Модули и кольца Безу

А. А. ТУГАНБАЕВ
Российский государственный
торгово-экономический университет
e-mail: tuganbaev@gmail.com

УДК 512.552

Ключевые слова: модуль Безу, кольцо Безу.

Аннотация

Для любого кольца A существуют кольцо Безу R и идемпотент $e \in R$, такие что $A \cong eRe$. Каждый модуль над любым кольцом является прямым слагаемым модуля эндо-Безу. Над любым кольцом каждый свободный модуль бесконечного ранга является модулем эндо-Безу.

Abstract

A. A. Tuganbaev, Bezout modules and rings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 4, pp. 227—229.

For any ring A, there exist a Bezout ring R and an idempotent $e \in R$ with $A \cong eRe$. Every module over any ring is a direct summand of an endo-Bezout module. Over any ring, every free module of infinite rank is an endo-Bezout module.

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей, а модули — унитарными. Говоря о кольцах Безу или подобных объектах, мы предполагаем, что соответствующие условия выполнены справа и слева. Модулем Безу называется модуль, в котором все конечно порождённые подмодули цикличны. Правый модуль M называется *модулем эндо-Безу*, если M — левый модуль Безу над своим кольцом эндоморфизмов $\mathrm{End}(M)$.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема.

1. *Для любого кольца A существуют кольцо Безу R и идемпотент $e \in R$, такие что $A \cong eRe$.*
2. *Каждый модуль над любым кольцом является прямым слагаемым модуля эндо-Безу.*
3. *Над любым кольцом каждый свободный модуль бесконечного ранга является модулем эндо-Безу. Следовательно, каждый проективный модуль над любым кольцом является прямым слагаемым свободного модуля эндо-Безу.*

Фундаментальная и прикладная математика, 2008, том 14, № 4, с. 227—229.

Лемма 1. *Пусть R — такое кольцо, что существует модульный эпиморфизм*

$$_RR \to {}_RR \oplus {}_RR.$$

Тогда каждый конечно порождённый левый R-модуль является циклическим модулем. Следовательно, каждый левый R-модуль является модулем Безу. В частности, R — левое кольцо Безу.

Доказательство. Из условия следует, что каждый конечно порождённый свободный левый R-модуль — гомоморфный образ циклического модуля $_RR$. Кроме того, каждый конечно порождённый модуль — гомоморфный образ конечно порождённого свободного модуля. Поэтому каждый конечно порождённый левый R-модуль цикличен. □

Для кольца R обозначим через $R_{\infty\times\infty}$ множество всех бесконечных матриц $(a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$ ($a_{ij} \in R$) с бесконечными счётными строками и столбцами. Матрица $M \in R_{\infty\times\infty}$ называется *конечно-столбцовой* (*конечно-строчной*), если каждый столбец (каждая строка) этой матрицы содержит только конечное число ненулевых элементов. Множество $R_{\infty\times\infty}$ содержит подмножества R_1, R_2 и R_3, образованные всеми конечно-столбцовыми матрицами, всеми конечно-строчными матрицами и всеми конечно-столбцовыми и конечно-строчными матрицами соответственно. Непосредственно проверяется, что R_1, R_2 и R_3 являются кольцами с обычными матричными операциями сложения и умножения.

Лемма 2. *Пусть A — кольцо и R либо кольцо всех конечно-столбцовых матриц над A, либо кольцо всех конечно-строчных матриц над A, либо кольцо всех конечно-столбцовых конечно-строчных матриц над A.*

1. *Существуют модульные изоморфизмы*

$$_RR \to {}_RR \oplus {}_RR, \quad R_R \to R_R \oplus R_R.$$

2. *Все левые R-модули и все правые R-модули являются модулями Безу.*
3. *R — кольцо Безу, и существует такой идемпотент $e \in R$, что $A \cong eRe$.*

Доказательство. Докажем утверждение 1. Обозначим через M и N такие матрицы $(a_{ij}) \in R$ и $(b_{ij}) \in R$, что $a_{ij} = 0$ при $j \neq 2i-1$, $a_{i,2i-1} = 1$, $b_{ij} = 0$ при $i \neq 2j-1$, $b_{2j-1,j} = 1$. Для любой матрицы $X = (x_{ij}) \in R$ получаем, что

$$XM = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & x_{12} & 0 & x_{13} & 0 & \dots \\ x_{21} & 0 & x_{22} & 0 & x_{23} & 0 & \dots \\ x_{31} & 0 & x_{32} & 0 & x_{33} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$NX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Поэтому отображение $f\colon X \to XN$ — инъективный эндоморфизм левого модуля ${}_RR$, индуцирующий такое прямое разложение ${}_RR = f({}_RR) \oplus G$, что $G \cong {}_RR$. Кроме того, отображение $g\colon X \to MX$ — инъективный эндоморфизм правого модуля R_R, индуцирующий такое прямое разложение $R_R = g(R_R) \oplus G$, что $G \cong R_R$. Поэтому ${}_RR \cong {}_RR \oplus {}_RR$ и $R_R \cong R_R \oplus R_R$.

Утверждение 2 следует из утверждения 1 и леммы 1.

Утверждение 3 следует из утверждения 2. □

Лемма 3. *Пусть M — правый модуль над кольцом S, $A = \mathrm{End}(M_S)$, $\{M_i\}_{i=1}^{\infty}$ — счётное множество изоморфных копий S-модуля M,*

$$R = \mathrm{End}\Bigl(\bigoplus_{i=1}^{\infty} M_i\Bigr).$$

1. *Кольцо R изоморфно кольцу всех конечно-столбцовых матриц над кольцом A.*
2. *Все левые R-модули и все правые R-модули являются модулями Безу. Следовательно, $\bigoplus_{i=1}^{\infty} M_i$ — модуль эндо-Безу.*
3. *R — кольцо Безу, и существует такой идемпотент $e \in R$, что $A \cong eRe$.*

Доказательство. Утверждение 1 проверяется непосредственно. Утверждения 2 и 3 следуют из утверждения 1 и леммы 2. □

Окончание доказательства теоремы. Утверждение 1 следует из третьего утверждения леммы 2. Утверждения 2 и 3 следуют из второго утверждения леммы 3. □