Дифференциальные стандартные базисы при обратных лексикографических упорядочениях

А. И. ЗОБНИН
*Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова*
e-mail: al_zobnin@mail.ru

УДК 512.628.2

Ключевые слова: дифференциальная алгебра, дифференциальные многочлены, дифференциальные стандартные базисы, базисы Грёбнера.

Аннотация

В работе приведено упрощённое доказательство известного факта, что при любых n и d многочлены y_n^d образуют дифференциальный стандартный базис идеала $[y_n^d]$. В отличие от комбинаторного доказательства, восходящего к идеям Леви, в этом доказательстве используется техника базисов Грёбнера. При некоторых предположениях доказано обратное утверждение: всякий однородный многочлен f, составляющий дифференциальный стандартный базис идеала $[f]$, имеет вид y_n^d.

Abstract

A. I. Zobnin, One-element differential standard bases with respect to inverse lexicographical orderings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 4, pp. 121—135.

We give a simplified proof of the following fact: for all nonnegative integers n and d the monomial y_n^d forms a differential standard basis of the ideal $[y_n^d]$. In contrast to Levi's combinatorial proof, in this proof we use the Gröbner bases technique. Under some assumptions we prove the converse result: if an isobaric polynomial f forms a differential standard basis of $[f]$, then $f = y_n^d$.

*Автор посвящает эту работу
своему научному руководителю Евгению Васильевичу Панкратьеву,
трагически погибшему в автокатастрофе 23 января 2008 года.*

1. Введение

Базисы Грёбнера, появившиеся в середине XX века, стали ключевым инструментом конструктивного исследования полиномиальных идеалов. Неудивительно, что стали появляться различные обобщения этого понятия на другие алгебраические структуры. Для работы в кольце дифференциальных многочленов можно по-разному строить такие обобщения, сохраняя те или иные свойства

Фундаментальная и прикладная математика, 2008, том 14, № 4, с. 121—135.

базисов Грёбнера. Основоположники дифференциальной алгебры Дж. Ритт [16] и Э. Колчин [10] ввели понятие характеристического множества, аналогичного в некотором смысле базису Грёбнера. Этот инструмент хорошо изучен и позволяет конструктивно работать с радикальными дифференциальными идеалами. Другое более прямое обобщение (дифференциальный стандартный базис) было предложено Ф. Оливье [15] и Дж. Карра-Ферро [6, 7] и изучалось в [1, 3, 19]. Некоторые итоги этих исследований приведены в [8, 12, 13]. Дифференциальный стандартный базис можно определить для любых конечно порождённых идеалов, но в большинстве случаев он оказывается бесконечным, что делает его неприменимым на практике. Более того, наличие конечного базиса зависит не только от идеала, но и от упорядочения на мономах. Доказано [7, 19], что для порядков, «похожих» на лексикографический, базис конечен тогда и только тогда, когда в идеале есть квазилинейный многочлен (т. е. многочлен, разрешённый относительно старшей производной). Из работы Г. Леви [14] следует, что для порядков, «противоположных» лексикографическому, конечным стандартным базисом (состоящим из y_n^d) обладают также идеалы вида $[y_n^d]$. Статья Г. Леви вышла в 1942 г., задолго до появления базисов Грёбнера и тем более дифференциальных стандартных базисов. На самом деле она посвящена доказательству теоремы о минимальной степени, для чего её автору пришлось изучить комбинаторику идеала $[y_n^d]$. Доказательства, приведённые в этой работе, основываются на сложных комбинаторных конструкциях. Мы приведём новое доказательство установленного Г. Леви замечательного факта, использующее технику базисов Грёбнера и критерии Бухбергера.

Задача полного описания критериев конечности дифференциальных стандартных базисов при «антилексикографических» порядках полностью не решена, однако в этой работе мы приведём её частичное решение для одного однородного многочлена при порядке типа InvLex. Точнее, мы докажем, что, при некоторых дополнительных предположениях на однородный по весу и степени многочлен f, из того что f образует стандартный базис для $[f]$, следует, что $f = y_n^d$. Дополнительные предположения — это требование, чтобы некоторый S-полином, включающий исходный многочлен f, имел дополнительную степень 1, и гипотеза о том, что старшие мономы высоких производных не зависят от младших переменных. Эта гипотеза пока не доказана, но известно, что данные условия выполняются во многих частных случаях. Так, они справедливы, если в производных многочлена f не происходит сокращения старших мономов.

2. Обозначения и используемые факты

Мы будем работать в обыкновенном кольце дифференциальных многочленов $\mathcal{F}\{y\}$ с дифференцированием δ над полем констант $\mathcal{F}$ нулевой характеристики. Стандартные обозначения, используемые в теории дифференциальных многочленов, взяты нами из [10, 16, 17]. Кольцо $\mathcal{F}\{y\}$ можно рассматривать как обычное кольцо многочленов $\mathcal{F}[y_0, y_1, y_2, \ldots]$ от счётного набора переменных, на котором действует оператор δ, такой что $\delta(a+b) = \delta a + \delta b$ и $\delta(ab) = \delta ab + a\delta b$, причём $\delta c = 0$ для всех $c \in \mathcal{F}$ и $\delta y_k = y_{k+1}$. Идеал такого кольца называется дифференциальным, если он замкнут относительно действия δ. Через $[f]$ обозначается минимальный дифференциальный идеал, содержащий элемент f. Переменные $y_0, y_1, y_2, \ldots$ естественным образом упорядочены по возрастанию их индексов.

Обозначим через u_f старшую переменную многочлена f, а через $\operatorname{rk} f$ — ранг многочлена f (старшую переменную в максимальной степени). Если $f = \mathrm{const}$, то полагаем $u_f = \operatorname{rk} f = 1$. На рангах естественным образом вводится лексикографический порядок, который продолжается до частичного порядка $<$ на многочленах. Запись $f \leqslant y_n^\infty$ будет обозначать $u_f \leqslant y_n$, что эквивалентно $f < y_{n+1}$. Заметим, что если $f \leqslant y_n^k$, $k \leqslant \infty$, то $\delta f \leqslant y_{n+1}^1$ (производная всегда линейна по старшей переменной).

