Главные ядра полуполей непрерывных положительных функций

Е. М. ВЕЧТОМОВ
Вятский государственный гуманитарный университет
e-mail: vecht@mail.ru

Д. В. ЧУПРАКОВ
Вятский государственный гуманитарный университет
e-mail: chupdiv@yandex.ru

УДК 512.556

Ключевые слова: полукольцо, полуполе, непрерывные функции, конгруэнция, ядро конгруэнции.

Аннотация

Работа посвящена исследованию решёток ядер полуполей непрерывных положительных функций, заданных на произвольном топологическом пространстве. Установлено, что они является решётками с псевдодополнениями. В терминах ядер, в основном главных, полуполей непрерывных функций получены новые характеризации следующих свойств топологических пространств: быть F-пространством, быть P-пространством, базисная и экстремальная несвязность, псевдокомпактность, конечность.

Abstract

E. M. Vechtomov, D. V. Chuprakov, The principal kernels of semifields of continuous positive functions, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 4, pp. 87—107.

This work is devoted to the research of kernel lattices of semifields of continuous positive functions defined on some topological space. It is established that they are lattices with pseudo-complement. New characterizations of the following properties of topological spaces are obtained in terms of kernels, predominantly principal kernels, and semifields of continuous functions: to be an F-space, to be a P-space, basical and extremal disconnectedness, pseudo-compactness, and finiteness.

1. Введение

Данная работа относится к функциональной алгебре, заведомо включающей в себя теорию колец и полуколец непрерывных функций на топологических пространствах.

Классическая теория колец непрерывных функций зародилась в работах М. Стоуна [28] (1937 г.), И. М. Гельфанда и А. Н. Колмогорова [12] (1939 г.), Э. Хьюитта [24] (1948 г.) и окончательно оформилась после выхода в свет

Фундаментальная и прикладная математика, 2008, том 14, № 4, с. 87—107.

в 1960 г. замечательной книги Л. Гилмана и М. Джерисона [22]. Главным объектом теории служит кольцо $C(X)$ всех непрерывных вещественнозначных функций, заданных на произвольном (тихоновском) топологическом пространстве X, с поточечно определёнными операциями сложения и умножения функций. Рядом авторов (М. Стоуном [28], И. Капланским [25], Р. Пирсом [26] и др.) изучались кольца $C(X, K)$ непрерывных функций со значениями в различных топологических кольцах K. Развитие теории колец непрерывных функций в этом направлении отражено в [5—8, 29, 30].

Другим интересным направлением модификации теории колец $C(X)$ стало исследование полуколец непрерывных функций. Здесь выделяются два объекта: полукольцо $C^+(X)$ всех непрерывных неотрицательных функций на топологическом пространстве X и полуполе $U(X)$ всех непрерывных положительных функций на X. Заметим, что кольцо $C(X)$ служит кольцом разностей как полукольца $C^+(X)$, так и полуполя $U(X)$. Полукольца $C^+(X)$ для компактов X фигурировали в качестве примера в [27] (см. также [17, 18]). Систематическое изучение свойств полуколец непрерывных функций начато в [3]. Полуполя $U(X)$ изучаются в [2, 3, 11, 13, 15, 16]. Полукольца $C^+(X)$ и полуполя $U(X)$ рассматривались в [9, 19].

В теории колец непрерывных функций важную роль играют F-пространства и P-пространства, введённые в [20, 21]. Получены многочисленные характеризации F-пространств и P-пространств (см. [4, 6, 11, 16, 22]. В настоящей статье мы даём новые характеризации этих классов пространств X в терминах свойств главных ядер полуполей $U(X)$. Наше исследование инициировано теорией колец $C(X)$, опирается, но не вытекает из неё. Полуполя $U(X)$ служат модельным примером и источником идей теории полутел, развиваемой в рамках общей теории полуколец [10, 14, 23].

2. Исходные понятия и факты

Пусть $C^+(X)$ $(U(X))$ — полукольцо (полуполе без нуля) всех непрерывных неотрицательных (положительных) функций, определённых на произвольном топологическом пространстве X, с обычными операциями сложения и умножения функций. Если вместо сложения $+$ взять операцию максимума $\vee$, то получим идемпотентные полукольцо $C^\vee(X)$ и полуполе $U^\vee(X)$.

На множестве $C(X)$ существует естественный порядок $\leqslant$:

$$f \leqslant g \iff \forall\, x \in X \ \big(f(x) \leqslant g(x)\big).$$

Если $f \leqslant g$, но $f \neq g$, то будем писать $f < g$. Запись $f \lessdot g$ $(f \gtrdot g)$ означает, что $f(x) < g(x)$ $(f(x) > g(x))$ для каждого $x \in X$.

Модулем функции $f \in C(X)$ называется такая функция $|f|$, что $|f|(x) = |f(x)|$ для каждого $x \in X$. С функцией f кольца $C(X)$ связаны функции $f^+ = f \vee 0$ и $f^- = -(f \wedge 0)$ из полукольца $C^+(X)$. Легко убедиться, что $f^+ - f^- = f$, $f^+ + f^- = |f|$, $f^+ \cdot f^- = 0$.

Для каждой функции $f \in C(X)$ множества $Z(f) = \{x \in X \mid f(x) = 0\}$ и $\operatorname{coz} f = X \setminus Z(f)$ называются *нуль-множеством* и *конуль-множеством*. Множество $\{x \in X \mid f(x) > 0\} = \operatorname{coz} f^+$ обозначается $\operatorname{pos} f$, а множество $\{x \in X \mid f(x) < 0\} = \operatorname{coz} f^-$ обозначается $\operatorname{neg} f$.

Через $\operatorname{ed} f$ обозначим множество $\{x \in X \mid f(x) = 1\} = Z(f-1)$ единиц функции $f \in C(X)$. Очевидно, что оператор ed обладает следующими свойствами:

1) для любых функций $f, g \in C(X)$ выполняются включения $\operatorname{ed} fg \supseteq \operatorname{ed} f \cap \operatorname{ed} g$, $\operatorname{ed}(f \vee g) \supseteq \operatorname{ed} f \cap \operatorname{ed} g$, $\operatorname{ed}(f \wedge g) \supseteq \operatorname{ed} f \cap \operatorname{ed} g$, $\operatorname{ed} \frac{f+g}{2} \supseteq \operatorname{ed} f \cap \operatorname{ed} g$;
2) $\operatorname{ed}(f \vee g) = \operatorname{ed} \frac{f+g}{2} = \operatorname{ed} fg = \operatorname{ed} f \cap \operatorname{ed} g$ для любых функций $f, g \geqslant 1$;
3) $\operatorname{ed}(f \vee g) = \operatorname{ed} f \cup \operatorname{ed} g$ для любых функций $f, g \leqslant 1$;
4) $\operatorname{ed} f = \operatorname{ed} f^{-1} = \operatorname{ed}(f \vee f^{-1}) = \operatorname{ed}(f \wedge f^{-1})$ для любой функции $f \in U(X)$.

Конгруэнцией на полукольце называется отношение эквивалентности на нём, сохраняющее полукольцевые операции. Пусть ρ — конгруэнция на полукольце S с единицей 1. Обозначим через $[a]_\rho = \{s \in S \mid s \ \rho \ a\}$ класс конгруэнтности элемента $a \in S$. Через $\ker \rho$ обозначается класс единицы $[1]_\rho$ конгруэнции ρ, который называется *ядром*.

$\vee$-*конгруэнцией* будем называть конгруэнцию на полуполе $U^\vee(X)$ или полукольце $C^\vee(X)$. Ядро $\vee$-конгруэнции назовём $\vee$-*ядром*.

Классы любой конгруэнции на полукольце $C^\vee(X)$ и на полуполе $U^\vee(X)$ выпуклы.

Главной конгруэнцией ρ на полуполе U, порождённой парой (u, v), называется наименьшая конгруэнция на U с условием $u \ \rho \ v$. Она однозначно задаётся парой $(uv^{-1}, 1)$.

Ядро главной конгруэнции на полуполе $U(X)$ ($U^\vee(X)$), порождённой парой $(\varphi, 1)$, назовём *главным ядром* и обозначим (φ) ($(\varphi)^\vee$).

Теорема 2.1 [15, теорема 1]. *Главные ядра (φ) на полуполе $U(X)$ и только они имеют вид*

$$(\varphi) = \left\{ v \in U(X) \;\middle|\; \begin{array}{l} v - 1 \in (\varphi - 1)C(X), \\ \exists\, k \in \mathbb{N} \ \big((\varphi \vee \varphi^{-1})^{-k} \leqslant v \leqslant (\varphi \vee \varphi^{-1})^k\big) \end{array} \right\}.$$

Для главных $\vee$-ядер теорема приобретает следующий вид.

