# Квазиспектр алгебры разделённых степеней

**Д. В. ТРУШИН**
*Московский государственный университет*
*им. М. В. Ломоносова*
e-mail: trushindima@yandex.ru

УДК 512.628.2+512.552.12

**Ключевые слова:** алгебра разделённых степеней, ряды Гурвица, гомоморфизм Тейлора, квазиспектры, топологические кольца.

**Аннотация**

В статье исследуется устройство квазиспектров алгебры разделённых степеней и их поведение при сужениях под действием гомоморфизма Тейлора. Получены как общие, так и более сильные частные результаты. В частности, формулируется результат для рядов Гурвица.

**Abstract**

*D. V. Trushin, The quasi-spectrum of divided powers*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 4, pp. 213—226.

The paper investigates the structure of the quasi-spectrum of divided powers and its behavior under the Taylor homomorphism. General as well as stronger particular results are obtained. In particular, the answer for the Hurwitz series is stated.

На протяжении всего изложения считается фиксированным некоторое коммутативное ассоциативное кольцо $R$ с единицей, а под словом «кольцо» понимается ассоциативная алгебра с единицей над $R$. Соответственно все гомоморфизмы — гомоморфизмы $R$-алгебр, сохраняющие единицу.

## 1. Квазипервичные идеалы

Рассмотрим произвольную алгебру Ли $L$. Пусть $L$ действует на некотором кольце $B$, т. е. задан гомоморфизм алгебр Ли $L \to \operatorname{Der}_R B^{(-)}$. Такое кольцо $B$ будем называть $L$-дифференциальным или просто дифференциальным. Идеалы $\mathfrak{a}$ в $B$, такие что $L(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{a}$, будем называть $L$-идеалами.

Определим квазипервичный идеал следующим образом: $\mathfrak{q}$ — квазипервичный идеал, если существует такое $m$-множество $S \subseteq B$, что $\mathfrak{q}$ — максимальный $L$-идеал, не пересекающий $S$. Множество всех квазипервичных идеалов кольца $B$ будем обозначать через $\operatorname{QSpec} B$. Основные используемые определения можно найти в [1, 2, 5]. Квазипростые идеалы были впервые введены в [6]. Предварительно докажем несколько основных свойств квазипервичных идеалов.

*Фундаментальная и прикладная математика*, 2008, том 14, № 4, с. 213—226.

Пусть $S$ — $m$-множество и $\mathfrak{q}$ — соответствующий ему квазипервичный идеал. Заметим, что существует максимальный идеал, содержащий $\mathfrak{q}$ и не пересекающий $S$. Он будет первичным, и наибольший $L$-идеал, лежащий в нём, будет совпадать с $\mathfrak{q}$. Более того, для каждого первичного идеала $\mathfrak{p}$ наибольший $L$-идеал, в нём лежащий, является квазипервичным с множеством $S = B \setminus \mathfrak{p}$. Тем самым определено сюръективное отображение $\pi\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{QSpec} B$, такое что $\pi(\mathfrak{p})$ — наибольший $L$-идеал, лежащий в $\mathfrak{p}$. На этом множестве можно ввести топологию, аналогичную топологии на спектре. А именно, пусть $X$ — произвольное подмножество элементов кольца $B$, определим множество

$$V(X) = \{\mathfrak{q} \in \operatorname{QSpec} B \mid X \subseteq \mathfrak{q}\}.$$

Из сюръективности $\pi$ легко следует, что для семейства множеств вида $V(X)$ выполнены аксиомы замкнутых множеств. В заданной топологии отображение $\pi$ является непрерывным.

Пусть $\{s_k\}$ — произвольная $m$-последовательность. Определим идеал

$$\tilde{\mathfrak{q}}_{s_\infty} = \{x \in B \mid \exists\, n\ xBs_n \subseteq \mathfrak{q}\}.$$

**Лемма 1.** *Если $\{s_k\} \subseteq S$, то идеал $\tilde{\mathfrak{q}}_{s_\infty}$ совпадает с $\mathfrak{q}$.*

**Доказательство.** Достаточно показать, что $\tilde{\mathfrak{q}}_{s_\infty}$ является $L$-идеалом, содержащим $\mathfrak{q}$ и не пересекающим $S$. То, что $\tilde{\mathfrak{q}}_{s_\infty}$ содержит $\mathfrak{q}$, следует из определения. Покажем, что $\tilde{\mathfrak{q}}_{s_\infty}$ — $L$-идеал. Пусть $y \in \tilde{\mathfrak{q}}_{s_\infty}$. Тогда существует такое $n$, что $yBs_n \subseteq \mathfrak{q}$. Но тогда $yBs_m \subseteq \mathfrak{q}$ для любого $m \geqslant n$, так как $s_n$ — $m$-последовательность. В частности, $yBs_{n+1} \subseteq \mathfrak{q}$. Применим произвольный элемент из $L$ к этому включению, обозначив его действие штрихом:

$$\begin{gathered}(yBs_{n+1})' \subseteq \mathfrak{q},\\ y'Bs_{n+1} + yB's_{n+1} + yB(s_n r_n s_n)' \subseteq \mathfrak{q},\\ y'Bs_{n+1} + yB(s_n r_n)'s_n + (yBs_n)r_n s_n' \subseteq \mathfrak{q},\\ y'Bs_{n+1} \subseteq \mathfrak{q}.\end{gathered}$$

Теперь покажем, что $\tilde{\mathfrak{q}}_{s_\infty} \cap S = \varnothing$. Пусть $t$ — элемент указанного пересечения. Тогда существует такое $n$, что $tBs_n \subseteq \mathfrak{q}$. Но $t$ и $s_n$ — элементы $S$, следовательно, существует такое $r$, что $trs_n \notin \mathfrak{q}$. Полученное противоречие доказывает лемму. □

Аналогично можно определить идеал

$${}_{s_\infty}\tilde{\mathfrak{q}} = \{x \in B \mid \exists\, n\ s_nBx \subseteq \mathfrak{q}\}$$

и доказать аналогичную лемму о том, что ${}_{s_\infty}\tilde{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}$. Обозначим наименьший полупервичный идеал, содержащий $\mathfrak{q}$, через $\mathfrak{p}$ и будем называть его радикалом $\mathfrak{q}$. Из определения следует, что $S \cap \mathfrak{p} = \varnothing$.

