Размерностные многочлены промежуточных дифференциальных полей и жёсткость системы дифференциальных уравнений с действием группы

А. Б. ЛЕВИН
Американский католический университет,
Вашингтон, США
e-mail: Levin@cua.edu

УДК 512.628

Ключевые слова: дифференциальное поле, дифференциальный модуль, дифференциальный размерностный многочлен, жёсткость системы дифференциальных уравнений, модуль кэлеровых дифференциалов.

Аннотация

Пусть K — дифференциальное поле характеристики нуль с множеством дифференцирований $\Delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$, и пусть Θ обозначает свободную коммутативную полугруппу элементов вида $\theta = \delta_1^{k_1} \ldots \delta_m^{k_m}$, где $k_i \in \mathbb{N}$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$. Назовём порядком каждого такого элемента число $\operatorname{ord}\theta = \sum\limits_{i=1}^{m} k_i$ и для любого $r \in \mathbb{N}$ положим $\Theta(r) = \{\theta \in \Theta \mid \operatorname{ord}\theta \leqslant r\}$. Пусть $L = K\langle \eta_1, \ldots, \eta_s \rangle$ — дифференциальное расширение поля K, порождённое конечным множеством $\eta = \{\eta_1, \ldots, \eta_s\}$, и пусть F — промежуточное дифференциальное поле расширения L/K. Для любого $r \in \mathbb{N}$ пусть $L_r = K\Bigl(\bigcup\limits_{i=1}^{s} \Theta(r)\eta_i\Bigr)$ и $F_r = L_r \cap F$.

Мы докажем существование и опишем некоторые свойства многочлена $\varphi_{K,F,\eta}(t) \in \mathbb{Q}[t]$, такого что $\varphi_{K,F,\eta}(r) = \operatorname{trdeg}_K F_r$ для всех достаточно больших $r \in \mathbb{N}$. Этот результат влечёт существование размерностного многочлена, описывающего жёсткость (в смысле А. Эйнштейна) системы дифференциальных уравнений с действием группы. Мы представляем также более общий результат, теорему о дифференциальном размерностном многочлене от многих неизвестных, ассоциированном с промежуточным полем F и разбиением множества дифференцирований Δ.

Abstract

A. B. Levin, Dimension polynomials of intermediate differential fields and the strength of a system of differential equations with group action, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 4, pp. 167—180.

Let K be a differential field of zero characteristic with a basic set of derivations $\Delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$ and let Θ denote the free commutative semigroup of all elements of the form $\theta = \delta_1^{k_1} \ldots \delta_m^{k_m}$ where $k_i \in \mathbb{N}$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$. Let the order of such an element be defined as $\operatorname{ord}\theta = \sum\limits_{i=1}^{m} k_i$, and for any $r \in \mathbb{N}$, let $\Theta(r) = \{\theta \in \Theta \mid \operatorname{ord}\theta \leqslant r\}$. Let $L = K\langle \eta_1, \ldots, \eta_s \rangle$ be a differential field extension of K generated by a finite set $\eta = \{\eta_1, \ldots, \eta_s\}$ and let F be an intermediate differential field of the extension L/K.

Фундаментальная и прикладная математика, 2008, том 14, № 4, с. 167—180.

Furthermore, for any $r \in \mathbb{N}$, let $L_r = K\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{s} \Theta(r)\eta_i\Big)$ and $F_r = L_r \cap F$. We prove the existence and describe some properties of a polynomial $\varphi_{K,F,\eta}(t) \in \mathbb{Q}[t]$ such that $\varphi_{K,F,\eta}(r) = \operatorname{trdeg}_K F_r$ for all sufficiently large $r \in \mathbb{N}$. This result implies the existence of a dimension polynomial that describes the strength of a system of differential equations with group action in the sense of A. Einstein. We shall also present a more general result, a theorem on a multivariate dimension polynomial associated with an intermediate differential field F and partitions of the basic set Δ.

1. Введение

Эта статья посвящается памяти Евгения Васильевича Панкратьева, который внёс неоценимый вклад в теорию базисов Грёбнера над кольцами обобщённых полиномов, теорию дифференциальных и разностных размерностных многочленов и во многие другие ветви дифференциальной и разностной алгебры. Ему принадлежат также превосходные обзоры этих теорий, представленные в его книгах [4, 6, 10] и статьях [2, 3, 5, 13, 14]. В 1980 г. Е. В. Панкратьев открыл поразительную взаимосвязь между размерностными многочленами Е. Колчина и введённым А. Эйнштейном понятием жёсткости системы алгебраических дифференциальных уравнений (см. [2]). Е. В. Панкратьев показал, что жёсткость такой системы в смысле А. Эйнштейна может быть выражена определённым дифференциальным размерностным многочленом, ассоциированным с этой системой. Далее мы подробно опишем эту связь и докажем существование размерностного многочлена, выражающего жёсткость системы дифференциальных уравнений с заданным действием группы.

Всюду далее $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Q}$ обозначают соответственно множества целых, неотрицательных целых и рациональных чисел. Под кольцом мы понимаем ассоциативное кольцо с единицей. Каждый гомоморфизм колец единицу переводит в единицу, каждое подкольцо кольца содержит его единицу. Если иного не оговорено, под модулем над кольцом A понимается левый A-модуль. Каждый модуль над кольцом унитарен, и каждая алгебра над коммутативным кольцом также унитарна.

2. Основные факты и определения

Под *дифференциальным кольцом* будем понимать коммутативное кольцо R, на котором определены попарно коммутирующие дифференцирования из конечного множества Δ. Это множество Δ будем называть базисным для дифференциального кольца R, а кольцо R будем также называть Δ-кольцом. (В дальнейшем мы часто будем заменять прилагательное «дифференциальный» префиксом «Δ-».) Подкольцо (или идеал) R_0 Δ-кольца R будем называть дифференциальным подкольцом или Δ-подкольцом кольца R (соответственно дифференциальным идеалом или Δ-идеалом R), если R_0 замкнуто относительно действия любого оператора $\delta \in \Delta$. Если дифференциальное кольцо (Δ-кольцо) является полем, оно называется дифференциальным полем или Δ-полем.

Если R — дифференциальное кольцо с базисным множеством $\Delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$, то Θ_Δ (или Θ, если базисное множество Δ фиксировано) будет обозначать свободную коммутативную полугруппу с единицей, порождённую элементами $\delta_1, \ldots, \delta_m$. Элементы Θ будем записывать в мультипликативной форме $\delta_1^{k_1} \ldots \delta_m^{k_m}$ ($k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N}$) и интерпретировать как отображения кольца R в себя.