Теорема 2.2 [11, предложение 4]. *Главные ядра $(\varphi)^\vee$ на полуполе $U^\vee(X)$ и только они имеют вид*

$$(\varphi)^\vee = \big\{ v \in U^\vee(X) \mid \exists\, k \in \mathbb{N} \ \big((\varphi \wedge \varphi^{-1})^k \leqslant v \leqslant (\varphi \vee \varphi^{-1})^k\big) \big\}.$$

Предложение 2.1. *Для произвольной функции $\varphi \in U(X)$, если множество $\operatorname{ed} \varphi$ является открыто-замкнутым, то $(\varphi) = (\varphi \vee \varphi^{-1})$.*

Доказательство. Возьмём такую функцию φ, что множество $\operatorname{ed} \varphi$ открыто-замкнуто. Покажем, что $(\varphi \vee \varphi^{-1}) \subseteq (\varphi)$. Рассмотрим функцию

$$f = \begin{cases} \frac{\varphi(x)\vee\varphi^{-1}(x)-1}{\varphi(x)-1}, & x \in X \setminus \operatorname{ed}\varphi, \\ 1, & x \in \operatorname{ed}\varphi. \end{cases}$$

Она непрерывна в силу открыто-замкнутости множества $\operatorname{ed}\varphi$. Тогда $\varphi\vee\varphi^{-1}-1 = (\varphi-1)f$. По теореме 2.1 имеем $\varphi\vee\varphi^{-1} \in (\varphi)$.

Теперь установим, что $\varphi \in (\varphi\vee\varphi^{-1})$. Так как $\operatorname{ed}(\varphi\vee\varphi^{-1}) = \operatorname{ed}\varphi$, непрерывна функция

$$g = \begin{cases} \frac{\varphi(x)-1}{\varphi(x)\vee\varphi^{-1}(x)-1}, & x \in X \setminus \operatorname{ed}(\varphi\vee\varphi^{-1}), \\ 1, & x \in \operatorname{ed}(\varphi\vee\varphi^{-1}). \end{cases}$$

Значит,

$$\varphi - 1 = (\varphi\vee\varphi^{-1}-1)\cdot g \in (\varphi\vee\varphi^{-1}-1)C(X).$$

В то же время

$$(\varphi\vee\varphi)^{-1} = \varphi\wedge\varphi^{-1} \leqslant \varphi \leqslant \varphi\vee\varphi^{-1}.$$

По теореме 2.1 имеем $(\varphi\vee\varphi^{-1}) \supseteq (\varphi)$. Таким образом, $(\varphi\vee\varphi^{-1}) = (\varphi)$. □

Подмножества A и B пространства X называются *функционально отделимыми*, если существует функция $f \in C(X)$, принимающая значение 0 на A и 1 на B.

Топологическое пространство X называется *F-пространством*, если в кольце $C(X)$ все конечно порождённые идеалы главные [22]. Хорошо известно, что пространство X является F-пространством тогда и только тогда, когда множества $\operatorname{neg} f$ и $\operatorname{pos} f$ для любой функции $f \in C(X)$ функционально отделимы [22].

Теорема 2.3 [11, теорема 1]. *Пространство X является F-пространством тогда и только тогда, когда $\operatorname{Con} U(X) = \operatorname{Con} U^{\vee}(X)$.*

Пространство X называется *P-пространством*, если нуль-множество любой функции из $C(X)$ открыто [22].

Топологическое пространство X называется *базисно несвязным* (*экстремально несвязным*), если внутренности всех его нуль-множеств (замкнутых множеств) замкнуты.

Лемма 2.1. *Отображение*

$$\gamma\colon \operatorname{Id} C(X) \to \operatorname{Con} U(X), \quad \gamma(I) = \{(f,g) \mid f-g \in I\},$$

является гомоморфизмом.

Доказательство. Отображение γ является $\cap$-гомоморфным отображением [3]. Проверим равенство $\gamma(I+J) = \gamma(I)\circ\gamma(J)$. Очевидно включение $\gamma(I+J) \supseteq \gamma(I)\circ\gamma(J)$. Докажем обратное включение. Пусть $f,g \in C^+(X)$, $f\ \gamma(I+J)\ g$. Тогда $f-g = i+j$, где $i \in I$, $j \in I$. Значит, $g\ \gamma(I)\ (g+i)\ \gamma(J)\ (g+i+j) = f$, т. е. $f\ \big(\gamma(I)\circ\gamma(J)\big)\ g$. □

Предложение 2.2. *В полуполе $U^{\vee}(X)$ пересечение и произведение двух главных ядер являются главными ядрами.*

Доказательство. Рассмотрим главные ядра (φ) и (ψ) полуполя $U^{\vee}(X)$. По теореме 2.2 $(\varphi) = (\varphi \vee \varphi^{-1})$ и $(\psi) = (\psi \vee \psi^{-1})$.

Покажем, что
$$(\varphi) \cap (\psi) = \big((\varphi \vee \varphi^{-1}) \wedge (\psi \vee \psi^{-1})\big).$$
Так как ядро (φ) является выпуклым и
$$1 \leqslant (\varphi \vee \varphi^{-1}) \wedge (\psi \vee \psi^{-1}) \leqslant (\varphi \vee \varphi^{-1}),$$
имеем
$$(\varphi \vee \varphi^{-1}) \wedge (\psi \vee \psi^{-1}) \in (\varphi).$$
Аналогично
$$(\varphi \vee \varphi^{-1}) \wedge (\psi \vee \psi^{-1}) \in (\psi).$$
Таким образом,
$$(\varphi) \cap (\psi) \supseteq \big((\varphi \vee \varphi^{-1}) \wedge (\psi \vee \psi^{-1})\big).$$

Пусть $u \in (\varphi) \cap (\psi)$. Тогда функция u удовлетворяет условиям
$$(\varphi \vee \varphi^{-1})^{-k} \leqslant u \leqslant (\varphi \vee \varphi^{-1})^{k}, \quad (\psi \vee \psi^{-1})^{-k} \leqslant u \leqslant (\psi \vee \psi^{-1})^{k}.$$
Следовательно,
$$\big((\varphi \vee \varphi^{-1}) \wedge (\varphi \vee \varphi^{-1})\big)^{-k} \leqslant u \leqslant \big((\varphi \vee \varphi^{-1}) \wedge (\varphi \vee \varphi^{-1})\big)^{k}.$$
Значит,
$$u \in \big((\varphi \vee \varphi^{-1}) \wedge (\varphi \vee \varphi^{-1})\big).$$

Покажем справедливость равенства
$$(\varphi)(\psi) = \big((\varphi \vee \varphi^{-1})(\psi \vee \psi^{-1})\big).$$

Включение
$$\big((\varphi \vee \varphi^{-1})(\psi \vee \psi^{-1})\big) \subseteq (\varphi)(\psi)$$
очевидно. С другой стороны, любая функция $v \in (\varphi)(\psi)$ может быть представлена в виде произведения $v = fg$, где $f \in (\varphi)$, $g \in (\psi)$. Следовательно, для некоторого $k \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства
$$(\varphi \vee \varphi^{-1})^{-k} \leqslant f \leqslant (\varphi \vee \varphi^{-1})^{k}, \quad (\psi \vee \psi^{-1})^{-k} \leqslant g \leqslant (\psi \vee \psi^{-1})^{k},$$
откуда следует, что
$$\big((\varphi \vee \varphi^{-1})(\psi \vee \psi^{-1})\big)^{-k} \leqslant v \leqslant \big((\varphi \vee \varphi^{-1})(\psi \vee \psi^{-1})\big)^{k}.$$
Таким образом,
$$(\varphi)(\psi) \subseteq \big((\varphi \vee \varphi^{-1})(\psi \vee \psi^{-1})\big). \qquad \square$$

Заметим, что для произвольного идемпотентного полутела произведение любых двух главных ядер является главным ядром [1].

Лемма 2.2. *Если* $\operatorname{ed} u \cup \operatorname{ed} v \neq X$ *для* $u, v \in U(X)$, *то* $(u) \cap (v) \neq \{1\}$.