Мы называем *мономом* выражение вида

$$M = \prod_{i=0}^{n} y_i^{a_i},$$

где $a_i \in \mathbb{N}_0$. *Термом* мы называем моном с коэффициентом. Степень монома определяется как обычно: $\deg M = \sum a_i$. *Весом* монома M называется сумма всех нижних индексов входящих в него переменных (с учётом кратностей): $\operatorname{wt} M = \sum i a_i$. Заметим, что оператор дифференцирования δ сохраняет степени мономов и увеличивает их вес ровно на 1. Мы будем рассматривать в этой работе дифференциальные многочлены, однородные одновременно по весу и по степени.

На множестве всех дифференциальных мономов $\mathbb{M}$ можно естественным образом ввести порядки, отличные от лексикографического. Требования к этим порядкам следующие:

— $\forall\, M, M_1, M_2 \in \mathbb{M}$ $(M_1 \prec M_2 \Longrightarrow MM_1 \prec MM_2)$;
— $\forall\, M \in \mathbb{M}$ $(M \succcurlyeq 1)$;
— переменные y_i должны быть упорядочены по возрастанию индексов.

Каждый такой порядок вполне упорядочивает $\mathbb{M}$ [18]. В общем виде порядки удобно задавать согласованным набором мономиальных матриц, или «бесконечной» матрицей [19]. Заметим, что в силу третьего свойства существует только один лексикографический порядок. Если рассматривать только мономы с равными весами и степенями, то на них можно также задать обратный лексикографический порядок (предполагая, что мономы с разными весами или степенями сравниваются этим порядком как-то иначе). Рассмотрим, например, порядок WtDegInvLex:

$$M \prec_{\mathrm{WtDegInvLex}} N \iff (\operatorname{wt} M, \deg M, N) \prec_{\mathrm{lex}} (\operatorname{wt} N, \deg N, M).$$

Благодаря предварительному сравнению по весу переменные оказываются упорядоченными по возрастанию индексов. Множество мономов фиксированного веса и степени является конечным, и потому их можно сравнить в обратном лексикографическом порядке. Мы будем работать с однородными по весу и степени многочленами, поэтому нас не будет интересовать, как сравниваются мономы разных весов или разных степеней. В частности, всё, что будет доказано для порядка WtDegInvLex, будет справедливо и, например, для порядка

$$M \prec N \iff (\operatorname{wt} M + \deg M, N) \prec_{\text{lex}} (\operatorname{wt} N + \deg N, M).$$

Для однородных мономов при описанных порядках верно следующее: чем меньше самая старшая переменная, тем старше моном. Можно было бы определить порядок WtDegRevLex с похожим свойством: чем больше самая младшая переменная, тем старше моном. Оба этих порядка относятся к так называемым β-упорядочениям, поскольку для них моном $\operatorname{lm} \delta^k y_0^d$ всегда является β-мономом [14] (т. е. он зависит не более чем от двух переменных, индексы которых отличаются на 1). В частности, $\operatorname{lm} \delta^{kd} y_0^d = y_k^d$. Однако старший моном произвольного однородного многочлена относительно порядков типа RevLex может не быть лексикографически младшим мономом (т. е. может не совпадать со старшим мономом при порядках InvLex), поэтому порядки типа RevLex мы не считаем обратными лексикографическими*.

Пусть на $\mathbb{M}$ зафиксирован некоторый допустимый порядок $\prec$. Тогда через $\operatorname{lm}_\prec f$ и $\operatorname{lt}_\prec f$ мы будем соответственно обозначать старший моном и старший терм многочлена f.

3. Дифференциальные стандартные базисы

Зафиксируем допустимый порядок $\prec$. Множество G образует *дифференциальный стандартный базис* идеала $[G]$ относительно порядка $\prec$, если

$$\Theta G := \{\delta^k g \mid k \in \mathbb{N}_0,\ g \in G\} —$$

алгебраический базис Грёбнера идеала $[G] \lhd \mathcal{F}[y, y_1, y_2, \ldots]$ относительно $\prec$. Как и в случае обычных многочленов [4], это эквивалентно тому, что все S-полиномы вида $S_{\delta^a g_i, \delta^b g_j}$ алгебраически редуцируются к нулю относительно множества ΘG для всех $g_i, g_j \in G$, $a, b \geqslant 0$. Есть ещё одно эквивалентное определение: все S-полиномы имеют *стандартное представление* относительно сокращаемого в S-полиноме наименьшего общего кратного мономов производных:

$$S_{\delta^k g_i, \delta^m g_j} = \sum p_{a,b} \delta^a g_b,$$

где $p_{a,b}$ — многочлены, причём $\operatorname{lm}(p_{a,b} \delta^a g_b) \prec \operatorname{LCM}(\operatorname{lm}_\prec \delta^k g_i,\ \operatorname{lm}_\prec \delta^m g_j)$.

Нас будет особо интересовать случай, когда множество G одноэлементно. Пусть $G = \{g\}$. Очевидно, что условию редуцируемости к нулю должен удовлетворять и «первый» S-полином многочленов g и δg. Для $g = y_n^d$ такой S-полином просто равен нулю. Мы покажем, что именно благодаря этому

*Строго говоря, порядки типа RevLex являются обратными лексикографическими для изменённого на противоположный порядка переменных.

факту идеал y_n^d имеет конечный дифференциальный стандартный базис при β-упорядочении. То, что моном y_n^d образует стандартный базис для $[y_n^d]$ относительно таких порядков, было известно ранее [1, 19] и следовало из работы Г. Леви [14]. Разумеется, понятие стандартного базиса появилось значительно позже работы Леви, содержащей специфические комбинаторные выкладки. Мы приведём более простое доказательство конечности этого базиса для $[y_n^d]$. Ф. Оливье и М. В. Кондратьева в беседах с автором высказывали предположение, что такое доказательство в принципе должно существовать. Заметим, что существуют и другие подходы к доказательству этого факта (например, Д. Трушин установил, что левый идеал в кольце дифференциальных операторов, описывающий сизигии идеала $[y_n^d]$, является главным, откуда также возможно вывести утверждение), но наша цель — продемонстрировать применение техники базисов Грёбнера, которая, несомненно, будет полезна и для исследования более сложных примеров. Мы также докажем, что не существует других однородных многочленов, порождающих дифференциальный идеал с конечным одноэлементным дифференциальным стандартным базисом при порядке InvLex.