Пусть R — дифференциальное кольцо с базисным множеством Δ и $S \subseteq R$. Пересечение всех Δ-идеалов кольца R, содержащих множество S, будем обозначать $[S]$. Очевидно, $[S]$ является наименьшим Δ-идеалом кольца R, содержащим S; как идеал он порождён множеством $\Theta S = \{\theta(a) \mid \theta \in \Theta,\ a \in S\}$. Если $J = [S]$, будем говорить, что Δ-идеал J порождён множеством S, которое будем называть *множеством дифференциальных образующих или Δ-образующих J*. Если S конечно, $S = \{a_1, \ldots, a_k\}$, будем писать $J = [a_1, \ldots, a_k]$ и говорить, что J — конечно порождённый Δ-идеал R. (В этом случае элементы $a_1, \ldots, a_k$ будем называть Δ-образующими J.)

Пусть R — дифференциальное кольцо с базисным множеством Δ, R_0 — Δ-подкольцо R и $B \subseteq R$. Пересечение всех Δ-подколец R, содержащих R_0 и B, будем называть *Δ-подкольцом R, порождённым над R_0* множеством B, будем обозначать его $R_0\{B\}$. (Как кольцо $R_0\{B\}$ совпадает с кольцом $R_0[\{\theta(b) \mid b \in B,\ \theta \in \Theta\}]$, полученным присоединением множества $\{\theta(b) \mid b \in B,\ \theta \in \Theta\}$ к кольцу R_0.) Множество B будем называть множеством *Δ-образующих* Δ-кольца $R_0\{B\}$ над R_0. Если это множество конечно, $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$, будем говорить, что $R' = R_0\{B\}$ является конечно порождённым дифференциальным расширением (или Δ-расширением) кольца (или надкольцом) R_0, и писать $R' = R_0\{b_1, \ldots, b_k\}$.

Если R — Δ-поле, R_0 — Δ-подполе R и $B \subseteq R$, то пересечение всех Δ-подполей R, содержащих R_0 и B, будем обозначать через $R_0\langle B\rangle$ (или $R_0\langle b_1, \ldots, b_k\rangle$, если $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$ является конечным множеством). Оно является наименьшим Δ-подполем R, содержащим R_0 и B; это Δ-подполе совпадает с полем $R_0(\{\theta(b) \mid b \in B,\ \theta \in \Theta\})$. Множество B будем называть множеством *Δ-образующих* Δ-поля $R_0\langle B\rangle$ над R_0.

Пусть R и S — два дифференциальных кольца с одним базисным множеством дифференцирований $\Delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$, причём элементы Δ действуют на каждом кольце как попарно коммутирующие дифференцирования. (Более строго, мы предполагаем, что существуют инъективные отображения множества Δ в оба базисных множества колец R и S. Для удобства мы будем обозначать образы элементов Δ при этом отображении теми же символами $\delta_1, \ldots, \delta_m$.) Гомоморфизм колец $\varphi\colon R \to S$ будем называть *дифференциальным гомоморфизмом* или *Δ-гомоморфизмом*, если $\varphi(\delta a) = \delta\varphi(a)$ для всех $\delta \in \Delta$, $a \in R$. Понятия *Δ-эпиморфизма, Δ-мономорфизма, Δ-автоморфизма* и т. д. определяются естественным образом (как соответствующие кольцевые гомоморфизмы, которые являются Δ-гомоморфизмами).

Пусть K — дифференциальное поле характеристики нуль с базисным множеством $\Delta = \{\delta_1, \dots, \delta_m\}$, и пусть Θ — свободная коммутативная полугруппа всех элементов вида $\theta = \delta_1^{k_1} \dots \delta_m^{k_m}$ ($k_i \in \mathbb{N}$ для $i = 1, \dots, m$). Мы определим порядок элемента θ как $\operatorname{ord}\theta = \sum\limits_{i=1}^{m} k_i$ и положим $\Theta(r) = \{\theta \in \Theta \mid \operatorname{ord}\theta \leqslant r\}$ для каждого $r \in \mathbb{N}$.

Пусть $L = K\langle\eta_1, \dots, \eta_s\rangle$ — дифференциальное расширение поля K, порождённое конечным множеством $\eta = \{\eta_1, \dots, \eta_s\}$. Следующее утверждение — классическая теорема Колчина о дифференциальном размерностном многочлене, впервые появившаяся в [9].

Теорема 2.1. *В сделанных выше предположениях существует многочлен* $\omega_{\eta|K}(t) \in \mathbb{Q}[t]$, *такой что*

1) $\omega_{\eta|K}(r) = \operatorname{trdeg}_K K(\{\theta\eta_j \mid \theta \in \Theta(r),\ 1 \leqslant j \leqslant n\})$ *для всех достаточно больших* $r \in \mathbb{Z}$;
2) $\deg \omega_{\eta|K} \leqslant m$ *и* $\omega_{\eta|K}(t)$ *может быть записан в виде* $\omega_{\eta|K}(t) = \sum\limits_{i=0}^{m} a_i \binom{t+i}{i}$, *где* $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{Z}$;
3) $d = \deg \omega_{\eta|K}$, a_m *и* a_d *не зависят от выбора системы* Δ*-образующих* η *расширения* L/K *(очевидно, что* $a_d \neq a_m$ *в том и только том случае, когда* $d < m$, *т. е.* $a_m = 0$*). Более того,* a_m *равно дифференциальной степени трансцендентности* L *над* K *(обозначаемой как* $\Delta\text{-}\operatorname{trdeg}_K L$*), т. е. максимальному числу таких элементов* $\xi_1, \dots, \xi_k \in L$, *что множество* $\{\theta\xi_i \mid \theta \in \Theta,\ 1 \leqslant i \leqslant k\}$ *является алгебраически независимым над* K.

Многочлен $\omega_{\eta|K}(t)$ называется *дифференциальным размерностным многочленом* Δ-расширения поля L/K, ассоциированным с множеством Δ-образующих $\eta = \{\eta_1, \dots, \eta_s\}$. Методы и примеры вычисления дифференциальных размерностных многочленов можно найти в [1; 2; 4; 6; 10, гл. 5 и 9; 12].

Пусть $Y = \{y_1, \dots, y_s\}$ — набор символов. Рассмотрим кольцо многочленов $R = K[\{\theta y_j \mid \theta \in \Theta,\ 1 \leqslant j \leqslant s\}]$ от счётного числа переменных θy_j. Это кольцо является дифференциальным расширением K, если положить $\delta(\theta y_j) = (\delta\theta)y_j$. Кольцо R называется *кольцом дифференциальных многочленов* над K; оно обозначается как $K\{y_1, \dots, y_s\}$.