Доказательство. Пусть $u, v \in U(X)$ такие, что $\operatorname{ed} u \cup \operatorname{ed} v \neq X$. Рассмотрим функции

$$f = (u \vee u^{-1}) \wedge (v \vee v^{-1}), \quad g = \frac{(u-1)(v-1)}{(u \vee u^{-1})(v \vee v^{-1})}(f-1)+1,$$

$$q = \frac{(u-1)(v-1)}{(u \vee u^{-1})(v \vee v^{-1})}(1-f^{-1})+1, \quad s = \frac{g+q}{2} = \frac{(u-1)(v-1)(f-f^{-1})}{2(u \vee u^{-1})(v \vee v^{-1})}+1.$$

Очевидно, что $f, g, q, s \in U(X)$. Так как $f \geqslant 1$, $\left|\frac{u-1}{u \vee u^{-1}}\right| \leqslant 1$ и $\left|\frac{v-1}{v \vee v^{-1}}\right| \leqslant 1$, то

$$g - 1 \leqslant |g-1| = \left|\frac{u-1}{u \vee u^{-1}}\right| \cdot \left|\frac{v-1}{v \vee v^{-1}}\right| \cdot (f-1) \leqslant f-1,$$

$$q - 1 \geqslant -|q-1| = -\left|\frac{u-1}{u \vee u^{-1}}\right| \cdot \left|\frac{v-1}{v \vee v^{-1}}\right| \cdot (1-f^{-1}) \geqslant f^{-1}-1,$$

$$g - 1 = f(q-1) \geqslant q-1.$$

Значит,

$$f^{-1} \leqslant q \leqslant s \leqslant g \leqslant f.$$

По теореме 2.1 имеем $s \in (u) \cap (v)$. Так как $\operatorname{ed} u \cup \operatorname{ed} v \neq X$, то $f \neq 1$. Следовательно, $s \neq 1$ и $(u) \cap (v) \neq \{1\}$. □

Лемма 2.3. *Для произвольного топологического пространства X справедливы следующие утверждения.*

1. *Для произвольной постоянной функции k функции $f \wedge k$ и $g \wedge k$ имеют НОД тогда и только тогда, когда $f, g \in C^+(X)$ имеют НОД.*
2. *Для любого идеала I полукольца $C^+(X)$ $f \in I$ тогда и только тогда, когда $f \wedge 1 \in I$.*
3. *Для любого идеала J кольца $C(X)$ $f \in J$ тогда и только тогда, когда $f \wedge 1 \vee (-1) \in J$.*

Доказательство. 1. Действительно, $f \wedge k = fu$, где

$$u = \begin{cases} \frac{f \wedge k}{f} & \text{на } \operatorname{coz} f, \\ 1 & \text{на } Z(f). \end{cases}$$

Легко убедиться, что $u \in U(X)$, т. е. $f = (f \wedge k)u^{-1}$.

Таким образом, любой общий делитель функций f и g является общим делителем функций $f \wedge k$ и $g \wedge k$ и наоборот. Значит, множества общих делителей совпадают, и следовательно, совпадают наибольшие общие делители.

2. Пусть $f \in I$. Тогда идеал $fC^+(X)$ содержится в идеале I. Функции f и $f \wedge 1$ имеют НОД в силу пункта 1. Значит, $f \wedge 1 \in fC^+(X) \subseteq I$. С другой стороны, если $f \wedge 1 \in I$, то $f \in fC^+(X) \subseteq I$ по доказательству пункта 1.

3. Пусть J — идеал кольца $C(X)$ и $f \in J$. Тогда $f \vee 1 \wedge (-1) = fu$, где

$$u = \begin{cases} 1, & |f| \leqslant 1, \\ \frac{1}{|f|}, & |f| \geqslant 1, \end{cases}$$

причём $u \in U(X)$. Значит, $f = (f \vee 1 \wedge -1)u^{-1}$. Таким образом, $fC(X) = \big(f \vee 1 \wedge (-1)\big)C(X)$, откуда и следует справедливость утверждения 3. $\square$

Лемма 2.4 [3, лемма 1.8]. *Если $fg = 0$ для $f, g \in C^+(X)$ и существует НОД функций f, g, то $h(\operatorname{coz} f) = \{0\}$ и $h(\operatorname{coz} g) = \{1\}$ для некоторой функции $h \in C^+(X)$.*

Дополнением A' ядра A на полуполе $U(X)$ (или $U^\vee(X)$) называется ядро, удовлетворяющее условиям $A \cap A' = \{1\}$ и $A \cdot A' = U(X)$.

Лемма 2.5. *Ядро K имеет дополнение тогда и только тогда, когда $K = \{u \in U(X) \mid \operatorname{ed} u \supseteq A\}$ для некоторого открыто-замкнутого множества A.*

Доказательство. Пусть множество A является открыто-замкнутым. Рассмотрим ядра $K = \{u \in U(X) \mid \operatorname{ed} u \supseteq A\}$ и $L = \{v \in U(X) \mid \operatorname{ed} v \supseteq X \setminus A\}$. Очевидно, что $K \cap L = \{1\}$. Рассмотрим произвольную функцию $f \in U(X)$. Так как множество A открыто-замкнуто, функции

$$u = \begin{cases} f(x), & x \in X \setminus A, \\ 1, & x \in A, \end{cases} \qquad v = \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ 1, & x \in X \setminus A, \end{cases}$$

непрерывны, т. е. $u \in K$, $v \in L$, $f = u \cdot v$. Значит, $U(X) = K \cdot L$. Итак, $L = K'$.

Обратно, пусть ядро K имеет дополнение K'. Тогда функция $2 \in U(X)$ представима в виде $f = u \cdot v$ для некоторых функций $u \in K$ и $v \in K'$. Из леммы 2.5 и включения $(u) \cap (v) \subseteq K \cap K' = \{1\}$ следует, что $\operatorname{ed} u \cup \operatorname{ed} v = X$. Значит, $u(\operatorname{ed} v) = \{2\}$, $v(\operatorname{ed} u) = \{2\}$ и $X \setminus \operatorname{ed} u = \operatorname{ed} v$. Тогда множество $A = \operatorname{ed} u$ открыто-замкнуто.

Предположим теперь, что существует такая функция $w \in K$, что $\operatorname{ed} w \cap A \neq A$. Тогда $\operatorname{ed} w \cup \operatorname{ed} v \neq X$. По лемме 2.2 имеем $K \cap K' \supseteq (u) \cap (v) \neq \{1\}$. Противоречие. Поэтому $K = \{u \in U(X) \mid \operatorname{ed} u \supseteq A\}$. $\square$

Псевдодополнением A^* ядра A на полуполе $U(X)$ или $U^\vee(X)$ называется наибольшее ядро, удовлетворяющее условию $A \cap A^* = \{1\}$.

Полуполе $U(X)$ называется *слабо риккартовым*, если для любых функций $f, g \in U(X)$, таких что $(f) \cap (g) = 1$, выполняется равенство $(f)^*(g)^* = U(X)$.

Полуполе $U(X)$ называется *риккартовым*, если для каждой функции $f \in U(X)$ псевдодополнение $(f)^*$ дополняемо.

Полуполе $U(X)$ называется *бэровским*, если псевдодополнение A^* произвольного ядра $A \in \operatorname{Con} U(X)$ дополняемо.

Полуполе $U(X)$ называется *бирегулярным*, если для каждой функции $f \in U(X)$ ядро (f) дополняемо.

3. Образующие и псевдокомпактность

Полуполе U имеет *образующие* $u_1, \ldots, u_n$, если $U = (u_1) \cdot \ldots \cdot (u_n)$. Если $U = (u)$, то элемент u называется *образующим*.

Будем говорить, что функция u *отделяется от* 1 (*на множестве* $A \subseteq X$), если существует такая константа $c > 1$, что $u(x) \vee u^{-1}(x) > c$ для всех $x \in X$ ($x \in A$).

Очевидно, что функция u отделяется от 1 на множестве $A \subseteq X$ тогда и только тогда, когда $u(x) \wedge u^{-1}(x) < d$ для некоторой константы $0 < d < 1$ и всех $x \in A$.

Лемма 3.1. *Функция u отделяется от 1 на множестве A тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{i\to\infty} u(\alpha_i) \neq 1$ для любой последовательности (x_i), определённой на множестве A.*

Доказательство. Пусть u отделяется от 1 на множестве $A \subseteq X$. Тогда существуют константы $c > 1$, $0 < d < 1$, для которых $u(x) \vee u^{-1}(x) > c$ и $u(x) \wedge u^{-1}(x) < d$ при всех $x \in A$, т. е. существует окрестность единицы, лежащая в интервале $(d; c)$, в которой не содержится значений функции u. Значит, $\lim\limits_{i\to\infty} u(\alpha_i) \neq 1$ для любой последовательности (x_i), определённой на множестве A.

Обратно, пусть $\lim\limits_{i\to\infty} u(\alpha_i) \neq 1$ для любой последовательности (x_i), определённой на множестве A. Значит, найдётся окрестность единицы $(1-\varepsilon; 1+\varepsilon)$, не содержащая значений функции u. Возьмём $c = (1+\varepsilon) \vee (1-\varepsilon)^{-1}$. Тогда $u(x) \vee u^{-1}(x) > c$ для всех $x \in A$, т. е. u отделяется от 1 на множестве A. □

Лемма 3.2. *Функция u порождает ядро (2) тогда и только тогда, когда функция u является ограниченной и отделяется от 1.*

Доказательство. Пусть $(u) = (2)$. Тогда функция u является ограниченной и $2 \in (u)$. По теореме 2.1 выполняется неравенство $2 \leqslant (u \vee u^{-1})^k$. Следовательно, найдётся константа $c > 1$, для которой $u \vee u^{-1} \gtrdot c$.

