Минимальный пример матрицы, различающей GM- и d-ранги в макс-алгебрах

Я. Н. ШИТОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: yaroslav-shitov@yandex.ru

УДК 512.643

Ключевые слова: полукольцо, ранги матриц, макс-алгебра, бинарное булево полукольцо.

Аннотация

Пусть $\mathrm{GMr}(A)$ — строчный ранг Гондрана—Мину, $\mathrm{GMc}(A)$ — столбцовый ранг Гондрана—Мину, $\mathrm{d}(A)$ — детерминантный ранг матрицы A. М. Акиан, С. Гобером и А. Гутерманом была поставлена задача найти минимальные натуральные числа m и n, такие что существует $(m\times n)$-матрица B с различными строчным и столбцовым рангами Гондрана—Мину. В настоящей работе показано, что в случае $\mathrm{GMr}(B) > \mathrm{GMc}(B)$ минимальные m и n равны 5 и 6, а в случае $\mathrm{GMc}(B) > \mathrm{GMr}(B)$ минимальны значения $m = 6$, $n = 5$. Приведён пример матрицы $A \in M_{5\times 6}(\mathbb{R}_{\max})$, для которой $\mathrm{GMr}(A) = \mathrm{GMc}(A^{\mathrm{t}}) = 5$, $\mathrm{GMc}(A) = \mathrm{GMr}(A^{\mathrm{t}}) = 4$. Также показано, что $p = 5$ и $q = 6$ — минимальные числа, для которых существует $(p \times q)$-матрица с различными строчным рангом Гондрана—Мину и детерминантным рангом.

Abstract

Ya. N. Shitov, Matrices with different Gondran—Minoux and determinantal ranks over max-*algebras*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 4, pp. 231—268.

Let $\mathrm{GMr}(A)$ be the row Gondran—Minoux rank of a matrix, $\mathrm{GMc}(A)$ be the column Gondran—Minoux rank, and $\mathrm{d}(A)$ be the determinantal rank, respectively. The following problem was posed by M. Akian, S. Gaubert, and A. Guterman: Find the minimal numbers m and n such that there exists an $(m \times n)$-matrix B with different row and column Gondran—Minoux ranks. We prove that in the case $\mathrm{GMr}(B) > \mathrm{GMc}(B)$ the minimal m and n are equal to 5 and 6, respectively, and in the case $\mathrm{GMc}(B) > \mathrm{GMr}(B)$ the numbers $m = 6$ and $n = 5$ are minimal. An example of a matrix $A \in \mathcal{M}_{5\times 6}(\mathbb{R}_{\max})$ such that $\mathrm{GMr}(A) = \mathrm{GMc}(A^{\mathrm{t}}) = 5$ and $\mathrm{GMc}(A) = \mathrm{GMr}(A^{\mathrm{t}}) = 4$ is provided. It is proved that $p = 5$ and $q = 6$ are the minimal numbers such that there exists an $(p \times q)$-matrix with different row Gondran—Minoux and determinantal ranks.

1. Введение

Определение 1.1. Множество S с операциями $\oplus\colon S \times S \to S$ (сложение) и $\otimes\colon S \times S \to S$ (умножение) называется *полукольцом*, если

Фундаментальная и прикладная математика, 2008, том 14, № 4, с. 231—268.

1) $(S,\oplus)$ — абелев моноид (нейтральный элемент относительно операции $\oplus$ будем обозначать $-\infty$);
2) $(S,\otimes)$ — полугруппа (нейтральный элемент относительно операции $\otimes$, если он есть, будем обозначать 0);
3) справедливы законы дистрибутивности: для всех $a,b,c \in S$ верно, что $(a\oplus b)\otimes c = (a\otimes c)\oplus(b\otimes c)$ и $c\otimes(a\oplus b) = (c\otimes a)\oplus(c\otimes b)$;
4) для любого элемента $x\in S$ верно, что $x\otimes(-\infty) = (-\infty)\otimes x = -\infty$.

Определение 1.2. Полукольцо называется коммутативным, если его мультипликативная полугруппа коммутативна.

В данной работе рассматриваются только коммутативные полукольца, поэтому под словом «полукольцо» будем понимать коммутативное полукольцо.

Определение 1.3. Множество $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ с определёнными операциями $\oplus$ и $\otimes$,

$$a\oplus b = \max\{a,b\}, \quad a\otimes b = a+b,$$

называется $\{\max,+\}$-*алгеброй (макс-алгеброй)* $\mathbb{R}_{\max}$.

Множество $\{-\infty,0\}$ с такими же операциями $\oplus$ и $\otimes$ называется *бинарным булевым полукольцом* $\mathbb{B}$.

Замечание 1.4. Множество $\mathbb{R}_{\max}$ ($\mathbb{B}$) с заданными операциями является коммутативным полукольцом с единицей.

Определение 1.5. Пусть S — полукольцо. Система из n строк

$$\{a_i\} = \{(a_{i1},a_{i2},\ldots,a_{im})\}, \quad i\in\{1,2,\ldots,n\}, \quad a_{ij}\in S,$$

называется *GM-линейно зависимой*, если найдутся I и J — подмножества множества $\{1,2,\ldots,n\}$, такие что $I\cap J=\varnothing$, $I\cup J=\{1,\ldots,n\}$, и найдутся $\{\lambda_i\in S\}$, $i\in\{1,\ldots,n\}$, не все равные $-\infty$, такие что для всех $k\in\{1,2,\ldots,m\}$ верно равенство

$$\bigoplus_{i\in I}\lambda_i\otimes a_{ik} = \bigoplus_{j\in J}\lambda_j\otimes a_{jk}.$$

Если система строк не является GM-линейно зависимой, она называется *GM-линейно независимой*.

Далее будем обозначать через $O_{m\times n}$ или просто O нейтральный элемент матричной алгебры (матрицу, состоящую только из элементов $-\infty$).

Определение 1.6. Максимальное число строк в GM-линейно независимых подсистемах системы $\{a_i\}$ называется *GM-рангом* (*рангом Гондрана—Мину*) системы $\{a_i\}$. *Строчный GM-ранг* (*строчный ранг Гондрана—Мину*) матрицы A, т. е. GM-ранг системы строк матрицы $A\in\mathcal{M}_{m\times n}(S)$, обозначается $\mathrm{GMr}(A)$. *Столбцовый GM-ранг* (*столбцовый ранг Гондрана—Мину*) матрицы A, т. е. GM-ранг системы строк транспонированной матрицы A^{t}, обозначается $\mathrm{GMc}(A)$. Полагаем по определению $\mathrm{GMr}(O)=0$.

Будем обозначать через S_n множество всех перестановок множества $\{1,\ldots,n\}$, через A_n — множество чётных перестановок этого множества.

Определение 1.7. Пусть S — полукольцо, $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(S)$. *Положительным определителем* матрицы M называется элемент

$$\|M\|^+ = \bigoplus_{\sigma\in \mathrm{A}_n} m_{1,\sigma(1)} \otimes m_{2,\sigma(2)} \otimes \ldots \otimes m_{n,\sigma(n)} \in S.$$

Аналогично элемент

$$\|M\|^- = \bigoplus_{\sigma\in \mathrm{S}_n\setminus \mathrm{A}_n} m_{1,\sigma(1)} \otimes m_{2,\sigma(2)} \otimes \ldots \otimes m_{n,\sigma(n)} \in S$$

называется *отрицательным определителем* матрицы M.

Определение 1.8. Пусть S — полукольцо, $M \in \mathcal{M}_{m\times n}(S)$. Назовём квадратную подматрицу K размера $r\times r$ матрицы M *d-невырожденным минором* матрицы M, если $\|K\|^+ \neq \|K\|^-$.

Определение 1.9. *Детерминантным рангом* $\mathrm{d}(M)$ матрицы M называется максимальный размер d-невырожденного минора. Полагаем по определению $\mathrm{d}(O) = 0$.

Определение 1.10. Пусть S — полукольцо, $M \in \mathcal{M}_{k\times k}(S)$. *Перманент* матрицы M определяется как

$$\mathrm{perm}(M) = \bigoplus_{\sigma\in \mathrm{S}_k} m_{1,\sigma(1)} \otimes m_{2,\sigma(2)} \otimes \ldots \otimes m_{k,\sigma(k)} = \|M\|^+ \oplus \|M\|^- \in S.$$

Определение 1.11. Пусть $M \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}_{\max})$ ($M \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{B})$). Будем называть квадратную подматрицу T матрицы M размера $r\times r$ *тропически вырожденным минором* матрицы M, если максимум в выражении, определяющем перманент, достигается по крайней мере на двух слагаемых, т. е. если найдутся такие перестановки $\sigma \in \mathrm{S}_r$, $\tau \in \mathrm{S}_r$, $\sigma \neq \tau$, что

$$\mathrm{perm}(T) = t_{1,\sigma(1)} \otimes t_{2,\sigma(2)} \otimes \ldots \otimes t_{r,\sigma(r)} = t_{1,\tau(1)} \otimes t_{2,\tau(2)} \otimes \ldots \otimes t_{r,\tau(r)}.$$

Если подматрица T размера $r\times r$ не является тропически вырожденным минором, она называется *тропически невырожденным минором* матрицы M.

Определение 1.12. *Тропическим рангом* $\mathrm{trop}(M)$ матрицы M называется максимальный размер тропически невырожденного минора. Полагаем по определению $\mathrm{trop}(O) = 0$.

Определение 1.13. Система из n строк

$$\{a_i\} = \{(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{im})\}, \quad i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad a_{ij} \in S,$$

называется *строго линейно зависимой*, если для всех $k \in \{1, \ldots, m\}$ найдутся I_k и J_k — подмножества множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, такие что $I_k \cap J_k = \varnothing$, $I_k \cup J_k = \{1, \ldots, n\}$, и найдутся $\{\lambda_i \in S\}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, не все равные $-\infty$, такие что для всех $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ верно равенство

$$\bigoplus_{i\in I_k} \lambda_i \otimes a_{ik} = \bigoplus_{j\in J_k} \lambda_j \otimes a_{jk}.$$

Если система строк не является строго линейно зависимой, она называется *строго линейно независимой*.

Определение 1.14. Максимальное число строк в строго линейно независимых подсистемах системы $\{a_i\}$ называется *I-рангом* системы $\{a_i\}$. *I-ранг системы строк* матрицы $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}_{\max})$ ($A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{B})$) обозначается $\mathrm{Ir}(A)$, *I-ранг системы строк транспонированной матрицы* A^{t} (*столбцов матрицы* A) — $\mathrm{Ic}(A)$. Полагаем по определению $\mathrm{Ir}(O) = 0$.

Следующий вопрос был поставлен в [1].

Вопрос 1.15 [1, вопрос 8.10]. Найти минимальные натуральные числа m и n, такие что существует $(m \times n)$-матрица с различными строчным и столбцовым GM-рангами.

