Граница Якоби для систем алгебраических дифференциальных уравнений*

М. В. КОНДРАТЬЕВА
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: kondratieva@sumail.ru

А. В. МИХАЛЁВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: mikhalev@shade.msu.ru

Е. В. ПАНКРАТЬЕВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

УДК 512.628

Ключевые слова: дифференциальная алгебра, граница Якоби, алгебраические дифференциальные уравнения в частных производных.

Аннотация

Данная обзорная статья посвящена гипотезе о границе Якоби для систем дифференциальных полиномиальных уравнений в частных производных. Мы доказываем гипотезу для системы n уравнений от n дифференциальных переменных, являющейся независимой над простым дифференциальным идеалом $\mathfrak{p}$. Это обобщает, с одной стороны, наш результат о границе Якоби в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, независимых над простым дифференциальным идеалом $\mathfrak{p}$ и, с другой стороны, результат Томасовича, который доказал гипотезу Якоби для системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных.

Abstract

M. V. Kondratieva, A. V. Mikhalev, E. V. Pankratiev, Jacobi's bound for systems of algebraic differential equations, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 4, pp. 151—166.

This review paper is devoted to the Jacobi bound for systems of partial differential polynomials. We prove the conjecture for the system of n partial differential equations in n differential variables which are independent over a prime differential ideal $\mathfrak{p}$. On the one hand, this generalizes our result about the Jacobi bound for ordinary differential polynomials independent over a prime differential ideal $\mathfrak{p}$ and, on the other hand, the result by Tomasovic, who proved the Jacobi bound for linear partial differential polynomials.

*Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ, проект 08-01-90103-Мол$_\text{а}$.

Фундаментальная и прикладная математика, 2008, том 14, № 4, с. 151—166.

Памяти Евгения Васильевича Панкратьева

1. Введение

Это последняя статья, над которой работал Е. В. Панкратьев. Гипотеза о границе Якоби является одной из нерешённых проблем классической дифференциальной алгебры и всегда была одной из излюбленных тем исследований Евгения Васильевича. Впервые появившись в работах К. Якоби (см. [4]), она была решена в некоторых частных случаях Дж. Риттом [13]. Э. Колчин [8] привёл эту задачу на Московском международном математическом конгрессе как одну из самых актуальных. В работах Б. Ландо [12], Т. Томасовича [15], Р. Кона [3] и в книге [10] был достигнут некоторый прогресс в решении этой проблемы. Интерес к ней вырос после сделанного Ф. Оливье перевода с латинского* трудов великого немецкого математика Карла Густава Якоби (1804—1851), который поставил и решил много ярких задач, актуальных и сегодня. В 2009 году выйдет специальный выпуск журнала «Applicable Algebra in Engineenring, Communication and Computing», в который включён перевод оригинальных статей Якоби, исторический обзор и результаты статьи [1] с иными, чем здесь, доказательствами в духе Якоби.

Пусть $\Sigma = \{f_1 = 0, \ldots, f_n = 0\}$ — система обыкновенных дифференциальных уравнений от n дифференциальных неизвестных $y_1, \ldots, y_n$, причём количество уравнений совпадает с количеством переменных. Введём обозначение $e_{ij} = \operatorname{ord}_{y_j} f_i$ (если f_i не содержит ни y_j, ни его производных, то полагаем $e_{ij} = -\infty$). Матрицу $E = (e_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n}^{1\leqslant j\leqslant n}$ назовём матрицей порядков системы Σ. Для каждого $\sigma \in \mathrm{S}_n$, где S_n — симметрическая группа порядка n, определим сумму $e_{1\sigma(1)} + \ldots + e_{n\sigma(n)}$ и назовём её диагональной. Пусть

$$h = \max_{\sigma\in \mathrm{S}_n}\bigl(e_{1\sigma(1)} + \ldots + e_{n\sigma(n)}\bigr) -$$

максимальная диагональная сумма матрицы E.

Число $h = h(\Sigma)$ называют (строгим) числом Якоби системы Σ (или матрицы E). Впервые оно появилось в [4] как некоторая характеристика системы $\Sigma = \{f_1 = 0, \ldots, f_n = 0\}$.

Если некоторое e_{ij} равно $-\infty$, для системы Σ можно определить слабое число Якоби $\bar{h}$, которое может не совпадать с h. Для этого заменим в матрице порядков системы Σ все символы $-\infty$ на нуль и вычислим максимальную диагональную сумму полученной матрицы.

Якоби сформулировал утверждение о том, что h ограничивает число произвольных констант в общем решении системы Σ. Однако с точки зрения современной дифференциальной алгебры его доказательство не является корректным, и проблема оценки числа произвольных констант в общем решении

*Перевод на английский доступен по адресу `http://www.lix.polytechnique.fr/~ollivier/JACOBI/jacobiEngl.htm`.

системы Σ числом h (и даже слабым числом $\bar{h}$) в настоящее время является открытой.

2. Комбинаторные леммы

На пути доказательства оценки Якоби первая трудность состоит в том, чтобы разобраться со случаем, когда число Якоби h системы Σ равно $-\infty$. Согласно гипотезе, если $h(\Sigma) = -\infty$, то в общем решении системы Σ, помимо произвольных констант, присутствует произвольная функция. Мы докажем это утверждение при некоторых дополнительных условиях на Σ. Более точные формулировки будут приведены ниже, а сейчас мы докажем лемму, на которую будет опираться наше доказательство. Эта лемма давно (с начала XX века) известна в теории перманентов — области комбинаторной математики — и носит там название теоремы Фробениуса—Кёнига (см. [2, с. 42]). Одна из эквивалентных формулировок этой леммы заключается в том, что если число Якоби $(n \times n)$-матрицы E равно $-\infty$, то существует $(s \times r)$-подматрица матрицы E, такая что все её элементы равны $-\infty$ и $s + r = n + 1$.

Всюду далее $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Q}$ обозначают соответственно множества целых, неотрицательных целых и рациональных чисел.

Лемма 1. *Пусть* $E = (e_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n}^{1\leqslant j\leqslant n}$ *— матрица, элементы которой принадлежат множеству* $\mathbb{N} \cup -\infty$, *и пусть* $h(E) = -\infty$. *Тогда можно так переставить столбцы и строки матрицы* E, *что для некоторого* $1 \leqslant t \leqslant n$ *будет выполняться условие* $e_{ij} = -\infty$ *для всех таких индексов, что* $i \geqslant t$ *и* $j \leqslant t$.