Основная трудность при работе с обратными лексикографическими упорядочениями состоит в том, что они, в отличие от лексикографического упорядочения, не сохраняют строгого неравенства между старшими мономами при дифференцировании. В результате возникает феномен сокращения старших мономов в производных многочлена [1]. Так, в производных многочлена

$$f = y_0\, y_2\, y_6 - 10\, y_0\, y_3\, y_5 + 10\, y_0\, y_4\, y_4 + 4\, y_1\, y_2\, y_5 - 10\, y_1\, y_3\, y_4 + 5\, y_2\, y_2\, y_4$$

никогда не появляются β-мономы, несмотря на то что такие мономы появляются при дифференцировании каждого слагаемого по отдельности. Другими словами, никакая производная f не содержит мономов y_n^3, $y_n^2 y_{n+1}$ и $y_n y_{n+1}^2$, которые были бы старшими, если бы не сокращались. Заметим, что если многочлен положителен (например, сам является мономом), то такого феномена не возникает. Для лексикографического порядка сокращения старших мономов в производных никогда не возникают: если $\operatorname{lm}_{\mathrm{lex}} f = M y_n$, где $M \leqslant y_n$, то $\operatorname{lm}_{\mathrm{lex}} \delta^k f = M y_{n+k}$ для любого $k \geqslant 0$.

Карра-Ферро [8] доказала теорему о первых S-полиномах при лексикографическом упорядочении: *если $S(f, \delta f)$ и $S(\delta f, \delta^2 f)$ редуцируются к нулю относительно множества $\{f, \delta f, \delta^2 f\}$, то f — квазилинейный многочлен.* С другой стороны для идеалов, порождённых квазилинейными многочленами, лексикографический дифференциальный стандартный базис всегда конечен. К сожалению, эта теорема не может быть напрямую обобщена на β-упорядочения.

Итак, наша цель — доказать следующее условия конечности: *однородный по весу и степени многочлен f образует дифференциальный стандартный базис идеала $[f]$ относительно обратного лексикографического упорядочения тогда и только тогда, когда $f = c y_n^d$.* Необходимость мы докажем при дополнительном предположении на многочлен f: его старшие мономы сокращаются «не очень сильно» и имеется S-полином $S(f, \delta^q f)$ степени $\deg f + 1$. Достаточное условие мы выведем из того факта, что первый S-полином $S(y_n^d, \delta y_n^d)$ равен нулю.

4. Необходимое условие конечности

Предложение. *Пусть $\prec$ — обратное лексикографическое упорядочение и f — однородный по весу и степени многочлен, $\deg f = d$. Пусть для некоторого q S-полином $S_{0,q} := S(f, \delta^q f)$ имеет степень $d+1$ и редуцируется к нулю относительно f и его производных. Тогда многочлен f делится на свою старшую переменную.*

Доказательство. Если $d = 1$, то всё очевидно: $f = cy_n$ удовлетворяет условию предложения.

Пусть $d \geqslant 2$. По предположению $\deg S_{0,q} = d+1$, т. е. $S_{0,q} = c_a y_a f - c_b y_b \delta^q f$ для некоторых $a, b \geqslant 0$, $c_a, c_b \in \mathcal{F}$. Если этот S-полином редуцируется к нулю, то имеется стандартное представление вида

$$\sum_\alpha c_\alpha y_\alpha \delta^\beta f = 0, \tag{1}$$

где $c_\alpha \in \mathcal{F}$ и $\alpha + \beta + \mathrm{wt}\, f = \mathrm{const}$. Будем считать, что все c_α, попавшие в эту сумму, отличны от 0. Каждое слагаемое однозначно определяется параметром α — индексом переменной, на которую была домножена некоторая производная исходного многочлена. Условимся называть переменную y_α в слагаемых этой суммы «дополнительным множителем» для $\delta^\beta f$.

Среди слагаемых (1) рассмотрим какое-нибудь слагаемое с максимальным лексикографически старшим мономом L. Пусть $\alpha = a$ соответствует такому слагаемому. Если $\mathrm{lm}_{\mathrm{lex}}\, f = My_N$, где $M \leqslant y_N^\infty$, то $\mathrm{lm}_{\mathrm{lex}}\, \delta^\beta f = My_{N+\beta}$. Так как сумма (1) равна нулю, то упомянутый выше моном L обязан сократиться. Значит, имеются по крайней мере два слагаемых с таким старшим мономом. Посмотрим, какие «дополнительные множители» могут соответствовать моному $L = My_a y_b$. Если y_c — такой множитель и он делит M, то моном $\frac{M}{y_c} y_a y_b$ должен делиться на M (иначе он не будет лексикографически старшим мономом некоторой производной исходного многочлена f). Тогда либо $c = a$, либо $c = b$, т. е. в сумме (1) имеются ровно два слагаемых с максимальным лексикографически старшим мономом, поэтому $a \neq b$. При этом $M \leqslant y_a^\infty$ и $M \leqslant y_b^\infty$. Итак, выбор одной из этих переменных в качестве «дополнительного множителя» однозначно определяет порядок производной, на которую этот множитель умножается в слагаемом суммы (1), а значит, он определяет и всё слагаемое. Пусть $b > a$ и $My_a = \mathrm{lm}_{\mathrm{lex}}\, \delta^k f$. Заметим, что в силу максимальности b многочлен $\delta^k f$ должен иметь минимально возможный вес. Но по условию в сумме присутствует слагаемое с исходным многочленом f. Значит, $k = 0$. Итак, y_b служит «дополнительным множителем» для f. Пусть $P = \mathrm{lm}_\prec f$. Тогда $P \leqslant y_a < y_b$. Если $P = My_a$, то f состоит из единственного слагаемого и, конечно, делится на y_a. Предположим, что $P \neq My_a$. Тогда P не делится на M, поскольку степени и веса мономов P и My_a совпадают. Слагаемое $cPy_b = \mathrm{lt}_{\prec}(y_b f)$ обязано сократиться, поэтому в сумме (1) имеется другое слагаемое $y_t \delta^l f$, содержащее такой же моном Py_b (здесь $l > 0$). Его «дополнительный множитель» y_t отличен от y_b (точнее, он меньше y_b). Значит, переменная y_b присутствует в многочлене $\delta^l f$. Поэтому $\mathrm{lm}_{\mathrm{lex}}\, \delta^l f \geqslant y_b$. Если неравенство здесь строгое, то получаем противоречие с тем, что $My_a y_b$ — лексикографически старший моном слагаемых суммы (1). Значит, $\mathrm{lm}_{\mathrm{lex}}\, \delta^l f = My_b$, откуда $t = a$, т. е. P делится на y_a. Итак, в многочлене f и лексикографически старшее, и лексикографически младшее слагаемое делится на y_a. Значит, и сам f делится на свою старшую переменную y_a. $\square$