**Лемма 2.** *Пусть $x \notin \mathfrak{p}$. Тогда $\tilde{\mathfrak{q}}_{x_\infty} = \mathfrak{q}$.*

**Доказательство.** Мы знаем, что идеал $\tilde{\mathfrak{q}}_{x_\infty}$ является $L$-идеалом, содержащим $\mathfrak{q}$. Надо только показать, что он не содержит элементов из $S$. Действительно, если некоторый $t$ из $S$ лежит в указанном идеале, то для некоторого $n$ имеем $tBx_n \subseteq \mathfrak{q}$, т. е. $x_n \in {}_{t_\infty}\tilde{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}$, противоречие. □

Следующая лемма показывает, что квазипервичные идеалы в некотором смысле близки к примарным.

**Лемма 3.** *Для любых $a$ и $b$ из $B$, если $aBb \subseteq \mathfrak{q}$, то либо $a \in \mathfrak{q}$, либо $b \in \mathfrak{p}$. Последнее условие можно сформулировать сильнее: либо $a \in \mathfrak{q}$, либо $b \in \mathfrak{q}$, либо $a, b \in \mathfrak{p}$.*

**Доказательство.** Если $a \notin \mathfrak{q}$ и $b \notin \mathfrak{p}$, то условие $aBb \subseteq \mathfrak{q}$ влечёт, что $a \in \tilde{\mathfrak{q}}_{b_\infty} = \mathfrak{q}$, противоречие. Второе утверждение следует из симметричных соображений. □

## 2. Топологический случай

Пусть теперь $B$ — топологическое $L$-дифференциальное кольцо, т. е. $B$ является $L$-дифференциальным кольцом и топологическим пространством, при этом операции сложения и умножения непрерывны в этой топологии и любой элемент из $L$ действует непрерывным дифференцированием. Тогда через $\operatorname{QSpec} B$ будем обозначать множество замкнутых квазипервичных идеалов. Если наделить произвольное $L$-дифференциальное кольцо дискретной топологией, то понятие квазиспектра в топологическом и обычном смысле совпадают и мы можем работать только с топологическими кольцами. Далее полагаем, что все $L$-дифференциальные кольца снабжены дискретной топологией.

Пусть $U(L)$ обозначает универсальную обёртывающую алгебру без единицы, а $U_{\mathrm{id}}(L) = R \oplus U(L)$ её же, но с единицей. Тогда пополненную алгебру разделённых степеней с коэффициентами в $B$ (см. [4]) определим как

$$O^B(L) = \operatorname{Hom}_R(U_{\mathrm{id}}(L), B).$$

Структура биалгебры на $U_{\mathrm{id}}(L)$ даёт нам структуру $L$-дифференциального кольца на $O^B(L)$. Уточним действие алгебры Ли $L$. Положим $\langle uf, w\rangle = \langle f, wu\rangle$ для любых $u \in L$, $f \in O^B(L)$ и $w \in U_{\mathrm{id}}(L)$. Указанное отображение даёт гомоморфизм алгебр Ли $D\colon L \to \operatorname{Der}_R\bigl(O^B(L)\bigr)$.

Кроме того, структура прямого предела на обёртывающей алгебре даёт топологию на разделённых степенях. А именно, положим

$$V_k = \langle u_1 \cdots u_s \mid s < k,\ u_i \in L\rangle_R \subseteq \mathcal{U}_{\mathrm{id}}(L), \quad V_0 = 0.$$

Тогда

$$U_{\mathrm{id}}(L) = \varinjlim_{n} V_k.$$

Система окрестностей нуля имеет вид

$$O^B_k(L) = \{f \in O^B(L) \mid V_k \subseteq \ker f\},$$

так что
$$O^B(L) = O_0^B(L) \supseteq O_1^B(L) \supseteq \ldots \supseteq O_k^B(L) \supseteq \ldots.$$
Понятно, что в этой топологии мы получим полное отделимое топологическое кольцо, т. е.
$$O^B(L) \cong \varprojlim_n O^B(L)/O_n^B(L).$$