Доказательство. Пусть какой-то элемент матрицы не равен $-\infty$. Выбираем такую диагональную сумму матрицы E, что в неё входит максимальное количество элементов, отличных от $-\infty$. Перестановкой строк и столбцов матрицы можно добиться того, что

$$e_{ii} \neq -\infty \quad \text{для всех} \quad i = 1, \ldots r \tag{1}$$

и число r нельзя увеличить. Ясно, что $r < n$. Если все элементы $(r+1)$-го столбца равны $-\infty$, утверждение леммы выполнено ($t = 1$). Пусть столбец с номером $r + 1$ содержит k_1 отличных от $-\infty$ элементов. Ввиду выбора r условие $e_{i,r+1} \neq -\infty$ может выполняться только для $i \leqslant r$. Теперь перестановкой столбцов и строк добьёмся того, что, помимо условия (1), выполняется условие

$$\begin{aligned} &e_{i,r+1} \neq -\infty \quad \text{для всех} \quad i = 1, \ldots k_1, \\ &e_{i,r+1} = -\infty \quad \text{для всех} \quad i > k_1. \end{aligned}$$

Заметим, что $e_{ij} = -\infty$ для всех $i > r$, $j \leqslant k_1$. В самом деле, если это не выполнено для некоторых индексов $i > r$, $j \leqslant k_1$, то

$$e_{11} + \ldots + e_{j-1,j-1} + e_{ij} + e_{j+1,j+1} + \ldots + e_{rr} + e_{j,r+1} \neq -\infty$$

вопреки выбору максимального r. Итак, имеем

$$e_{i,j} = -\infty, \quad \text{если} \quad i > k_1, \ j = r+1 \quad \text{и если} \quad i > r, \ 1 \leqslant j \leqslant k_1. \tag{2}$$

Обозначим через e_i i-ю строку матрицы E. Пусть

$$\Sigma = \{e_1, \ldots e_r\}, \quad \Sigma_1 = \{e_1, \ldots, e_{k_1}\}.$$

Определим

$$\Sigma_2 = \{e_i \in \Sigma \colon e_{ij} \neq -\infty \text{ для некоторого } 1 \leqslant j \leqslant k_1\}.$$

Отметим, что по (1) $\Sigma_1 \subset \Sigma_2$. Не изменяя множеств Σ, Σ_1, после перестановки некоторых строк можем считать, что $\Sigma_2 = \{e_1, \ldots, e_{k_2}\}$, $k_1 \leqslant k_2 \leqslant r$. Как и для Σ_1, докажем, что для Σ_2 выполняется условие, аналогичное (2):

$$e_{ij} = -\infty \quad \text{для всех} \quad i > r, \ k_1 \leqslant j \leqslant k_2.$$

В самом деле, пусть $e_{ij} \neq -\infty$ для некоторых индексов $i > r$, $k_1 \leqslant j \leqslant k_2$. Согласно выбору Σ_2 имеем $e_j \in \Sigma \setminus \Sigma_2$, откуда следует существование такого индекса $1 \leqslant k \leqslant k_1$, что $e_{jk} \neq -\infty$. Имеем

$$e_{11} + \ldots + e_{k-1,k-1} + e_{jk} + e_{k+1,k+1} + \ldots + e_{j-1,j-1} + \\ + e_{ij} + \ldots + e_{j+1,j+1} + \ldots + e_{rr} + e_{k,r+1} \neq -\infty,$$

что противоречит максимальности числа r. Учитывая (2), получаем

$$\begin{aligned} &e_{i,r+1} = -\infty \quad \text{для всех} \quad i > k_1; \\ &e_{ij} = -\infty \quad \text{для всех} \quad i > k_2, \ 1 \leqslant j \leqslant k_1; \\ &e_{ij} = -\infty \quad \text{для всех} \quad i > r, \ j \leqslant k_2. \end{aligned}$$

Далее поступаем аналогично: выбираем Σ_3 — это строки матрицы, для которых некоторый элемент с индексом не больше k не равен $-\infty$. Если потребуется, опять произведём перенумерацию и найдём, что для некоторого $k_3 \geqslant k_2$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} &e_{i,r+1} = -\infty \quad \text{для всех} \quad i > k_1; \\ &e_{ij} = -\infty \quad \text{для всех} \quad i > k_2, \ 1 \leqslant j \leqslant k_1; \\ &e_{ij} = -\infty \quad \text{для всех} \quad i > k_3, \ j \leqslant k_2; \\ &e_{ij} = -\infty \quad \text{для всех} \quad i > r, \ j \leqslant k_3. \end{aligned}$$

Мы определили последовательность вложенных друг в друга конечных множеств. Она должна стабилизироваться, т. е. существует номер t, такой что $\Sigma_t = \Sigma_{t+1}$. Это означает, что $k_t = k_{t+1}$, и из соответствующей системы условий будет следовать, что $e_{ij} = -\infty$ для всех $i > k_t$, $j \leqslant k_t$. Принимая во внимание первое условие в (2), получаем утверждение леммы (для $t = k_t + 1$). □

Следующим этапом доказательства границы Якоби является рассмотрение случая, когда число Якоби системы не равно $-\infty$. Для доказательства оценки нам опять потребуется комбинаторная лемма, известная ещё Якоби. Её доказательство можно извлечь из его алгоритма вычисления канона. В настоящее время более известен так называемый венгерский метод.

Пусть $E = (e_{ij})$ — квадратная $(n \times n)$-матрица с элементами из $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$.

Рассмотрим следующие преобразования матрицы E:

1) перемена местами двух строк;
2) перемена местами двух столбцов;
3) прибавление одного и того же целого числа к каждому элементу некоторого столбца.

Очевидно, что преобразования вида 1) и 2) коммутируют с 3). Таким образом, можно считать, что мы переставляем строки и столбцы, а затем преобразуем E в некоторую $(n \times n)$-матрицу $E' = (e'_{ij})$, где $e'_{ij} = e_{ij} + a_j$, $a_j \in \mathbb{Z}$.

Лемма 2. *Пусть* $E = (e_{ij})$ — $(n \times n)$*-матрица и* $h(E) \neq -\infty$. *Пользуясь преобразованиями* 1)—3), *можно привести* E *к виду, где диагональные элементы максимальны в каждой строке, т. е.* $e_{ii} \geqslant e_{ij}$ *для всех* $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что, переставляя строки, можно добиться того, что $h(E) = e_{11} + e_{22} + \ldots + e_{nn}$. Действительно, пусть $h(E) = e_{\pi(1)1} + e_{\pi(2)2} + \ldots + e_{\pi(n)n}$. После перестановки первой строки матрицы E с $\pi(1)$-й, второй — с $\pi(2)$-й,..., n-й — с $\pi(n)$-й получаем матрицу E, в которой сумма $e_{11} + e_{22} + \ldots + e_{nn}$ максимальна среди всех её диагональных сумм. По предположению имеем, что $e_{ii} \neq -\infty$ для $i = 1, \ldots, n$.

Докажем лемму индукцией по n.

При $n = 1$ исходная матрица E имеет требуемый вид.

Если $n = 2$, то в матрице

$$E = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix}$$

мы имеем $e_{11} + e_{22} \geqslant e_{12} + e_{21}$. Если $e_{12} = -\infty$ и $e_{21} > e_{22}$, то достаточно прибавить $a_2 = e_{21} - e_{22}$ ко второму столбцу. Если $e_{12} \neq -\infty$ и $e_{12} > e_{11}$, то достаточно прибавить $a_1 = e_{12} - e_{11}$ к первому столбцу.