Далее мы будем считать, что для однородного по весу и степени многочлена f выполнена следующая гипотеза, предполагающая, что количество возможных сокращений старших мономов в его производных невелико:

$$\forall\, a \geqslant 0\ \exists\, k_0 \geqslant 0\ (\forall\, k \geqslant k_0 \text{ все переменные в } \mathrm{lm}\, \delta^k f \text{ старше } y_a). \tag{2}$$

Мы предполагаем, что эта гипотеза справедлива для всех однородных многочленов. Она будет заведомо верна, если в производных f не происходит сокращения старших мономов (например, если все коэффициенты в f рациональны и имеют одинаковый знак).

Теорема. *Пусть f — многочлен, удовлетворяющий условиям гипотезы и предыдущего предложения, т. е.*

— *f однороден по весу и степени;*

— *для f выполнено условие* (2);

— *при некотором q верно*, что* $\deg S(f, \delta^q f) = d + 1$.

Тогда если f образует дифференциальный стандартный базис для $[f]$ относительно обратного лексикографического упорядочения, то $f = cy_n^d$.

Доказательство. Если f образует дифференциальный стандартный базис $[f]$, то $S(f, \delta^q f)$ редуцируется относительно f и его производных к нулю. Тогда из предыдущего предложения следует, что f делится на свою старшую переменную y_n. Выделим максимальную степень множителя y_n в многочлене f: $f = gy_n^d$, где $d > 0$, $g \leqslant y_n^\infty$ и g не делится на y_n. Предположим, что $\deg g > 0$. Докажем, что для всех $s \geqslant 0$ верно, что

$$h_s := g^{s+1} \delta^s y_n^d \in [f].$$

Действительно, при $s = 0$ это так. Далее по индукции получаем, что

$$h_{s+1} = g\delta h_s - (s+1) h_s \delta g \in [h_s] \subset [f].$$

Если f образует стандартный базис идеала $[f]$, то все такие многочлены h_s должны редуцироваться к нулю относительно многочлена f и его производных. В частности, это должно выполняться для $s = td$:

$$\forall\, t \geqslant 0\ \exists\, k \geqslant 0\ (\mathrm{lm}_{\prec}\, \delta^k f \mid \mathrm{lm}(g^{td+1} \delta^{td} y_n^d) = (\mathrm{lm}\, g)^{td+1} y_{n+t}^d).$$

*И. Смирнов показал, что это условие может и не выполняться: S-полиномы многочлена $5y_0y_3y_4 - y_1y_2y_4 - 2y_1y_3^2 + y_2^2y_3$ со всеми его производными имеют степени больше 4.

Заметим, что по предположению $\deg \delta^k f > d$ при всех k, поэтому $\operatorname{lm} \delta^k f$ должен содержать какую-нибудь переменную из $\operatorname{lm} g$, т. е. переменную не старше y_n. Но это противоречит условию (2). Значит, $\deg g = 0$ и $f = cy_n^d$. □

5. Достаточное условие конечности

Сначала докажем техническое утверждение.

Лемма 1. *Коэффициент при $y_a f_{w-a}$ в выражении $\delta^{w-1}(y_0 f_1 - d \cdot y_1 f_0)$ равен*

$$\frac{(w-1)!}{a!\,(w-a-1)!} - d\frac{(w-1)!}{(a-1)!\,(w-a)!} = \frac{(w-1)!}{a!\,(w-a)!}(w-a-da).$$

Этот коэффициент равен нулю только при $w = a(d+1)$, т. е. только при слагаемом $y_a f_{ad}$.

Доказательство. Эта формула следует из обобщённого правила Лейбница

$$\delta^n(fg) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \delta^k f \delta^{n-k} g.$$ □

Теорема. *Дифференциальный стандартный базис идеала $[y_n^d]$ при всяком β-упорядочении состоит из одного многочлена y_n^d.*

Доказательство. Не теряя общности, будем считать, что $n = 0$. Достаточно доказать теорему для любого β-упорядочения, так как старшие мономы производных y_n^d при таких порядках одинаковы и являются β-мономами. Выберем порядок WtDegInvLex.

Старшим мономом при β-упорядочении в производных вида $\delta^w y^d$ является β-моном — единственный моном веса w и степени d, который можно записать в виде $y_i^a y_{i+1}^{d-a}$, $0 < a \leqslant d$. Поэтому если $w_2 \gg w_1$, то старшие мономы производных $\delta^{w_1} y^d$ и $\delta^{w_2} y^d$ не имеют общих переменных. По первому критерию Бухбергера [4] S-полином этих производных можно не рассматривать. (Отметим, что такое свойство справедливо не только для монома y^d, но и для любого положительного многочлена, точнее для любого многочлена, в котором не сокращаются старшие мономы в производных.) Пусть $f_w := \delta^w y^d$. Чтобы определить пары производных, старшие мономы которых имеют нетривиальное зацепление, выпишем и пронумеруем некоторый набор старших мономов производных для y^d:

$$\begin{array}{ll}
0: & \operatorname{lm} f_{kd} = y_k^d, \\
1: & \operatorname{lm} f_{kd+1} = y_k^{d-1} y_{k+1}, \\
\dots & \\
i: & \operatorname{lm} f_{kd+i} = y_k^{d-i} y_{k+1}^i, \\
\dots & \\
d-1: & \operatorname{lm} f_{(k+1)d-1} = y_k \quad y_{k+1}^{d-1},
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll} d\colon & \operatorname{lm} f_{(k+1)d} = & y_{k+1}^{d}, \\ d+1\colon & \operatorname{lm} f_{(k+1)d+1} = & y_{k+1}^{d-1}\, y_{k+2}, \\ \ldots & & \\ 2d-1\colon & \operatorname{lm} f_{(k+2)d-1} = & y_{k+1}\, y_{k+2}^{d-1}. \end{array}$$