Систему алгебраических дифференциальных уравнений над K определим как систему уравнений вида

$$f_i(y_1, \dots, y_s) = 0 \quad (i \in I),$$

где $\{f_i\}_{i \in I} \subseteq R$; под решением системы будем понимать s-вектор $(a_1, \dots, a_s)$ с координатами из некоторого дифференциального расширения поля K, который аннулирует все f_i. Другими словами, $f_i(y_1, \dots, y_s)$ становится нулём, если заменить каждое значение θy_j в f_i на θa_j ($\theta \in \Theta$, $1 \leqslant j \leqslant s$).

Пусть $\mathcal{P}$ — дифференциальный идеал, порождённый множеством $\{f_i \mid i \in I\}$ в R. Если этот идеал является простым, можно рассмотреть соответствующее поле частных $Q(R/\mathcal{P}) = K\langle\eta_1, \dots, \eta_s\rangle$, где η_j является образом y_j в $R/\mathcal{P}$ ($1 \leqslant j \leqslant s$). Соответствующий многочлен $\omega_{\eta|K}(t)$, существование которого установлено в теореме 2.1, называется *дифференциальным размерностным многочленом* данной системы дифференциальных уравнений.

Понятие дифференциального размерностного многочлена, как было показано в [2], может рассматриваться как алгебраическая версия введённого А. Эйнштейном понятия жёсткости системы дифференциальных уравнений в частных производных, описывающей физическое поле. В [7] А. Эйнштейн определяет жёсткость следующим образом: «... систему уравнений следует выбрать так, чтобы полевые величины определялись этой системой как можно более жёстким образом. Чтобы применять этот принцип, нам нужен механизм, который позволял бы дать меру жёсткости системы уравнений. Поступим следующим образом: разложим переменные вблизи точки P в ряд Тейлора (предполагается аналитический характер поля). Коэффициенты разложения, которые представляют собой не что иное, как производные элементов поля в точке P, распадаются на группы соответственно порядку дифференцирования. В каждом порядке дифференцирования мы на первых порах получаем набор коэффициентов, которые можно было бы выбрать произвольно, если бы поле не должно было удовлетворять системе уравнений. Благодаря наличию системы дифференциальных уравнений (и уравнений, полученных из них путём дифференцирования по координатам) число независимых коэффициентов уменьшается, так что в каждой группе уже меньшее число коэффициентов может быть выбрано произвольно. Количество «свободных» коэффициентов в каждой группе непосредственно даёт меру «слабости» системы уравнений и, таким образом, определяет и «жёсткость» системы».

В следующем разделе мы докажем существование многочлена, который описывает более общее понятие, рассматриваемое А. Эйнштейном: жёсткость системы дифференциальных уравнений, решения которой должны быть инвариантны относительно действия некоторой группы G.

3. Размерностный многочлен промежуточного дифференциального поля

Следующий результат, который является существенным обобщением теоремы 2.1, устанавливает существование размерностного многочлена, ассоциированного с подрасширением конечно порождённого расширения дифференциального поля.

Теорема 3.1. *Пусть K — дифференциальное поле характеристики нуль с базисным множеством дифференцирований $\Delta = \{\delta_1, \dots, \delta_m\}$, и пусть $L = K\langle \eta_1, \dots, \eta_s \rangle$ — дифференциальное расширение поля K, порождённое конечным множеством $\eta = \{\eta_1, \dots, \eta_s\}$. Пусть F — промежуточное дифференциальное поле расширения L/K и для любого $r \in \mathbb{N}$ положим*

$$F_r = F \cap K(\{\theta\eta_j \mid \theta \in \Theta(r),\ 1 \leqslant j \leqslant s\}).$$

Тогда существует многочлен $\varphi_{K,F,\eta}(t) \in \mathbb{Q}[t]$, *такой что*

1) $\varphi_{K,F,\eta}(r) = \operatorname{trdeg}_K F_r$ *для всех достаточно больших* $r \in \mathbb{Z}$;
2) $\deg \varphi_{K,F,\eta} \leqslant m$ *и* $\varphi_{K,F,\eta}(t)$ *может быть записан как* $\varphi_{K,F,\eta}(t) = \sum\limits_{i=0}^{m} b_i \binom{t+i}{i}$, *где* $b_0, \ldots, b_m \in \mathbb{Z}$;
3) $d = \deg \varphi_{K,F,\eta}(t)$, b_m *и* b_d *не зависят от множества дифференциальных образующих* η *расширения* L/K. *Более того,* $b_m = \Delta\text{-}\operatorname{trdeg}_K F$.

Доказательство этой теоремы основано на некоторых свойствах дифференциальных модулей, которые будут изложены ниже.

Как и прежде, пусть K — дифференциальное поле с тем же базисным множеством дифференцирований $\Delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$, и пусть Θ — свободная коммутативная группа, определённая ранее. Пусть $\mathcal{D}$ обозначает множество всех конечных сумм вида $\sum\limits_{\theta \in \Theta} a_\theta \theta$, где $a_\theta \in K$ (такая сумма называется *дифференциальным оператором* или Δ*-оператором* над K; два Δ-оператора равны тогда и только тогда, когда их соответствующие коэффициенты совпадают).

Множество $\mathcal{D}$ может рассматриваться как кольцо относительно его естественной структуры левого K-модуля и соотношений $\delta a = a\delta + \delta(a)$ ($\delta \in \Delta$, $a \in K$), распространяемых по дистрибутивности. Это кольцо называется *кольцом дифференциальных операторов* или *кольцом* Δ*-операторов* над K.

Под дифференциальным модулем над K (также называемым Δ-K-модулем) будем понимать левый $\mathcal{D}$-модуль M, т. е. векторное K-пространство, на котором элементы Δ действуют как аддитивные попарно коммутирующие операторы так, что $\delta(ax) = a\delta(x) + \delta(a)x$ для всех $\delta \in \Delta$, $x \in M$, $a \in K$.

Будем говорить, что M является конечно порождённым Δ-K-модулем, если M конечно порождён как левый $\mathcal{D}$-модуль.

Под фильтрацией Δ-K-модуля M мы понимаем исчерпывающую отделимую фильтрацию M как $\mathcal{D}$-модуля, т. е. возрастающую цепочку $(M_r)_{r \in \mathbb{Z}}$ векторных K-подпространств M, таких что $\mathcal{D}_r M_s \subseteq M_{r+s}$ для всех $r, s \in \mathbb{Z}$, $M_r = 0$ для всех достаточно малых $r \in \mathbb{Z}$ и $\bigcup\limits_{r \in \mathbb{Z}} M_r = M$. Такая фильтрация называется *отличной*, если каждый M_r ($r \in \mathbb{Z}$) конечно порождён над K и существует такое $r_0 \in \mathbb{Z}$, что $M_r = \mathcal{D}_{r-r_0} M_{r_0}$ для любого $r \geqslant r_0$.