Целью настоящей работы является ответ на этот вопрос. Мы приводим пример матрицы $A \in \mathcal{M}_{5\times 6}(\mathbb{R}_{\max})$ ($\mathcal{M}_{5\times 6}(\mathbb{B})$), такой что $\mathrm{GMr}(A) > \mathrm{GMc}(A)$. Доказано, что $m = 5$, $n = 6$ — это минимальные натуральные числа, такие что существует матрица $C \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}_{\max})$ ($\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{B})$), для которой $\mathrm{GMr}(C) > \mathrm{GMc}(C)$. Доказано, что $m' = 6$, $n' = 5$ — это минимальные натуральные числа, такие что существует матрица $B \in \mathcal{M}_{m'\times n'}(\mathbb{R}_{\max})$ ($\mathcal{M}_{m'\times n'}(\mathbb{B})$), для которой $\mathrm{GMc}(B) > \mathrm{GMr}(B)$.

В [1] был приведён пример матрицы F, для которой $\mathrm{GMr}(F) > \mathrm{GMc}(F)$, но больших размеров.

Утверждение 1.16 [1, утверждение 8.8]. *Матрица*

$$F = \begin{pmatrix} -\infty & 0 & 0 & 0 & 0 & -\infty & -\infty \\ 0 & -\infty & -\infty & -\infty & 0 & -\infty & -\infty \\ 0 & -\infty & 0 & 0 & -\infty & 0 & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty & -\infty & -\infty & 0 & -\infty \\ 0 & 0 & -\infty & 0 & -\infty & -\infty & 0 \\ -\infty & -\infty & 0 & -\infty & -\infty & -\infty & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{6\times 7}(\mathbb{R}_{\max})$$

такова, что $\mathrm{GMr}(F) = 6 > \mathrm{GMc}(F) = \mathrm{d}(F) = 5$.

Также в [1] приводится пример матрицы G, такой что

$$\mathrm{d}(G) < \min\{\mathrm{GMr}(G), \mathrm{GMc}(G)\}.$$

Через G обозначается блочно-диагональная матрица с диагональными блоками F и F^{t}, доказывается, что $\mathrm{d}(G) = 10$, $\mathrm{GMr}(G) = 11$, $\mathrm{GMc}(G) = 11$.

2. Общие свойства рангов матриц над $\mathbb{R}_{\max}$ или над $\mathbb{B}$

Следующие утверждения следуют непосредственно из определений.

Утверждение 2.1. *Пусть* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}_{\max})$ *или* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{B})$. *Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) $\mathrm{GMr}(A) = 0$;
2) $\mathrm{GMc}(A) = 0$;
3) $\mathrm{d}(A) = 0$;
4) *все элементы матрицы* A *равны* $-\infty$.

Утверждение 2.2. *Перестановки столбцов или строк матрицы* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{B})$ *или* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}_{\max})$, *а также их умножение (в* $\mathbb{R}_{\max}$*-случае) на элементы, отличные от* $-\infty$, *не влияют на детерминантный, тропический и GM-ранги матрицы* A.

Утверждение 2.3. *Пусть* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{B})$ *(или* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}_{\max})$*),* $B \in \mathcal{M}_{m\times (n+1)}(\mathbb{B})$ *(или* $B \in \mathcal{M}_{m\times (n+1)}(\mathbb{R}_{\max})$*). Пусть матрица* B *отличается от матрицы* A *только повторяющимся столбцом или столбцом, состоящим только из элементов* $-\infty$. *Тогда* $\mathrm{GMr}(A) = \mathrm{GMr}(B)$, $\mathrm{GMc}(A) = \mathrm{GMc}(B)$, $\mathrm{d}(A) = \mathrm{d}(B)$, $\mathrm{trop}(A) = \mathrm{trop}(B)$.

Известно следующее утверждение.

Теорема 2.4 [3, теорема 2]. *Пусть* $A \in \mathcal{M}_{k\times k}(\mathbb{R}_{\max})$ *или* $A \in \mathcal{M}_{k\times k}(\mathbb{B})$. *Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *строки матрицы* A *GM-линейно зависимы*;
2) *столбцы матрицы* A *GM-линейно зависимы*;
3) $\|A\|^+ = \|A\|^-$.

Следствие 2.5. *Пусть* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}_{\max})$ *или* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{B})$. *Тогда* $\mathrm{GMr}(A) \geqslant \mathrm{d}(A)$ *и* $\mathrm{GMc}(A) \geqslant \mathrm{d}(A)$.

Доказательство. Пусть $\mathrm{d}(A) = r$. Тогда матрица A содержит d-невырожденный минор A' размера $r \times r$, $\|A'\|^+ \neq \|A'\|^-$. Пусть минор A' образован пересечением строк с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_r$ и столбцов с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_r$.

Предположим, что строки матрицы A с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_r$ GM-линейно зависимы. Тогда по определению существуют множества $I \subset \{i_1, i_2, \ldots, i_r\}$, $J \subset \{i_1, i_2, \ldots, i_r\}$, $I \cap J = \varnothing$, $I \cup J = \{i_1, i_2, \ldots, i_r\}$, и найдутся $\{\lambda_p\}$, $p \in \{i_1, i_2, \ldots, i_r\}$, не все λ_p равны $-\infty$, такие что для всех $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ верно равенство

$$\bigoplus_{p\in I} \lambda_p \otimes a_{pk} = \bigoplus_{p\in J} \lambda_p \otimes a_{pk}.$$

Равенство выполняется при всех $k \in \{j_1, j_2, \ldots, j_r\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, поэтому согласно определению 1.5 строки матрицы A' GM-линейно зависимы. Согласно теореме 2.4 $\|A'\|^+ = \|A'\|^-$. Но по определению матрицы A' верно, что $\|A'\|^+ \neq \|A'\|^-$. Противоречие.

Значит, строки с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_r$ GM-линейно независимы, $\mathrm{GMr}(A) \geqslant r$. Неравенство $\mathrm{GMc}(A) \geqslant r$ доказывается аналогично. □

Следствие 2.6. *Пусть* $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R}_{\max})$ *или* $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{B})$, $m < n$. *Тогда строки матрицы* A *GM-линейно зависимы.*

Доказательство. Обозначим через $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ такую матрицу, что $b_{ij} = a_{ij}$, если $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, и $b_{ij} = -\infty$, если $j \in \{m+1, \dots, n\}$, для всех $i \in \in \{1, 2, \dots, n\}$. Матрица B содержит столбец, состоящий только из элементов $-\infty$, поэтому $\|B\|^+ = \|B\|^- = -\infty$. Согласно теореме 2.4 строки матрицы B GM-линейно зависимы, т. е. найдутся множества $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$, $J \subset \subset \{1, 2, \dots, n\}$, $I \cap J = \varnothing$, $I \cup J = \{1, 2, \dots, n\}$, и найдутся $\{\lambda_i\}$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, не все λ_i равны $-\infty$, такие что для всех $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ верно равенство

$$\bigoplus_{i\in I} \lambda_i \otimes b_{ik} = \bigoplus_{j\in J} \lambda_j \otimes b_{jk}.$$

При $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ верно, что $b_{ik} = a_{ik}$. Поэтому при всех $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ верно равенство

$$\bigoplus_{i\in I} \lambda_i \otimes a_{ik} = \bigoplus_{j\in J} \lambda_j \otimes a_{jk},$$

т. е. строки матрицы A GM-линейно зависимы. □

Утверждение 2.7. *Пусть* $M \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R}_{\max})$ *или* $M \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{B})$, $\mathrm{d}(M) = 1$. *Тогда* $\mathrm{GMc}(M) = \mathrm{GMr}(M) = 1$.

Доказательство. Покажем, что любые две строки матрицы M GM-линейно зависимы. Обозначим через $A \in \mathcal{M}_{2\times m}$ подматрицу матрицы M, образованную двумя произвольными строками матрицы M. Поскольку A — подматрица матрицы M, всякий d-невырожденный минор размера $r \times r$ матрицы A будет d-невырожденным минором того же размера в матрице M. Поэтому $\mathrm{d}(A) \leqslant \mathrm{d}(M)$. Если $\mathrm{d}(A) < \mathrm{d}(M)$, то $\mathrm{d}(A) = 0$ и строки матрицы A GM-линейно зависимы, как следует из утверждения 2.1. Будем далее считать, что $\mathrm{d}(A) = \mathrm{d}(M) = 1$.

1. Пусть $m > 1$. Согласно утверждению 2.1 матрица A содержит по крайней мере один элемент, отличный от $-\infty$. Будем считать, что $a_{si} \neq -\infty$. Обозначим $t = \{1, 2\} \setminus \{s\}$. Обозначим $\lambda_t = a_{si} \neq -\infty$. Обозначим $\lambda_s = a_{ti}$. Поскольку $\mathrm{d}(A) < 2$, то ввиду d-вырожденности всех (2×2)-миноров матрицы A при всех $j \in \{1, \dots, m\}$ выполняется равенство $a_{si} \otimes a_{tj} = a_{sj} \otimes a_{ti}$, или $\lambda_t \otimes a_{tj} = \lambda_s \otimes a_{sj}$. Последнее равенство показывает GM-линейную зависимость строк матрицы A, поскольку $\lambda_t \neq -\infty$.

2. Пусть $m = 1$. Строки матрицы A GM-линейно зависимы согласно следствию 2.6.

В силу произвольности выбора строк матрицы A имеем, что любые две строки матрицы M GM-линейно зависимы, $\mathrm{GMr}(M) \leqslant 1$. Но по следствию 2.5 $\mathrm{GMr}(M) \geqslant \mathrm{d}(M)$. Значит, $\mathrm{GMr}(A) = 1$.

Равенство $\mathrm{GMc}(M) = 1$ доказывается аналогично. □

Известно следующее утверждение (см. [1, 2, 4]).

Теорема 2.8. *Пусть* $M \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}_{\max})$ *или* $M \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{B})$. *Тогда* $\mathrm{Ir}(M) = = \mathrm{trop}(M) = \mathrm{Ic}(M)$.

Утверждение 2.9. *Пусть* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R}_{\max})$ *или* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{B})$. *Тогда* $\mathrm{d}(A) \geqslant \mathrm{trop}(A)$.

Доказательство. Пусть $\operatorname{trop}(A) = r$. Тогда матрица A содержит квадратную подматрицу T размера $r \times r$, такую что найдётся перестановка $\sigma \in \mathrm{S}_r$, для которой $\operatorname{perm}(T) = t_{1,\sigma(1)} \otimes t_{2,\sigma(2)} \otimes \ldots \otimes t_{r,\sigma(r)}$ и для всех перестановок $\tau \in \mathrm{S}_r$, таких что $\sigma \neq \tau$, верно, что $\operatorname{perm}(T) \neq t_{1,\tau(1)} \otimes t_{2,\tau(2)} \otimes \ldots \otimes t_{r,\tau(r)}$. Поэтому $\|T\|^{\operatorname{sgn}(\sigma)} = \operatorname{perm}(T) \neq \|T\|^{-\operatorname{sgn}(\sigma)}$, т. е. минор T является d-невырожденным, $\mathrm{d}(A) \geqslant r$. $\square$

3. Пример матрицы A, такой что $\mathrm{GMr}(A) > \mathrm{d}(A)$

Приведём пример матрицы $A \in \mathcal{M}_{5\times6}(\mathbb{R}_{\max})$ (или $A \in \mathcal{M}_{5\times6}(\mathbb{B})$), для которой $\mathrm{GMr}(A) > \mathrm{d}(A)$. В разделе 4 будет показана минимальность числа строк (и числа столбцов) матрицы A среди всех матриц, для которых $\mathrm{GMr}(A) > \mathrm{d}(A)$.