Здесь выписаны те производные большего порядка, с которыми могут иметь зацепление старшие мономы многочленов $f_{kd}, \ldots, f_{(k+1)d-1}$. (Зацепление с производными меньшего порядка мы рассматриваем при предыдущем k.) Зафиксируем некоторое значение $k \geqslant 0$. Обозначим для простоты f_{kd+i} через h_i, где $0 \leqslant i < 2d$ (индекс i соответствует номеру в приведённой таблице старших мономов). Обозначим S-полином многочленов h_i и h_j через $S_{i,j}$ (можем считать, что $0 \leqslant i < d$, $i < j < 2d$). Как обычно, будем называть наименьшим общим кратным данной S-пары выражение

$$\mathrm{LCM}_{i,j} := \mathrm{LCM}(\operatorname{lm} h_i, \operatorname{lm} h_j).$$

Дополнительной степенью S-пары назовём число $\deg \mathrm{LCM}_{i,j} - d$. Наши S-пары могут иметь дополнительную степень от 1 до $d-1$.

Рассмотрим сначала S-пары, имеющие дополнительную степень 1. Они соответствуют S-полиномам вида

$$S_{i,i+1} = Ay_{k+1}h_i - By_k h_{i+1},$$

где $0 \leqslant i < d$, $c \in \mathcal{F}$, а также S-полиному

$$S_{d-1,d+1} = Ay_{k+2}h_{d-1} - By_k h_{d+1},$$

где $A, B \in \mathcal{F}$. Коэффициенты A и B в этих записях, конечно, зависят от k и i, но ради компактности записи мы обозначаем их одинаково.

Запишем условие равенства нулю «самого первого» S-полинома (в наших обозначениях это $S_{0,1}$ при $k = 0$):

$$y_0 f_1 - d \cdot y_1 f_0 = 0.$$

Выведем из этого выражения, что все остальные S-полиномы дополнительной степени 1 имеют стандартное представление. Для этого продифференцируем это равенство необходимое количество раз, чтобы среди слагаемых появились нужные нам выражения $y_{k+1}h_i$ и $y_k h_{i+1}$:

$$\delta^{w-1}(y_0 f_1 - d \cdot y_1 f_0) = 0. \qquad (3)$$

По лемме 1 в левой части этого равенства присутствуют с ненулевыми коэффициентами все слагаемые вида $y_a f_{w-a}$, кроме, быть может, слагаемого $y_a f_{ad}$, если $w = a(d+1)$. Поскольку $\operatorname{lm}(y_a f_{ad}) = y_a^{d+1} \neq \mathrm{LCM}_{i,i+1}$, то оба выражения $y_{k+1}h_i$ и $y_k h_{i+1}$ входят в левую часть равенства (3) с ненулевыми коэффициентами. Старшие мономы этих выражений равны $y_k^{d-i} y_{k+1}^{i+1}$. Они являются β-мономами. Так как эти мономы зависят лишь от двух переменных, то имеются ровно два перечисленных выше выражения (со значениями a, равными k и

$k+1$) с такими старшими мономами. Поэтому старшие мономы всех остальных слагаемых $y_a f_{w-a}$ в левой части (3) будут меньше монома $y_k^{d-i} y_{k+1}^{i+1}$ относительно β-упорядочения.

Итак, имеет место равенство

$$0 = \delta^{w-1}(dy_1 f_0 - y_0 f_1) = c_{k+1} y_{k+1} h_i - c_k y_k h_{i+1} + \sum_{a \neq k,\, k+1} c_a y_a f_{w-a},$$

причём

$$\operatorname{lm} y_{k+1} h_i = \operatorname{lm} y_k h_{i+1} = y_k^{d-i} y_{k+1}^{i+1}$$

и

$$\operatorname{lm} y_a f_{w-a} \prec y_k^{d-i} y_{k+1}^{i+1} \quad \text{при} \quad a \neq k,\, k+1.$$

Так как левая часть равна нулю, то моном $y_k^{d-i} y_{k+1}^{i+1}$ должен справа сократиться, но $c_{k+1} \neq 0$ и $c_k \neq 0$. Значит, разность $c_{k+1} y_{k+1} f_{kd+i} - c_k y_k f_{kd+i+1}$ пропорциональна S-полиному $S_{i,i+1}$:

$$0 = \frac{c_{k+1}}{A} S_{i,i+1} + \sum_{a \neq k,\, k+1} c_a y_a f_{w-a}.$$

Итак, этот S-полином имеет стандартное представление.

Для S-полинома $S_{d-1,d+1}$ рассуждения почти аналогичны. Отличие состоит в том, что $\mathrm{LCM}_{d-1,d+1} = y_k y_{k+1}^{d-1} y_{k+2}$. Хотя это наименьшее общее кратное зависит уже от трёх переменных, всё равно есть только два способа записать его в виде $\operatorname{lm} y_a f_{w-a}$:

$$y_k y_{k+1}^{d-1} y_{k+2} = \operatorname{lm}(y_k h_{d+1}) = \operatorname{lm}(y_{k+2} h_{d-1}) \neq \operatorname{lm}(y_{k+1} h_d).$$

Моном $y_k y_{k+1}^{d-1} y_{k+2}$ не является β-мономом. Однако единственный моном, который старше его, равен y_{k+1}^{d+1}. Моном y_{k+1}^{d+1} может появиться в качестве старшего монома только в слагаемом $y_{k+1} h_d$. Поэтому $c_{k+1} = 0$, иначе этот моном не сократится. Значит, снова можно утверждать, что все остальные мономы несократившихся слагаемых $y_a f_{w-a}$ при $a \neq k,\, k+2$ меньше, чем $y_k y_{k+1}^{d-1} y_{k+2}$. Это даёт стандартное представление для $S_{d-1,d+1}$.