Докажем утверждение в обратную сторону. Пусть функция u является ограниченной и отделяется от 1. Тогда $(u) \subseteq (2)$. Условие отделимости $u \vee u^{-1} \gtrdot c > 1$ позволяет заключить, что найдётся такое натуральное число k, что $(u \vee u^{-1})^{-k} \leqslant \leqslant 2 \leqslant (u \vee u^{-1})^k$ и $Z(u-1) = \operatorname{ed} u = \varnothing$. Значит, функция $f = (u-1)^{-1}$ обратима в кольце $C(X)$ и $(u-1)f = 1$, т. е. $2 \in (u)$ по теореме 2.1. Таким образом, $(u) = (2)$. □

Лемма 3.3. *Функция u является образующей полуполя $U(X)$ тогда и только тогда, когда пространство X псевдокомпактно и функция u отделяется от 1 на X.*

Доказательство. Пусть $U(X) = (u)$. Тогда $e^u \in (u)$. Значит, для некоторого натурального числа k выполняется неравенство

$$(u \vee u^{-1})^{-k} \leqslant e^u \leqslant (u \vee u^{-1})^k,$$

что возможно, только если функция u является ограниченной. Тогда $u \in (2)$. Значит, $U(X) = (u) \subseteq (2)$, или $(u) = (2)$. Таким образом, пространство X псевдокомпактно, и по лемме 3.2 функция u отделяется от 1.

Докажем утверждение в обратную сторону. Пусть функция u отделяется от 1. Если пространство X псевдокомпактно, то функция u является ограниченной. Тогда $(u) = (2) = U(X)$ по лемме 3.2. $\square$

Теорема 3.1. *Для любого топологического пространства эквивалентны следующие условия*:

1) *пространство X является псевдокомпактным;*
2) $(\varphi) = \ker\gamma\big((\varphi-1)C(X)\big)$ *для каждой функции* $\varphi \in U(X)$;
3) $U^{\vee}(X)$ — *полуполе с образующей*;
4) $U(X)$ — *полуполе с образующей.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть пространство X псевдокомпактно. Тогда все функции на $C(X)$ ограниченны.

Рассмотрим произвольное главное ядро (φ). Оно имеет вид

$$(\varphi) = \left\{ f \in U(X) \;\middle|\; \begin{array}{l} f - 1 \in (\varphi-1)C(X); \\ \exists\, k \in \mathbb{N}\ (\varphi \vee \varphi^{-1})^{-k} \leqslant f \leqslant (\varphi \vee \varphi^{-1})^{k} \end{array} \right\}.$$

Покажем, что для произвольной функции $f \in \ker\gamma\big((\varphi-1)C(X)\big)$ и некоторого числа $k \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$(\varphi \vee \varphi^{-1})^{-k} \leqslant f \leqslant (\varphi \vee \varphi^{-1})^{k}. \tag{3.1}$$

Так как $f \in \gamma\big((\varphi-1)C(X)\big)$, то $f = (\varphi-1)c + 1$ для некоторого $c \in C(X)$.

В силу ограниченности функций $f \in U(X)$ и $c \in C(X)$ для некоторых чисел $n > 0$ и $m > -1$ имеют место неравенства

$$|c| < n, \quad m \leqslant f - 1 \leqslant (\varphi - 1)n. \tag{3.2}$$

Рассмотрим множество $A = \{x \in X \mid \varphi(x) < 1\}$. На нём неравенство (3.1) принимает вид

$$\varphi^{k} - 1 \leqslant (\varphi-1)c \leqslant \varphi^{-k} - 1. \tag{3.3}$$

Проверим справедливость неравенства $\varphi^k - 1 \leqslant (\varphi-1)c$. Заметим, что

$$\varphi^k - 1 = (\varphi - 1)\sum_{i=0}^{k-1} \varphi^i.$$

Так как $\varphi(x) < 1$ на множестве A, то

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=0}^{k-1} \varphi^i(x) = \frac{1}{1-\varphi(x)}$$

при $x \in A$. С другой стороны,

$$c(x) \leqslant \frac{m}{\varphi(x)-1} = \frac{-m}{1-\varphi(x)} < \frac{1}{1-\varphi(x)}$$

в силу второго неравенства (3.2). Значит, найдётся натуральное число k_1, для которого верно неравенство

$$c < \sum_{i=0}^{k_1-1} \varphi^i,$$

т. е. для всех натуральных чисел $k \geqslant k_1$ имеет место неравенство

$$\varphi^k - 1 = (\varphi - 1)\sum_{i=0}^{k-1} \varphi^i \leqslant (\varphi - 1)c.$$

Найдём такое натуральное число k, для которого верно неравенство $(\varphi - 1)c \leqslant \varphi^{-k} - 1$. Легко убедиться, что

$$\varphi^{-k} - 1 = -\varphi^{-k}(\varphi - 1)\sum_{i=0}^{k-1}.$$

Так как $\varphi(x) < 1$ на множестве A, то для всех $k \in \mathbb{N}$ и всех $x \in A$ имеет место неравенство

$$k\varphi^k(x) \leqslant \sum_{i=0}^{k-1} \varphi^i(x).$$

Тогда

$$\varphi^{-k} - 1 = -\varphi^{-k}(\varphi - 1)\sum_{i=0}^{k-1} \geqslant -k(\varphi - 1).$$

При $k \geqslant n$ на множестве A в силу первого неравенства (3.2) выполняется неравенство $-k(\varphi(x) - 1) \geqslant -n(\varphi(x) - 1) \geqslant c(\varphi(x) - 1)$, т. е. $(\varphi - 1)c \leqslant \varphi^{-k} - 1$ при всех $k \geqslant n$. Отсюда получаем, что при $k \geqslant k_1 \vee n$ справедливо двойное неравенство (3.3).

Теперь рассмотрим множество $B = \{x \in X \mid \varphi(x) > 1\}$. На нём неравенство (3.1) принимает вид

$$(\varphi^{-k} - 1) \leqslant (\varphi - 1)c \leqslant (\varphi^k - 1). \tag{3.4}$$

Правое неравенство можно переписать в виде

$$(\varphi - 1)c + 1 \leqslant (\varphi - 1 + 1)^k.$$

Пользуясь неравенством Бернулли и первым неравенством (3.2), при $k \geqslant n$ получаем

$$(\varphi - 1)c + 1 \leqslant (\varphi - 1)k + 1 \leqslant (\varphi - 1 + 1)^k.$$

Теперь рассмотрим левое неравенство. Его можно записать в виде

$$(\varphi - 1)(-\varphi^{-k})\sum_{i=0}^{k-1} \varphi^i \leqslant (\varphi - 1)c,$$

или

$$(\varphi-1)\sum_{j=1}^{k}\varphi^{-j} \geqslant (\varphi-1)(-c).$$

На множестве B $\varphi^{-1}<1$, т. е.

$$\lim_{k\to\infty}(\varphi-1)\sum_{j=1}^{k}\varphi^{-j} = \lim_{k\to\infty}\frac{(\varphi-1)\varphi^{-1}}{1-\varphi^{-1}} = 1.$$

В то же время

$$(\varphi(x)-1)\big(-c(x)\big) \leqslant -m < 1\frac{-m}{1-\varphi(x)} < \frac{1}{1-\varphi(x)}$$

по неравенству (3.2). Значит, найдётся такое $k_2 \in \mathbb{N}$, что выполняется левое неравенство (3.4) для всех $k \geqslant k_2$. Итак, на множестве B при всех $k \geqslant n \vee k_3$ выполняется неравенство (3.4).

Заметим, что на множестве $E = \{x \in X \mid \varphi(x) = 1\}$ неравенство (3.1) выполняется всегда. Итак, что для функций $f = (\varphi-1)c+1$ неравенство (3.1) выполняется при всех $k \geqslant k_1 \vee k_2 \vee n$. Таким образом, $(\varphi) = \ker\gamma(\varphi-1)$.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 3). Пусть $(\varphi) = \ker\gamma(\varphi-1)$ для каждой функции $\varphi \in U(X)$. Тогда $(2) = \ker\gamma\big(1\cdot C(X)\big) = \ker\gamma C(X) = U(X)$. Легко видеть, что (2) является $\vee$-ядром, т. е. $(2) = U^{\vee}(X)$.

Импликация 3) $\Longrightarrow$ 4) очевидна.

Докажем импликацию 4) $\Longrightarrow$ 1). Пусть существует такая функция u из полуполя $U(X)$, что $U(X) = (u)$. По лемме 3.3 полуполе $U(X)$ псевдокомпактно. □

4. Существование псевдодополнений

Предложение 4.1. *На полуполе* $U(X)$ $(U^{\vee}(X))$ *псевдодополнение* $(\varphi)^*$ *ядра* (φ) *имеет вид* $\ker\gamma\big(\mathrm{Ann}(\varphi-1)\big)$.