Пример 3.1. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\infty & 0 & 0 & -\infty & -\infty \\ 0 & -\infty & -\infty & -\infty & 0 & 0 \\ -\infty & -\infty & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\infty & 0 & 0 & -\infty & 0 & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty & 0 & -\infty & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{5\times6}(\mathbb{R}_{\max}) \ \ (\text{или } A \in \mathcal{M}_{5\times6}(\mathbb{B})).$$

Тогда $\mathrm{GMr}(A) = 5$, $\mathrm{GMc}(A) = \mathrm{d}(A) = 4$, $\mathrm{GMr}(A^{\mathrm{t}}) = 4$, $\mathrm{GMc}(A^{\mathrm{t}}) = 5$.

Доказательство. 1. Покажем, что любые пять столбцов матрицы A GM-линейно зависимы. Укажем уравнения GM-линейных зависимостей столбцов:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\infty \\ -\infty \\ -\infty \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -\infty \\ -\infty \\ -\infty \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ -\infty \\ 0 \\ 0 \\ -\infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\infty \\ 0 \\ -\infty \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -\infty \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\infty \end{pmatrix},$$

или $\vec{c}_1 \oplus \vec{c}_2 \oplus \vec{c}_3 = \vec{c}_4 \oplus \vec{c}_5$ ($\vec{c}_i$ обозначен i-й столбец матрицы A);

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -\infty \\ 0 \\ 0 \\ -\infty \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -\infty \\ 0 \\ 0 \\ -\infty \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\infty \\ 0 \\ -\infty \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -\infty \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\infty \end{pmatrix},$$

или $\vec{c}_3 \oplus \vec{c}_6 = \vec{c}_4 \oplus \vec{c}_5$;

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\infty \\ -\infty \\ -\infty \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -\infty \\ -\infty \\ -\infty \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -\infty \\ 0 \\ 0 \\ -\infty \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\infty \\ 0 \\ -\infty \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -\infty \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\infty \end{pmatrix},$$

или $\vec{c}_1 \oplus \vec{c}_2 \oplus \vec{c}_6 = \vec{c}_4 \oplus \vec{c}_5$;

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\infty \\ -\infty \\ -\infty \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -\infty \\ -\infty \\ -\infty \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -\infty \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\infty \\ 0 \\ 0 \\ -\infty \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -\infty \\ 0 \\ 0 \\ -\infty \\ 0 \end{pmatrix},$$

или $\vec{c}_1 \oplus \vec{c}_2 \oplus \vec{c}_5 = \vec{c}_3 \oplus \vec{c}_6$;

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\infty \\ -\infty \\ -\infty \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -\infty \\ -\infty \\ -\infty \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ -\infty \\ 0 \\ -\infty \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\infty \\ 0 \\ 0 \\ -\infty \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -\infty \\ 0 \\ 0 \\ -\infty \\ 0 \end{pmatrix},$$

или $\vec{c}_1 \oplus \vec{c}_2 \oplus \vec{c}_4 = \vec{c}_3 \oplus \vec{c}_6$. Любые пять столбцов матрицы A GM-линейно зависимы, поэтому $\mathrm{GMc}(A) < 5$.

С другой стороны, матрица A содержит (4×4)-минор

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\infty & 0 & 0 \\ -\infty & -\infty & 0 & 0 \\ -\infty & 0 & 0 & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty & 0 \end{pmatrix},$$

полученный пересечением первых четырёх столбцов и строк с номерами 1, 3, 4, 5. Имеем $\|\bar{A}\|^+ = -\infty$, $\|\bar{A}\|^- = 0$, поэтому $\mathrm{d}(A) \geqslant 4$. Применяя следствие 2.5, получаем, что $\mathrm{GMc}(A) \geqslant \mathrm{d}(A)$. Кроме того, по ранее доказанному $\mathrm{GMc}(A) < 5$. Значит, $\mathrm{GMc}(A) = \mathrm{d}(A) = 4$.

2. Покажем, что система строк матрицы A GM-линейно независима.

Пусть $I \subset \{1,2,3,4,5\}$, $J \subset \{1,2,3,4,5\}$, $I \cap J = \varnothing$, $I \cup J = \{1,2,3,4,5\}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}_{\max}$, для всех $k \in \{1,2,3,4,5,6\}$ верно, что

$$\bigoplus_{i \in I} \lambda_i \otimes a_{ik} = \bigoplus_{j \in J} \lambda_j \otimes a_{jk}. \tag{3.1}$$

Рассмотрим возможные случаи.

2.1. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_4 = \lambda_5 = -\infty$. В этом случае

$$\lambda_3 \otimes \begin{pmatrix} -\infty & -\infty & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\infty,$$

и $\lambda_3 = -\infty$. Получаем тривиальную линейную зависимость, когда все λ_i равны $-\infty$.

2.2. Найдутся $q \in \{1,2,4,5\}$, такие что $\lambda_k \neq -\infty$.

Разберём случай $\lambda_1 \neq -\infty$. Оставшиеся случаи — $\lambda_2 \neq -\infty$, $\lambda_4 \neq -\infty$ и $\lambda_5 \neq -\infty$ — сводятся к рассматриваемому. Пусть, например, $\lambda_5 \neq -\infty$. Обозначим A' матрицу, которая получится, если поменять местами 1-й и 2-й столбцы матрицы A, потом 3-й и 6-й столбцы, затем поменять местами 1-ю и 5-ю строку получившейся матрицы и, наконец, 2-ю и 4-ю её строки. Заметим, что согласно равенству (3.1) для всех $k \in \{1,2,3,4,5,6\}$ верно, что

$$\bigoplus_{i \in I} \lambda'_i \otimes a'_{ik} = \bigoplus_{j \in J} \lambda'_j \otimes a'_{jk},$$

где $\lambda_1' = \lambda_5$, $\lambda_2' = \lambda_4$, $\lambda_3' = \lambda_3$, $\lambda_4' = \lambda_2$, $\lambda_5' = \lambda_1$, т. е. $\lambda_1' \neq -\infty$. Заметим, что матрицы A и A' совпадают. Итак, для матрицы $A' = A$ выполняется условие (3.1) и, кроме того, $\lambda_1' \neq -\infty$. Аналогично сводятся к рассматриваемому случаи $\lambda_4 \neq -\infty$ (в исходной матрице нужно переставить 1-й столбец со 2-м, 4-й столбец — с 5-м, 1-ю строку — с 4-й, 2-ю строку — с 5-й) и $\lambda_2 \neq -\infty$ (переставляем в исходной матрице 3-й столбец с 5-м, 4-й столбец с 6-м и 1-ю строку — со 2-й).

Не ограничивая общности, будем считать, что $1 \in I$, случай $1 \in J$ сводится к рассматриваемому переобозначением множеств I и J, которое, очевидно, не повлияет на равенство (3.1). Предположим, что $2 \in I$. В этом случае первая координата левой части равенства (3.1) равна $\lambda_1 \oplus \lambda_2 \neq -\infty$, а первая координата правой части равна $-\infty$. Противоречие. Значит, $2 \in J$. Кроме того, из равенства первых координат левой и правой частей равенства (3.1) следует, что $\lambda_1 = \lambda_2$.

Рассмотрим возможные случаи поведения λ_4 и λ_5.

2.2.1. $\lambda_4 = \lambda_5 = -\infty$. В этом случае для некоторого λ_3 выполняется одно из следующих уравнений:

$$\begin{aligned}&\lambda_1 \otimes \begin{pmatrix}0 & -\infty & 0 & 0 & -\infty & -\infty\end{pmatrix} \oplus \lambda_3 \otimes \begin{pmatrix}-\infty & -\infty & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \\ &\quad = \lambda_2 \otimes \begin{pmatrix}0 & -\infty & -\infty & -\infty & 0 & 0\end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\lambda_1 \otimes \begin{pmatrix}0 & -\infty & 0 & 0 & -\infty & -\infty\end{pmatrix} = \\ &\quad = \lambda_3 \otimes \begin{pmatrix}-\infty & -\infty & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \oplus \lambda_2 \otimes \begin{pmatrix}0 & -\infty & -\infty & -\infty & 0 & 0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Но в левой части первого уравнения третья координата равна $\lambda_1 \oplus \lambda_3 \neq -\infty$, а третья координата правой части первого уравнения равна $-\infty$. Первое уравнение не выполняется.

Аналогично показывается, что не выполняется второе уравнение (из-за пятой координаты).

Случай $\lambda_4 = \lambda_5 = -\infty$ невозможен.

2.2.2. $\lambda_4 = -\infty$, $\lambda_5 \neq -\infty$ или $\lambda_5 = -\infty$, $\lambda_4 \neq -\infty$. Этот случай невозможен ввиду неравенства вторых координат левой и правой частей уравнения (3.1).

2.2.3. $\lambda_4 \neq -\infty$, $\lambda_5 \neq -\infty$.

2.2.3.1. $4 \in I$. Сравнивая вторые координаты левых и правых частей равенства (3.1), получаем, что $5 \in J$ и $\lambda_4 = \lambda_5$.

Для GM-линейной зависимости системы строк матрицы A нужно, чтобы для некоторого λ_3 выполнялось одно из следующих равенств:

$$\begin{aligned}&\lambda_1 \otimes \begin{pmatrix}0 & -\infty & 0 & 0 & -\infty & -\infty\end{pmatrix} \oplus \lambda_4 \otimes \begin{pmatrix}-\infty & 0 & 0 & -\infty & 0 & -\infty\end{pmatrix} = \\ &\quad = \lambda_2 \otimes \begin{pmatrix}0 & -\infty & -\infty & -\infty & 0 & 0\end{pmatrix} \oplus \lambda_5 \otimes \begin{pmatrix}-\infty & 0 & -\infty & 0 & -\infty & 0\end{pmatrix} \oplus \\ &\quad \oplus \lambda_3 \otimes \begin{pmatrix}-\infty & -\infty & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\lambda_1 \otimes \begin{pmatrix}0 & -\infty & 0 & 0 & -\infty & -\infty\end{pmatrix} \oplus \lambda_4 \otimes \begin{pmatrix}-\infty & 0 & 0 & -\infty & 0 & -\infty\end{pmatrix} \oplus \\ &\quad \oplus \lambda_3 \otimes \begin{pmatrix}-\infty & -\infty & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \\ &\quad = \lambda_2 \otimes \begin{pmatrix}0 & -\infty & -\infty & -\infty & 0 & 0\end{pmatrix} \oplus \lambda_5 \otimes \begin{pmatrix}-\infty & 0 & -\infty & 0 & -\infty & 0\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Но первое из этих уравнений не выполняется из-за шестой координаты, а второе — из-за третьей.

2.2.3.2. $4 \in J$. Сравнивая вторые координаты левых и правых частей равенства (3.1), получаем, что $5 \in I$ и $\lambda_4 = \lambda_5$.