Следуя рассуждениям, описанным в [3,4,10], можно показать, что для произвольного $L$-дифференциального кольца $A$, кольца $B$ и кольцевого гомоморфизма $\varphi\colon A \to B$ существует, и притом единственный, $L$-гомоморфизм топологических колец $\Phi\colon A \to O^B(L)$, задаваемый по формуле $\langle \Phi(a), u\rangle = \varphi(ua)$, где $a \in A$ и $u \in U_{\mathrm{id}}(L)$, такой что следующая диаграмма коммутативна:
$$\begin{tikzcd} O^B(L) \arrow[r, "\Pi"] & O^B(L)/O_1^B(L) \arrow[d, equal] \\ A \arrow[u, "\Phi"] \arrow[r, "\varphi"] & B \end{tikzcd} \qquad (1)$$
Этот гомоморфизм будем называть гомоморфизм Тейлора. Если кольцо $B$ также $L$-дифференциальное, то можно рассматривать гомоморфизм Тейлора для тождественного отображения $\varphi\colon B \to B$. Основную задачу можно сформулировать следующим образом: как описать $\mathrm{QSpec}\, O^B(L)$ и $\Phi^*\colon \mathrm{QSpec}\, O^B(L) \to \mathrm{QSpec}\, B$. В случае коммутативного кольца отображение $\Phi^*$ всегда корректно определено, поэтому можно поставить вопрос о том, как описать $\mathrm{QSpec}\, O^B(L)$ и $\Phi^*\colon \mathrm{QSpec}\, O^B(L) \to \mathrm{QSpec}\, A$ для произвольного $L$-дифференциального кольца $A$ и кольцевого гомоморфизма $\varphi\colon A \to B$.

Отметим следующее вложение кольца $B$ в $O^B(L)$:
$$O^B(L) = \mathrm{Hom}_R(R \oplus U(L), B) = B \oplus \mathrm{Hom}_R(U(L), B).$$
В последнем разложении $B$ не просто $R$-подмодуль, но и подкольцо, на котором алгебра Ли $L$ действует тривиально. Оно соответствует гомоморфизму Тейлора, если считать, что на $B$ алгебра Ли действует тривиально. Обозначим его через $\Psi$.

Соберём воедино все построенные нами морфизмы, получим следующую коммутативную диаграмму из топологических пространств и непрерывных отображений между ними:
$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}\, A \arrow[d, "\pi"] & \mathrm{Spec}\, O^B(L) \arrow[l, "\Phi^*"'] \arrow[d, "\pi"] & \mathrm{Spec}\, B \arrow[l, "\Pi^*"'] \\ \mathrm{QSpec}\, A & \mathrm{QSpec}\, O^B(L) \arrow[l, "\Phi^*"'] \arrow[r, equal] & \mathrm{QSpec}\, O^B(L). \arrow[u, "\Psi^*"'] \end{tikzcd} \qquad (2)$$
Конечно, корректность некоторых стрелок нам ещё надо будет установить, а корректность $\Phi^*$ получится только для коммутативного случая. Следующая лемма говорит о том, как расширяются идеалы из $B$ до замкнутых идеалов в $O^B(L)$.

**Лемма 4.** *Пусть алгебра Ли $L$ является свободной и конечно порождённой как модуль. Тогда для любого идеала $\mathfrak{a}$ кольца $B$ верно, что $\overline{\mathfrak{a}^e} = O^{\mathfrak{a}}(L)$ и, в частности, $\overline{\mathfrak{a}^e} \cap B = \mathfrak{a}$.*

**Доказательство.** Заметим, что включение $\overline{\mathfrak{a}^e} \subseteq O^{\mathfrak{a}}(L)$ очевидно. Мы можем рассматривать убывающую фильтрацию на $\mathfrak{a}^e$, а именно $\mathfrak{a}^e_k = \mathfrak{a}^e \cap O^B_k(L)$. Тогда тождественное вложение $\mathfrak{a}^e$ в $O^{\mathfrak{a}}(L)$ даёт нам гомоморфизм фильтрованных модулей. Если мы покажем, что на ассоциированных градуированных модулях индуцируется тождественное отображение, то получим, что изоморфны и пополнения, и в силу замкнутости $O^{\mathfrak{a}}(L)$ это будет означать требуемое (см. [1]).

Теперь остаётся показать, что для любого элемента $x$ из $O^{\mathfrak{a}}_k(L)$ существует такой элемент $y$ из $\mathfrak{a}^e_k$, что $x - y \in O^B_{k+1}(L)$. Но это очевидно, так как

$$V_k = V_{k+1} \oplus \langle \omega \rangle_{\deg(\omega)=k}.$$

Если $\omega_1, \ldots, \omega_s$ базисные, то

$$x - \sum_i x(\omega_i)(\omega_i)^0 \in O^B_{k+1}(L),$$

где $x(\omega_i) \in \mathfrak{a}$, а функционалы $(\omega_i)^0$ образуют дуальный базис. □

**Лемма 5.** *Пусть алгебра Ли $L$ является свободной и конечно порождённой как модуль. Тогда для любого элемента $f \in O^B(L)$ верно, что $\overline{[f]} = \overline{(\operatorname{Im} f)}$.*

**Доказательство.** Так как $L$ — свободный $R$-модуль, выберем его базис $e_1, \ldots, e_n$ и упорядочим элементы по возрастанию индекса. Тогда базис правильных слов в универсально обёртывающей алгебре будет состоять из $e_1^{k_1} \cdots e_n^{k_n}$. При этом элементы кольца $O^B(L)$ естественным образом отождествляются с рядами вида

$$\sum a_{i_1,\ldots,i_n}(e_1)^{i_1} \cdots (e_n)^{i_n},$$

где $e_i$ попарно коммутируют и

$$(e_i)^k (e_i)^m = \frac{(k+m)!}{(k)!(m)!}(e_i)^{k+m}.$$

В этом базисе дифференцирование по $e_n$ устроено особенно просто, как сдвиг $(e_n)^k \to (e_n)^{k-1}$.

Теперь заметим, что включение $\overline{[f]} \subseteq \overline{(\operatorname{Im} f)}$ очевидно. Надо доказать обратное включение. Докажем, что $\langle f, 1 \rangle$ лежит в идеале $\overline{[f]}$. Этого будет достаточно, поскольку $\langle f, u \rangle = \langle uf, 1 \rangle$.