Доказательство двух следующих результатов можно найти в [10, гл. 5].

Теорема 3.2 [10, теорема 5.1.11]. *В сделанных выше предположениях пусть* M *является* Δ-K*-модулем, снабжённым отличной фильтрацией* $(M_r)_{r \in \mathbb{Z}}$. *Тогда существует многочлен* $\psi(t) \in \mathbb{Q}[t]$, *такой что*

1) $\psi(r) = \dim_K M_r$ *для всех достаточно больших* $r \in \mathbb{Z}$;
2) $\deg \psi \leqslant m$ *и* $\psi(t)$ *может быть записан в виде* $\psi(t) = \sum\limits_{i=0}^{m} a_i \binom{t+i}{i}$, *где* $a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{Z}$;
3) *числа* $d = \deg \psi$, a_m *и* a_d *не зависят от выбора отличной фильтрации* M. *Более того, коэффициент* a_m *равен дифференциальной размерности модуля* M *над* K (*обозначаемой* $\Delta\text{-}\dim_K M$), *т. е. максимальному числу таких элементов* $x_1, \ldots, x_k \in M$, *что семейство* $\{\theta x_i \mid \theta \in \Theta,\ 1 \leqslant i \leqslant k\}$ *является линейно независимым над* K.

Теорема 3.3 [10, утверждение 5.1.15]. *Пусть $\mu\colon N \to M$ — инъективный гомоморфизм фильтрованных Δ-K-модулей M и N, снабжённых фильтрациями $(M_r)_{r\in\mathbb{Z}}$ и $(N_r)_{r\in\mathbb{Z}}$ соответственно (т. е. μ является гомоморфизмом $\mathcal{D}$-модулей и $\mu(N_r) \subseteq M_r$ для всех $r \in \mathbb{Z}$). Если фильтрация M отличная, то фильтрация модуля N также является отличной.*

Доказательство теоремы 3.1. Пусть $L = K\langle\eta_1, \ldots, \eta_s\rangle$, и пусть $\Omega_{L|K}$ — модуль кэлеровых дифференциалов. Тогда $\Omega_{L|K}$ может рассматриваться как Δ-L-модуль, на котором элементы из Δ действуют так, что $\delta(d\zeta) = d\delta(\zeta)$ для всех $\delta \in \Delta$, $\zeta \in L$ (подробнее см. [8]).

Пусть $M = \Omega_{L|K}$, и для всех $r \in \mathbb{N}$ пусть M_r обозначает векторное L-пространство, порождённое всеми элементами $d\zeta$, такими что $\zeta \in K\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{s} \Theta(r)\eta_i\Big)$. Легко проверить, что $(M_r)_{r\in\mathbb{Z}}$ ($M_r = 0$, если $r < 0$) является отличной фильтрацией Δ-L-модуля M.

Пусть F — некоторое промежуточное дифференциальное поле L/K, и для любого $r \in \mathbb{N}$ пусть

$$F_r = F \cap K(\{\theta\eta_j \mid \theta \in \Theta(r),\ 1 \leqslant j \leqslant s\}).$$

Пусть $\mathcal{D}_L$ обозначает кольцо Δ-операторов над L и N — $\mathcal{D}_L$-подмодуль M, порождённый всеми элементами вида $d\zeta$, где $\zeta \in F$. Для любого $r \in \mathbb{N}$ пусть N_r — векторное L-пространство, порождённое всеми элементами $d\zeta$, для которых $\zeta \in F_r$, и пусть $N_r = 0$, если $r < 0$. Тогда $(N_r)_{r\in\mathbb{Z}}$ является фильтрацией Δ-L-модуля N и вложение $N \to M$ становится гомоморфизмом фильтрованных Δ-L-модулей. Так как фильтрация $(M_r)_{r\in\mathbb{Z}}$ отличная, мы можем применить теорему 3.3 и получить, что фильтрация $(N_r)_{r\in\mathbb{Z}}$ также является отличной. Следовательно, существует такой полином $\varphi_{K,F,\eta}(t) \in \mathbb{Q}[t]$, что $\varphi_{K,F,\eta}(r) = \dim_K N_r$ для всех достаточно больших $r \in \mathbb{Z}$.

Так как семейство $(\zeta_i)_{i\in I}$ элементов F_r ($r \in \mathbb{Z}$) является алгебраически независимым над K в том и только том случае, когда семейство $(d\zeta_i)_{i\in I}$ является линейно независимым над L, $\dim_K N_r = \operatorname{trdeg}_K F_r$ для всех достаточно больших $r \in \mathbb{N}$. Применив теорему 3.2, мы получим результат теоремы 3.1. $\square$

Заметим, что если $F = L$, то теорема 3.1 представляет собой теорему Колчина 2.1. Далее, теорема 3.1 показывает, что жёсткость в смысле А. Эйнштейна системы алгебраических дифференциальных уравнений, решения которой должны быть инвариантны относительно действия некоторой группы G, коммутирующего с базисными дифференцированиями δ_i, выражается полиномиальной функцией. (Мы подразумеваем, что $\delta_i G = G\delta_i$ для $i = 1, \ldots, m$ и предполагаем, что $g(a) = a$ для всех $g \in G$, $a \in K$.) В этом случае жёсткость системы описывается размерностным многочленом вида $\varphi_{K,F,\eta}(t)$ (мы используем обозначения теоремы 3.1 и интерпретацию жёсткости, обсуждавшуюся перед теоремой 2.1), где F — неподвижное поле группы G (очевидно, это поле является дифференциальным).

Легко убедиться, что если группа G не коммутирует с элементами Δ, то неподвижное поле E этой группы не обязано быть дифференциальным подполем дифференциального поля L. В этом случае возможно, что не существует многочлена, значения которого для достаточно больших $r \in \mathbb{Z}$ совпадают с $\operatorname{trdeg}_K(E \cap K(\{\theta\eta_j \mid \theta \in \Theta(r),\ 1 \leqslant j \leqslant s\})$ (мы используем обозначения теоремы 3.1). В самом деле, пусть K — обыкновенное дифференциальное поле с одним базисным дифференцированием δ, $L = K\langle y\rangle$ — дифференциальное поле рациональных дробей от одной дифференциальной переменной y над K, и пусть $E = K(\delta^2 y, \ldots, \delta^{2k} y, \ldots)$. Тогда $\Theta = \{\delta^i \mid i \in \mathbb{N}\}$, $\Theta(r) = \{1, \delta, \ldots, \delta^r\}$ и $\operatorname{trdeg}_K(E \cap K(\{\theta y \mid \theta \in \Theta(r)\}) = [\frac{r}{2}]$, где $[\frac{r}{2}]$ — целая часть числа $\frac{r}{2}$, которая не является полиномом от r. В этом случае функция $\varphi(r) = \operatorname{trdeg}_K(E \cap K(\{\theta y \mid \theta \in \Theta(r)\})$ хотя бы близка к многочлену $\frac{1}{2}r$, но если мы рассмотрим промежуточное поле $K(\delta^2 y, \delta^4 y, \ldots, \delta^{2^k} y, \ldots)$, то соответствующая функция имеет вид $\varphi(r) = [\log_2 r]$, весьма далёкий от многочлена.

