.

Пусть $S = \mathbb{Q}(x)$ — кольцо (поле) рациональных дробей над $\mathbb{Q}$ с частичным порядком, индуцированным из кольца многочленов, т. е. рациональная дробь является неотрицательной, если она является неотрицательным многочленом.

Очевидно, что оба порядка являются частичными порядками на соответствующих кольцах, оба кольца удовлетворяют условиям теоремы.

Полукольца неотрицательных элементов у данных колец одинаковы — это полукольца неотрицательных рациональных многочленов.

Полугруппа $G_n(R)$ отличается от полугруппы $G_n(S)$ тем свойством, что в ней любой элемент центра обратим в $G_n(R)$: элементом центра является скалярная матрица, обратимая в кольце матриц $M_n(R)$; так как обратимыми элементами кольца R являются только рациональные числа, то центр полугруппы $G_n(R)$ состоит из скалярных матриц с неотрицательными рациональными коэффициентами; все такие матрицы лежат в $\Gamma_n(R)$. Для полугруппы $G_n(S)$ это неверно, элементами центра в ней являются все скалярные матрицы с произвольными ненулевыми неотрицательными коэффициентами (ясно, что не все они содержатся в $\Gamma_n(S)$).

Таким образом, мы построили требуемый пример.

Литература

- [1] Бунина Е. И. Элементарная эквивалентность унитарных линейных групп над кольцами и телами // Успехи мат. наук. — 1998. — Т. 53, № 2. — С. 137–138.
- [2] Бунина Е. И. Элементарная эквивалентность унитарных линейных групп над полями // Фундамент. и прикл. мат. — 1998. — Т. 4, вып. 4. — С. 1265–1278.
- [3] Бунина Е. И. Элементарные свойства групп Шевалле над локальными кольцами // Успехи мат. наук. — 2006. — Т. 61, № 2. — С. 349–350.
- [4] Бунина Е. И. Элементарная эквивалентность групп Шевалле над полями // Фундамент. и прикл. мат. — 2006. — Т. 12, вып. 8. — С. 29–77.
- [5] Бунина Е. И., Михалёв А. В. Автоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами // Фундамент. и прикл. мат. — 2005. — Т. 11, вып. 2. — С. 3–23.
- [6] Бунина Е. И., Михалёв А. В. Элементарная эквивалентность полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами // Фундамент. и прикл. мат. — 2006. — Т. 12, вып. 2. — С. 39–53.
- [7] Бунина Е. И., Семёнов П. П. Автоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами над частично упорядоченными кольцами // Фундамент. и прикл. мат. — 2008. — Т. 14, вып. 2. — С. 69–100.
- [8] Мальцев А. И. Об элементарных свойствах линейных групп // Проблемы математики и механики. — Новосибирск, 1961. — С. 110–132.

- [9] Михалёв А. В., Шаталова М. А. Автоморфизмы и антиавтоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами // Мат. сб. — 1970. — Т. 81, № 4. — С. 600—609.
- [10] Beidar C. I., Mikhalev A. V. On Malcev's theorem on elementary equivalence of linear groups // Contemp. Math. — 1992. — Vol. 131. — P. 29—35.