Индукцией по $d$ покажем, что свободный член $f$ по переменным $e_d, \ldots, e_n$ лежит в идеале $\overline{[f]}$.

Пусть $d = n$, тогда, сгруппировав члены при $(e_n)^k$, получим

$$f = a_0 + \sum_{m \geqslant 1} a_k (e_n)^m.$$

Построим последовательность элементов идеала, сходящуюся к $a_0$, следующим образом:

$$f_0 = f, \quad f_k = f_{k-1} - e_n^k(f_{k-1})(e_n)^k.$$

Докажем, что она сходится к $a_0$.

Индукцией по $k$ покажем, что для некоторых $c_m$

$$f_k = a_0 + \sum_{m\geqslant k+1} c_m(e_n)^m.$$

Этого будет достаточно по определению топологии. При $k = 0$ равенство очевидно. Пусть утверждение верно при $k$, докажем его для $k + 1$:

$$\begin{aligned}
f_{k+1} &= f_k - e_n^{k+1}(f_k)(e_n)^{k+1} = f_k - e_n^{k+1}(a_0 + \sum_{m\geqslant k+1} c_m(e_n)^m)(e_n)^{k+1} = \\
&= f_k - \Bigg(\sum_{m\geqslant k+1} c_m(e_n)^{m-(k+1)}\Bigg)(e_n)^{k+1} = \\
&= f_k - c_{k+1}(e_n)^{k+1} + \sum_{m\geqslant k+2} c_m^*(e_n)^m = \\
&= a_0 + \sum_{m\geqslant k+1} c_m(e_n)^m - c_{k+1}(e_n)^{k+1} + \sum_{m\geqslant k+2} c_m^*(e_n)^m = \\
&= a_0 + \sum_{m\geqslant k+2} \tilde{c}_m(e_n)^m.
\end{aligned}$$

Теперь пусть $d < n$. Слегка модифицировав предыдущие рассуждения, получим требуемое. Проделаем нужные вычисления. Пусть $f$ зависит только от $e_1, \ldots, e_d$. Представим его в виде

$$f = a_0 + \sum_{m\geqslant 1} a_k(e_d)^m.$$

Построим последовательность элементов идеала, сходящуюся к $a_0$, следующим образом:

$$f_0 = f, \quad f_k = f_{k-1} - F_d\big(e_d^k(f_{k-1})\big)(e_d)^k,$$

где $F_d$ — оператор взятия свободного члена по переменным $e_{d+1}, \ldots, e_n$. По предположению индукции данная последовательность лежит в идеале $\overline{[f]}$. Докажем, что она сходится к $a_0$.

Индукцией по $k$ покажем, что для некоторых $c_m$

$$f_k = a_0 + \sum_{m\geqslant k+1} c_m(e_d)^m.$$

Этого будет достаточно по определению топологии. При $k = 0$ равенство очевидно. Пусть утверждение верно при $k$, докажем его для $k + 1$:

$$\begin{aligned} f_{k+1} = f_k - F_d\bigl(e_d^{k+1}(f_k)\bigr)(e_d)^{k+1} = \\ = f_k - F_d\Biggl(e_d^{k+1}\Biggl(a_0 + \sum_{m\geqslant k+1} c_m(e_d)^m\Biggr)\Biggr)(e_d)^{k+1} = \\ = f_k - F_d\Biggl(\sum_{m\geqslant k+1} c_m(e_d)^{m-(k+1)} + g\Biggr)(e_d)^{k+1}, \end{aligned}$$

где элемент $g$ зависит от $e_{d+1}, \dots, e_n$, так как действие производной $e_d$ на ограничения элемента $f$ на подмодуль, порождённый правильными словами $e_1^{k_1} \cdots e_d^{k_d}$, совпадает со сдвигом по $e_d$. Значит, $F_d(g) = 0$, а на оставшиеся слагаемые он действует тождественно. Продолжая равенство, получим

$$\begin{aligned} f_{k+1} = f_k - c_{k+1}(e_d)^{k+1} + \sum_{m\geqslant k+2} c_m^*(e_d)^m = \\ = a_0 + \sum_{m\geqslant k+1} c_m(e_d)^m - c_{k+1}(e_d)^{k+1} + \sum_{m\geqslant k+2} c_m^*(e_d)^m = \\ = a_0 + \sum_{m\geqslant k+2} \tilde{c}_m(e_d)^m. \end{aligned}$$

Применяя доказанное утверждение при $d = 1$, получаем, что свободный член $f$ лежит в идеале $\overline{[f]}$, что и требовалось. □

Теперь покажем, что все замкнутые идеалы устроены просто.

**Лемма 6.** *Пусть алгебра Ли $L$ является свободной и конечно порождённой как модуль. Тогда любой замкнутый идеал кольца $O^B(L)$ имеет вид $\mathfrak{b} = O^{\mathfrak{b}\cap B}(L)$.*

**Доказательство.** Взяв в качестве $B$ кольцо $B/(\mathfrak{b} \cap B)$, по лемме 4 сводим задачу к доказательству того, что ненулевой замкнутый идеал сужается в ненулевой. Последнее следует из леммы 5. □

**Лемма 7.** *Пусть алгебра Ли $L$ является свободной и конечно порождённой как модуль. Тогда идеал $O^{\mathfrak{a}}(L)$ квазипервичен тогда и только тогда, когда $\mathfrak{a}$ первичен.*

**Доказательство.** Пусть $\mathfrak{a}$ первичен, тогда первичен $\mathfrak{a} + O_1^B(L)$ как прообраз первичного при факторизации П. Легко убедиться, что $O^{\mathfrak{a}}(L) = \pi\bigl(\mathfrak{a} + O_1^B(L)\bigr)$. Следовательно, $O^{\mathfrak{a}}(L)$ квазипервичен.