В то же время мы можем сформулировать следующее утверждение, которое является очевидным следствием теоремы 3.1.

Следствие 3.4. *Пусть K — дифференциальное поле нулевой характеристики с базисным множеством дифференцирований $\Delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_m\}$. Пусть $L = K\langle \eta_1, \ldots, \eta_s\rangle$ — дифференциальное расширение поля K, порождённое конечным множеством $\eta = \{\eta_1, \ldots, \eta_s\}$, F — промежуточное Δ-поле расширения L/K и E — конечное расширение поля F, содержащееся в L (E не обязательно является дифференциальным полем). Пусть $E_r = E \cap K(\{\theta\eta_j \mid \theta \in \Theta(r),\ 1 \leqslant j \leqslant s\})$ для каждого $r \in \mathbb{N}$. Тогда существует многочлен $\varphi_{K,E,\eta}(t) \in \mathbb{Q}[t]$, такой что*

1) *$\varphi_{K,E,\eta}(r) = \operatorname{trdeg}_K E_r$ для всех достаточно больших $r \in \mathbb{Z}$;*
2) *$\deg \varphi_{K,E,\eta} \leqslant m$ и $\varphi_{K,E,\eta}(t)$ может быть записан как $\varphi_{K,E,\eta}(t) = \sum\limits_{i=0}^{m} b_i \binom{t+i}{i}$, где $b_0, \ldots, b_m \in \mathbb{Z}$;*
3) *$d = \deg \varphi_{K,E,\eta}(t)$, b_m и b_d не зависят от множества дифференциальных образующих η расширения L/K. Более того, $b_m = \Delta\text{-}\operatorname{trdeg}_K F$.*

4. Дифференциальный размерностный многочлен от нескольких переменных, ассоциированный с промежуточным дифференциальным полем

Следующие рассуждения ведут к существенному обобщению теоремы 3.1. Рассматривая промежуточное дифференциальное поле F конечно порождённого расширения L/K, мы докажем существование размерностного многочлена от нескольких переменных, ассоциированного с расширением F/K и с разбиением базисного множества дифференцирований.

Пусть K — дифференциальное поле нулевой характеристики, и пусть базисное множество его дифференцирований Δ представлено в виде объединения p непересекающихся конечных множеств ($p \geqslant 1$): $\Delta = \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_p$, где

$\Delta_i = \{\delta_{i1}, \ldots, \delta_{im_i}\}$ ($m_i \in \mathbb{N}$ для $i = 1, \ldots, p$ и $m_1 + \ldots + m_p = m$, где $m = \operatorname{Card}\Delta$). Всюду далее мы будем предполагать, что такое разбиение базисного множества Δ зафиксировано.

Для любого

$$\theta = \delta_{11}^{k_{11}} \ldots \delta_{1m_1}^{k_{1m_1}} \delta_{21}^{k_{21}} \ldots \delta_{pm_p}^{k_{pm_p}} \in \Theta$$

мы определим порядок элемента θ относительно Δ_i следующим образом:

$$\operatorname{ord}_i \theta = \sum_{j=1}^{m_i} k_{ij}, \quad i = 1, \ldots, p.$$

Для любого $r_1, \ldots, r_p \in \mathbb{N}$ положим

$$\Theta(r_1, \ldots, r_p) = \{\theta \in \Theta \mid \operatorname{ord}_i \theta \leqslant r_i \text{ для } i = 1, \ldots, p\}.$$

Следующая теорема о дифференциальном размерностном полиноме от нескольких переменных доказана в [11].

Теорема 4.1. *Пусть K — дифференциальное поле, базисное множество дифференцирований которого Δ разбито на p различных конечных множеств ($p \geqslant 1$): $\Delta = \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_p$, где $\Delta_i = \{\delta_{i1}, \ldots, \delta_{im_i}\}$ ($i = 1, \ldots, p$). Пусть $L = K\langle \eta_1, \ldots, \eta_s\rangle$ — Δ-расширение поля K, порождённое конечным множеством $\eta = \{\eta_1, \ldots, \eta_s\}$. Тогда существует многочлен $\Phi_\eta(t_1, \ldots, t_p)$ от p переменных $t_1, \ldots, t_p$ с рациональными коэффициентами, такой что*

1) $\Phi_\eta(r_1, \ldots, r_p) = \operatorname{trdeg}_K K\Big(\bigcup_{j=1}^{s} \Theta(r_1, \ldots, r_p)\eta_j\Big)$ *для всех достаточно больших $(r_1, \ldots, r_p) \in \mathbb{N}^p$ (т. е. существуют такие $s_1, \ldots, s_p \in \mathbb{N}$, что последнее равенство выполняется для всех элементов $(r_1, \ldots, r_p) \in \mathbb{N}^p$ с $r_1 \geqslant s_1, \ldots, r_p \geqslant s_p$);*
2) $\deg_{t_i} \Phi_\eta \leqslant m_i$ ($1 \leqslant i \leqslant p$), *причём $\deg \Phi_\eta \leqslant m$ и многочлен $\Phi_\eta(t_1, \ldots, t_p)$ может быть представлен в виде*

$$\Phi_\eta(t_1, \ldots, t_p) = \sum_{i_1=0}^{m_1} \ldots \sum_{i_p=0}^{m_p} a_{i_1 \ldots i_p} \binom{t_1 + i_1}{i_1} \ldots \binom{t_p + i_p}{i_p},$$

где $a_{i_1 \ldots i_p} \in \mathbb{Z}$ для всех $i_1, \ldots, i_p$.

Многочлен $\Phi_\eta(t_1, \ldots, t_p)$ называется $(\Delta_1, \ldots, \Delta_p)$-*размерностным многочленом* расширения L/K, ассоциированным с множеством дифференциальных образующих η. (Мы также будем говорить, что Φ_η является дифференциальным размерностным многочленом расширения L/K, ассоциированным с заданным разбиением базисного множества Δ и множеством дифференциальных образующих η.)