Мы доказали, что все S-полиномы дополнительной степени 1 имеют стандартное представление. Заметим, что для $d = 2$ доказательство уже закончено. Пусть $d > 2$. Рассмотрим теперь другие S-полиномы в порядке возрастания их дополнительной степени. Если это $S_{i,j}$, где $0 \leqslant i < i+1 < j \leqslant d$, т. е. НОК зависит только от двух переменных y_k и y_{k+1}, то стандартное представление такого S-полинома можно получить из домноженных стандартных представлений «промежуточных» S-полиномов $S_{i,i+1}$ и $S_{i+1,j}$, которые имеют меньшую дополнительную степень. Это в точности соответствует второму критерию Бухбергера [4], так как

$$\operatorname{lm} h_{i+1} = y_k^{d-i-1} y_{k+1}^{i+1} \mid \mathrm{LCM}_{i,j} = y_k^{d-i} y_{k+1}^{j}.$$

Точно так же рассмотрение S-полинома $S_{d-i,d+j}$, где $j < i$, сводится к $S_{d-i,d-j}$ и $S_{d-j,d+j}$. Аналогично рассмотрение $S_{d-i,d+j}$, где $j > i$, сводится к $S_{d-i,d+i}$ и $S_{d+i,d+j}$.

Остаётся рассмотреть «симметричные» S-полиномы дополнительной степени i вида

$$S_{d-i,d+i} = cy_k^i h_{d+i} - y_{k+2}^i h_{d-i}.$$

Будем рассматривать их по возрастанию i. Мы можем считать, что все S-полиномы с меньшей дополнительной степени уже имеют стандартные представления. Заметим, что $S_{d-1,d+1}$ имеет дополнительную степень 1, и поэтому он уже рассмотрен ранее. Пусть $i > 1$. Вычислим НОК нашего S-полинома:

$$L := \mathrm{LCM}_{d-i,d+i} = y_k^i y_{k+1}^{d-i} y_{k+2}^i = y_k^i \operatorname{lm} h_{d+i} = y_{k+2}^i \operatorname{lm} h_{d-i}.$$

Заметим, что моном L может получиться только двумя указанными выше способами.

Будем выделять $S_{d-i,d+i}$ из выражения

$$y_{k+2}^{i-1} \delta^w (y_0 f_1 - d \cdot y_1 f_0) = 0, \tag{4}$$

где $w = (k+1)d - i + k + 1$ подобрано так, чтобы при дифференцировании возникло слагаемое $y_{k+2} h_{d-i}$. По лемме 1 это слагаемое не сократится и будет присутствовать в выражении (4). Переписав (4) в виде равенства

$$\sum_a c_\alpha M_\alpha f_\beta = 0, \tag{5}$$

мы получим однородное по весу и степени выражение, где $\deg M_\alpha = i$. Рассмотрим в левой части слагаемое $M_\alpha f_\beta$ с самым старшим мономом. Предположим, что $M := M_\alpha \operatorname{lm} f_\beta \succ L$. Покажем, что сумму (5) можно переписать таким образом, чтобы максимальный моном M уменьшился, а коэффициент при $y_k^i h_{d+i}$ не изменился. Для этого изучим строение такого монома M, предполагая, что $\prec$ — обратный лексикографический порядок.

Лемма 2 (о стягивании переменных). *Пусть $M \prec_{\mathrm{lex}} L = y_k^i y_{k+1}^{d-i} y_{k+2}^i$, причём $\deg M = \deg L$ и $\operatorname{wt} M = \operatorname{wt} L$. Тогда $M = K y_{k+1}^q y_{k+2}^r$, где $K \leqslant y_k^\infty$, причём $r < i$ и $q + r > d$.*

Доказательство. То, что $r < i$, явно следует из условия. Заметим, что, увеличивая индекс самой младшей переменной на 1 и одновременно уменьшая на 1 индекс самой старшей переменной, мы не меняем веса и степени монома. Значит, и M и L такими преобразованиями («стягиваниями переменных») можно привести к β-моному такого же веса и степени, т. е. к виду y_{k+1}^{d+i}. Индекс старшей переменной y_{k+2} монома M при этом уменьшится на 1 ровно r раз. Индекс каждой переменной из K увеличится по крайней мере один раз. Поэтому $\deg K \leqslant r < i$. Так как степени мономов M и L равны $d + i$, то $d + i = \deg K + q + r < i + q + r$, откуда следует, что $q + r > d$. □

Пусть M записан так же, как в условии леммы. Рассмотрим все возможные случаи появления монома M в сумме (5). Поскольку $d - r < q$, то такой старший моном будет получаться из выражения $K y_{k+1}^{q-(d-r)} h_{d+r}$ (оно может и не присутствовать в (5)). Пусть $M_a f_b$ — другое выражение с таким же старшим мономом.

Рассмотрим S-полином многочленов f_b и h_{d+r}. Ясно, что его НОК делит M. Покажем, что он отличен от M. Действительно, предположим противное. Тогда $\operatorname{lm} f_b$ должен зависеть от y_{k+1}, так как $q-(d-r)>0$. Значит, $\operatorname{lm} f_b = y_k^{d-q} y_{k+1}^q$, откуда $p = d-q$ и $K = y_k^{d-q}$. Но в этом случае получаем противоречие:

$$\deg M = (d-q)+q+r = d+r < d+i.$$

Итак, НОК рассматриваемого S-полинома — собственный делитель M. Пусть Q — их частное. Моном Q не зависит от y_{k+2}, поскольку $\deg_{y_{k+2}} h_{d+r} = r$. Вычтем из нашей суммы многочлен $Q \cdot S_{f_b, h_{d+q}}$ с таким коэффициентом, чтобы выражение $c_a M_a f_b$ сократилось. Так как дополнительная степень этого S-полинома меньше i, то по условию он имеет стандартное представление, которое окажется в правой части равенства. В итоге мы сможем переписать сумму (5) так, чтобы старший моном слагаемых не увеличился, а вместо выражения $c_a M_a f_b$ с некоторым коэффициентом добавилось $K y_{k+1}^{q-(d-r)} h_{d+r}$. Заметим, что поскольку частное Q не зависело от y_{k+2}, коэффициент перед выражением $y_{k+2}^i h_{d-i}$ не изменился.