Обратно, пусть $O^{\mathfrak{a}}(L)$ квазипервичен, и пусть $O^{\mathfrak{a}}(L) = \pi(\mathfrak{p})$, где $\mathfrak{p}$ — первичный идеал. В силу того что подкольцо $B$ состоит из констант, сужения $O^{\mathfrak{a}}(L)$ и $\mathfrak{p}$ на $B$ совпадают с $\mathfrak{a}$. Тогда для любых $a$ и $b$ из $B$, не лежащих в $\mathfrak{a}$, в силу первичности $\mathfrak{p}$ существует такой элемент $f \in O^B(L)$, что $afb \notin \mathfrak{p}$, следовательно, $afb \notin O^{\mathfrak{a}}(L)$. Тогда найдётся такой $u \in U_{\mathrm{id}}(L)$, что $(afb)(u) \notin \mathfrak{a}$, а значит, $(afb)(u) = af(u)b \notin \mathfrak{a}$. □

**Замечание 8.** Заметим, что нами доказано, что первичный идеал из $O^B(L)$ сужается в первичный на $B$.

**Теорема 9.** *Пусть алгебра Ли $L$ является свободной и конечно порождённой как модуль. Тогда отображения $\pi\circ\Pi^*$ и $\Psi^*$ — взаимно обратные гомеоморфизмы между пространствами $\operatorname{QSpec} O^B(L)$ и $\operatorname{Spec} B$.*

**Доказательство.** Корректность указанных отображений следует из леммы 7. Так как $\Pi^*$ и $\Psi^*$ индуцированы гомоморфизмами колец, то они непрерывны. Следовательно, непрерывны нужные нам отображения. Покажем, что они биективны и взаимно обратны. $\Pi^*(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p} + O_1^{\mathfrak{p}}(L)$, как было показано в предыдущей лемме. Следовательно, $\pi\circ\Pi^*(\mathfrak{p}) = O^{\mathfrak{p}}(L)$. Теперь заметим, что $\Psi^*\big(O^{\mathfrak{p}}(L)\big) = O^{\mathfrak{p}}(L)\cap B = \mathfrak{p}$. □

До сих пор мы работали только с кольцом $O^B(L)$ и его подкольцом $B$, целиком состоящим из констант. Последнее условие обеспечивало, что сужение первичного идеала первично (это видно из доказательства леммы 7). Этот случай можно рассматривать как гомоморфизм Тейлора в случае тривиального действия алгебры Ли на кольце $B$. Докажем корректность отображения $\Phi^*$ для произвольного действия $L$ на $B$.

Определим «коэффициентное» действие $L$ на $O^B(L)$ в случае дифференциального кольца $B$ как действие на образ функционала, т. е. $\langle uf, w\rangle = u(\langle f, w\rangle)$, где $u\in L$, $f\in O^B(L)$, $w\in U_{\mathrm{id}}(L)$. Легко убедиться, что таким образом получаем гомоморфизм алгебр Ли $\rho\colon L\to \operatorname{Der}_R\big(O^B(L)\big)$. В силу того что ядро композиции может только увеличиться, $\rho(u)$ является непрерывным отображением на $O^B(L)$. Теперь определим «новое» действие $L$ на разделённых степенях: $d = D+\rho$. Чтобы различать дифференциальную структуру, будем указывать кольцо и дифференцирование на нём: $(O^B(L), D)$ и $(O^B(L), d)$. Отметим, что для кольца $(O^B(L), d)$ вложение $\Psi$ кольца $B$ позволяет нам рассматривать его как $L$-дифференциальное подкольцо. Так как первичные идеалы не зависят от дифференциальной структуры, корректность будет следовать из замечания 8 и следующей леммы.

**Лемма 10.** *Пусть алгебра Ли $L$ является свободной и конечно порождённой как модуль. Тогда гомоморфизм Тейлора $\Phi\colon (O^B(L), d)\to (O^B(L), D)$ для отображения $\Pi\colon (O^B(L), d)\to B$ является непрерывным в обе стороны изоморфизмом.*

**Доказательство.** Для доказательства того, что $\Phi$ — непрерывный изоморфизм, достаточно показать, что на ассоциированных градуированных кольцах $\Phi$ индуцирует изоморфизм (см. [1]). Покажем даже больше, что $\Phi$ индуцирует тождественное отображение. Докажем это утверждение индукцией по $k$ для $O_k^B(L)$. Пусть утверждение доказано для всех окрестностей с номером меньше $k$, докажем его для $k$. Надо показать что $\Phi(f) - f\in O_{k+1}^B(L)$, если $f\in O_k^B(L)$. По индукции $\Phi(f)-f\in O_k^B(L)$. Пусть $u_1,\ldots,u_k\in L$, тогда

$$\langle\Phi(f), u_1\cdots u_k\rangle = \Pi(u_1\cdots u_k * f) = \langle u_1\cdots u_k * f, 1\rangle = \\ = \sum u_{i_1}\cdots u_{i_s}\langle f, u_{j_1}\cdots u_{j_m}\rangle,$$

где суммирование ведётся по всем подмножествам вида $\{i_1, \ldots, i_s, j_1, \ldots, j_m\}$ множества $\{1, \ldots, k\}$ и наборы $i_1, \ldots, i_s$ и $j_1, \ldots, j_m$ упорядочены по возрастанию. Так как $f \in O_k^B(L)$, то в последней сумме при $m < k$ слагаемые обнуляются, следовательно, мы получаем, что

$$\langle \Phi(f), u_1 \cdots u_k \rangle = \langle f, u_1 \cdots u_k \rangle,$$

что и требовалось.