Легко убедиться, что если мы рассмотрим конечно порождённое дифференциальное расширение поля, ассоциированное с системой алгебраических дифференциальных уравнений, то соответствующий $(\Delta_1, \ldots, \Delta_p)$-размерностный полином представляет «обобщённую» жёсткость системы алгебраических дифференциальных уравнений, которая определяется тем же способом, которым Эйнштейн определял понятие жёсткости, но с ограничениями на порядки частных производных относительно каждой группы базисных дифференцирований.

Следующая теорема 4.2 показывает, что если $p > 1$, то $(\Delta_1, \ldots, \Delta_p)$-размерностный полином содержит больше инвариантов расширения дифференциального поля, чем многочлен от одной переменной, описываемый в теореме Колчина.

Для любой перестановки $(j_1, \ldots, j_p)$ множества $\{1, \ldots, p\}$ определим лексикографический порядок $<_{j_1,\ldots,j_p}$ на $\mathbb{N}^p$ следующим образом: $(r_1, \ldots, r_p) <_{j_1,\ldots,j_p}$ $<_{j_1,\ldots,j_p} (s_1, \ldots, s_p)$ тогда и только тогда, когда $r_{j_1} < s_{j_1}$ или существует $k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant p-1$, такое что $r_{j_\nu} = s_{j_\nu}$ для $\nu = 1, \ldots, k$ и $r_{j_{k+1}} < s_{j_{k+1}}$.

Всюду далее, если $\Sigma \subseteq \mathbb{N}^p$, Σ' будет обозначать множество

$$\{e \in \Sigma \mid e \text{ — максимальный элемент множества } \Sigma$$
$$\text{относительно одного из } p! \text{ лексикографических порядков } <_{j_1,\ldots,j_p}\}.$$

Например, если

$$\Sigma = \{(3,0,2), (2,1,1), (0,1,4), (1,0,3), (1,1,6), (3,1,0), (1,2,0)\} \subseteq \mathbb{N}^3,$$

то

$$\Sigma' = \{(3,0,2), (3,1,0), (1,1,6), (1,2,0)\}.$$

Теорема 4.2 [11, теорема 4.8]. *Пусть K и L те же, что и в теореме 4.1, и пусть*

$$\Phi_\eta(t_1, \ldots, t_p) = \sum_{i_1=0}^{m_1} \ldots \sum_{i_p=0}^{m_p} a_{i_1 \ldots i_p} \binom{t_1 + i_1}{i_1} \ldots \binom{t_p + i_p}{i_p} \text{ —}$$

соответствующий размерностный многочлен. Пусть

$$E_\eta = \{(i_1, \ldots, i_p) \in \mathbb{N}^p \mid 0 \leqslant i_k \leqslant m_k \text{ для } k = 1, \ldots, p \text{ и } a_{i_1 \ldots i_p} \neq 0\}.$$

Тогда степень d полинома Φ_η, коэффициент $a_{m_1 \ldots m_p}$, элементы $(j_1, \ldots, j_p) \in E'_\eta$, соответствующие коэффициенты $a_{j_1 \ldots j_p}$ и коэффициенты при мономах полной степени d не зависят от выбора системы дифференциальных образующих η расширения L/K. Коэффициент $a_{m_1,\ldots,m_p}$ равен дифференциальной степени трансцендентности поля L над K.

Последняя часть статьи посвящена доказательству следующего утверждения о размерностном многочлене от нескольких переменных промежуточного дифференциального поля, которое обобщает теоремы 3.1 и 4.1.

Теорема 4.3. *В предположениях и обозначениях теоремы 4.1 пусть F — промежуточное дифференциальное поле расширения $L = K\langle \eta_1, \ldots, \eta_s \rangle$ и $F_{r_1,\ldots,r_p} = F \cap K\Big(\bigcup_{i=1}^{s} \Theta(r_1, \ldots, r_p)\eta_j\Big)$ для всех $r_1, \ldots, r_p \in \mathbb{N}$. Тогда существует многочлен $\Psi_\eta(t_1, \ldots, t_p) \in \mathbb{Q}[t_1, \ldots, t_p]$, такой что*

1) *$\Psi_\eta(r_1, \ldots, r_p) = \operatorname{trdeg}_K F_{r_1,\ldots,r_p}$ для всех достаточно больших элементов $(r_1, \ldots, r_p) \in \mathbb{N}^p$;*

2) $\deg_{t_i}\Psi_\eta \leqslant m_i$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$, *следовательно,* $\deg\Psi_\eta \leqslant m$ *и*

$$\Psi_\eta = \sum_{i_1=0}^{m_1}\ldots\sum_{i_p=0}^{m_p} a_{i_1\ldots i_p}\binom{t_1+i_1}{i_1}\ldots\binom{t_p+i_p}{i_p},$$

где $a_{i_1\ldots i_p}\in\mathbb{Z}$ *для всех* $i_1,\ldots,i_p$;

3) *если* $A = \{(i_1,\ldots,i_p)\in\mathbb{N}^p \mid 0\leqslant i_k\leqslant m_k$ для $k=1,\ldots,p$ и $a_{i_1\ldots i_p}\neq 0\}$, *то* $d = \deg\Psi_\eta$, *коэффициент* $a_{m_1\ldots m_p}$, *элементы* $(j_1,\ldots,j_p)\in A'$, *соответствующие коэффициенты* $a_{j_1\ldots j_p}$ *и коэффициенты при мономах полной степени* d *не зависят от выбора системы дифференциальных образующих* η *в* L/K. *Коэффициент* $a_{m_1,\ldots,m_p}$ *равен дифференциальной степени трансцендентности* F *над* K.

Для доказательства теоремы 4.3 рассмотрим кольцо $\mathcal{D}$ дифференциальных операторов над дифференциальным полем $L = K\langle\eta_1,\ldots,\eta_s\rangle$ как кольцо с p-мерной фильтрацией $\{\mathcal{D}_{r_1\ldots r_p} \mid (r_1,\ldots,r_p)\in\mathbb{Z}^p\}$, где $\mathcal{D}_{r_1\ldots r_p}$ — векторное L-подпространство $\mathcal{D}$, порождённое $\Theta(r_1,\ldots,r_p)$, если $r_i\geqslant 0$ для $i=1,\ldots,p$, и $\mathcal{D}_{r_1\ldots r_p}=0$, если $(r_1,\ldots,r_p)\in\mathbb{Z}^p\setminus\mathbb{N}^p$.