Проделаем такую операцию для всех слагаемых вида $c_a M_a f_b$ со старшим мономом L, где $f_b \neq h_{d+r}$. В итоге в изменённой сумме (5) может остаться только одно слагаемое вида $c_\gamma M_\gamma h_{d+r}$ со старшим мономом L. Но этот моном должен сократиться, поэтому $c_\gamma = 0$. Таким образом мы получим новую сумму вида (5), старший моном слагаемых которой меньше M. Продолжая этот процесс, мы получим сумму, в которой именно L будет старшим мономом слагаемых (напомним, что коэффициент перед $y_{k+2}^i h_{d-i}$ был отличен от нуля и не изменялся). Чтобы сумма равнялась нулю, в ней должно быть другое слагаемое со старшим мономом L. Но, как мы видели, таким может быть только $y_k^i h_{d+i}$. Итак, наша сумма приняла вид

$$c S_{d-i,d+i} + \sum_\alpha c_\alpha M_\alpha f_\beta = 0,$$

где $\operatorname{lm} M_\alpha f_\beta \prec L$. Это даёт стандартное представление для $S_{d-i,d+i}$. $\square$

В заключение приведём пример, иллюстрирующий доказательство теоремы. Рассмотрим идеал $[y_0^3]$. Выпишем несколько первых производных образующих:

$$\begin{aligned}
&f_0 := f = y_0^3,\\
&f_1 := \delta f = 3y_0^2 y_1,\\
&f_2 := \delta^2 f = 6y_0 y_1^2 + 3y_0^2 y_2,\\
&f_3 := \delta^3 f = 6y_1^3 + 18 y_0 y_1 y_2 + 3y_0^2 y_3,\\
&f_4 := \delta^4 f = 36 y_1^2 y_2 + 18 y_0 y_2^2 + 24 y_0 y_1 y_3 + 3y_0^2 y_4,\\
&f_5 := \delta^5 f = 90 y_1 y_2^2 + 60 y_1^2 y_3 + 60 y_0 y_2 y_3 + 30 y_0 y_1 y_4 + 3 y_0^2 y_5,\\
&f_6 := \delta^6 f = 90 y_2^3 + \ldots.
\end{aligned}$$

Видно, что многочлены f_0, f_1 и f_2 имеют нетривиальное зацепление только с многочленами $f_0, \ldots, f_5$. Рассмотрим сначала S-полиномы дополнительной степени 1. Это $S_{0,1}$, $S_{1,2}$, $S_{2,3}$ и $S_{2,4}$. Заметим, что $S_{0,1} = 0$. Выведем из этого, что, например, $S_{2,3} = y_1 f_2 - y_0 f_3$ имеет стандартное представление. НОК этого S-полинома равен $y_0 y_1^3$ и имеет вес 3. Поэтому продифференцируем равенство $y_0 f_1 - 3y_1 f_0 = 0$ веса 1 дважды:

$$0 = \delta^2(y_0 f_1 - 3y_1 f_0) = y_0 f_3 - y_1 f_2 - 5y_2 f_1 - 3y_3 f_0 = -S_{2,3} - 5y_2 f_1 - 3y_3 f_0.$$

Старший моном слагаемых $y_2 f_1$ и $y_3 f_0$ отличен от $y_0 y_1^3$ — самого старшего относительно InvLex монома веса 3 и степени 4. Поэтому равенство

$$S_{2,3} = -5y_2 f_1 - 3y_3 f_0$$

является стандартным представлением $S_{2,3}$. Аналогично строятся стандартные представления для $S_{1,2}$ и $S_{2,4}$. Так же доказывается наличие стандартного представления у S-полиномов дополнительной степени 1 между высшими производными f.

Рассмотрим теперь S-полиномы дополнительной степени 2: $S_{1,4}$, $S_{2,5}$ и $S_{1,5}$. Первые два S-полинома отбрасываются по второму критерию Бухбергера. Действительно, $\mathrm{LCM}_{1,4} = y_0^2 y_1^2 y_2$ делится на $\mathrm{LCM}_{1,2} = y_0^2 y_1^2$ и $\mathrm{LCM}_{2,4} = y_0 y_1^2 y_2$, а S-полиномы $S_{1,2}$ и $S_{2,4}$ уже рассмотрены. Для $S_{2,5}$ всё аналогично.

Особым случаем является «симметричный» S-полином

$$S_{1,5} = 30y_2^2 f_1 - y_0^2 f_5$$

с $\mathrm{LCM}_{1,5} = y_0^2 y_1 y_2^2$. Он не выражается похожим образом через рассмотренные ранее S-полиномы и требует отдельного изучения. Рассмотрим выражение

$$0 = y_2\delta^2(y_0 f_1 - 3y_1 f_0) = y_0 y_2 f_3 - y_1 y_2 f_2 - 5y_2^2 f_1 - 3y_2 y_3 f_0.$$

Сюда уже входит слагаемое $y_2^2 f_1$ с коэффициентом -5. Однако старший моном первых двух слагаемых равен $y_0 y_1^3 y_2$, что больше чем $y_0^2 y_1 y_2^2$ при порядках InvLex. Этот моном равен $y_0 y_1 \operatorname{lm} f_4$. Рассмотрим S-полиномы $S_{3,4}$ и $S_{2,4}$. По предположению они уже имеют стандартное представление:

$$\begin{gathered} S_{2,4} = 6y_2 f_2 - y_0 f_4 = -8y_3 f_1 - 3y_4 f_0, \\ S_{3,4} = 6y_2 f_3 - y_1 f_4 = -11y_4 f_1 - 14y_3 f_2 + y_0 f_5 - 3y_5 f_0. \end{gathered}$$