Наконец, пусть $e_{12} \neq -\infty$, $e_{12} \leqslant e_{11}$ и $e_{21} > e_{22}$. Прибавим $a_2 = e_{21} - e_{22}$ ко второму столбцу. Поскольку $e_{11} \geqslant e_{12} + a_2$, полученная матрица имеет требуемый вид.

Пусть $n > 2$ и лемма доказана для квадратных матриц порядка меньше n. По предположению индукции, пользуясь преобразованиями вида 1)—3) над первыми $n-1$ строками и $n-1$ столбцами, можно добиться того, что $e_{ii} = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n-1} \{e_{ij}\}$ при $i = 1, \ldots, n-1$. Выберем теперь число $a \geqslant e_{kn} - e_{kk}$ для всех $k = 1, \ldots, n-1$ и прибавим это a ко всем $n-1$ первым столбцам. Тогда $\tilde{e}_{ii} = e_{ii} + a \geqslant e_{ii} + e_{in} - e_{ii} = \tilde{e}_{in}$ при $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Значит, в новой матрице $e_{ii} = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \{e_{ij}\}$ при $i = 1, \ldots, n-1$.

Мы предположили, что в исходной матрице $h(E) = e_{11} + \ldots + e_{nn}$. Это свойство сохраняется при преобразованиях вида 3), поскольку если $E' = (\tilde{e}_{ij}) = (e_{ij} + a_j)$ — некоторая $(n \times n)$-матрица и

$$h(E') = \tilde{e}_{\pi(1)1} + \ldots + \tilde{e}_{\pi(n)n} = e_{\pi(1)1} + a_1 + e_{\pi(2)2} + a_2 + \ldots + e_{\pi(n)n} + a_n > \\ > \tilde{e}_{(1)1} + \tilde{e}_{(2)2} + \ldots + \tilde{e}_{nn} = e_{11} + \ldots + e_{nn} + a_1 + \ldots + a_n,$$

то, вопреки нашему предположению, $e_{\pi(1)1} + \ldots + e_{\pi(n)n} > e_{11} + \ldots + e_{nn}$. Поскольку преобразования 1) и 2) коммутируют с 3), мы имеем $e_{ii} \geqslant e_{ij}$ при $i = 1, \ldots, n-1$, $j = 1, \ldots, n$ и $h(E) = e_{\pi(1)1} + \ldots + e_{\pi(n-1)n-1} + e_{nn}$, $\pi \in \mathrm{S}_{n-1}$ (так как последняя строка и последний столбец не переставлялись). Переставляя строки матрицы, приведём E к виду, где $e_{ii} \geqslant e_{ij}$ при $i = 1, \ldots, n-1$, $j = 1, \ldots, n$ и $h(E) = e_{11} + \ldots + e_{nn}$. Пусть $\alpha_i = e_{ii} - e_{in}$ $(i = 1, \ldots, n-1)$. Если $\alpha_i = -\infty$ при всех $1 \leqslant i \leqslant n-1$, то $e_{in} = -\infty$ при $i = 1, \ldots, n-1$. Значит, чтобы получить требуемый вид матрицы E, достаточно прибавить число, большее чем $e_{nk} - e_{nn}$ $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$, к последнему столбцу матрицы E. Пусть $b = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n-1} \{\alpha_i \mid \alpha_i \neq -\infty\}$, $b \in \mathbb{Z}$. Прибавив b к последнему столбцу, получим

$$\tilde{e}_{in} = e_{in} + b \leqslant e_{in} + \alpha_i = e_{in} + e_{ii} - e_{in} = \tilde{e}_{ii}$$

при $i = 1, \ldots, n-1$ и

$$\tilde{e}_{kn} = e_{kn} + b = \tilde{e}_{kk}$$

для некоторого $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Переставив k-й столбец с первым и первую строку с k-й, получим матрицу E, в которой

$$\begin{cases} e_{ii} = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \{e_{ij}\} \quad (i = 1, \ldots, n-1), \\ e_{11} = e_{1n}, \\ h(E) = e_{11} + e_{22} + \ldots + e_{nn}. \end{cases} \tag{3}$$

Из этих условий и неравенства

$$e_{1n} + e_{n1} + e_{22} + \ldots + e_{n-1,n-1} \leqslant h(E) = e_{11} + e_{22} + \ldots + e_{nn}$$

(левая часть — диагональная сумма матрицы E) следует, что

$$e_{n1} \leqslant e_{nn}. \tag{4}$$

Если ни один элемент $e_{n2}, \ldots, e_{n,n-1}$ не превосходит e_{nn}, то матрица E имеет требуемый вид.

Предположим, что хотя бы один из элементов e_{nj} $(2 \leqslant j \leqslant n-1)$ больше, чем e_{nn}. Пусть $\tau_n(E)$ обозначает величину

$$\sum_{j\colon 2 \leqslant j \leqslant n-1,\ e_{nj} \geqslant e_{nn}} (e_{nj} - e_{nn}).$$

Индукцией по $\tau_n(E)$ покажем, что E можно преобразовать к требуемому виду.

Если $\tau_n(E) = 0$, то E имеет требуемый вид.

Пусть $\tau_n(E) > 0$ и лемма доказана для матриц, удовлетворяющих условию (3) с $\tau_n < \tau_n(E)$. Поскольку $\tau_n(E) > 0$, существует такое j $(2 \leqslant j \leqslant n-1)$, что $e_{nj} > e_{nn}$. Переставим j-й столбец со вторым и j-ю строку со второй. Таким образом, мы предполагаем, что выполнены условия (3), (4), а также

$$e_{n2} > e_{nn}. \tag{5}$$

Так как

$$\begin{aligned}
&e_{21} + e_{1n} + e_{n2} + e_{33} + \ldots + e_{n-1,n-1} \leqslant e_{11} + e_{22} + \ldots + e_{nn},\\
&e_{1n} = e_{11},\\
&e_{2n} + e_{n2} + e_{11} + e_{33} + \ldots + e_{n-1,n-1} \leqslant e_{11} + e_{22} + \ldots + e_{nn},
\end{aligned}$$

то из неравенства (5) следует, что

$$e_{21} \leqslant e_{22} + (e_{nn} - e_{n2}) < e_{22}, \quad e_{2n} \leqslant e_{22} + (e_{nn} - e_{n2}) < e_{22}.$$

Прибавим -1 ко второму столбцу матрицу E:

$$E' = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12}-1 & e_{13} & \ldots & e_{1n}\\ e_{21} & e_{22}-1 & e_{23} & \ldots & e_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ e_{n1} & e_{n2}-1 & e_{n3} & \ldots & e_{nn} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим несколько случаев.

1. Если $e_{2j} < e_{22}$ при $j = 3, \ldots, n-1$, то E' удовлетворяет (3) и $\tau_n(E') < \tau_n(E)$. По предположению индукции лемма в этом случае справедлива.