Если M — дифференциальный L-модуль (т. е. левый $\mathcal{D}$-модуль), то семейство $\{M_{r_1\ldots r_p} \mid (r_1,\ldots,r_p)\in\mathbb{Z}^p\}$ векторных L-подпространств M будем называть p-мерной фильтрацией M, если

1) $M_{r_1\ldots r_i\ldots r_p}\subseteq M_{r_1\ldots r_{i-1},r_i+1,r_{i+1}\ldots r_p}$ для любых целых $r_1,\ldots,r_p$ $(1\leqslant i\leqslant p)$;
2) существуют такие $r'_1,\ldots,r'_p\in\mathbb{Z}$, что $M_{r_1\ldots r_p}=0$, если неравенство $r_i\leqslant r'_i$ выполняется хотя бы для одного $i=1,\ldots,p$;
3) $\bigcup\{M_{r_1\ldots r_p}\mid (r_1,\ldots,r_p)\in\mathbb{Z}^p\}=M$;
4) $\mathcal{D}_{r_1\ldots r_p}M_{s_1\ldots s_p}\subseteq M_{r_1+s_1,\ldots,r_p+s_p}$ для любых $(r_1,\ldots,r_p),(s_1,\ldots,s_p)\in\mathbb{Z}^p$.

Если каждое векторное L-пространство $M_{r_1\ldots r_p}$ является конечно порождённым и существуют такие $(h_1,\ldots,h_p)\in\mathbb{Z}^p$, что $\mathcal{D}_{r_1\ldots r_p}M_{h_1\ldots h_p} = M_{r_1+h_1,\ldots,r_p+h_p}$ для каждой p-мерной точки $(r_1,\ldots,r_p)\in\mathbb{N}^p$, то p-мерная фильтрация называется *отличной*. (Если $M=\sum\limits_{i=1}^{s}\mathcal{D}u_i$, то фильтрация $\left\{\sum\limits_{i=1}^{s}\mathcal{D}_{r_1\ldots r_p}u_i \mid (r_1,\ldots,r_p)\in\mathbb{Z}^p\right\}$ является отличной фильтрацией модуля M.)

Следующая теорема о размерностном многочлене от нескольких переменных конечно порождённого дифференциального модуля над дифференциальным полем доказана в [11] (см. [11, теорема 4.2]). Доказательство основано на использовании техники базисов Грёбнера относительно нескольких упорядочений термов, которая также даёт и алгоритм для вычисления размерностного полинома от нескольких переменных.

Теорема 4.4. *Предположим, что* $\{M_{r_1\ldots r_p} \mid (r_1,\ldots,r_p)\in\mathbb{Z}^p\}$ — *отличная* p*-мерная фильтрация левого* $\mathcal{D}$*-модуля* M. *Тогда существует многочлен* $\varphi(t_1,\ldots,t_p)\in\mathbb{Q}[t_1,\ldots,t_p]$, *такой что*

1) $\varphi(r_1,\ldots,r_p)=\dim_L M_{r_1\ldots r_p}$ *для всех достаточно больших элементов* $(r_1,\ldots,r_p)\in\mathbb{Z}^p$;

2) $\deg_{t_i}\varphi \leqslant m_i$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$, *причём* $\deg\varphi \leqslant m$ *и многочлен* $\varphi(t_1, \ldots, t_p)$ *может быть представлен как*

$$\varphi(t_1, \ldots, t_p) = \sum_{i_1=0}^{m_1} \ldots \sum_{i_p=0}^{m_p} a_{i_1\ldots i_p} \binom{t_1+i_1}{i_1} \ldots \binom{t_p+i_p}{i_p},$$

где $a_{i_1\ldots i_p} \in \mathbb{Z}$ *для всех* $i_1, \ldots, i_p$;

3) *если* $A = \{(i_1, \ldots, i_p) \in \mathbb{N}^p \mid 0 \leqslant i_k \leqslant m_k$ для $k = 1, \ldots, p$ и $a_{i_1\ldots i_p} \neq 0\}$, *то* $d = \deg\varphi$, $a_{m_1\ldots m_p}$, *элементы* $(j_1, \ldots, j_p) \in A'$, *соответствующие коэффициенты* $a_{j_1\ldots j_p}$ *и коэффициенты при мономах полной степени* d *не зависят от отличной фильтрации. Более того,* $a_{m_1,\ldots,m_p}$ *равен максимальному числу линейно независимых над* $\mathcal{D}$ *элементов модуля* M.

Многочлен $\varphi(t_1, \ldots, t_p)$, существование которого устанавливается теоремой 4.4, называется $(\Delta_1, \ldots, \Delta_p)$-*размерностным полиномом* Δ-K-модуля M, ассоциированным с заданной отличной p-мерной фильтрацией.

Следующая теорема является аналогом теоремы 3.3 для размерностного многочлена, ассоциированного с многомерной фильтрацией. Доказательство этого утверждения получается по той же схеме, что и доказательство предложения 5.1.15 в [10].

Теорема 4.5. *Пусть* $\mu\colon N \to M$ — *инъективный гомоморфизм дифференциальных* L-*модулей* N *и* M *с* p-*мерными фильтрациями* $\{N_{r_1\ldots r_p} \mid (r_1, \ldots, r_p) \in \mathbb{Z}^p\}$ *и* $\{M_{r_1\ldots r_p} \mid (r_1, \ldots, r_p) \in \mathbb{Z}^p\}$ *соответственно, такой что* $\mu(N_{r_1\ldots r_p}) \subseteq M_{r_1\ldots r_p}$ *для каждого* $(r_1, \ldots, r_p) \in \mathbb{Z}^p$. *Если фильтрация модуля* M *является отличной, то и фильтрация модуля* N *также является отличной.*

Завершение доказательства теоремы 4.3. Пусть $\Omega_{L|K}$ — модуль кэлеровых дифференциалов, ассоциированный с расширением Δ-полей $L = K\langle\eta_1, \ldots, \eta_s\rangle$. Как мы уже видели, он может рассматриваться как Δ-L-модуль (т. е. левый модуль над кольцом Δ-операторов $\mathcal{D}$ над L), где $\delta(d\zeta) = d\delta(\zeta)$ для всех $\delta \in \Delta$, $\zeta \in L$. Ясно, что $\Omega_{L|K} = \sum\limits_{i=1}^{s} \mathcal{D}d\eta_i$.