Попытаемся с их помощью избавиться от слагаемых $y_0 y_2 f_3$ и $y_1 y_2 f_2$ исходного выражения. Получится следующее:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{6} y_0(y_1 f_4 - 11y_4 f_1 - 14y_3 f_2 + y_0 f_5 - 3y_5 f_0) - \\ &\quad - \frac{1}{6} y_1(y_0 f_4 - 8y_3 f_1 - 3y_4 f_0) - 5y_2^2 f_1 - 3y_2 y_3 f_0 = \\ &\quad = -\frac{11}{6} y_0 y_4 f_1 - \frac{7}{3} y_0 y_3 f_2 + \frac{1}{6} y_0^2 f_5 - \\ &\quad - \frac{1}{2} y_0 y_5 f_0 + \frac{4}{3} y_1 y_3 f_1 + \frac{1}{2} y_1 y_4 f_0 - 5y_2^2 f_1 - 3y_2 y_3 f_0. \end{aligned}$$

Заметим, что коэффициент перед $y_2^2 f_1$ не изменился, слагаемые со старшим мономом $y_0 y_1^3 y_2$ сократились, а в сумме появилось недостающее слагаемое $\frac{1}{6} y_0^2 f_5$. Умножая всё выражение на 6, получаем стандартное представление для $S_{1,5}$:

$$S_{1,5} = 30 y_2^2 f_1 - y_0^2 f_5 = \\ = -11 y_0 y_4 f_1 - 14 y_0 y_3 f_2 - 3 y_0 y_5 f_0 + 8 y_1 y_3 f_1 + 3 y_1 y_4 f_0 - 3 y_2 y_3 f_0.$$

Автор выражает благодарность участникам семинара по базисам Грёбнера и дифференциальной алгебре механико-математического факультета МГУ Марине Владимировне Кондратьевой, Дмитрию Витальевичу Трушину и Илье Смирнову.

Литература

[1] Зобнин А. И. О стандартных базисах в кольце дифференциальных многочленов // Фундамент. и прикл. мат. — 2003. — Т. 9, вып. 3. — С. 89—102.

[2] Зобнин А. И. Допустимые упорядочения и стандартные базисы дифференциальных идеалов: Дис.... канд. физ.-мат. наук. — М., 2007.

[3] Зобнин А. И. Поведение дифференциальных стандартных базисов при композиции // Фундамент. и прикл. мат. — 2007. — Т. 13, вып. 1. — С. 109—134.

[4] Кокс Д., Литтл Дж., О'Ши Д. Идеалы, многообразия и алгоритмы. — М.: Мир, 2000.

[5] Трушин Д. В. Идеал сепарант в кольце дифференциальных многочленов // Фундамент. и прикл. мат. — 2007. — Т. 13, вып. 1. — С. 215—227.

[6] Carrà Ferro G. Gröbner bases and differential algebra // Applied Algebra, Algebraic Algorithms and Error-Correcting Codes. Proc. 5th Int. Conf., AAECC-5, Menorca/Spain 1987. — Berlin: Springer, 1989. — (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 356). — P. 129—140.

[7] Carrà Ferro G. Differential Gröbner bases in one variable and in the partial case // Math. Comput. Modelling. — 1997. — Vol. 25, no. 8—9. — P. 1—10.

[8] Carrà Ferro G. A survey on differential Gröbner bases // Gröbner Bases in Symbolic Analysis. Based on Talks Delivered at the Special Semester on Gröbner Bases and Related Methods, Linz, Austria, May 2006 / M. Rosenkranz, ed. — Berlin: Walter de Gruyter, 2007. — P. 77—108. — (Radon Ser. Comput. Appl. Math.; Vol. 2).

[9] Gallo G., Mishra B., Ollivier F. Some constructions in rings of differential polynomials // Applied Algebra, Algebraic Algorithms and Error-Correcting Codes. Proc. 9th Int. Symp., AAECC-9, New Orleans/LA (USA) 1991. — Berlin: Springer, 1991. — (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 539). — P. 171—182.

[10] Kolchin E. R. Differential Algebra and Algebraic Groups. — Academic Press, 1973.

[11] Kondratieva M. V., Levin A. B., Mikhalev A. V., Pankratiev E. V. Differential and Difference Dimension Polynomials. — Kluwer Academic, 1999.

[12] Kondratieva M. V., Pankratiev E. V., Trushin D. V., Zobnin A. I. Advantages and disadvantages of differential standard bases // Acta Academiae Aboensis, Ser. B. — 2007. — Vol. 67, no. 2. — P. 50—57.

[13] Kondratieva M. V., Pankratiev E. V., Trushin D. V., Zobnin A. I. Recent results on differential analogues of Gröbner bases (a summary report) // Le Matematiche. — 2008. — Vol. 63, fasc. 1. — P. 49—54.

[14] Levi H. On the structure of differential polynomials and on their theory of ideals // Trans. Amer. Math. Soc. — 1942. — Vol. 51. — P. 532—568.

[15] Ollivier F. Standard bases of differential ideals // Applied Algebra, Algebraic Algorithms and Error-Correcting Codes, Proc. 8th Int. Conf., AAECC-8, Tokyo/Jap. 1990. — Berlin: Springer, 1991. — (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 508). — P. 304—321.

[16] Ritt J. F. Differential Algebra. — New York: Amer. Math. Soc., 1950. — (Colloquium Publications; Vol. 33).

[17] Sit W. Y. The Ritt—Kolchin theory for differential polynomials // Proc. Int. Workshop on Differential Algebra and Related Topics, Rutgers — The State University of New Jersey, New Brunswick, USA, November 2—3, 2000 / L. Guo, ed. — Singapore: World Scientific, 2002. — P. 1—70.

[18] Zobnin A. I. Essential properties of admissible orderings and rankings // Proc. of the 64th Workshop on General Algebra «64. Arbeitstagung Allgemeine Algebra», Olomouc, Czech Republic, May 30—June 2, 2002 and of the 65th Workshop on General Algebra «65. Arbeitstagung Allgemeine Algebra», Potsdam, Germany, March 21—23, 2003 / I. Chajda, ed. — Klagenfurt : Verlag Johannes Heyn, 2004. — (Contrib. Gen. Algebra; Vol. 14). — P. 205—221.

[19] Zobnin A. I. Admissible orderings and finiteness criteria for differential standard bases // Symbolic and Algebraic Computation, Int. Symp. ISSAC 2005, Beijing, China, July 24—27, 2005, Proceedings / M. Kauers, ed. — ACM Press, 2005. — P. 365—372.