2. Предположим, что E' не удовлетворяет (3). В этом случае некоторые элементы из e_{2j} $(3 \leqslant j \leqslant n-1)$ равны e_{22}. Переставляя столбцы (или строки), можно добиться того, что $e_{23} = \ldots = e_{2p} = e_{22}$, $e_{2,p+1} < e_{22}, \ldots, e_{2,n-1} < e_{22}$ $(3 \leqslant p \leqslant n-1)$ и, как и выше, максимальная диагональная сумма — $e_{11} + e_{22} + \ldots + e_{nn}$. В этом случае новая матрица E'' получается прибавлением -1 к столбцам с индексами $3, \ldots, p$:

$$E'' = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12}-1 & e_{13}-1 & \ldots & e_{1p}-1 & e_{1,p+1} & \ldots & e_{1n}\\ e_{21} & e_{22}-1 & e_{23}-1 & \ldots & e_{2p}-1 & e_{2,p+1} & \ldots & e_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ e_{p1} & e_{p2}-1 & e_{p3}-1 & \ldots & e_{pp}-1 & e_{p,p+1} & \ldots & e_{pn}\\ e_{p+1,1} & e_{p+1,2}-1 & e_{p+1,3}-1 & \ldots & e_{p+1,p}-1 & e_{p+1,p+1} & \ldots & e_{p+1,n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ e_{n1} & e_{n2}-1 & e_{n3}-1 & \ldots & e_{np}-1 & e_{n,p+1} & \ldots & e_{nn} \end{pmatrix}.$$

Если $3 \leqslant i \leqslant p$, то

$$
\begin{aligned}
&e_{2i} = e_{22},\\
&e_{i1} + e_{1n} + e_{n2} + e_{2i} + e_{33} + \ldots + e_{i-1,i-1} + e_{i+1,i+1} + \ldots + e_{n-1,n-1} \leqslant\\
&\qquad \leqslant h(E) = e_{11} + e_{22} + \ldots + e_{nn},\\
&e_{1n} = e_{nn},\\
&e_{in} + e_{n2} + e_{2i} + e_{11} + e_{33} + \ldots + e_{i-1,i-1} + e_{i+1,i+1} + \ldots + e_{n-1,n-1} \leqslant\\
&\qquad \leqslant h(E) = e_{11} + e_{22} + \ldots + e_{nn}.
\end{aligned}
$$

Значит,

$$e_{i1} \leqslant e_{ii} + (e_{nn} - e_{n2}) < e_{ii}, \quad e_{in} \leqslant e_{ii} + (e_{nn} - e_{n2}) < e_{ii}$$

при $i = 3, \ldots, p$.

Снова имеются две возможности.

2.1. Если $e_{ij} < e_{ii}$ для всех $i = 3, \ldots, p$, $j = p+1, \ldots, n-1$, то E'' удовлетворяет (3) и $\tau_n(E'') < \tau_n(E)$. По предположению индукции лемма в этом случае выполнена.

2.2. Предположим, что условия пункта 2.1 не выполнены. После преобразований вида 1), 2) мы можем получить матрицу, для которой эти условия не выполнены для столбцов с индексами $p+1, \ldots, q$, т. е. для каждого столбца с индексом $p+1 \leqslant j \leqslant q$ существует такое i, что $3 \leqslant i \leqslant p$ и $e_{ii} = e_{ij}$. Прибавляя -1 к столбцам матрицы E'' с индексами $p+1, \ldots, q$, мы получим

$$
E''' = \begin{pmatrix}
e_{11} & e_{12}-1 & e_{13}-1 & \ldots & e_{1p}-1 & e_{1,p+1}-1 & \ldots & e_{1q}-1 & e_{1,q+1} & \ldots & e_{1n}\\
e_{21} & e_{22}-1 & e_{23}-1 & \ldots & e_{2p}-1 & e_{2,p+1}-1 & \ldots & e_{2q}-1 & e_{2,q+1} & \ldots & e_{2n}\\
e_{31} & e_{32}-1 & e_{33}-1 & \ldots & e_{3p}-1 & e_{3,p+1}-1 & \ldots & e_{3q}-1 & e_{3,q+1} & \ldots & e_{3n}\\
\vdots & \vdots & \vdots\ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\
e_{p1} & e_{p2}-1 & e_{p3}-1 & \ldots & e_{pp}-1 & e_{p,p+1}-1 & \ldots & e_{pq}-1 & e_{p,q+1} & \ldots & e_{pn}\\
e_{p+1,1} & e_{p+1,2}-1 & e_{p+1,3}-1 & \ldots & e_{p+1,p}-1 & e_{p+1,p+1}-1 & \ldots & e_{p+1,q}-1 & e_{p+1,q+1} & \ldots & e_{p+1,n}\\
\vdots & \vdots & \vdots\ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\
e_{q1} & e_{q2}-1 & e_{q3}-1 & \ldots & e_{qp}-1 & e_{q,p+1}-1 & \ldots & e_{qq}-1 & e_{q,q+1} & \ldots & e_{qn}\\
e_{q+1,1} & e_{q+1,2}-1 & e_{q+1,3}-1 & \ldots & e_{q+1,p}-1 & e_{q+1,p+1}-1 & \ldots & e_{q+1,q}-1 & e_{q+1,q+1} & \ldots & e_{q+1,n}\\
\vdots & \vdots & \vdots\ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\
e_{n1} & e_{n2}-1 & e_{n3}-1 & \ldots & e_{np}-1 & e_{n,p+1}-1 & \ldots & e_{nq}-1 & e_{n,q+1} & \ldots & e_{nn}
\end{pmatrix}.
$$

Снова мы докажем, что

$$e_{k1} \leqslant e_{kk} + (e_{nn} - e_{n2}) < e_{kk}, \quad e_{kn} \leqslant e_{kk} + (e_{nn} - e_{n2}) < e_{kk} \tag{6}$$

для всех $k = p+1, \ldots, q$.

В самом деле, если $p+1 \leqslant k \leqslant q$, то найдём такое $i = i(k)$, что $3 \leqslant i \leqslant p$ и $e_{ii} = e_{ik}$. Это равенство вместе с $e_{1n} = e_{11}$, $e_{2i} = e_{22}$ и неравенствами

$$
\begin{aligned}
&e_{k1} + e_{1n} + e_{n2} + e_{2i} + e_{ik} + e_{33} + \ldots + \hat{e}_{ii} + \ldots + \hat{e}_{kk} + \ldots + e_{nn} \leqslant\\
&\qquad \leqslant e_{11} + e_{22} + \ldots + e_{nn},\\
&e_{kn} + e_{n2} + e_{2i} + e_{ik} + e_{11} + e_{33} + \ldots + \hat{e}_{ii} + \ldots + \hat{e}_{kk} + \ldots + e_{nn} \leqslant h(E),
\end{aligned}
$$

где $\hat{e}$ означает, что член e опущен, даёт (6) (поскольку $k \notin \{1, 2, i, n\}$).

Снова у нас есть две возможности.

2.2.1. Если $e_{ij} < e_{ii}$ для всех $i = p+1, \ldots, q$, $j = q+1, \ldots, n-1$, то мы пользуемся индуктивным предположением.