Для того чтобы увидеть непрерывность обратного отображения, надо заметить, что $\Phi\big(O_k^B(L)\big) = O_k^B(L)$. Действительно, включение $\Phi(O_k^B(L)) \subseteq O_k^B(L)$ очевидно. Обратное включение следует из того, что для элемента из $O_s^B(L) \setminus O_{s+1}^B(L)$ значение на мономах степени $s$ совпадает со значениями на них его образа. □

**Теорема 11.** *Пусть алгебра Ли $L$ является свободной и конечно порождённой как модуль и $B$ — $L$-дифференциальное кольцо. Пусть $\Phi\colon B \to O^B(L)$ — гомоморфизм Тейлора для $\varphi = \mathrm{Id}_B$. Тогда коммутативна диаграмма*

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{Spec} B & \xleftarrow{\ \mathrm{Id}\ } & \operatorname{Spec} B \\
{\scriptstyle \pi}\big\downarrow & & \big\| \\
\operatorname{QSpec} B & \xleftarrow{\ \Phi^*\ } & \operatorname{QSpec} O^B(L),
\end{array}$$

*где все отображения непрерывны, равенство обозначает гомеоморфизм из теоремы 9, а $\pi$ и $\Phi^*$ сюръективны.*

**Доказательство.** Данная теорема является простым следствием теоремы 9 и диаграмм (1) и (2), где вместо $A$ надо рассмотреть само кольцо $B$. Все отображения корректны в силу леммы 10. □

# 3. Коммутативный случай

Сформулируем общий результат для коммутативного случая.

**Теорема 12.** *Пусть алгебра Ли $L$ является свободной и конечно порождённой как модуль, $B$ — кольцо и $A$ — $L$-дифференциальное кольцо. Пусть $\Phi\colon A \to O^B(L)$ — гомоморфизм Тейлора для некоторого $\varphi\colon A \to B$. Тогда коммутативна диаграмма*

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{Spec} A & \xleftarrow{\ \varphi^*\ } & \operatorname{Spec} B \\
{\scriptstyle \pi}\big\downarrow & & \big\| \\
\operatorname{QSpec} A & \xleftarrow{\ \Phi^*\ } & \operatorname{QSpec} O^B(L),
\end{array}$$

*где все отображения непрерывны, равенство обозначает гомеоморфизм из теоремы 9, а $\pi$ и $\Phi^*$ сюръективны.*

**Доказательство.** Этот результат является следствием теоремы 9 и диаграмм (1) и (2). Все отображения корректны в силу коммутативность колец. $\square$

В коммутативном случае можно усилить результат для колец положительной характеристики, а именно отбросить топологию и ограничения на алгебру Ли. В дальнейшем в этом разделе считаем, что кольца не являются топологическими. Отметим также, что в коммутативном случае квазипервичные идеалы называются квазипростыми. Докажем полезную техническую лемму.

**Лемма 13.** *Пусть* $\operatorname{char} B = n \neq 0$. *Тогда отображение* $\pi$ *инъективно и верно, что* $\pi(\operatorname{Spec} B_f) = \operatorname{QSpec} B_{f^n}$.

**Доказательство.** Вначале докажем инъективность. Пусть $\mathfrak{p}$ — простой идеал кольца $B$ и $\mathfrak{q} = \pi(\mathfrak{p})$ — его образ в квазиспектре. Тогда для гомоморфизма факторизации по $\mathfrak{p}$ существует инъективный гомоморфизм Тейлора $\Phi\colon B/\mathfrak{q} \to O^{B/\mathfrak{p}}(L)$. Как легко убедиться, $\operatorname{char} B/\mathfrak{p} = p \neq 0$, а следовательно, $\operatorname{char} O^{B/\mathfrak{p}}(L) = p$. Покажем, что

$$O_1^{B/\mathfrak{p}}(L) = \{f \in O^{B/\mathfrak{p}}(L) \mid f^p = 0\}.$$

Для любого элемента $u \in L$ верно $u(f^p) = 0$. Следовательно, $f^p\big(U(L)\big) = pf^{p-1}uf = 0$, а значит, по определению умножения имеем

$$f^p = \langle f^p, 1\rangle = \langle f^{\otimes p}, 1\rangle = \langle f, 1\rangle^p,$$

откуда получаем требуемое для идеала $O_1^{B/\mathfrak{p}}(L)$. Значит, идеал $\mathfrak{p}$ совпадает с нильрадикалом $\mathfrak{q}$, т. е. он единственный.

Теперь докажем открытость $\pi$. Понятно, что

$$\pi(\operatorname{Spec} B_f) = \pi(\operatorname{Spec} B_{f^n}) \subseteq \operatorname{QSpec} B_{f^n}.$$

Обратно, пусть $\mathfrak{q} \in \operatorname{QSpec} B$ и $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} B$ таков, что $\mathfrak{q} = \pi(\mathfrak{p})$. Тогда характеристика $\mathfrak{p}$ делит $n$, а значит, для любого элемента из $\mathfrak{p}$ его $n$-я степень лежит в $\mathfrak{q}$, что и требовалось. $\square$

**Замечание.** Так как отображение $\pi$ всегда сюръективно, из последней леммы следует, что в случае ненулевой характеристики оно является гомеоморфизмом спектра и квазиспектра.