Для GM-линейной зависимости системы строк матрицы A нужно, чтобы для некоторого λ_3 выполнялось одно из следующих равенств:

$$\begin{aligned}
&\lambda_2 \otimes \begin{pmatrix}0 & -\infty & -\infty & -\infty & 0 & 0\end{pmatrix} \oplus \lambda_4 \otimes \begin{pmatrix}-\infty & 0 & 0 & -\infty & 0 & -\infty\end{pmatrix} = \\
&\quad = \lambda_1 \otimes \begin{pmatrix}0 & -\infty & 0 & 0 & -\infty & -\infty\end{pmatrix} \oplus \lambda_5 \otimes \begin{pmatrix}-\infty & 0 & -\infty & 0 & -\infty & 0\end{pmatrix} \oplus \\
&\quad \oplus \lambda_3 \otimes \begin{pmatrix}-\infty & -\infty & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\lambda_2 \otimes \begin{pmatrix}0 & -\infty & -\infty & -\infty & 0 & 0\end{pmatrix} \oplus \lambda_4 \otimes \begin{pmatrix}-\infty & 0 & 0 & -\infty & 0 & -\infty\end{pmatrix} \oplus \\
&\quad \oplus \lambda_3 \otimes \begin{pmatrix}-\infty & -\infty & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \\
&\quad = \lambda_1 \otimes \begin{pmatrix}0 & -\infty & 0 & 0 & -\infty & -\infty\end{pmatrix} \oplus \lambda_5 \otimes \begin{pmatrix}-\infty & 0 & -\infty & 0 & -\infty & 0\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Но первое из этих уравнений не выполняется из-за четвёртой координаты, а второе — из-за пятой.

Таким образом, случай $\lambda_4 \neq -\infty$, $\lambda_5 \neq -\infty$ также невозможен.

Итак, в случае 2.2. (если найдутся $k \in \{1, 2, 4, 5\}$, такие что $\lambda_k \neq -\infty$) нельзя построить GM-линейную зависимость системы строк матрицы A.

Мы доказали, что ни в случае $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_4 = \lambda_5 = -\infty$, ни в случае, если найдутся $k \in \{1, 2, 4, 5\}$, такие что $\lambda_k \neq -\infty$, нельзя построить GM-линейную зависимость строк матрицы A. Поэтому система строк матрицы A GM-линейно независима, $\mathrm{GMr}(A) = 5$.

Поскольку $\mathrm{GMr}(A) = 5$, $\mathrm{GMc}(A) = 4$, равенства $\mathrm{GMr}(A^{\mathrm{t}}) = 4$, $\mathrm{GMc}(A^{\mathrm{t}}) = 5$ следуют непосредственно из определения 1.6. □

4. Доказательство минимальности примера

4.1. Матрицы над $\mathbb{B}$

Лемма 4.1. *Пусть $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{B})$, $n \geqslant m$. Пусть для любой подматрицы матрицы A $B \in \mathcal{M}_{m\times m}(\mathbb{B})$ верно, что $\mathrm{perm}(B) = -\infty$. Тогда существует подматрица матрицы A $C \in \mathcal{M}_{l_1\times l_2}(\mathbb{B})$, $l_1 + l_2 = n + 1$, такая что $c_{ij} = -\infty$ для любых i и j.*

Доказательство. Индукция по m.

База. $m = 1$. Матрица A содержит лишь одну строку, и все её (1×1)-подматрицы имеют перманент $-\infty$. Поэтому $a_{1i} = -\infty$. Имеем матрицу размера $1 \times n$, состоящую только из элементов $-\infty$. База доказана.

Шаг. Предположим, что при любом $m < p$ утверждение верно для всех $n \geqslant m$. Докажем, что оно верно в этом случае и при $m = p$ для всех $n \geqslant p$.

Обозначим через $A' \in \mathcal{M}_{(p-1)\times n}(\mathbb{B})$ подматрицу матрицы A, полученную вычёркиванием последней строки. Обозначим через $\bar{A}_j \in \mathcal{M}_{(p-1)\times(n-1)}(\mathbb{B})$ матрицу, полученную из матрицы A вычёркиванием последней строки и j-го столбца. Возможны два случая.

1. Для всех $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ существует подматрица матрицы $\bar{A}_j$ $\bar{B}_j \in M_{(p-1)\times(p-1)}(\mathbb{B})$, такая что $\operatorname{perm}(\overline{B_j}) \neq -\infty$. Предположим, что найдётся j, такое что $a_{pj} \neq -\infty$. Обозначим через C_j матрицу размера $p\times p$, полученную добавлением к $\bar{B}_j$ j-го столбца и p-й строки. Согласно определению перманента $\operatorname{perm}(C_j) \geqslant \operatorname{perm}(\bar{B}_j) \otimes a_{pj} \neq -\infty$. Но с другой стороны, как у любой $(p\times p)$-подматрицы матрицы A, перманент матрицы C_j равен $-\infty$. Противоречие.

Значит, для всех $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ верно, что $a_{pj} = -\infty$. Строка с номером p состоит только из элементов $-\infty$ и является подматрицей размера $1\times n$. В первом случае индуктивный переход обоснован.

2. Найдётся такое $j \in \{1,2,\ldots,n\}$, что для любой подматрицы матрицы $\bar{A}_j$ $\bar{B}_j \in \mathcal{M}_{(p-1)\times(p-1)}(\mathbb{B})$ выполняется равенство $\operatorname{perm}(\bar{B}_j) = -\infty$. Поскольку также $p-1 \leqslant n-1$ и $p-1 < p$, для матрицы $\bar{A}_j$ применимо предположение индукции. Итак, существует подматрица матрицы $\bar{A}_j$ $C' \in \mathcal{M}_{k\times l}(\mathbb{B})$, $k+l=n$, состоящая только из элементов $-\infty$. Но матрица $\bar{A}_j$ сама является подматрицей матрицы A, поэтому матрица C' — подматрица матрицы A. Далее, пусть матрица C' образована пересечением строк матрицы A с номерами $i_1,i_2,\ldots,i_k$ и столбцов с номерами $j_1,j_2,\ldots,j_l$. Обозначим через $C_1 \in \mathcal{M}_{k\times(n-l)}(\mathbb{B})$ матрицу, образованную пересечением строк матрицы A с номерами $i_1,i_2,\ldots,i_k$ и столбцов с номерами из множества $\{1,2,\ldots,n\} \setminus \{j_1,j_2,\ldots,j_l\}$. Аналогично обозначим через $C_2 \in \mathcal{M}_{(p-k)\times l}(\mathbb{B})$ матрицу, образованную пересечением столбцов матрицы A с номерами $j_1,j_2,\ldots,j_l$ и строк с номерами из множества $\{1,2,\ldots,p\} \setminus \{i_1,i_2,\ldots,i_k\}$. Поскольку $k+l=n$ и $p\leqslant n$, ясно, что $n-l=k$, т. е. матрица C_1 квадратная, и $p-k\leqslant l$. Далее рассмотрим три случая.

2а. $\operatorname{perm}(C_1)\neq-\infty$, а матрица C_2 содержит подматрицу $D\in\mathcal{M}_{(p-k)\times(p-k)}(\mathbb{B})$, такую что $\operatorname{perm}(D) \neq -\infty$. Пусть столбцы матрицы D имеют номера из множества $\{h_1,h_2,\ldots,h_{p-k}\} \subset \{j_1,j_2,\ldots,j_l\}$. Обозначим через $S \in \mathcal{M}_{p\times p}(\mathbb{B})$ подматрицу матрицы A, образованную столбцами с номерами из множества $\{h_1,h_2,\ldots,h_{p-k}\} \cup (\{1,2,\ldots,n\} \setminus \{j_1,j_2,\ldots,j_l\})$. Тогда $\operatorname{perm}(S) \geqslant \operatorname{perm}(C_1)\otimes\operatorname{perm}(D) \neq -\infty$. Но с другой стороны, как у любой $(p\times p)$-подматрицы матрицы A, перманент матрицы S равен $-\infty$. Противоречие. Случай 2а невозможен.

2б. $\operatorname{perm}(C_1) = -\infty$. Поскольку $k<p$, к матрице C_1 применимо предположение индукции. Значит, существует подматрица матрицы C_1 $R \in \mathcal{M}_{t\times q}(\mathbb{B})$, состоящая только из элементов $-\infty$, такая что $t+q=k+1$. Пусть матрица R образована строками матрицы A с номерами из множества $\{v_1,v_2,\ldots,v_t\} \subset \{i_1,i_2,\ldots,i_k\}$ и столбцами с номерами из множества $\{g_1,g_2,\ldots,g_q\} \subset \{1,2,\ldots,n\} \setminus \{j_1,j_2,\ldots,j_l\}$. Обозначим через $C \in \mathcal{M}_{t\times(l+q)}(\mathbb{B})$ матрицу, образованную строками матрицы A с номерами $v_1,v_2,\ldots,v_t$ и столбцами с номерами из множества $\{g_1,g_2,\ldots,g_q\} \cup \{j_1,j_2,\ldots,j_l\}$. Согласно обозначениям любой элемент матрицы C содержится либо в матрице C', либо в матрице R.

Поэтому все элементы матрицы C равны $-\infty$. Кроме того, $t+(l+q)=(t+q)+l=$ $=k+1+l=(k+l)+1=n+1$, значит, C — искомая подматрица матрицы A.

2в. Все подматрицы $D\in\mathcal{M}_{(p-k)\times(p-k)}(\mathbb{B})$, содержащиеся в матрице C_2, обладают свойством $\operatorname{perm}(D)=-\infty$. Этот случай разбирается аналогично случаю 2б.

Итак, мы показали, что утверждение верно при $m=1$, предположили, что оно выполняется при всех $m<p$, и доказали, что в этом случае оно выполняется и при $m=p$. Утверждение полностью доказано. $\square$

Утверждение 4.2. *Пусть* $M\in\mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{B})$, $\mathrm{d}(M)=2$. *Тогда* $\mathrm{GMc}(M)=$ $=\mathrm{GMr}(M)=2$.

Доказательство. Покажем, что любые три строки матрицы M GM-линейно зависимы. Обозначим через $A\in\mathcal{M}_{3\times m}$ подматрицу матрицы M, образованную тремя произвольными строками матрицы M. Поскольку A — подматрица матрицы M, всякий d-невырожденный минор размера $r\times r$ матрицы A будет d-невырожденным минором того же размера в матрице M. Поэтому $\mathrm{d}(A)\leqslant\mathrm{d}(M)$. Если $\mathrm{d}(A)<\mathrm{d}(M)$, то строки матрицы A GM-линейно зависимы согласно утверждениям 2.1 (случай $\mathrm{d}(A)=0$) и 2.7 (случай $\mathrm{d}(A)=1$). Будем считать далее, что $\mathrm{d}(A)=\mathrm{d}(M)=2$.

Если $m<3$, то строки матрицы A GM-линейно зависимы согласно следствию 2.6. Далее считаем, что $m\geqslant 3$.

1. Пусть s-й столбец матрицы A содержит один элемент 0 и два элемента $-\infty$. С точностью до перестановки столбцов можно считать, что равный 0 элемент s-го столбца стоит в 1-й строке матрицы A. Обозначим через $A'\in\mathcal{M}_{2\times(m-1)}(\mathbb{B})$ матрицу, полученную из A вычёркиванием s-го столбца и 1-й строки.