2.2.2. Если какие-то неравенства в 2.2.1 не выполняются, то мы пользуемся всё той же схемой, т. е. преобразуем их в равенства в столбцах с индексами $q+1, \ldots, r$, где $q+1 \leqslant r \leqslant n-1$. Прибавляем -1 к каждому из этих столбцов. Дополняя сумму $e_{j1} + e_{1n} + e_{n2} + e_{2i} + e_{ik} + e_{kj}$ до диагональной ($q+1 \leqslant j \leqslant r$, $e_{kj} = e_{kk}$), мы получим, что $e_{j1} < e_{jj}$ и $e_{jn} < e_{jj}$. После конечного числа шагов мы получим матрицу, удовлетворяющую условиям (3) и такую, что $\tau_n < \tau_n(E)$. Применяя индуктивное предположение, мы завершаем доказательство леммы. □

Следствие 1. *Пусть E — $(n \times n)$-матрица с элементами из $\mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ и $h(E) \neq -\infty$. Тогда существуют целые числа $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}$ и матрица $E' = (e_{ij})$, полученная из E перестановками строк и столбцов, такая что $e_{ij} + a_j \leqslant e_{ii} + a_i$ для всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$.*

Доказательство. По лемме 2 существуют целые числа $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{Z}$ и матрица E', удовлетворяющая условиям следствия. Чтобы добиться неотрицательности параметров преобразований 3), достаточно заменить $b_1, \ldots, b_n$ на $a_1 = b_1 + |a|, \ldots, a_n = b_n + |a|$, где $a = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} b_i$. □

3. Необходимые сведения из дифференциальной алгебры

Основные понятия дифференциальной алгебры можно найти в [9, 10, 14].

Все рассматриваемые здесь кольца являются ассоциативными и имеют единицу.

Будем называть *дифференциальным кольцом* R коммутативное кольцо, на котором действует дифференцирование d, т. е. аддитивная, удовлетворяющая правилу Лейбница операция ($d(a+b) = d(a) + d(b)$ и $d(ab) = d(a)b + ad(b)$ для всех $a, b \in R$). Множество $\Delta = \{\delta\}$ будем называть базисным. Далее мы часто будем использовать вместо слова «дифференциальный» приставку «Δ-».

Пусть $\mathcal{F}$ — дифференциальное поле характеристики нуль с попарно коммутирующими дифференцированиями $\Delta = \{d_1, \ldots, d_m\}$. Если $m > 1$, принято говорить, что $\mathcal{F}$ — дифференциальное поле с частными производными, а если $m = 1$ — обыкновенное дифференциальное поле. Обозначим через Θ свободную коммутативную полугруппу всех элементов вида $\theta = d_1^{i_1} \ldots d_m^{i_m}$ ($i_k \in \mathbb{N}$ для всех $1 \leqslant k \leqslant m$).

Пусть $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ — конечное множество дифференциальных неизвестных и

$$\Theta Y := \{\theta y_j \mid \theta \in \Theta\}.$$

Кольцо дифференциальных многочленов $\mathcal{F}\{Y\}$ представляет собой кольцо коммутативных многочленов от бесконечного множества обычных алгебраических неизвестных $\mathcal{F}[\Theta Y]$, дифференцирования из Δ продолжаются на него естественным образом.

Пусть I — радикальный дифференциальный идеал кольца $\mathcal{F}\{Y\}$, т. е. I является радикальным идеалом, замкнутым относительно дифференцирований из Δ. Будем называть простой дифференциальный идеал $\mathfrak{p}$ *компонентой* идеала I, если $I \subseteq \mathfrak{p}$ и не существует простого Δ-идеала $\mathfrak{q}$, удовлетворяющего условию $I \subseteq \mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{p}$. Каждый радикальный дифференциальный идеал I обладает конечным числом различных компонент $\mathfrak{p}_i$, и их пересечение совпадает с ним: $I = \bigcap\limits_{1 \leqslant i \leqslant k} \mathfrak{p}_i$, причём набор компонент $\mathfrak{p}_i$ идеала I определён однозначно.

Каждый радикальный Δ-идеал I кольца R является конечно порождённым. Это означает, что существует конечный набор многочленов $g_1, \ldots, g_k$, таких что I является минимальным радикальным дифференциальным идеалом, содержащим эти многочлены; записывается это как $I = \{g_1, \ldots, g_k\}$. (Минимальный дифференциальный идеал, содержащий элементы $g_1, \ldots, g_n$, будем обозначать через $[g_1, \ldots, g_n]$.)

Пусть $\mathfrak{p}$ — простой Δ-идеал кольца дифференциальных многочленов $R = \mathcal{F}\{y_1, \ldots, y_n\}$, и пусть $\mathcal{G}$ — Δ-поле частных целостного кольца $R/\mathfrak{p}$. Обозначим $\xi_j = (y_j \mod \mathfrak{p})$. Пусть $\mathcal{G}_s = \mathcal{F}\big(d_1^{i_1} \ldots d_m^{i_m}(\xi_j)\big)_{1 \leqslant j \leqslant n}^{i_1 + \ldots + i_m \leqslant s}$ — алгебраическое подполе поля $\mathcal{G}$, порождённое образующими, дифференциальные порядки которых не превосходят s. Поле $\mathcal{F}$ канонически вкладывается в $\mathcal{G}$. Обратно, по любому конечно порождённому дифференциальному расширению $\mathcal{G}$ Δ-поля $\mathcal{F}$ можно определить простой Δ-идеал кольца дифференциальных многочленов.

В 1964 году один из основателей дифференциальной алгебры Э. Колчин ввёл понятие дифференциального размерностного полинома конечно порождённого расширения дифференциального поля. Он в некотором смысле описывает свойства соответствующего простого идеала, а его коэффициенты являются точными определениями понятий, которыми пользовался К. Якоби. Теорема существования (см. [9, с. 115]) формулируется следующим образом.

Теорема 1. *В сделанных выше предположениях существует многочлен $\omega_{\mathfrak{p}/\mathcal{F}}(t) \in \mathbb{Q}[t]$, такой что*

1) $\omega_{\mathfrak{p}/\mathcal{F}}(s) = \operatorname{trdeg}_{\mathcal{F}} \mathcal{G}_s$ *для всех достаточно больших* $s \in \mathbb{N}$;
2) $\deg \omega_{\mathfrak{p}/\mathcal{F}} \leqslant m$ *и* $\omega_{\mathfrak{p}/\mathcal{F}}(t)$ *может быть записан в виде*
$$\omega_{\mathfrak{p}/\mathcal{F}}(t) = \sum_{i=0}^{m} a_i \binom{t+i}{i},$$
где $a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{Z}$;
3) *степень* $d = \deg \omega_{\mathfrak{p}/\mathcal{F}}$, *коэффициенты* a_m *и* a_d *не зависят от выбора системы* Δ-*образующих расширения* $\mathcal{G}/\mathcal{F}$. *Коэффициент* a_m *равен дифференциальной степени трансцендентности* $\mathcal{G}$ *над* $\mathcal{F}$, *т. е. максимальному числу таких элементов* $\xi_1, \ldots, \xi_k \in \mathcal{G}$, *что множество* $\{\theta\xi_i \mid \theta \in \Theta,\ 1 \leqslant i \leqslant k\}$ *является алгебраически независимым над* $\mathcal{F}$.