**Теорема 14.** *Пусть кольца* $A$ *и* $B$ *совпадают,* $\operatorname{char} B = n \neq 0$ *и* $\varphi = \mathrm{Id}$. *Тогда в следующей диаграмме все отображения — гомеоморфизмы*:

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} B \arrow[d, "\pi"'] & \operatorname{Spec} O^B(L) \arrow[l, "\Phi^*"'] \arrow[d, "\pi"'] \\ \operatorname{QSpec} B & \operatorname{QSpec} O^B(L). \arrow[l, "\Phi^*"'] \end{tikzcd}$$

**Доказательство.** Для доказательства теоремы достаточно показать, что на спектрах $\Phi^*$ является гомеоморфизмом. Это следует из того, что $O_1^B(L) \subseteq \{f \in O^B(L) \mid f^n = 0\}$. Как в лемме 13, получаем, что для любого элемента

$u \in L$ верно $u(f^n) = 0$. Следовательно, $f^n\big(U(L)\big) = nf^{n-1}uf = 0$, а значит, по определению умножения имеем

$$f^n = \langle f^n, 1\rangle = \langle f^{\otimes n}, 1\rangle = \langle f, 1\rangle^n. \qquad \square$$

**Замечание.** Из последней теоремы следует, что никаких других идеалов, кроме замкнутых, в квазиспектре нет.

Теперь вновь вернёмся к топологическому случаю и покажем, что верна следующая лемма.

**Лемма 15.** *Пусть $B$ — нётерова алгебра Ритта и алгебра Ли $L$ — свободный конечно порождённый модуль. Тогда все квазипростые идеалы замкнуты.*

**Доказательство.** В случае алгебры Ритта $O^B(L)$ совпадает с кольцом формальных степенных рядов, где количество переменных равно количеству свободных образующих для $L$. Значит, алгебра $O^B(L)$ также нётерова. Как и при доказательстве леммы 5, выберем базис универсальной обёртывающей алгебры из правильных мономов $e_1^{k_1} \cdots e_n^{k_n}$. Дифференцирование по последней переменной выглядит как сдвиг. Представим произвольный элемент кольца $O^B(L)$ в виде ряда

$$f = \sum_{k \geqslant 0} a_k (e_n)^k.$$

Идеал из коэффициентов ряда порождается какими-то элементами с номерами от единицы до, скажем, $s$. Тогда можно переписать $f$ в виде

$$f = a_0\varphi_0 + a_1 e_n \varphi_1 + \ldots + a_s (e_n)^s \varphi_s,$$

причём $\varphi_i$ обратимы. Умножая полученное равенство на $\varphi_0^{-1}$, получим

$$a_0 + a_1 e_n \varphi_1 \varphi_0^{-1} + \ldots + a_s (e_n)^s \varphi_s \varphi_1^{-1} \in [f],$$

где все $\varphi_i \varphi_0^{-1}$ обратимы (обозначим их через $\psi_i$). Дифференцируем с помощью $e_n$:

$$a_1(\psi_1 + e_n(\psi_1)e_n) + \ldots + a_s (e_n)^{s-1}(s\psi_s + e_n(\psi_s)e_n) \in [f].$$

Выражения $i\psi_i + e_n(\psi_i)e_n$ обратимы. Обозначая их через новые переменные, получим, что $a_s \in [f]$. Следовательно, все $a_i$ лежат в $[f]$. Получается, что свободный по $e_n$ коэффициент $f$ лежит в $[f]$. Как и в лемме 5, борясь с некоммутативностью алгебры Ли, для последующего исключения переменных надо пользоваться операторами взятия свободного члена по переменным, не участвующим в $f$. В итоге получим, что свободный член $f$ лежит в идеале $[f]$, а следовательно, и все коэффициенты $f$ лежат в нём. Таким образом, доказано, что $[f] = (\operatorname{Im} f)$.

Теперь мы можем доказать лемму. Так как $L$ — свободный модуль, а $B$ нётерово, то всякий элемент из $O^{\mathfrak{a}}(L)$ может быть представлен как $a_1\varphi_1 + \ldots + a_n\varphi_n$, где $a_i \in \mathfrak{a}$. Значит, $\mathfrak{a}^e = O^{\mathfrak{a}}(L)$ для любого идеала $\mathfrak{a}$. Проведя факторизацию по $O^{\mathfrak{a}}(L)$, сводим задачу к доказательству того, что ненулевой $L$-дифференциальный идеал сужается в ненулевой, а это следует из равенства $[f] = (\operatorname{Im} f)$. $\square$

# 4. Ряды Гурвица

Пусть рассматриваемое кольцо $R$ является кольцом целых чисел, кольцо $B$ коммутативно, а алгебра Ли $L$ имеет вид $\mathbb{Z}^{\oplus n}$ и коммутативна, т. е. имеет место случай дифференциального кольца (см. [5, 10]). Тогда алгебра $O^B(L)$ обозначается $HB$ и называется кольцом рядов Гурвица.

Вначале приведём топологические формулировки. Следует напомнить, что в топологическом случае под спектром (квазиспектром) понимается множество замкнутых простых (квазипростых) идеалов кольца.

**Теорема 16.** *Для произвольного дифференциального кольца $B$ отображения $\pi\circ\Pi^*$ и $\Psi^*$ гомеоморфизмы между* $\operatorname{QSpec} HB$ *и* $\operatorname{Spec} B$.