Доказательство. Пусть $f \in \ker\gamma\big(\mathrm{Ann}(\varphi-1)\big)$. Тогда $f-1 \in \mathrm{Ann}(\varphi-1)$, или $(f-1)(\varphi-1) = 0$. Следовательно, $\mathrm{ed}\, f \cup \mathrm{ed}\,\varphi = X$ для любой функции $f \in \ker\gamma\big(\mathrm{Ann}(\varphi-1)\big)$, откуда $(\varphi) \cap \ker\gamma\big(\mathrm{Ann}(\varphi-1)\big) = \{1\}$.

Пусть существует функция $\psi \in (\varphi)^* \backslash \ker\gamma\big(\mathrm{Ann}(\varphi-1)\big)$. Тогда $\mathrm{ed}\,\varphi \cup \mathrm{ed}\,\psi \neq X$. По лемме 2.2 имеем $(\varphi) \cap (\varphi)^* \neq \{1\}$. Противоречие.

Итак, $(\varphi)^* = \ker\gamma\big(\mathrm{Ann}(\varphi-1)\big)$. □

Теорема 4.1. *Решётка* $\mathrm{Con}\, U(X)$ $(\mathrm{Con}\, U^{\vee}(X))$ *является решёткой с псевдодополнениями.*

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать, что любое ядро имеет псевдодополнение.

Покажем, что конечное произведение главных ядер имеет псевдодополнение. Рассмотрим ядра $(a_1), \ldots, (a_n)$ и $K = (a_1) \cdot \ldots \cdot (a_n)$. Возьмём ядро $H = (a_1)^* \cap \ldots \cap (a_n)^*$. Так как $(a_i)^* = \ker\gamma\big(\mathrm{Ann}(a_i - 1)\big)$, то $H = \ker\gamma\big(\mathrm{Ann}(a_1 - 1) \cap \ldots \cap \mathrm{Ann}(a_n - 1)\big)$. Пусть $f \in K \cap H$. Тогда $f = u_1 \cdot \ldots \cdot u_n$, где $u_i \in (a_i)$. Следовательно,

$$\mathrm{coz}(f-1) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{coz}(u_i - 1) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{coz}(a_i - 1).$$

Однако, так как $f \in H$,

$$Z(f-1) \supseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{coz}(a_i - 1).$$

Поэтому $\mathrm{coz}(f-1) = \varnothing$. Итак, $K \cap H = \{1\}$. Рассмотрим такое произвольное ядро H_1, что $K \cap H_1 = \{1\}$. Тогда $(a_i) \cap H_1 = \{1\}$ и $H_1 \subseteq (a_i)^*$. Значит, $H_1 \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} (a_i)^* = H$. Итак, $H = K^*$.

Покажем, что объединение ядер, имеющих псевдодополнение, имеет псевдодополнение. Рассмотрим произвольные псевдодополняемые ядра A и B и их псевдодополнения A^* и B^*. Пусть $L = \bigcup A_i$, $N = \bigcap A_i^*$. Тогда

$$L \cap N = \Big(\bigcup_i A_i\Big) \cap \Big(\bigcap_j A_j^*\Big) = \bigcup_{A_i \in L} \Big((A_i \cap A_i^*) \cap \Big(\bigcap_{i,\, i \neq j} A_j^*\Big)\Big) =$$

$$= \bigcup_i \Big(\{1\} \cap \Big(\bigcap_{j,\, i \neq j} A_j^*\Big)\Big) = \{1\}.$$

Рассмотрим такое произвольное ядро N_1, что $L \cap N_1 = \{1\}$. Тогда $A_i \cap H_1 = \{1\}$ для всех A_i. Следовательно, $H_1 \subseteq \bigcap A_i^* = H$. Итак, объединение псевдодополняемых ядер имеет псевдодополнение.

Так как любое ядро есть объединение конечных произведений главных ядер, то любое ядро псевдодополняемо. □

5. F-пространства

Теорема 5.1. *Для любого топологического пространства X следующие условия равносильны*:

1) $(u) = (u \vee u^{-1})$ *для всех* $u \in U(X)$;
2) *упорядоченное множество главных ядер полуполя $U(X)$ является подрешёткой решётки* $\mathrm{Con}\, U(X)$;
3) *пересечение любых двух главных ядер полуполя $U(X)$ является главным ядром*;
4) *произведение любых двух главных ядер полуполя $U(X)$ является главным ядром*;

5) *полуполе $U(X)$ слабо риккартово*;

6) *X является F-пространством.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 6). Возьмём произвольные непересекающиеся конуль-множества $A, B \subseteq X$. Найдётся такая функция $f \in C(X)$, что $\operatorname{pos} f = A$ и $\operatorname{neg} f = B$. Рассмотрим функцию

$$u = \left(f \wedge \frac{1}{2} \vee \left(-\frac{1}{2}\right)\right) + 1 \in U(X).$$

По условию 1) имеем равенство $(u) = (u \vee u^{-1})$, причём $\operatorname{ed} u = Z(f)$, $u(A) > 1$ и $u(B) < 1$. По теореме 2.1 найдутся функции $g, h \in C(X)$, для которых

$$(u \vee u^{-1}) - 1 = (u-1)g, \quad u - 1 = \big((u \vee u^{-1}) - 1\big)h.$$

На множестве A имеем $u > 1$ и $u-1 = (u-1)g = (u-1)h$, т. е. $g = h = 1$. На множестве B выполняются соотношения $u < 1$, $u^{-1}-1 = (u-1)g$ и $u-1 = (u^{-1}-1)h$. Следовательно, $g = -u^{-1}$ и $h = -u$. Тогда для функции $\chi = g \cdot |h|$ справедливы равенства

$$\chi(A) = \{1\}, \quad \chi(B) = -u^{-1}(B) \cdot u(B) = \{-1\}.$$

Итак, множества A и B функционально-отделимы, т. е. X является F-пространством.

Докажем импликацию 6) $\Longrightarrow$ 1). Пусть X является F-пространством. Тогда по теореме 2.3 любое ядро является $\vee$-ядром. По теореме 2.2 любое главное ядро (u) имеет вид

$$(u) = \big\{v \in U^{\vee}(X) \mid \exists\, k \in \mathbb{N}\ \big((u \wedge u^{-1})^k \leqslant v \leqslant (u \vee u^{-1})^k\big)\big\}.$$

Следовательно, $(u) = (u \vee u^{-1})$.

Импликации 2) $\Longrightarrow$ 3) и 2) $\Longrightarrow$ 4) очевидны.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 6). Рассмотрим произвольные функции $\varphi, \psi \in C^+(X)$. По лемме 2.3 можно считать, что $\varphi, \psi \leqslant 1$.

Образуем ядра $(\varphi+1)$ и $(\psi+1)$. Согласно неравенствам $\varphi+1 \geqslant 1$ и $\psi+1 \geqslant 1$ и теореме 2.1 имеем

$$(\varphi+1) = \left\{ f \in U(X) \;\middle|\; \begin{array}{l} f - 1 \in \varphi C(x); \\ \exists\, k \in \mathbb{N}\ \big((\varphi+1)^{-k} \leqslant f \leqslant (\varphi+1)^k\big) \end{array} \right\},$$

$$(\psi+1) = \left\{ g \in U(X) \;\middle|\; \begin{array}{l} g - 1 \in \psi C(x); \\ \exists\, t \in \mathbb{N}\ \big((\psi+1)^{-t} \leqslant g \leqslant (\psi+1)^t\big) \end{array} \right\}.$$

По условию 3) $(\varphi+1) \cap (\psi+1) = (w)$ для некоторой функции $w \in U(X)$. Тогда $w - 1 \in \varphi C(X) \cap \psi C(X)$, т. е. $w-1$ является общим кратным функций φ и ψ.