Многочлен $\omega_{\mathfrak{p}/\mathcal{F}}(t)$ называется *дифференциальным размерностным многочленом* Δ-идеала $\mathfrak{p}$. Если $\deg \omega_{\mathfrak{p}/\mathcal{F}} = 0$, $\omega_{\mathfrak{p}/\mathcal{F}}$ является числом произвольных констант в общем решении системы Σ, где $\Sigma = \bigcup\limits_{f \in \mathfrak{p}} f = 0$.

Обозначим через $D = \mathcal{G}[\Delta]$ кольцо дифференциальных операторов над полем $\mathcal{G}$. Пусть

$$D_s = \Big\{ \sum g_j d_1^{i_1} \ldots d_m^{i_m} \colon g_j \in \mathcal{G},\ i_1 + \ldots + i_m \leqslant s \Big\}.$$

В [6] доказано существование $\mathcal{G}[\Delta]$-модуля (дифференциального $\mathcal{G}$-модуля) $\Omega_{\mathcal{G}/\mathcal{F}}$ дифференциалов и $\mathcal{F}$-дифференцирования (т. е. $\delta(c) = 0$ для всех $c \in \mathcal{F}$) $\delta = \delta_{\mathcal{G}/\mathcal{F}} \colon \mathcal{G} \to \Omega_{\mathcal{G}/\mathcal{F}}$ со следующими свойствами: если M — $\mathcal{G}$-модуль и $\delta' \colon \mathcal{G} \to M$ — $\mathcal{F}$-дифференцирование, то существует единственный гомоморфизм $\mathcal{G}$-модулей $\phi \colon \Omega_{\mathcal{G}/\mathcal{F}} \to M$, такой что $\phi \circ \delta = \delta'$. Модуль $\Omega_{\mathcal{G}/\mathcal{F}}$ является дифференциальным, если положить $d_i(\delta \xi_j) = \delta(d_i \xi_j)$, и как $\mathcal{G}[\Delta]$-модуль порождён элементами $\delta(\xi_1), \ldots, \delta(\xi_n)$. Более того, он является дифференциальным $\mathcal{G}$-фактор-модулем дифференциального $\mathcal{G}$-модуля $\mathcal{G} \otimes_R \Omega_{R/\mathcal{F}}$, причём для всех $f \in \mathfrak{p}$ элемент $1 \otimes \delta f$ принадлежит ядру этого представления, т. е. $\delta f|_{y_j = \xi_j} = 0$ в $\Omega_{\mathcal{G}/\mathcal{F}}$ (см. [6]).

Обозначим через $\Omega_s = D_s \sum\limits_{i=1}^{n} \delta(\xi_i)$ конечномерное $\mathcal{G}$-векторное пространство. Мы имеем отличную фильтрацию на модуле $\Omega_{\mathcal{G}/\mathcal{F}}$, т. е. $\Omega_{\mathcal{G}/\mathcal{F}} = \bigcup\limits_{s \in \mathbb{N}} \Omega_s$, $D_r \Omega_s \subset \Omega_{s+r}$ для всех $r, s \in \mathbb{N}$ и существует такой индекс $r \in \mathbb{Z}$, что $\Omega_s = D_{s-r} \Omega_r$ для всех $s \geqslant r$. Фильтрация Ω_s называется связанной с выбором системы образующих $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

Дж. Джонсону принадлежит следующая теорема.

Теорема 2 (см. [5]). *Для любой отличной фильтрации модуля дифференциалов $\Omega_{\mathcal{G}/\mathcal{F}}$ существует целозначный многочлен (многочлен Гильберта) $\chi_{\Omega_{\mathcal{G}/\mathcal{F}}}(t) \in \mathbb{Q}[t]$, такой что*

1) $\chi_{\Omega_{\mathcal{G}/\mathcal{F}}}(s) = \dim_{\mathcal{F}} \Omega_s$ *для всех достаточно больших* $s \in \mathbb{Z}$;
2) $\deg \chi_{\Omega_{\mathcal{G}/\mathcal{F}}} \leqslant m$ *и* $\chi_{\Omega_{\mathcal{G}/\mathcal{F}}}(t)$ *может быть записан в виде*

$$\chi_{\Omega_{\mathcal{G}/\mathcal{F}}}(t) = \sum_{i=0}^{m} a_i \binom{t+i}{i},$$

где $a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{Z}$;
3) *степень* $d = \deg \chi_{\Omega_{\mathcal{G}/\mathcal{F}}}$, *коэффициенты* a_m *и* a_d *многочлена* $\chi_{\Omega_{\mathcal{G}/\mathcal{F}}}(t)$ *не зависят от выбора отличной фильтрации. Коэффициент* a_m *является дифференциальной размерностью модуля дифференциалов* $\Omega_{\mathcal{G}/\mathcal{F}}$, *т. е. равен* $\mathrm{rk}_{\mathcal{G}[\Delta]} \Omega_{\mathcal{G}/\mathcal{F}}$;
4) *для фильтрации* Ω_s, *связанной с выбором системы образующих* $\xi_1, \ldots, \xi_n$, *многочлен Гильберта модуля дифференциалов совпадает с дифференциальным размерностным многочленом Колчина,* $\chi_{\Omega_{\mathcal{G}/\mathcal{F}}}(t) = \omega_{\mathfrak{p}/\mathcal{F}}(t)$.

Замечание 1. Пусть $\mathfrak{p}$ — простой Δ-идеал кольца R. Коэффициент a_m его дифференциального размерностного многочлена принято называть *дифференциальной размерностью* $\mathfrak{p}$. В обыкновенном случае для идеалов нулевой дифференциальной размерности дифференциальный размерностный многочлен является константой, и его называют *порядком* идеала $\mathfrak{p}$.

Определение 1. Предположим, что P является простым идеалом коммутативного кольца B и M — B-модуль. Множество $H \subseteq M$ называется *независимым* над P, если $\{h + PM \mid h \in H\}$ является системой элементов M/PM, линейно независимой над фактор-кольцом B/P.

Определение 2. Дифференциальные многочлены $f_1, \ldots, f_k \in R$ называются *независимыми* над простым дифференциальным идеалом $\mathfrak{p}$, если множество $\{\theta\delta f_j \mid 1 \leqslant j \leqslant k,\ \theta \in \Theta\}$ дифференциалов производных многочленов f_j является независимым над $\mathfrak{p}$ в модуле $\Omega_{R/\mathcal{F}}$.

В [7] Дж. Джонсон показал, что если имеются n независимых над простым дифференциальным идеалом $\mathfrak{p}$ дифференциальных многочленов $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{F}\{y_1, \ldots, y_n\}$ и $f_1, \ldots, f_n \in \mathfrak{p}$, то дифференциальная размерность идеала $\mathfrak{p}$ равна нулю, т. е. степень полинома Гильберта модуля дифференциалов удовлетворяет неравенству $\deg \chi_{\Omega_{\mathcal{G}/\mathcal{F}}} \leqslant m - 1$.