**Теорема 17.** *Для произвольного дифференциального кольца $B$ коммутативна диаграмма*

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{Spec} B & \xleftarrow{\Psi^*} & \operatorname{QSpec} HB \\
{\scriptstyle\pi}\downarrow & & {\scriptstyle\Phi^*}\downarrow \\
\operatorname{QSpec} B & = & \operatorname{QSpec} B,
\end{array}$$

*причём $\Psi^*$ — гомеоморфизм, а отображения $\pi$ и $\Phi^*$ сюръективны.*

**Теорема 18.** *Предположим, что выполняется одно из двух следующих условий*:

1) *$B$ — нётерова алгебра Ритта,*
2) *характеристика $B$ не равна нулю.*

*Тогда все квазипростые идеалы замкнуты.*

Забыв про топологию, получаем в ненулевой характеристике чуть более сильный результат.

**Теорема 19.** *Пусть* $\operatorname{char} B \neq 0$. *Тогда в следующей диаграмме все отображения — гомеоморфизмы*:

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{Spec} B & \xleftarrow{\Phi^*} & \operatorname{Spec} HB \\
{\scriptstyle\pi}\downarrow & & {\scriptstyle\pi}\downarrow \\
\operatorname{QSpec} B & \xleftarrow{\Phi^*} & \operatorname{QSpec} HB.
\end{array}$$

Наконец, приведём пример несовпадения замкнутого и незамкнутого квазиспектров.

**Пример.** Пусть $\mathbb{K}$ — поле характеристики нуль. Кольцо

$$B=\mathbb{K}[x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots]$$

состоит целиком из констант, имеется одно дифференцирование. Очевидно, что $HB$ в этом случае совпадает с $B[[t]]$, $\operatorname{QSpec} B = \operatorname{Spec} B$ и $\operatorname{QSpec} HB = \operatorname{Spec}^{\Delta} HB$. Рассмотрим простой идеал $\mathfrak{p}=(x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots)$ в $B$. Существует единственный замкнутый простой идеал в $HB$, сужающийся до $\mathfrak{p}$, а именно

$\mathfrak{p}[[t]]$, очевидно дифференциальный. Но $\mathfrak{p}^e$ также является простым дифференциальным идеалом в $HB$, таким что $\mathfrak{p}^e \neq \mathfrak{p}[[t]]$. Например, ряд $\sum x_k t^k$ их разделяет. Кроме того, $(p^e)^c = \mathfrak{p}$, где $\mathfrak{a}^e$ и $\mathfrak{a}^c$ обозначают расширение и сужение идеала $\mathfrak{a}$ соответственно.

## 5. Продолжение исследований

Первой статьёй, в которой были введены и исследованы квазипростые идеалы, является [6]. Развитием этой работы стали [7,8]. В работе [9], посвящённой квазиаффинным спектрам, автор попытался сформулировать результаты в наиболее общем контексте. В [10] излагается теория функтора, присоединённого справа к забывающему.

С вопросами описания квазиспектра рядов Гурвица и исследования соответствующих сужений идеалов меня познакомил У. Кир в личных беседах. За некоторое время до этого Ю. П. Размыслов ввёл меня в круг вопросов, связанных с разделёнными степенями. После получения результатов в коммутативном случае А. В. Михалёв поставил задачу обобщения результатов на возможно более общий контекст. Однако наиболее интересным случаем оказался случай рядов Гурвица.

Стоит добавить, что У. Кир ставил задачей описание квазиспектра в отсутствии топологии, т. е. его интересовали и незамкнутые квазипростые идеалы. Значит, ответ на его вопрос полностью получен лишь в положительной характеристике, и там он тривиален. В случае произвольного кольца топологическая постановка вопроса позволяет получить «хороший» ответ и, скорее всего, является более естественной.

Наиболее интересен вопрос описания квазиспектра для произвольной алгебры Ли. Существует два пути следования по этому направлению. Первый — случай конечно порождённой алгебры Ли, второй — бесконечно порождённой. Стоит сказать, что в новом случае следует поменять топологию на ту, что индуцирована с прямого предела по всем конечно порождённым подмодулям универсальной обёртывающей алгебры. На сегодня мне не ясно, существует ли в некоммутативном случае пример квазипервичного идеала с непервичным радикалом. На мой взгляд, квазиспектр для произвольного кольца может быть сколь угодно сложным, однако всё же остаётся интересным вопрос, можно ли его описать в таком общем случае. Топологический подход позволяет ставить вопрос о построении аналогичных конструкций для произвольных топологических колец.

## Литература

[1] Атья М., Макдональд И. Введение в коммутативную алгебру. — М.: Факториал, 2001.

[2] Ламбек И. Кольца и модули. — М.: Факториал, 2005.

[3] Размыслов Ю. П. Введение в теорию алгебр и их представлений. — М.: Наука, 1991.

[4] Eisenbud D. Commutative Algebra with a View toward Algebraic Geometry. — Berlin: Springer, 1994.

[5] Kolchin E. R. Differential Algebra and Algebraic Groups. — New York: Academic Press, 1976.

[6] Keigher W. Quasi-prime ideals in differential rings // Houston J. Math. — 1978. — Vol. 4. — P. 379—388.

[7] Keigher W. On the quasi-affine scheme of a differential ring // Adv. Math. — 1981. — Vol. 42. — P. 143—153.

[8] Keigher W. Differential rings constructed from quasi-prime ideals // J. Pure Appl. Algebra. — 1982. — Vol. 26. — P. 191—201.

[9] Keigher W. On the structure sheaf of a differential ring // J. Pure Appl. Algebra. — 1983. — Vol. 27. — P. 163—172.

[10] Keigher W. On the ring of Hurwitz series // Commun. Algebra. — 1997. — Vol. 25. — P. 1845—1859.