1.1. Предположим, что $\mathrm{d}(A')=2$. Тогда существует подматрица матрицы A' $D\in\mathcal{M}_{2\times2}(\mathbb{B})$, такая что $\|D\|^+\neq\|D\|^-$. Пусть матрица D образована столбцами матрицы A с номерами r, t. Обозначим через $\bar{A}\in\mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{B})$ подматрицу матрицы A, образованную её столбцами с номерами s, r, t. Поскольку $a_{is}=-\infty$ для всех $i\in\{2,3\}$, матрица $\bar{A}$ с точностью до перестановки столбцов имеет вид

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}a_{1s}&a_{1r}&a_{1t}\\a_{2s}&a_{2r}&a_{2t}\\a_{3s}&a_{3r}&a_{3t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&a_{1r}&a_{1t}\\-\infty&a_{2r}&a_{2t}\\-\infty&a_{3r}&a_{3t}\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}a_{2r}&a_{2t}\\a_{3r}&a_{3t}\end{pmatrix}.$$

Поскольку $\|D\|^+\neq\|D\|^-$, то $\|\bar{A}\|^+\neq\|\bar{A}\|^-$. А поскольку $\bar{A}$ — подматрица матрицы A размера 3×3, то $\mathrm{d}(A)=3$, что противоречит условию $\mathrm{d}(A)=2$.

1.2. Поэтому $\mathrm{d}(A')<2$, $\mathrm{d}(A')\leqslant 1$. Согласно утверждениям 2.1 (случай $\mathrm{d}(A')=0$) и 2.7 (случай $\mathrm{d}(A')=1$) строки матрицы A' GM-линейно зависимы: найдутся такие $I\subset\{2,3\}$, $J\subset\{2,3\}$, $I\cap J=\varnothing$, $I\cup J=\{2,3\}$, λ_i, не все равные $-\infty$, такие что для всех $k\in\{1,\dots,m\}\setminus\{s\}$ верно

$$\bigoplus_{i\in I}\lambda_i\otimes a_{ik}=\bigoplus_{j\in J}\lambda_j\otimes a_{jk}.$$

Поскольку $a_{is} = -\infty$ при $i \in \{2,3\}$, верно, что

$$\bigoplus_{i\in I} \lambda_i \otimes a_{is} = \bigoplus_{j\in J} \lambda_j \otimes a_{js} = -\infty.$$

Поэтому уравнение GM-линейной зависимости выполняется не только при $k \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{s\}$, но и при $k = s$. Таким образом, строки матрицы A GM-линейно зависимы.

2. В матрице A нет столбцов, содержащих ровно один элемент 0. Обозначим через $Q \subset \{1,\ldots,m\}$ множество номеров тех столбцов, которые состоят только из элементов $-\infty$.

2.1. Предположим, что найдутся такие $i_1, i_2, i_3 \in \{1,\ldots,m\} \setminus Q$, что $a_{1,i_1} = -\infty$, $a_{2,i_2} = -\infty$, $a_{3,i_3} = -\infty$. Обозначим (3×3)-подматрицу матрицы A, образованную столбцами с номерами i_1, i_2, i_3, через A'. С точностью до перестановки столбцов матрица A' имеет вид

$$A' = \begin{pmatrix} a_{1,i_1} & a_{1,i_2} & a_{1,i_3} \\ a_{2,i_1} & a_{2,i_2} & a_{2,i_3} \\ a_{3,i_1} & a_{3,i_2} & a_{3,i_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\infty & 0 & 0 \\ 0 & -\infty & 0 \\ 0 & 0 & -\infty \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $\|A'\|^+ \neq \|A'\|^-$. Значит, $\mathrm{d}(A) = 3$, что противоречит условию $\mathrm{d}(A) = 2$.

2.2. Значит, наоборот, в матрице A найдётся такая строка (обозначим её номер через i), что для всех $k \in \{1,\ldots,m\} \setminus Q$ верно, что $a_{ik} = 0$. Обозначим $I = \{i\}$, $J = \{1,2,3\} \setminus \{i\}$. При $k \in \{1,\ldots,m\} \setminus Q$ выполняется равенство $a_{ik} = \bigoplus\limits_{j\in J} a_{jk} = 0$, поскольку столбцы с номерами из множества $\{1,\ldots,m\} \setminus Q$ содержат по крайней мере два элемента, равных 0. Кроме того, при $k \in Q$ верно, что $a_{lk} = -\infty$ для всех $l \in \{1,2,3\}$, поэтому $a_{ik} = \bigoplus\limits_{j\in J} a_{jk} = -\infty$ для всех $k \in Q$. Таким образом, равенство $a_{ik} = \bigoplus\limits_{j\in J} a_{jk}$ выполняется при всех $k \in \{1,\ldots,m\}$ и выражает GM-линейную зависимость строк матрицы A.

Итак, мы показали, что строки матрицы A GM-линейно зависимы. В силу произвольности выбора строк матрицы A имеем, что любые три строки матрицы M GM-линейно зависимы, $\mathrm{GMr}(M) \leqslant 2$. Но по следствию 2.5 $\mathrm{GMr}(M) \geqslant \mathrm{d}(M)$. Значит, $\mathrm{GMr}(M) = 2$.

Равенство $\mathrm{GMc}(M) = 2$ доказывается аналогично. □

Утверждение 4.3. *Пусть* $M \in \mathcal{M}_{n\times m'}(\mathbb{B})$, $\mathrm{d}(M) = 3$. *Тогда* $\mathrm{GMc}(M) = \mathrm{GMr}(M) = 3$.

Доказательство. Покажем, что любые четыре строки матрицы M GM-линейно зависимы. Обозначим через $B \in \mathcal{M}_{4\times m'}$ подматрицу матрицы M, образованную четырьмя произвольными строками матрицы M. Поскольку B — подматрица матрицы M, всякий d-невырожденный минор размера $r \times r$ матрицы B будет d-невырожденным минором того же размера в матрице M. Поэтому

$\mathrm{d}(B) \leqslant \mathrm{d}(M)$. Если $\mathrm{d}(B) < \mathrm{d}(M)$, то строки матрицы B GM-линейно зависимы согласно утверждениям 2.1 (случай $\mathrm{d}(B) = 0$), 2.7 (случай $\mathrm{d}(B) = 1$) и 4.2 (случай $\mathrm{d}(B) = 2$). Будем считать далее, что $\mathrm{d}(B) = \mathrm{d}(M) = 3$.

Если $m' \leqslant 3$, то строки матрицы B GM-линейно зависимы согласно следствию 2.6. Далее считаем, что $m' \geqslant 4$.

Если $m' = 4$, то $B \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{B})$, $\mathrm{d}(B) = 3$. Поэтому $\|B\|^+ = \|B\|^-$. По теореме 2.4 строки матрицы B GM-линейно зависимы.

Будем считать далее, что $m' \geqslant 5$. Покажем, что строки матрицы B GM-линейно зависимы.

Предположим, от противного, что существует матрица $B \in \mathcal{M}_{4\times m'}(\mathbb{B})$, такая что $\mathrm{d}(B) = 3$, $\mathrm{GMr}(B) = 4$. Обозначим через A такую матрицу с минимальным числом столбцов m. Заметим, что в силу вышеизложенного $m \geqslant 5$.

Дальнейшее доказательство проведём по шагам.

Шаг 1. Матрица A не содержит столбца, все элементы которого равны 0.

Предположим, что матрица $A \in \mathcal{M}_{4\times m}(\mathbb{B})$ содержит столбец (обозначим его номер через s), состоящий только из элементов, равных 0. Обозначим через $\bar{A}$ матрицу, полученную из матрицы A вычёркиванием s-го столбца. Поскольку $\bar{A}$ — подматрица матрицы A, каждый d-невырожденный минор матрицы $\bar{A}$ является d-невырожденным минором матрицы A. Кроме того, $\mathrm{d}(A) = 3$. Поэтому ясно, что $\mathrm{d}(\bar{A}) \leqslant 3$. Если $\mathrm{d}(\bar{A}) < 3$, то согласно утверждениям 2.1 (случай $\mathrm{d}(\bar{A}) = 0$), 2.7 (случай $\mathrm{d}(\bar{A}) = 1$) и 4.2 (случай $\mathrm{d}(\bar{A}) = 2$), а если $\mathrm{d}(\bar{A}) = 3$, то по предположению минимальности числа столбцов матрицы A существует GM-линейная зависимость строк матрицы $\bar{A}$:

$$\bigoplus_{i\in I} \lambda_i \otimes a_{ik} = \bigoplus_{j\in J} \lambda_j \otimes a_{jk}, \quad k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{s\}. \tag{4.1}$$

1. Если существуют такие $p, q \in \{1, 2, 3, 4\}$, что $p \in I$, $q \in J$, $\lambda_p = 0$, $\lambda_q = 0$, то верно равенство $\lambda_p \otimes a_{ps} = \lambda_q \otimes a_{qs} = 0$, поэтому равенство (4.1) верно и при $k = s$ и определяет GM-линейную зависимость строк матрицы A. Поэтому $\mathrm{GMr}(A) < 4$, что противоречит определению матрицы A, т. е. условию $\mathrm{GMr}(A) = 4$.

2. Пусть теперь для любого $q \in J$ выполняется равенство $\lambda_q = -\infty$. Случай, когда для любого $q \in I$ выполняется $\lambda_q = -\infty$, сводится к рассматриваемому переобозначением множеств I и J, которое, очевидно, не повлияет на равенство (4.1). По определению GM-линейной зависимости не все λ_i равны $-\infty$. Значит, существует такое $i \in I$, что $\lambda_i = 0$. Будем считать, что $i = 1$, случаи других значений i сводятся к рассматриваемому переобозначением номеров строк матрицы A. Получаем, что $\lambda_1 \otimes a_{1k} = a_{1k} = -\infty$ для всех $k \in \{1, \dots, m\} \setminus \{s\}$.

2.1. Предположим, что строки матрицы $A' \in \mathcal{M}_{3\times(m-1)}(\mathbb{B})$, полученной из матрицы $\bar{A}$ вычёркиванием 1-й строки, GM-линейно независимы. Тогда согласно утверждению 4.2 матрица A' содержит d-невырожденный минор N размера 3×3. Обозначим через $\bar{N}$ подматрицу матрицы A размера 4×4, содержащую s-й столбец и те столбцы, которые образуют подматрицу N. Поскольку $a_{1k} = -\infty$

для всех $k \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{s\}$ и $a_{ls} = 0$ для всех $l \in \{1, 2, 3, 4\}$, матрица $\bar{N}$ с точностью до перестановки столбцов имеет вид

$$\bar{N} = \begin{pmatrix} 0 & -\infty & -\infty & -\infty \\ 0 & & & \\ 0 & & N & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Поскольку 0 — нейтральный элемент по умножению, $\|\bar{N}\|^+ = \|N\|^+ \neq \|N\|^- = \|\bar{N}\|^-$. Значит, матрица A содержит d-невырожденный минор размера 4×4, что противоречит условию $\mathrm{d}(A) = 3$.