Приведём примеры систем дифференциальных уравнений, независимых (или, наоборот, не являющиеся такими) над простым дифференциальным идеалом.

Пример 1. Пусть многочлен f свободен от квадратов, т. е. из условия $f = p^2 q$ следует $p = \mathrm{const}$. Тогда f независим над главной компонентой любого своего неразложимого делителя (такая компонента всегда существует, см. [9, с. 155]). Однако если $f = g^2$, f не является независимой над любой своей компонентой.

Пример 2. Пусть $\mathfrak{p} = [f_1, \ldots, f_n]$ — простой идеал (например, все f_i линейные). Пусть дифференциальная размерность идеала $\mathfrak{p}$ равна 0. Тогда f_i независимы над $\mathfrak{p}$ (напомним, что число дифференциальных переменных равно n).

Пример 3. Пусть элементы $f_1, \ldots, f_k$ независимы над простым Δ-идеалом $\mathfrak{p}$ и $g_1, \ldots, g_k$ — такие элементы, что $g_i \notin \mathfrak{p}$, $i = 1, \ldots, k$. Тогда элемента $f_1 g_1, \ldots, f_k g_k$ независимы над $\mathfrak{p}$.

4. Граница Якоби

Начало современной дифференциальной алгебре положил Дж. Ритт. Он проявил интерес к работам К. Якоби и сформулировал проблему оценки количества произвольных констант в общем решении системы обыкновенных дифференциальных уравнений в алгебраических терминах. Пусть имеется система полиномиальных дифференциальных уравнений, т. е. множество $\{f_1, \ldots, f_n\} \subset \mathcal{F}\{y_1, \ldots, y_n\}$. По теореме, аналогичной теореме Гильберта о нулях, решениям этой системы соответствует радикальный дифференциальный идеал $I = \{f_1, \ldots, f_n\}$ в кольце дифференциальных многочленов $\mathcal{F}\{y_1, \ldots, y_n\}$, и пусть $\mathfrak{p}$ — какая-либо компонента идеала I, т. е. минимальный простой дифференциальный идеал, содержащий все f_i, $i = 1, \ldots, n$.

Гипотеза 1 (сильная гипотеза Якоби). Пусть дифференциальная размерность $\mathfrak{p}$ равна 0. Верно ли, что порядок идеала $\mathfrak{p}$ не превосходит числа Якоби $h(f_1, \ldots, f_n)$?

В настоящее время справедливость гипотезы установлена только в некоторых частных случаях. Аналогично обстоит дело с более мягкой оценкой (слабая гипотеза Якоби).

Гипотеза 2 (слабая гипотеза Якоби). Верно ли при описанных выше предположениях, что выполняется неравенство $\operatorname{ord}\mathfrak{p} \leqslant \bar{h}(f_1, \ldots, f_n)$?

Ритт доказал сильную гипотезу Якоби для случая $n \leqslant 2$ и для линейных систем (см. [13]). В [12] доказана слабая оценка Якоби для систем дифференциальных уравнений первого порядка ($e_{ij} \leqslant 1$). В [1] доказана сильная граница Якоби для независимых систем.

Колчин (см. [8, 9]) неоднократно ссылался на гипотезу Якоби как на одну из сложнейших нерешённых задач дифференциальной алгебры. Он формулировал её для случая уравнений в частных производных: верно ли, что для всякой компоненты $\mathfrak{p}$ нулевой дифференциальной размерности выполняется условие $a_{m-1}(\omega_{\mathfrak{p}/\mathcal{F}}) \leqslant h(f_1, \ldots, f_n)$ (соответственно $a_{m-1}(\omega_{\mathfrak{p}/\mathcal{F}}) \leqslant \bar{h}(f_1, \ldots, f_n)$)? Томасович [15] доказал справедливость сильной гипотезы Якоби для линейных систем и $n \leqslant 2$ без условия равенства числа уравнений числу неизвестных для систем алгебраических дифференциальных уравнений в частных производных.

Одна из трудностей в оценке заключается в том, чтобы доказать конечность числа Якоби. Ведь если $h(f_1, \ldots, f_n) = -\infty$, то согласно гипотезе система не должна иметь компонент нулевой дифференциальной размерности.

Замечание 2. Как показал Кон (см. [3]), из справедливости слабой гипотезы Якоби должна следовать справедливость следующей гипотезы о размерности.

Пусть Σ является подмножеством $\mathcal{F}\{y_1, \ldots, y_n\}$ и $1 \notin \{\Sigma\}$. Тогда каждая компонента идеала $\{\Sigma\}$ имеет дифференциальную размерность не меньше чем $n - \operatorname{Card}\Sigma$. В частности, если количество уравнений системы меньше количества дифференциальных неизвестных, у этой системы нет компоненты нулевой дифференциальной размерности.

До сих пор неизвестно, верно ли обратное, т. е. будет ли следовать справедливость оценки Якоби (слабой или сильной) из справедливости гипотезы о размерности.

5. Основной результат

Лемма 3. *Пусть модуль M порождён как дифференциальный $\mathcal{G}$-модуль элементами $1 \otimes \delta f_i \in \mathcal{G} \otimes_R \Omega_{R/\mathcal{F}}$, где f_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, независимы над простым идеалом $\mathfrak{p}$, определяющим поле $\mathcal{G}$. Пусть $H_1, \ldots, H_n$ — система образующих модуля M. Предположим, что в разложении элементов $H_i, \ldots, H_n$ по базису $1 \otimes \delta y_j$*

с коэффициентами из кольца дифференциальных операторов $\mathcal{G}[\Delta]$ *отсутствуют элементы* $\delta y_1, \ldots, \delta y_{i-1}$. *Тогда хотя бы один из элементов* $H_i, \ldots, H_n$ *содержит* $1 \otimes \delta y_i$.

Доказательство. Утверждение следует из свойств кольца дифференциальных операторов $\mathcal{G}[d_1, \ldots, d_m]$. А именно, пусть выполняется условие леммы, тогда из независимости следует, что ранг подмодуля, порождённого элементами $H_i, \ldots, H_n$, равен $n - i + 1$, а если бы этот подмодуль содержался в подмодуле, натянутом на $\delta y_{i+1}, \ldots, \delta y_n$, то его ранг был бы не больше $n - i$. □

Теорема 3 (оценка Якоби для независимых уравнений в частных производных, см. [11]). *Пусть* $\mathfrak{p}$ *— простой дифференциальный идеал, содержащий многочлены* $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{F}\{y_1, \ldots, y_n\}$. *Если многочлены* $f_1, \ldots, f_n$ *независимы над* $\mathfrak{p}$, *то дифференциальный размерностный многочлен* $\omega_{\mathfrak{p}}$ *имеет степень* $m - 1$ *и для его старшего коэффициента справедливо неравенство* $a_{m-1}(\mathfrak{p}) \leqslant \leqslant h(f_1, \ldots, f_n)$.