Пусть функция $\chi \in C^+(X)$ является общим кратным функций φ и ψ. По лемме 2.3 можно считать, что функция χ ограниченная. Покажем, что для некоторых $k, t \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства

$$(\varphi+1)^{-k} \leqslant \chi + 1 \leqslant (\varphi+1)^k, \quad (\psi+1)^{-t} \leqslant \chi + 1 \leqslant (\psi+1)^t.$$

Так как функция χ делится на φ, то $\chi = \varphi g$ для некоторой функции $g \in C(X)$. Очевидно, что на $\operatorname{coz}\varphi$ функция g является ограниченной. Пусть $x_0 \in \overline{\operatorname{coz}\varphi} \setminus \operatorname{coz}\varphi$. Предположим, что существует такая направленность $x_\alpha \to x_0$, что $g(x_\alpha) \to \infty$. Значит, в точке x_0 функция g терпит разрыв, что противоречит непрерывности функции g. Таким образом, на замыкании $\overline{\operatorname{coz}\varphi}$ функция $g = \frac{\chi}{\varphi}$ является ограниченной и справедливо неравенство $g \leqslant n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\chi + 1 = \varphi g + 1 \leqslant \varphi n + 1 \leqslant (\varphi + 1)^n.$$

На $Z(\varphi)$ выполняется неравенство

$$\chi + 1 = 1 \leqslant (\varphi + 1)^n.$$

Так как $\chi \in C^+(X)$, то $\chi + 1 \geqslant 1$. Таким образом, на всём X для некоторого $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство

$$(\varphi + 1)^{-n} \leqslant 1 \leqslant \chi + 1 \leqslant (\varphi + 1)^n.$$

Аналогично доказывается существование $t \in \mathbb{N}$, для которого верно неравенство

$$(\psi + 1)^{-t} \leqslant \chi + 1 \leqslant (\psi + 1)^t.$$

Таким образом, $\chi + 1 \in (\varphi + 1) \cap (\psi + 1) = (w)$. Поэтому $\chi = (w - 1)h$ для некоторой функции $h \in C(X)$. Так как $\chi \in C^+(X)$, то

$$\chi = |\chi| = |w - 1|\,|h|.$$

Значит, произвольное общее кратное функций φ и ψ делится на $|w - 1|$.

С другой стороны, для некоторых функций $f, g \in C(X)$ справедливы равенства

$$|w - 1| = |\varphi f| = |\varphi|\,|f| = \varphi|f|, \quad |w - 1| = |\psi g| = |\psi|\,|g| = \psi|g|.$$

Следовательно, $|w - 1|$ является наименьшим общим кратным функций φ и ψ.

Итак, любые две функции из $C^+(X)$ имеют НОК, значит, X является F-пространством.

Докажем импликацию $4) \Longrightarrow 6)$. Рассмотрим функции $\varphi, \psi \in C^+(X)$, такие что $\varphi\psi = 0$. Образуем ядра $(\varphi + 1)$ и $(\psi + 1)$. По условию 4) найдётся такая функция $w \in U(X)$, что $(\varphi + 1)(\psi + 1) = (w)$. Значит, функция $w - 1$ является общим делителем функций φ и ψ, т. е. $\varphi = (w-1)f$ и $\psi = (w-1)g$ для некоторых функций $f, g \in C(X)$. Так как $\varphi = |\varphi| = |(w - 1)|\,|f|$ и $\psi = |\psi| = |(w - 1)|\,|g|$, то $|w - 1|$ также является общим делителем функций φ и ψ.

Очевидно, что $(\varphi+1) \cap (\psi+1) = \{1\}$. Значит, мультипликативная группа (w) является прямым произведением мультипликативных групп $(\varphi + 1)$ и $(\psi + 1)$. Следовательно, $w = uv$ для однозначно определённых функций $u \in (\varphi + 1)$ и $v \in (\psi + 1)$, причём $(u - 1)(v - 1) = 0$. Тогда

$$w - 1 = u - 1 + v - 1.$$

По теореме 2.1 найдутся такие функции $f, g \in C(X)$, что $u-1 = \varphi f$ и $v-1 = \varphi g$. Поэтому $|w-1| = |\varphi f + \psi g|$, причём $\operatorname{coz}\varphi \cap \operatorname{coz}\psi = \varnothing$. Тогда $|w-1| = |\varphi|\,|f| = \varphi|f|$

на $\operatorname{coz}\varphi$, $|w-1| = \psi|g|$ на $\operatorname{coz}\psi$ и $|w-1| = 0$ на $Z(\varphi)\cap Z(\psi)$. Следовательно,

$$|w-1| = \varphi|d_1| + \psi|d_2|.$$

Таким образом, общий делитель функций $\varphi,\psi \in C^+(X)$ представи́м в виде линейной комбинации исходных функций с коэффициентами из $C^+(X)$. Значит, $|w-1| \in C^(X)$ является наибольшим общим делителем функций $\varphi,\psi \in C^+(X)$.

По доказанному для каждой функции $f \in C(X)$ существует наибольший общий делитель функций f^+ и f^-. По лемме 2.4 найдётся такая функция $h \in C^+(X)$, что

$$h(\operatorname{pos} f) = h(\operatorname{coz} f^+) = \{0\}, \quad h(\operatorname{neg} f) = h(\operatorname{coz} f^-) = \{1\}.$$

Итак, для произвольной функции f множества $\operatorname{pos} f$ и $\operatorname{neg} f$ функционально отделимы и X является F-пространством.

Докажем импликацию 6) $\Longrightarrow$ 2). Пусть X является F-пространством. Тогда по теореме 2.3 справедливо равенство $\operatorname{Con} U(X)$= $\operatorname{Con} U^\vee(X)$. Однако на полуполе $U^\vee(X)$ решётка главных ядер образует подрешётку решётки $\operatorname{Con} U^\vee(X)$ всех ядер полуполя $U^\vee(X)$.

Убедимся в справедливости импликации 5) $\Longrightarrow$ 6). Пусть полуполе $U(X)$ является слабо риккартовым. Рассмотрим произвольную функцию $f \in C(X)$. Тогда $f = f^+ - f^-$, где $f^+, f^- \in C^+(X)$. Построим ядра $(f^+ + 1)$ и $(f^- + 1)$. Так как $f^+ f^- = 0$, то $(f^+ + 1) \cap (f^- + 1) = \varnothing$. По определению слабой риккартовости полуполя $U(X)$ имеем $(f^+ + 1)(f^- + 1) = U(X)$. Тогда $U(X) = \gamma(\operatorname{Ann} f^+)\gamma(\operatorname{Ann} f^-) = \gamma(\operatorname{Ann} f^+ + \operatorname{Ann} f^-)$ по предложению 4.1. С другой стороны, $U(X) = \gamma\big(C(X)\big)$, поэтому $C(X) = \operatorname{Ann} f^+ + \operatorname{Ann} f^-$. Значит, $1 = g + h$ для некоторых функций $g \in \operatorname{Ann} f^+$ и $h \in \operatorname{Ann} f^-$, причём $Z(g) \supseteq \operatorname{coz} f^-$ и $Z(h) \supseteq \operatorname{coz} f^+$. Так как $Z(g)\cap Z(h) = \varnothing$, то $\operatorname{neg} f = \operatorname{coz} f^-$ и $\operatorname{pos} f = \operatorname{coz} f^+$ функционально отделимы. Следовательно, пространство X является F-пространством.

Докажем импликацию 6) $\Longrightarrow$ 5). Пусть пространство X является F-пространством. Рассмотрим функции $u, v \in U(X)$, такие что $(u)\cap(v) = 1$. Так как ядра (u) и (v) являются главными $\vee$-ядрами, то $(u-1)(v-1) = 0$. Рассмотрим функцию φ, такую что $Z(\varphi) = \overline{\operatorname{coz}(u-1)}$, $\varphi = 1$ на $\operatorname{coz}(v-1)$, и функцию ψ, такую что $Z(\psi) = \overline{\operatorname{coz}(v-1)}$, $\psi = 1$ на $\operatorname{coz}(u-1)$. Эти функции непрерывны, так как X является F-пространством. Очевидно, что $\varphi \in \operatorname{Ann}(u-1)$, $\psi \in \operatorname{Ann}(v-1)$ и $w = \varphi + \psi \in U(X)$. Значит, $w \in \operatorname{Ann}(u-1) + \operatorname{Ann}(v-1)$ и $\operatorname{Ann}(u-1) + \operatorname{Ann}(v-1) = C(X)$. Тогда

$$(u)^*(v)^* = \gamma\big(\operatorname{Ann}(u-1)\big)\gamma\big(\operatorname{Ann}(v-1)\big) = \\ = \gamma\big(\operatorname{Ann}(u-1) + \operatorname{Ann}(v-1)\big) = \gamma\big(C(X)\big) = U(X).$$

Теорема полностью доказана. $\square$

6. Характеризация свойств топологических пространств в терминах ядер

Теорема 6.1. *Полуполе $U(X)$ является риккартовым тогда и только тогда, когда X — базисно несвязное пространство.*

Доказательство. Пусть полуполе $U(X)$ является риккартовым. Рассмотрим произвольную функцию $f \in C(X)$. Рассмотрим функцию $\varphi = (f+1) \vee \frac{1}{2} \in U(X)$. Имеем $\operatorname{ed} \varphi = Z(f)$. По предложению 4.1 $(\varphi)^* = \{u \in U(X) \mid u-1 \in \operatorname{Ann}(\varphi-1)\}$. Рассмотрим множество

$$A = \bigcap_{u \in (\varphi)^*} \operatorname{ed} u = \{x \in X \mid \forall f \in \operatorname{Ann}(\varphi - 1)\ f(x) = 0\}.$$

Тогда $(\varphi)^* = \{u \in U(X) \mid \operatorname{ed} u \supseteq A\}$. По условию ядро $(\varphi)^*$ дополняемо, а значит, множество A открыто-замкнуто в силу леммы 2.5. Легко убедиться, что $A = \overline{\operatorname{coz}(\varphi - 1)}$, т. е. множество $Z(f)^0 = Z(\varphi - 1)^0 = X \setminus A$ открыто-замкнуто.