2.2. Значит, строки матрицы A' GM-линейно зависимы, например, имеет место линейная зависимость

$$\bigoplus_{i \in I'} \mu_i \otimes a_{ik} = \bigoplus_{j \in J'} \mu_j \otimes a_{jk}, \quad k \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{s\}, \tag{4.2}$$

$I' \cup J' = \{2, 3, 4\}$.

2.2.1. Предположим, что существуют такие $i \in I'$ и $j \in J'$, что $\mu_i = \mu_j = 0$. Имеем тогда, что $\mu_i \otimes a_{is} = \mu_j \otimes a_{js} = 0$, т. е. равенство (4.2) выполняется также при $k = s$ и даёт GM-линейную зависимость строк матрицы A.

2.2.2. Для всех $i \in I'$ верно, что $\mu_i = -\infty$. Случай, когда для всех $j \in J'$ верно, что $\mu_j = -\infty$, сводится к рассматриваемому переобозначением множеств I' и J', которое, очевидно, не повлияет на равенство (4.2). Не все μ_j равны $-\infty$, поэтому найдётся такое $j \in J'$, что $\mu_j = 0$. Используя равенство (4.2), получаем, что $\mu_j \otimes a_{jk} = -\infty$, поэтому $a_{jk} = -\infty = a_{1k}$ для всех $k \in \{1, 2, \ldots m\} \setminus \{s\}$. Кроме того, s-й столбец содержит только элементы 0, поэтому $a_{1s} = a_{js} = 0$. Итак, равенство $a_{1k} = a_{jk}$ выполняется при всех $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ и определяет GM-линейную зависимость строк матрицы A.

Таким образом, согласно рассуждениям пунктов 2.2.1 и 2.2.2 строки матрицы A GM-линейно зависимы. Из GM-линейной зависимости строк матрицы A следует, что $\mathrm{GMr}(A) < 4$, что противоречит условию $\mathrm{GMr}(A) = 4$. Значит, матрица A не содержит столбца, все элементы которого равны 0.

Шаг 2. Матрица A не содержит столбца, состоящего только из элементов $-\infty$.

Предположим, что s-й столбец матрицы A состоит только из элементов $-\infty$. Обозначим через $\bar{A}$ матрицу, полученную из матрицы A вычёркиванием s-го столбца. Согласно утверждению 2.3 $\mathrm{GMr}(A) = \mathrm{GMr}(\bar{A})$, $\mathrm{d}(A) = \mathrm{d}(\bar{A})$. Значит, $\mathrm{GMr}(\bar{A}) = 4$, $\mathrm{d}(\bar{A}) = 3$, и матрица $\bar{A}$ содержит столько же строк, сколько и матрица A, и на один столбец меньше. Противоречие с минимальностью матрицы A.

Шаг 3. Матрица A не содержит столбца, ровно один элемент которого равен 0.

Предположим, что s-й столбец матрицы A содержит три элемента $-\infty$ и один элемент 0. Будем считать далее, что равный 0 элемент s-го столбца стоит в 1-й строке матрицы A, случаи расположения равного 0 элемента в других строках сводятся к рассматриваемому переобозначением номеров строк матрицы A. Обозначим через $A' \in \mathcal{M}_{3\times(m-1)}(\mathbb{B})$ матрицу, полученную из матрицы A вычёркиванием s-го столбца и 1-й строки.

1. Предположим, что $\mathrm{d}(A') = 3$. Тогда существует подматрица матрицы A' $D \in \mathcal{M}_{3\times3}(\mathbb{B})$, такая что $\|D\|^+ \neq \|D\|^-$. Пусть матрица D образована столбцами матрицы A с номерами r, t, l. Обозначим через $\bar{A} \in \mathcal{M}_{4\times4}(\mathbb{B})$ подматрицу матрицы A, образованную её столбцами с номерами s, r, t, l. Поскольку $a_{is} = -\infty$ для всех $i \in \{2,3,4\}$, матрица $\bar{A}$ имеет вид

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{1s} & a_{1r} & a_{1t} & a_{1l} \\ a_{2s} & a_{2r} & a_{2t} & a_{2l} \\ a_{3s} & a_{3r} & a_{3t} & a_{3l} \\ a_{4s} & a_{4r} & a_{4t} & a_{4l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{1r} & a_{1t} & a_{1l} \\ -\infty & & & \\ -\infty & & D & \\ -\infty & & & \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\|D\|^+ \neq \|D\|^-$, то и $\|\bar{A}\|^+ \neq \|\bar{A}\|^-$. А поскольку $\bar{A}$ — подматрица матрицы A размера 4×4, то $\mathrm{d}(A) = 4$, что противоречит условию $\mathrm{d}(A) = 3$.

2. Поэтому $\mathrm{d}(A') < 3$, т. е. $\mathrm{d}(A') \leqslant 2$. Согласно утверждениям 2.1 (случай $\mathrm{d}(A') = 0$), 2.7 (случай $\mathrm{d}(A') = 1$) и 4.2 (случай $\mathrm{d}(A') = 2$) строки матрицы A' GM-линейно зависимы: существуют подмножества $I \subset \{2,3,4\}$, $J \subset \{2,3,4\}$, такие что $I \cap J = \varnothing$, $I \cup J = \{2,3,4\}$, и существуют $\{\lambda_i \in \mathbb{B}\}$, не все равные $-\infty$, такие что для всех $k \in \{1,\dots,m\} \setminus \{s\}$ верно равенство

$$\bigoplus_{i\in I} \lambda_i \otimes a_{ik} = \bigoplus_{j\in J} \lambda_j \otimes a_{jk}. \tag{4.3}$$

Поскольку $a_{is} = -\infty$ для всех $i \in \{2,3,4\}$, верно, что

$$\bigoplus_{i\in I} \lambda_i \otimes a_{is} = \bigoplus_{j\in J} \lambda_j \otimes a_{js} = -\infty.$$

Поэтому равенство (4.3) выполняется не только при $k \in \{1,\dots,n\}\setminus\{s\}$, но и при $k = s$. Таким образом, строки матрицы A GM-линейно зависимы, $\mathrm{GMr}(A) \leqslant 3$, что противоречит условию $\mathrm{GMr}(A) > 3$. Значит, матрица A не содержит столбца, содержащего три элемента, равных $-\infty$, и один элемент 0.

Шаг 4. Никакие два столбца матрицы A не совпадают друг с другом.

Предположим, что p-й и q-й столбцы матрицы A совпадают друг с другом. Обозначим через $\bar{A}$ матрицу, полученную из матрицы A вычёркиванием q-го столбца. Согласно утверждению 2.3 $\mathrm{GMr}(A) = \mathrm{GMr}(\bar{A})$, $\mathrm{d}(A) = \mathrm{d}(\bar{A})$. Значит, $\mathrm{GMr}(\bar{A}) = 4$, $\mathrm{d}(\bar{A}) = 3$, и матрица $\bar{A}$ содержит столько же строк, сколько и матрица A, и на один столбец меньше. Противоречие с минимальностью матрицы A.

Шаг 5. Матрица A содержит не более трёх столбцов, содержащих ровно два элемента 0.

Предположим, что матрица A содержит четыре столбца s_1, s_2, s_3, s_4, каждый из которых содержит ровно два элемента 0 и два элемента $-\infty$. Обозначим через

$P \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{B})$ подматрицу матрицы A, образованную столбцами матрицы A с номерами s_1, s_2, s_3, s_4.

1. $\mathrm{perm}(P) = -\infty$. Согласно лемме 4.1 матрица P содержит подматрицу U размера $l \times t$, $l + t = 5$, состоящую только из элементов $-\infty$. Понятно, что $4 - l \geqslant 2$, т. е. $l \leqslant 2$, поскольку в каждом столбце матрицы P стоит два элемента, отличных от $-\infty$.

1.1. Если $l = 2$, то $t = 3$. Пусть матрица U образована пересечением столбцов матрицы A с номерами i, j, k и строк матрицы A с номерами f, g. Поскольку столбцы i и j матрицы A являются столбцами матрицы P, то они содержат по два элемента 0. Поэтому $a_{hi} = -\infty$ при $h \in \{f,g\}$ и $a_{hi} = 0$ при $h \in \in \{1,2,3,4\}\setminus\{f,g\}$; $a_{hj} = -\infty$ при $h \in \{f,g\}$ и $a_{hj} = 0$ при $h \in \{1,2,3,4\}\setminus\{f,g\}$. Таким образом, столбцы матрицы A с номерами i и j совпадают, что противоречит утверждению шага 4 доказательства. Значит, $l \neq 2$.

1.2. $l = 1$. Тогда $t = 4$, т. е. матрица P имеет нулевую i-ю строку. Матрица P образована столбцами матрицы A с номерами s_1, s_2, s_3, s_4. Каждый из столбцов матрицы P содержит ровно по два элемента $-\infty$, причём один из них в i-й строке. Определим число $N(s_q)$ так, что $N(s_q) \neq i$ и $a_{N(s_q),s_q} = -\infty$. Область определения функции N — множество $\{s_1,s_2,s_3,s_4\}$ мощности 4, область значений — множество $\{1,2,3,4\} \setminus \{i\}$ мощности 3. Значит, найдутся такие g и h, что $N(s_g) = N(s_h) = j$. Таким образом, $a_{zh} = -\infty$ при $z \in \{i,j\}$, $a_{zh} = 0$ при $z \in \{1,2,3,4\}\setminus\{i,j\}$; $a_{zg} = -\infty$ при $z \in \{i,j\}$, $a_{zg} = 0$ при $z \in \{1,2,3,4\}\setminus\{i,j\}$, т. е. столбцы с номерами g и h совпадают, что противоречит утверждению шага 4 доказательства. Значит, $l \neq 1$.

Итак, мы показали, что $l \leqslant 2$, $l \neq 2$, $l \neq 1$. Противоречие. Значит, $\mathrm{perm}(P) \neq -\infty$, $\mathrm{perm}(P) = 0$.

2. $\mathrm{perm}(P) = 0$, т. е. $\|P\|^+ = \|P\|^- = 0$, поскольку $\mathrm{d}(A) = 3$ и P — подматрица матрицы A размера 4×4. Согласно утверждению 2.2 можем считать без ограничения общности, что $s_1 = 1$, $s_2 = 2$, $s_3 = 3$, $s_4 = 4$, т. е. что столбцы матрицы P — первые четыре столбца матрицы A. Далее, $\|P\|^+ = \|P\|^- = 0$, поэтому существуют такие чётная перестановка $\sigma \in \mathrm{A}_4$ и нечётная перестановка $\pi \in \mathrm{S}_4 \setminus \mathrm{A}_4$, что для всех $i \in \{1,2,3,4\}$ верно, что $a_{i,\sigma(i)} = 0$, $a_{i,\pi(i)} = 0$. Применим перестановку $\sigma^{-1} \in \mathrm{A}_4$ к номерам первых четырёх столбцов матрицы A, полученную матрицу обозначим A'. Согласно обозначениям $a'_{ii} = 0$. Согласно утверждению 2.2 перестановки строк не влияют на ранги матриц, поэтому считаем, не ограничивая общности, что $a_{ii} = 0$. Обозначим $\tau = \sigma^{-1}(\pi) \in \mathrm{S}_4 \setminus \mathrm{A}_4$, получим $a_{i,\tau(i)} = 0$. Разложим перестановку τ в произведение независимых циклов. По крайней мере один из этих циклов имеет чётную длину, в противном случае перестановка τ была бы произведением циклов нечётной длины, т. е. чётных перестановок, и чётной перестановкой. Пусть один из этих циклов имеет длину 2 и равен $(r\,s)$, $r,s \in \{1,2,3,4\}$. В этом случае имеем $a_{rr} = a_{rs} = = a_{sr} = a_{ss} = 0$. А поскольку каждый из первых четырёх столбцов матрицы A содержит не более двух элементов 0, получаем, что r-й и s-й столбцы матрицы A совпадают, противоречие с утверждением шага 4 доказательства.