Доказательство. Утверждение о степени многочлена следует из [7].

По теореме 2 $\omega_{\mathfrak{p}/\mathcal{F}} = \chi_{\Omega_{\mathcal{G}/\mathcal{F}}}$, где $\Omega_{\mathcal{G}/\mathcal{F}}$ представлен как D-фактор-модуль свободного модуля F с n образующими $\delta y_1, \ldots, \delta y_n$ по подмодулю, порождённому δf, $f \in \mathfrak{p}$ (D — кольцо Δ-операторов над полем $\mathcal{G}$). Обозначим через H подмодуль F, порождённый элементами $\delta f_1, \ldots, \delta f_n$. Ясно, что $\chi_{\Omega_{\mathcal{G}/\mathcal{F}}} \leqslant \chi_{F/H}$. Введём на F/H отличную фильтрацию, которая не связана с выбором образующих $\delta y_1, \ldots, \delta y_n$. Рассмотрим матрицу $E(\Sigma)$ порядков элементов из Σ, $\Sigma = \{f_1, \ldots, f_n\}$. По леммам 3 и 1 имеем $h\big(E(\Sigma)\big) \neq -\infty$. Меняя порядок переменных $y_1, \ldots, y_n$ и многочленов $f_1, \ldots, f_n$, мы можем найти (по следствию 1) такие целые числа $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{N}$, что $(n \times n)$-матрица $E(\Sigma) = (e_{ij})$ будет удовлетворять условию $e_{ii} + c_i \geqslant e_{ij} + c_j$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$. Пусть $b_i = e_{ii} + c_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ и

$$F_s = D_{s-c_1}\delta y_1 + \ldots + D_{s-c_n}\delta y_n.$$

Ясно, что $F = \bigcup\limits_s F_s$ — отличная фильтрация на F, характеристическим многочленом которой является

$$\chi_F^1(s) = \binom{s + m - c_1}{m} + \ldots + \binom{s + m - c_n}{m}.$$

На H имеется индуцированная фильтрация H_s. Рассмотрим на H следующую фильтрацию:

$$\tilde{H}_s = D_{s-b_1}\delta f_1 + \ldots + D_{s-b_n}\delta f_n.$$

Заметим, что из независимости $f_1, \ldots, f_n$ над $\mathfrak{p}$ следует, что H — свободный подмодуль модуля F с образующими $\delta f_1, \ldots, \delta f_n$ и

$$\dim_{\mathcal{F}} \tilde{H}_s = \binom{s + m - b_1}{m} + \ldots + \binom{s + m - b_n}{m}$$

для всех достаточно больших s. Докажем, что $\tilde{H}_s \subseteq H_s$. В самом деле, если $f \in \tilde{H}_s$, то

$$f = \lambda_1 \delta f_1 + \ldots + \lambda_n \delta f_n,$$

где $\lambda_i \in D$, $\operatorname{ord} \lambda_i \leqslant s - b_i$. Значит,

$$f = \alpha_1 \delta y_1 + \ldots + \alpha_n \delta y_n,$$

где $\alpha_j = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \gamma_{ij}$, $\operatorname{ord} \gamma_{ij} = e_{ij}$. Следовательно,

$$\operatorname{ord} \alpha_j \leqslant \max(\operatorname{ord} \lambda_i + e_{ij}) \leqslant s - b_i + e_{ij} = s - e_{ii} - c_i + e_{ij} \leqslant s - e_{ij} - c_j + e_{ij} = s - c_j$$

и $f \in H_s$. Фильтрация $\tilde{H}_s$ является отличной и, поскольку $\tilde{H}_s \subset H_s$, $\dim_{\mathcal{F}} \tilde{H}_s \leqslant \chi^1_H(s)$ для всех достаточно больших s. По теореме 2 мы имеем

$$\begin{aligned} a_{m-1}(\omega_{\mathfrak{p}/\mathcal{F}}) &\leqslant a_{m-1}\big(\chi_{F/H}(t)\big) = a_{m-1}\big(\chi^1_{F/H}(t)\big) = a_{m-1}\big(\chi^1_F(t) - \chi^1_H(t)\big) \leqslant \\ &\leqslant a_{m-1}\left(\binom{t+m-c_1}{m} + \ldots + \binom{t+m-c_n}{m} - \right. \\ &\left. - \binom{t+m-b_1}{m} - \ldots - \binom{t+m-b_n}{m}\right) = \\ &= (b_1 - c_1) + \ldots + (b_n - c_n) = e_{11} + \ldots + e_{nn} \leqslant h(E). \qquad \square \end{aligned}$$

Литература

[1] Кондратьева М. В., Михалёв А. В., Панкратьев Е. В. О границе Якоби для систем дифференциальных уравнений // Алгебра. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982. — С. 79—85.

[2] Минк Х. Перманенты. — М.: Мир, 1982.

[3] Cohn R. M. Order and dimension // Proc. Amer. Math. Soc. — 1983. — Vol. 87, no. 1. — P. 1—6.

[4] Jacobi C. G. J. De investigando ordine systematis aequationum differentialum vulgarium cujuscunque // J. Reine Angew. Math. — 1865. — B. 64, No. 4. — S. 297—320; также Jacobi C. G. J. Gesammelte Werke. Vol. 5. — Berlin: Georg Reimer, 1890. — S. 191—216.

[5] Johnson J. Differential dimension polynomials and a fundamental theorem on differential modules // Amer. J. Math. — 1969. — Vol. 91. — P. 239—248.

[6] Johnson J. Kähler differentials and differential algebra // Ann. Math. — 1969. — Vol. 89. — P. 92—98.

[7] Johnson J. Systems of n partial differential equations in n unknown functions, conjecture of M. Janet // Trans. Amer. Math. Soc. — 1978. — Vol. 212. — P. 229—334.

[8] Kolchin E. R. Some problems in differential algebra // Труды международного конгресса математиков. — М.: Мир, 1966. — С. 269—276.

[9] Kolchin E. R. Differential algebra and algebraic groups. — London: Academic Press, 1973.

[10] Kondratieva M. V., Levin A. B., Mikhalev A. V., Pankratiev E. V. Differential and difference dimension polynomials. — Kluwer Academic, 1999.

[11] Kondratieva M. V., Mikhalev A. V., Pankratiev E. V. Jacobi's bound for independent systems of algebraic partial differential equations // Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput. — 2009.

[12] Lando B. Jacobi's bound for the order of systems of first order differential equations // Trans. Amer. Math. Soc. — 1970. — Vol. 152, no. 1. — P. 119—135.

[13] Ritt J. F. Jacobi's problem on the order of systems of differential equations // Ann. Math. — 1935. — Vol. 36. — P. 303—312.

[14] Ritt J. F. Differential Algebra. — New York: Amer. Math. Soc., 1950. — (Coll. Publ.; Vol. 33).

[15] Tomasovic T. S. A generalized Jacobi conjecture for arbitrary systems of algebraic differential equations: Ph.D. Thesis. — Columbia University, 1976.