Докажем утверждение в обратную сторону. Пусть пространство X является базисно несвязным. Тогда для произвольной функции $\varphi \in U(X)$ множество $Z(\varphi - 1)^0$ замкнуто. Значит, множество $\overline{\operatorname{coz}(\varphi - 1)} = X \setminus Z(\varphi - 1)^0$ открыто-замкнуто. Для любой функции $\psi \in (\varphi)^*$ справедливо $Z(\psi - 1) \supseteq \operatorname{coz}(\varphi - 1)$, а следовательно, и $Z(\psi - 1) \supseteq \overline{\operatorname{coz}(\varphi - 1)}$. Значит, $\psi = 1$ на открыто-замкнутом множестве $\overline{\operatorname{coz}(\varphi - 1)}$. В силу леммы 2.5 ядро $(\varphi)^*$ является дополняемым ядром. □

Теорема 6.2. *Полуполе $U(X)$ является бэровским тогда и только тогда, когда пространство X экстремально несвязно.*

Доказательство. Пусть полуполе $U(X)$ является бэровским. Рассмотрим произвольное замкнутое множество $A \subseteq X$, ядро $K = \{u \in U(X) \mid \operatorname{ed} u \supseteq A\}$ и его псевдодополнение K^*. Так как K^* — наибольшее из ядер, дающих $\{1\}$ в пересечении с K, то $K^* = \{u \in U(X) \mid \operatorname{ed} u \supseteq X \setminus A^0\}$. По условию ядро K^* дополняемо. В силу леммы 2.5 множество $X \setminus A^0$ открыто-замкнуто. Следовательно, множество A^0 замкнуто.

Обратно, пусть X экстремально несвязно. Рассмотрим произвольное ядро $K \in \operatorname{Con} U$. Обозначим $A = \bigcap Z(\varphi - 1)$ по всем $\varphi \in K$. Тогда множества A^0 и $\overline{X \setminus A}$ открыто-замкнуты. Возьмём ядро $H = \{\psi \in U(X) \mid \operatorname{ed} \psi \supseteq \overline{X \setminus A}\}$. По лемме 2.5 ядро H дополняемо. Легко убедиться, что $K \cap H = \{1\}$, причём H — наибольшее такое ядро по лемме 2.2. Значит, $H = K^*$. Итак, псевдодополнение произвольного ядра дополняемо. □

Теорема 6.3. *Для произвольного топологического пространства X следующие условия эквивалентны*:

1) $\operatorname{Con} C^+(X) = \operatorname{Con} C^\vee(X)$;
2) *полуполе $U(X)$ является бирегулярным*;
3) *X есть P-пространство.*

Доказательство. Эквивалентность условий 1) и 3) доказана в [11, теорема 2].

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 3). Пусть полуполе $U(X)$ бирегулярно. Возьмём произвольную функцию $\varphi \in U(X)$. Тогда $(\varphi)^*$ является дополнением (φ). В силу предложения 4.1 $(\varphi) \cdot \ker\bigl(\gamma \operatorname{Ann}(\varphi - 1)\bigr) = U(X)$. Поэтому существует функция $\psi \in \ker\bigl(\gamma \operatorname{Ann}(\varphi - 1)\bigr)$, такая что $\operatorname{coz}(\varphi - 1) \cup \operatorname{coz}(\psi - 1) = X$ и $\operatorname{coz}(\varphi - 1) \cap \operatorname{coz}(\psi - 1) = \varnothing$. Значит, $Z(\varphi - 1) = \operatorname{coz}(\psi - 1)$, и множество $Z(\varphi)$ открыто-замкнуто. Итак, X является P-пространством.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 2). Пусть X есть P-пространство. Тогда для произвольной функции $\varphi \in U(X)$ множество $Z(\varphi - 1)$ открыто-замкнуто. Можно считать, что $\varphi \geqslant 1$. Так как X является F-пространством, то существует функция $\chi \in U(X)$, такая что $\chi = 2$ на $Z(\varphi - 1)$ и $\chi = 1$ на $\operatorname{coz}(\varphi - 1)$. Тогда $\chi \in (\varphi)^*$. В силу того что X есть P-пространство, конгруэнция (φ) является идеальной. Тогда $(\varphi)(\varphi)^* = \ker \gamma\bigl(\rho(\varphi) + \operatorname{Ann}(\varphi - 1)\bigr)$. Заметим, что $f = \varphi - 1 + \chi - 1 \in \rho(\varphi) + \operatorname{Ann}(\varphi - 1)$, причём $f \gg 0$. Значит, $\rho(\varphi) + \operatorname{Ann}(\varphi - 1) = U(X)$, и (φ) — дополняемое ядро. □

Лемма 6.1. *Для каждого натурального числа k и всех $x \in \Bigl(1; \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\Bigr]$ выполняется неравенство*

$$\left(\frac{x + x^{-1}}{2}\right)^k < x.$$

Доказательство. Преобразуем неравенство к виду

$$\left(\frac{x^2 + 1}{2x}\right)^k < x.$$

Прологарифмировав его, получим равносильное на множестве $[1, +\infty)$ неравенство

$$k \ln(x^2 + 1) - k \ln x - k \ln 2 < \ln x.$$

Рассмотрим функцию

$$\chi = k \ln(x^2 + 1) - (k + 1) \ln x - k \ln 2$$

и найдём её наименьшее значение на промежутке $[1; +\infty)$:

$$\chi' = \frac{2kx}{x^2 + 1} - \frac{k + 1}{x} = \frac{(k - 1)x^2 - k - 1}{x(x^2 + 1)} = 0, \quad x_{\min} = \sqrt{\frac{k + 1}{k - 1}}.$$

Тогда $\chi' > 0$ при $x > \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$ и $\chi' < 0$ при $1 \leqslant x < \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$, т. е. функция χ убывает на промежутке $\Bigl[1; \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\Bigr]$, причём $\chi(1) = 0$. Значит, $\chi(1) < 0$ при $1 < x \leqslant \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$ для любого натурального k. □

Предложение 6.1. *Для любой функции $u \in U(X)$ ядра (u) и $\bigl(\frac{u+u^{-1}}{2}\bigr)$ совпадают тогда и только тогда, когда функция u отделяется от 1 на множестве $X \setminus \operatorname{ed} u$.*

Доказательство. Пусть функция u отделяется от 1 на множестве $X \setminus \mathrm{ed}\, u$. Тогда по лемме 3.1 $\lim\limits_{i\to\infty} u(x_i) \neq 1$ для любой последовательности (x_i), определённой на множестве $X \setminus \mathrm{ed}\, u$. По предложению 2.1 на множестве $X \setminus \mathrm{ed}\, u$ выполняется равенство $(u) = (u \vee u^{-1})$. В то же время

$$\frac{u+u^{-1}}{2} = \frac{(u\vee u^{-1}) + (u \wedge u^{-1})}{2} = \frac{(u\vee u^{-1}) + (u\vee u^{-1})^{-1}}{2},$$

или

$$\left(\frac{u+u^{-1}}{2}\right) = \left(\frac{(u\vee u^{-1}) + (u\vee u^{-1})^{-1}}{2}\right).$$

Значит, можно принять $u \geqslant c > 1$, где c — некоторая константа.

Заметим, что множество $\mathrm{ed}\, u$ открыто-замкнуто. Действительно, $\mathrm{ed}\, u = Z(|u-1|)$ является прообразом открытого множества $\left\{r \mid r < \frac{c-1}{2}\right\}$, $v = |u-1|$ при отображении, заданном непрерывной функцией $|u-1|$.

Очевидно, что $(u) \supseteq \left(\frac{u+u^{-1}}{2}\right)$. Докажем включение $(u) \subseteq \left(\frac{u+u^{-1}}{2}\right)$. Для этого рассмотрим функцию

$$f = \begin{cases} \frac{2}{1-u^{-1}(x)}, & x \in X \setminus \mathrm{ed}\, u,\\ 1, & x \in \mathrm{ed}\, u.\end{cases}$$

Так как множество $\mathrm{ed}\, u$ открыто-замкнуто, то функция f является непрерывной. Тогда на множестве $X \setminus \mathrm{ed}\, u$ справедливы равенства

$$\left(\frac{u(x)+u^{-1}(x)}{2} - 1\right) f = \frac{u(x)+u^{-1}(x)-2}{1-u^{-1}(x)} = \frac{(u(x)-1)(1-u^{-1}(x))}{1-u^{-1}(x)} = u(x) - 1.$$

На множестве $\mathrm{ed}\, u$ верно, что

$$\left(\frac{u(x)+u^{-1}(x)}{2} - 1\right) f = \left(\frac{1+1}{2} - 1\right)\cdot 1 = 0 = u(x) - 1.$$

Тогда $u - 1 \in \left(\frac{u+u^{-1}}{2} - 1\right) C(X)$. Проверим выполнение неравенства

$$\left(\left(\frac{u+u^{-1}}{2}\right) \vee \left(\frac{u+u^{-1}}{2}\right)^{-1}\right)^{-k} \leqslant u \leqslant \left(\left(\frac{u+u^{-1}}{2}\right) \vee \left(\frac{u+u^{-1}}{2}\right)^{-1}\right)^{k}.$$

Так как $u \geqslant 1$ и $\frac{u+u^{-1}}{2} \geqslant 1$, достаточно убедиться в справедливости неравенства

$$u \leqslant \left(\frac{u+u^{-1}}{2}\right)^k \tag{6.1}$$

для некоторого натурального числа k.