Значит, ни один из независимых циклов не имеет длины 2. Поэтому цикл чётной длины в перестановке $\tau \in \mathrm{S}_4$ имеет длину 4, т. е. $\tau = (j_1 j_2 j_3 j_4)$. Например, $\tau = (1\,2\,3\,4)$, остальные случаи сводятся к рассматриваемому переобозначением номеров строк матрицы A. Итак,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\infty & -\infty & a_{15} & \dots & a_{1m} \\ -\infty & 0 & 0 & -\infty & a_{25} & \dots & a_{2m} \\ -\infty & -\infty & 0 & 0 & a_{35} & \dots & a_{3m} \\ 0 & -\infty & -\infty & 0 & a_{45} & \dots & a_{4m} \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\bar{A}$ матрицу, полученную из A вычёркиванием первого столбца. Поскольку $\bar{A}$ — подматрица матрицы A, каждый d-невырожденный минор матрицы $\bar{A}$ является d-невырожденным минором матрицы A того же порядка. Значит, $\mathrm{d}(\bar{A}) \leqslant \mathrm{d}(A)$. Если $\mathrm{d}(\bar{A}) < \mathrm{d}(A)$, т. е. $\mathrm{d}(\bar{A}) < 3$, то согласно утверждениям 2.1 (случай $\mathrm{d}(\bar{A}) = 0$), 2.7 (случай $\mathrm{d}(\bar{A}) = 1$) и 4.2 (случай $\mathrm{d}(\bar{A}) = 2$), а если $\mathrm{d}(\bar{A}) = 3$, то по предположению о минимальности числа столбцов матрицы A, строки матрицы $\bar{A}$ GM-линейно зависимы,

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\infty & -\infty & a_{15} & \dots & a_{1m} \\ 0 & 0 & -\infty & a_{25} & \dots & a_{2m} \\ -\infty & 0 & 0 & a_{35} & \dots & a_{3m} \\ -\infty & -\infty & 0 & a_{45} & \dots & a_{4m} \end{pmatrix},$$

$a_{1k} \oplus a_{3k} = a_{2k} \oplus a_{4k}$ — единственное уравнение GM-линейной зависимости, которому удовлетворяют первые три столбца матрицы $\bar{A}$. Поэтому равенство $a_{1k} \oplus a_{3k} = a_{2k} \oplus a_{4k}$ выражает GM-линейную зависимость строк матрицы $\bar{A}$ и выполняется при всех $k \in \{2, 3, \dots, m\}$. Заметим, что $a_{11} = 0$, $a_{41} = 0$, поэтому равенство $a_{1k} \oplus a_{3k} = a_{2k} \oplus a_{4k}$ выполняется при всех $k \in \{1, \dots, m\}$ и выражает GM-линейную зависимость строк матрицы A, $\mathrm{GMr}(A) \leqslant 3$, что противоречит условию $\mathrm{GMr}(A) > 3$. Полученное противоречие завершает доказательство утверждения шага 5.

Теперь используем установленные рассуждениями шагов 1—5 свойства матрицы A для завершения доказательства.

Шаг 6. Согласно утверждениям шагов 1—5 доказательства матрица A состоит только из столбцов, содержащих ровно один или ровно два элемента $-\infty$, причём столбцов, содержащих два элемента $-\infty$, в матрице A не более трёх. Кроме того, столбцы матрицы A не могут совпадать. Столбцов, содержащих ровно один элемент $-\infty$, не более четырёх: если их будет больше, они не будут попарно различными.

Рассмотрим отдельно случаи возможных значений числа столбцов матрицы A, содержащих ровно один элемент $-\infty$.

1. В матрице A ровно один столбец содержит три элемента 0 и один элемент $-\infty$. Тогда матрица A содержит не более четырёх столбцов. Но $m \geqslant 5$. Противоречие.

2. В матрице A ровно два столбца содержат три элемента 0 и один элемент $-\infty$. С точностью до обозначения номеров строк матрицы A можно считать, что эти столбцы имеют номера 1 и 2. Можно также полагать, что $a_{11} = -\infty$ и $a_{22} = -\infty$, так как в первом и втором столбцах элементы $-\infty$ стоят в различных строках. Поскольку $m \geqslant 5$, матрица A содержит не менее трёх столбцов с двумя элементами $-\infty$. А согласно шагу 5 доказательства таких столбцов и не более трёх.

2.1. Пусть $a_{33} = a_{34} = a_{43} = a_{44} = -\infty$. Тогда $a_{13} = a_{14} = a_{23} = a_{24} = 0$, т. е. 3-й и 4-й столбцы матрицы A совпадают, что противоречит утверждению шага 4 доказательства.

2.2. Поэтому один из элементов a_{33}, a_{34}, a_{43}, a_{44} равен 0. Не ограничивая общности, будем считать, что $a_{43} = 0$, случаи $a_{44} = 0$, $a_{34} = 0$ и $a_{33} = 0$ сводятся к рассматриваемому перестановками строк и столбцов, которые не влияют на ранги матриц согласно утверждению 2.2. Если также и $a_{33} = 0$, то, поступая аналогично пункту 2.1, находим среди элементов a_{44}, a_{34}, a_{45} и a_{35} равный нулю. Например, $a_{44} = 0$; случаи $a_{34} = 0$, $a_{45} = 0$ и $a_{35} = 0$ сводятся к рассматриваемому перестановками строк и столбцов. Согласно утверждению шага 4 доказательства $a_{34} = -\infty$. Таким образом, $a_{44} = 0$, $a_{34} = -\infty$. Применяем утверждение 2.2. Считаем далее, не ограничивая общности, что $a_{43} = 0$, $a_{33} = -\infty$. Далее, либо $a_{13} = 0$, либо $a_{23} = 0$. Будем считать, что $a_{23} = 0$. Случай $a_{13} = 0$ сводится к рассматриваемому перестановками строк и столбцов. Далее, пусть $a_{i4} = 0$, $a_{j4} = 0$, $a_{l5} = 0$ и $a_{s5} = 0$.

Рассмотрим отдельно случаи возможных значений элементов множеств $\{i, j\}$ и $\{l, s\}$.

2.2.1. Если $\{i, j\} \neq \{1, 2\}$, $\{i, j\} \neq \{3, 4\}$, $\{l, s\} \neq \{1, 2\}$, $\{l, s\} \neq \{3, 4\}$, то равенство $a_{1k} \oplus a_{2k} = a_{3k} \oplus a_{4k}$ выполняется при всех $k \in \{1, \ldots, 5\}$ и выражает GM-линейную зависимость строк матрицы A, $\mathrm{GMr}(A) \leqslant 3$, что противоречит условию $\mathrm{GMr}(A) > 3$.

2.2.2. $\{i, j\} = \{3, 4\}$, т. е. $a_{34} = 0$, $a_{44} = 0$, случай $\{l, s\} = \{3, 4\}$ сводится к рассматриваемому перестановками строк и столбцов. Для пятого столбца в соответствии с утверждением шага 4 доказательства осталось только четыре возможных варианта.

2.2.2.1. $a_{15} = 0$, $a_{45} = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} -\infty & 0 & -\infty & -\infty & 0 \\ 0 & -\infty & 0 & -\infty & -\infty \\ 0 & 0 & -\infty & 0 & -\infty \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Равенство $a_{4k} = a_{1k} \oplus a_{2k} \oplus a_{3k}$ выполняется при всех $k \in \{1, \ldots, 5\}$ и выражает GM-линейную зависимость строк матрицы A, $\mathrm{GMr}(A) \leqslant 3$, что противоречит условию $\mathrm{GMr}(A) > 3$.

2.2.2.2. $a_{15}=0$, $a_{35}=0$.

$$A=\begin{pmatrix}-\infty & 0 & -\infty & -\infty & 0\\ 0 & -\infty & 0 & -\infty & -\infty\\ 0 & 0 & -\infty & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\infty\end{pmatrix}.$$

Равенство $a_{2k}\oplus a_{3k}=a_{1k}\oplus a_{4k}$ выполняется при всех $k\in\{1,\ldots,5\}$ и выражает GM-линейную зависимость строк матрицы A, $\mathrm{GMr}(A)\leqslant 3$, что противоречит условию $\mathrm{GMr}(A)>3$.

2.2.2.3. $a_{15}=0$, $a_{25}=0$.

$$A=\begin{pmatrix}-\infty & 0 & -\infty & -\infty & 0\\ 0 & -\infty & 0 & -\infty & 0\\ 0 & 0 & -\infty & 0 & -\infty\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\infty\end{pmatrix}.$$

Равенство $a_{1k}\oplus a_{4k}=a_{2k}\oplus a_{3k}$ выполняется при всех $k\in\{1,\ldots,5\}$ и выражает GM-линейную зависимость строк матрицы A, $\mathrm{GMr}(A)\leqslant 3$, что противоречит условию $\mathrm{GMr}(A)>3$.

2.2.2.4. $a_{25}=0$, $a_{35}=0$.

$$A=\begin{pmatrix}-\infty & 0 & -\infty & -\infty & -\infty\\ 0 & -\infty & 0 & -\infty & 0\\ 0 & 0 & -\infty & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\infty\end{pmatrix}.$$

Обозначим через A' подматрицу размера 4×4 матрицы A, составленную из столбцов с номерами из множества $\{2,3,4,5\}$:

$$A'=\begin{pmatrix}0 & -\infty & -\infty & -\infty\\ -\infty & 0 & -\infty & 0\\ 0 & -\infty & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\infty\end{pmatrix}.$$

Заметим, что $\|A'\|^+=-\infty$, $\|A'\|^-=0$. Значит, $\mathrm{d}(A)=4$, что противоречит условию $\mathrm{d}(A)=3$.

2.2.3. $\{i,j\}=\{1,2\}$, т. е. $a_{14}=0$, $a_{24}=0$, случай $\{l,s\}=\{1,2\}$ сводится к рассматриваемому перестановками строк и столбцов. Для пятого столбца в соответствии с утверждением шага 4 доказательства осталось только четыре возможных варианта.