Пусть $(\Omega_{L|K})_{r_1\ldots r_p}$ $(r_1, \ldots, r_p \in \mathbb{N})$ — векторное L-подпространство $\Omega_{L|K}$, порождённое всеми элементами $d\eta$ с $\eta \in K(\{\theta\eta_j \mid \theta \in \Theta(r_1, \ldots, r_p),\ 1 \leqslant j \leqslant s\})$, и пусть $(\Omega_{L|K})_{r_1\ldots r_p} = 0$, если хотя бы одно r_i отрицательно. Тогда легко убедиться, что $\{(\Omega_{L|K})_{r_1\ldots r_p} \mid (r_1, \ldots, r_p) \in \mathbb{Z}^p\}$ — отличная p-мерная фильтрация $\Omega_{L|K}$. (Кроме того, $\operatorname{trdeg}_K K\Bigl(\bigcup\limits_{j=1}^{s} \Theta(r_1, \ldots, r_p)\eta_j\Bigr) = \dim_L(\Omega_{L|K})_{r_1\ldots r_p}$ для всех $(r_1, \ldots, r_p) \in \mathbb{Z}^p$, поэтому $(\Delta_1, \ldots, \Delta_p)$-размерностный многочлен Δ-L-модуля $\Omega_{L|K}$, ассоциированный с фильтрацией $\{(\Omega_{L|K})_{r_1\ldots r_p} \mid (r_1, \ldots, r_p) \in \mathbb{Z}^p\}$, совпадает с $(\Delta_1, \ldots, \Delta_p)$-размерностным полиномом расширения L/K, ассоциированным с множеством дифференциальных образующих η.)

Как и в доказательстве теоремы 3.1, пусть $M = \Omega_{L|K}$ и N — $\mathcal{D}$-подмодуль M, порождённый всеми элементами вида $d\zeta$, где $\zeta \in F$. Для всех $r_1, \ldots, r_p \in \mathbb{N}$ пусть $N_{r_1\ldots r_p}$ — векторное L-пространство, порождённое всеми элементами

$d\zeta$, где $\zeta \in F_{r_1 \dots r_p}$, и пусть $N_{r_1 \dots r_p} = 0$, если $r_i < 0$ для хотя бы одного $i = 1, \dots, p$. Тогда $\{N_{r_1 \dots r_p} \mid r_1 \dots r_p \in \mathbb{Z}\}$ — фильтрация Δ-L-модуля N, и вложение $N \to M$ становится гомоморфизмом Δ-L-модулей, согласованным с p-мерными фильтрациями M и N. Так как фильтрация $\{M_{r_1 \dots r_p} \mid r_1 \dots r_p \in \mathbb{Z}\}$ является отличной, мы можем применить теорему 4.5 и получить, что фильтрация $\{N_{r_1 \dots r_p} \mid r_1, \dots, r_p \in \mathbb{Z}\}$ также является отличной. Следовательно, существует такой многочлен $\Psi_\eta(t_1 \dots t_p) \in \mathbb{Q}[t_1 \dots t_p]$, что $\Psi_\eta(r) = \dim_K N_{r_1 \dots r_p}$ для всех достаточно больших $r_1, \dots, r_p \in \mathbb{Z}$.

Так как семейство $(\zeta_i)_{i \in I}$ элементов поля $F_{r_1 \dots r_p}$ $(r_1, \dots, r_p \in \mathbb{Z})$ алгебраически независимо над K в том и только том случае, если семейство $(d\zeta_i)_{i \in I}$ линейно независимо над L, $\dim_K N_{r_1 \dots r_p} = \operatorname{trdeg}_K F_{r_1 \dots r_p}$ для всех $r_1, \dots, r_p \in \mathbb{N}$. Применив теорему 4.4, мы получим результат теоремы 4.3. □

В качестве следствия теоремы 4.3 мы можем сформулировать аналог следствия 3.4 (заменяя промежуточное дифференциальное поле F в теореме 4.3 на промежуточное поле E расширения L/K, которое является конечным расширением промежуточного дифференциального поля F этого расширения). Кроме того, результат теоремы 4.3 позволяет дать алгебраическое описание жёсткости (в смысле А. Эйнштейна) системы алгебраических дифференциальных уравнений с действием группы G, коммутирующей с основными дифференцированиями. Как и в замечании после теоремы 4.1, «обобщённая» жёсткость такой системы (связанная с ограничениями на порядки производных по каждой группе основных дифференцирований) выражается соответствующим $(\Delta_1, \dots \Delta_p)$-размерностным многочленом, описанным в теореме 4.3 (где F обозначает неподвижное поле группы G).

Литература

[1] Кондратьева М. В., Панкратьев Е. В. Алгоритмы вычисления характеристических многочленов Гильберта // Пакеты прикладных программ. Аналитические преобразования. — М.: Наука, 1988. — С. 129—146.

[2] Михалёв А. В., Панкратьев Е. В. Дифференциальный размерностный многочлен системы дифференциальных уравнений // Алгебра. Сб. статей. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980. — С. 57—67.

[3] Михалёв А. В., Панкратьев Е. В. Дифференциальная и разностная алгебра // Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топология. Геометрия. Вып. 25. — М.: ВИНИТИ, 1987. — С. 67—139.

[4] Михалёв А. В., Панкратьев Е. В. Компьютерная алгебра. Вычисления в дифференциальной и разностной алгебре // М.: Моск. гос. ун-т, 1989.

[5] Панкратьев Е. В. Стандартные базисы в дифференциальной алгебре // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 2003. — № 3. — С. 48—56.

[6] Панкратьев Е. В. Элементы компьютерной алгебры. — М.: Интернет-университет информационных технологий, 2007.

[7] Einstein A. The Meaning of Relativity. Appendix II (Generalization of gravitation theory). — Princeton, 1953. — P. 133—165.

[8] Johnson J. Differential dimension polynomials and a fundamental theorem on differential modules // Amer. J. Math. — 1969. — Vol. 91. — P. 239—248.

[9] Kolchin E. R. The notion of dimension in the theory of algebraic differential equations // Bull. Amer. Math. Soc. — 1964. — Vol. 70. — P. 570—573.

[10] Kondratieva M. V., Levin A. B., Mikhalev A. V., Pankratiev E. V. Differential and Difference Dimension Polynomials. — Kluwer Academic, 1999.

[11] Levin A. B. Gröbner bases with respect to several orderings and multivariable dimension polynomials // J. Symbolic Comput. — 2007. — Vol. 42. — P. 561—578.

[12] Pankrat'ev E. V. Computations in differential and difference modules // Acta Appl. Math. — 1989. — Vol. 16, no. 2. — P. 167—189.

[13] Pankratiev E. V. Constructive methods in differential algebra // Proc. First Int. Conf. «Mathematical Algorithms». — Nizhny Novgorod, 1995. — P. 90—105.

[14] Pankratiev E. V. Some approaches to construction of standard bases in commutative and differential algebra // Proc. Fifth Int. Workshop on Computer Algebra in Scientific Computing (CASC-2002) / V. G. Ganzha, E. W. Mayr, E. V. Vorozhtsov, eds. — Garching: Technische Univ. München, 2002. — P. 265—268.