Очевидно, существует такое натуральное число k, для которого

$$c \leqslant \left(\frac{c+c^{-1}}{2}\right)^k.$$

Тогда $c > \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$ по лемме 6.1. Учитывая возрастание функции

$$\nu = \left(\frac{c + c^{-1}}{2}\right)^k \cdot u^{-1}$$

на промежутке $\left(\sqrt{\frac{k+1}{k-1}}; \infty\right)$ и неравенство $u(x) \geqslant c$ для всех $x \in X \setminus \mathrm{ed}\, u$, заключаем, что неравенство (6.1) справедливо.

Обратно, пусть существует последовательность (x_i) с условием $\lim\limits_{i\to\infty} u(\alpha_i) = 1$. Тогда для каждого натурального числа k найдётся такой элемент $x_t \in X \setminus \mathrm{ed}\, u$, что $u(x_t) < \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}$. По лемме 6.1 $\left(\frac{u(x_t)+u(x_t)^{-1}}{2}\right)^k < u(x_t)$, что противоречит второму условию определения главного ядра. Значит, по лемме 3.1 функция u отделяется от 1 на множестве $X \setminus \mathrm{ed}\, u$. □

Теорема 6.4. *Для любого тихоновского пространства X эквивалентны следующие условия*:

1) *любое ядро полуполя $U(X)$ дополняемо*;
2) $(u) = \left(\frac{u+u^{-1}}{2}\right)$ *для любой функции $u \in U(X)$*;
3) *пространство X конечно.*

Доказательство. Равносильность 1) $\Longleftrightarrow$ 3) доказана в [3, следствие 4.3].

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 3). Для любой функции $u \in U(X)$ ядра (u) и $\left(\frac{u+u^{-1}}{2}\right)$ совпадают. Возьмём произвольную функцию $f \in C^+(X)$.

По предложению 6.1 функция $|f| + 1 \in U(X)$ отделяется от 1 на множестве $X \setminus \mathrm{ed}(|f| + 1)$. Следовательно, множество $Z(f) = \mathrm{ed}(|f| + 1)$ открыто-замкнуто и X является P-пространством. В то же время для любой функции $v \in U(X)$ по предложению 6.1 найдётся такая константа $c > 0$, что $v+1 \geqslant c+1$. Значит, любая функция полуполя $U(X)$ ограничена снизу. Следовательно, P-пространство X конечно.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 2). Пусть пространство X конечно. Тогда для каждой функции $u \in U(X)$ выполняется условие предложения 6.1, и $(u) = \left(\frac{u+u^{-1}}{2}\right)$. □

Литература

[1] Биркгоф Г. Теория решёток. — М.: Наука, 1984.

[2] Варанкина В. И. Максимальные идеалы в полукольцах непрерывных функций // Фундамент. и прикл. мат. — 1995. — Т. 1, вып. 4. — С. 923—937.

[3] Варанкина В. И., Вечтомов Е. М., Семёнова И. А. Полукольца непрерывных неотрицательных функций: делимость, идеалы, конгруэнции // Фундамент. и прикл. мат. — 1998. — Т. 4, вып. 2. — С. 493—510.

[4] Вечтомов Е. М. Дистрибутивные кольца непрерывных функций и F-пространства // Мат. заметки. — 1983. — Т. 34, № 3. — С. 321—332.

[5] Вечтомов Е. М. Вопросы определяемости топологических пространств алгебраическими системами непрерывных функций // Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия. Т. 28. — М.: ВИНИТИ, 1990. — С. 3—46.

[6] Вечтомов Е. М. Кольца непрерывных функций. Алгебраические аспекты // Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия. Т. 29. — М.: ВИНИТИ, 1991. — С. 119—191.

[7] Вечтомов Е. М. Кольца непрерывных функций на топологических пространствах. Избранные темы. — М.: МГПУ им. В. И. Ленина, 1992.

[8] Вечтомов Е. М. Функциональные представления колец. — М.: МГПУ им. В. И. Ленина, 1993.

[9] Вечтомов Е. М. Полукольца непрерывных отображений // Вестн. Вятск. гос. гуман. ун-та. — 2004. — № 10. — С. 57—64.

[10] Вечтомов Е. М., Черанёва А. В. К теории полутел // Успехи мат. наук. — 2008. — Т. 63, № 2. — С. 161—162.

[11] Вечтомов Е. М., Чупраков Д. В. Конгруэнции на полукольцах непрерывных функций и F-пространства // Вестн. Сыктывкарск. ун-та. — 2008. — Т. 8. — С. 15—26.

[12] Гельфанд И. М., Колмогоров А. Н. О кольцах непрерывных функций на топологических пространствах // ДАН СССР. — 1939. — Т. 22, № 1. — С. 11—15.

[13] Подлевских М. Н. Замкнутые конгруэнции на полукольцах непрерывных функций // Фундамент. и прикл. мат. — 1999. — Т. 5, вып. 3. — С. 947—952.

[14] Полин С. В. Простые полутела и полуполя // Сиб. мат. журн. — 1974. — Т. 15, № 1. — С. 90—101.

[15] Семёнова И. А. Максимальные конгруэнции на полуполе непрерывных положительных функций // Фундамент. и прикл. мат. — 2000. — Т. 6, вып. 1. — С. 305—310.

[16] Широков Д. В. Условия дистрибутивности решётки конгруэнций полуполя непрерывных положительных функций // Вестн. Вятск. гос. гуман. ун-та. — 2003. — № 8. — С. 137—140.

[17] Acharyya S. K., Chattopalhyay K. S., Ray G. G. Hemirings, congruences and the Stone—Čech compactification // Simon Stevin. — 1993. — Vol. 67. — P. 21—35.

[18] Acharyya S. K., Chattopalhyay K. S., Ray G. G. Hemirings, congruences and the Hewitt real compactification // Bull. Belg. Math. Soc. — 1995. — Vol. 2, no. 1. — P. 47—58.

[19] Artamonova I. I., Chermnykh V. V., Mikhalev A. V., Varankina V. I., Vechtomov E. M. Semirings: Sheaves and continuous functions // Semigroups with Applications, Including Semigroup Rings. Int. Conf. in Honour of E. S. Lyapin, St.-Petersburg, Russia, June 19—30, 1995. — Saint-Petersburg: Severny Ochag, 1999. — P. 23—58.

[20] Gillman L., Henriksen M. Concerning rings of continuous functions // Trans. Amer. Math. Soc. — 1954. — Vol. 77, no. 2. — P. 340—362.

[21] Gillman L., Henriksen M. Rings of continuous functions in which every finitely generated ideal is principal // Trans. Amer. Math. Soc. — 1956. — Vol. 82, no. 2. — P. 366—391.

[22] Gillman L., Jerison M. Rings of continuous functions — New York: Springer, 1976.

[23] Golan J. F. Semirings and their applications. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1999.

[24] Hewitt E. Rings of real-valued continuous functions // Trans. Amer. Math. Soc. — 1948. — Vol. 64, no. 1. — P. 45—99.

[25] Kaplansky I. Topological rings // Amer. J. Math. — 1947. — Vol. 69. — P. 153—183.

[26] Pierce R. S. Rings of integer-valued continuous functions // Trans. Amer. Math. Soc. — 1961. — Vol. 100, no. 3. — P. 371—394.

[27] Slowikowski W., Zawadowsci A. A generalization of maximal ideals method of Stone and Gelfand // Fund. Math. — 1955. — Vol. 42, no. 2. — P. 215—231.

[28] Stone M. Applications of the theory of Boolean rings to general topology // Trans. Amer. Math. Soc. — 1937. — Vol. 41, no. 3. — P. 375—481.

[29] Vechtomov E. M. Rings and sheaves // J. Math. Sci. — 1995. — Vol. 74, no. 1. — P. 749—798.

[30] Vechtomov E. M. Rings of continuous functions with values in a topological division ring // J. Math. Sci. — 1996. — Vol. 78, no. 6. — P. 702—753.