2.2.3.1. $a_{15}=0$, $a_{35}=0$.

$$A=\begin{pmatrix}-\infty & 0 & -\infty & 0 & 0\\ 0 & -\infty & 0 & 0 & -\infty\\ 0 & 0 & -\infty & -\infty & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\infty & -\infty\end{pmatrix}.$$

Равенство $a_{2k} \oplus a_{3k} = a_{1k} \oplus a_{4k}$ выполняется при всех $k \in \{1, \ldots, 5\}$ и выражает GM-линейную зависимость строк матрицы A, $\mathrm{GMr}(A) \leqslant 3$, что противоречит условию $\mathrm{GMr}(A) > 3$.

2.2.3.2. $a_{25} = 0$, $a_{35} = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} -\infty & 0 & -\infty & 0 & -\infty \\ 0 & -\infty & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\infty & -\infty & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\infty & -\infty \end{pmatrix}.$$

Обозначим через A' подматрицу размера 4×4 матрицы A, составленную из столбцов с номерами из множества $\{2, 3, 4, 5\}$:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & -\infty & 0 & -\infty \\ -\infty & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\infty & -\infty & 0 \\ 0 & 0 & -\infty & -\infty \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $\|A'\|^+ = 0$, $\|A'\|^- = -\infty$. Значит, $\mathrm{d}(A) = 4$, что противоречит условию $\mathrm{d}(A) = 3$.

2.2.3.3. $a_{15} = 0$, $a_{45} = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} -\infty & 0 & -\infty & 0 & 0 \\ 0 & -\infty & 0 & 0 & -\infty \\ 0 & 0 & -\infty & -\infty & -\infty \\ 0 & 0 & 0 & -\infty & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через A' подматрицу размера 4×4 матрицы A, составленную из столбцов с номерами из множества $\{2, 3, 4, 5\}$:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & -\infty & 0 & 0 \\ -\infty & 0 & 0 & -\infty \\ 0 & -\infty & -\infty & -\infty \\ 0 & 0 & -\infty & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $\|A'\|^+ = -\infty$, $\|A'\|^- = 0$. Значит, $\mathrm{d}(A) = 4$, что противоречит условию $\mathrm{d}(A) = 3$.

2.2.3.4. $a_{35} = 0$, $a_{45} = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} -\infty & 0 & -\infty & 0 & -\infty \\ 0 & -\infty & 0 & 0 & -\infty \\ 0 & 0 & -\infty & -\infty & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\infty & 0 \end{pmatrix}.$$

Равенство $a_{2k} \oplus a_{3k} = a_{1k} \oplus a_{4k}$ выполняется при всех $k \in \{1, \ldots, 5\}$ и выражает GM-линейную зависимость строк матрицы A, $\mathrm{GMr}(A) \leqslant 3$, что противоречит условию $\mathrm{GMr}(A) > 3$.

Случаи 2.2.1, 2.2.2 и 2.2.3 исчерпывают все возможные варианты поведения множеств $\{i, j\}$ и $\{l, s\}$.

3. В матрице A ровно три столбца содержат три элемента 0 и один элемент $-\infty$. С точностью до обозначений номеров столбцов можно считать, что эти столбцы имеют номера 1, 2 и 3. Можно также полагать, что $a_{11} = -\infty$, $a_{22} = -\infty$ и $a_{33} = -\infty$, так как равные $-\infty$ элементы первых трёх столбцов стоят в строках с разными номерами. Поскольку $m \geqslant 5$, матрица A содержит не менее двух столбцов с двумя элементами $-\infty$.

Рассмотрим отдельно все случаи возможных значений числа столбцов матрицы A, содержащих два элемента $-\infty$.

3а. Матрица A содержит три столбца, состоящие из двух элементов 0 и двух элементов $-\infty$.

Рассмотрим отдельно все возможные случаи поведения элементов четвёртой строки матрицы A.

3а.1. $a_{4h} = -\infty$ для всех $h \in \{4, 5, 6\}$. Пусть $a_{i4} = -\infty$, тогда согласно утверждению шага 4 доказательства $a_{i5} = a_{i6} = 0$. Пусть $a_{j5} = -\infty$, тогда аналогично $a_{j6} = 0$ и $a_{l6} = -\infty$, где $\{i, j, l\} = \{1, 2, 3\}$. Столбцы с номерами 4, 5, 6 переобозначаем так, что $a_{14} = -\infty$, $a_{25} = -\infty$, $a_{36} = -\infty$. Согласно утверждению 2.2 это не ограничивает общности. Считаем далее, что $i = 1$, $j = 2$, $l = 3$. Получаем, что

$$A = \begin{pmatrix} -\infty & 0 & 0 & -\infty & 0 & 0 \\ 0 & -\infty & 0 & 0 & -\infty & 0 \\ 0 & 0 & -\infty & 0 & 0 & -\infty \\ 0 & 0 & 0 & -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix}.$$

Обозначим через A' подматрицу размера 4×4 матрицы A, составленную из столбцов с номерами из множества $\{3, 4, 5, 6\}$:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & -\infty & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\infty & 0 \\ -\infty & 0 & 0 & -\infty \\ 0 & -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $\|A'\|^+ = -\infty$, $\|A'\|^- = 0$. Значит, $\mathrm{d}(A) = 4$, что противоречит условию $\mathrm{d}(A) = 3$.

3а.2. $a_{4h} = 0$ для всех $h \in \{4, 5, 6\}$. Пусть $a_{i4} = 0$, тогда согласно утверждению шага 4 доказательства верно, что $a_{i5} = a_{i6} = -\infty$. Пусть $a_{j5} = 0$, тогда аналогично $a_{j6} = -\infty$ и $a_{l6} = 0$, где $\{i, j, l\} = \{1, 2, 3\}$. Столбцы с номерами 4, 5, 6 переобозначаем так, что $a_{14} = 0$, $a_{25} = 0$, $a_{36} = 0$. Согласно утверждению 2.2 это не ограничивает общности. Считаем далее, что $i = 1$, $j = 2$, $l = 3$. Получаем, что

$$A = \begin{pmatrix} -\infty & 0 & 0 & 0 & -\infty & -\infty \\ 0 & -\infty & 0 & -\infty & 0 & -\infty \\ 0 & 0 & -\infty & -\infty & -\infty & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Равенство $a_{4k} = a_{1k} \oplus a_{2k} \oplus a_{3k}$ выполняется при всех $k \in \{1, \ldots, 6\}$ и выражает GM-линейную зависимость строк матрицы A, $\mathrm{GMr}(A) \leqslant 3$, что противоречит условию $\mathrm{GMr}(A) > 3$.

3a.3. $a_{4l} = 0$ и $a_{4t} = -\infty$. С точностью до обозначения номеров столбцов матрицы A можно считать, что $a_{44} = 0$, $a_{45} = -\infty$. Согласно утверждению 2.2 будем считать без ограничения общности, что $a_{34} = 0$, так как если $a_{i4} = 0$, $i \neq 3$, то можно переставить i-ю и 3-ю строки матрицы A, а потом i-й и 3-й столбцы получившейся матрицы, сводя рассуждения к рассматриваемому случаю.

Рассмотрим отдельно случаи $a_{35} = -\infty$ и $a_{35} = 0$.

3a.3.1. $a_{35} = -\infty$. В этом случае $a_{15} = a_{25} = 0$. Пусть $a_{i6} = a_{j6} = 0$. Согласно утверждению шага 4 доказательства $\{i, j\} \neq \{1, 2\}$ и $\{i, j\} \neq \{3, 4\}$. Пусть, например, $i = 1$, $j = 4$ (остальные возможные случаи для i и j рассматриваются аналогично). Итак,

$$A = \begin{pmatrix} -\infty & 0 & 0 & -\infty & 0 & 0 \\ 0 & -\infty & 0 & -\infty & 0 & -\infty \\ 0 & 0 & -\infty & 0 & -\infty & -\infty \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\infty & 0 \end{pmatrix}.$$

Равенство $a_{1k} \oplus a_{3k} = a_{2k} \oplus a_{4k}$ выполняется при всех $k \in \{1, \ldots, 6\}$ и выражает GM-линейную зависимость строк матрицы A, $\mathrm{GMr}(A) \leqslant 3$, что противоречит условию $\mathrm{GMr}(A) > 3$.

3a.3.2. $a_{35} = 0$. В этом случае либо $a_{15} = 0$, либо $a_{25} = 0$. Пусть $a_{25} = 0$, случай $a_{15} = 0$ сводится к рассматриваемому перестановкой строк и столбцов. Для шестого столбца в соответствии с утверждением шага 4 доказательства остались только четыре возможных варианта.

3a.3.2.1. $a_{16} = 0$, $a_{46} = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} -\infty & 0 & 0 & -\infty & -\infty & 0 \\ 0 & -\infty & 0 & -\infty & 0 & -\infty \\ 0 & 0 & -\infty & 0 & 0 & -\infty \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\infty & 0 \end{pmatrix}.$$

Равенство $a_{1k} \oplus a_{3k} = a_{2k} \oplus a_{4k}$ выполняется при всех $k \in \{1, \ldots, 6\}$ и выражает GM-линейную зависимость строк матрицы A, $\mathrm{GMr}(A) \leqslant 3$, что противоречит условию $\mathrm{GMr}(A) > 3$.

3a.3.2.2. $a_{16} = 0$, $a_{26} = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} -\infty & 0 & 0 & -\infty & -\infty & 0 \\ 0 & -\infty & 0 & -\infty & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\infty & 0 & 0 & -\infty \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\infty & -\infty \end{pmatrix}.$$

Равенство $a_{1k} \oplus a_{3k} = a_{2k} \oplus a_{4k}$ выполняется при всех $k \in \{1, \ldots, 6\}$ и выражает GM-линейную зависимость строк матрицы A, $\mathrm{GMr}(A) \leqslant 3$, что противоречит условию $\mathrm{GMr}(A) > 3$.

3а.3.2.3. $a_{16}=0$, $a_{36}=0$. В этом случае

$$A=\begin{pmatrix}-\infty & 0 & 0 & -\infty & -\infty & 0\\ 0 & -\infty & 0 & -\infty & 0 & -\infty\\ 0 & 0 & -\infty & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\infty & -\infty\end{pmatrix}.$$

Обозначим через A' подматрицу размера 4×4 матрицы A, составленную из столбцов с номерами из множества $\{3,4,5,6\}$:

$$A'=\begin{pmatrix}0 & -\infty & -\infty & 0\\ 0 & -\infty & 0 & -\infty\\ -\infty & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\infty & -\infty\end{pmatrix}.$$

Заметим, что $\|A'\|^{+}=0$, $\|A'\|^{-}=-\infty$. Значит, $\mathrm{d}(A)=4$, что противоречит условию $\mathrm{d}(A)=3$.

3а.3.2.4. $a_{26}=0$, $a_{46}=0$. В этом случае

$$A=\begin{pmatrix}-\infty & 0 & 0 & -\infty & -\infty & -\infty\\ 0 & -\infty & 0 & -\infty & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\infty & 0 & 0 & -\infty\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\infty & 0\end{pmatrix}.$$

Обозначим через A' подматрицу размера 4×4 матрицы A, составленную из столбцов с номерами из множества $\{3,4,5,6\}$:

$$A'=\begin{pmatrix}0 & -\infty & -\infty & -\infty\\ 0 & -\infty & 0 & 0\\ -\infty & 0 & 0 & -\infty\\ 0 & 0 & -\infty & 0\end{pmatrix}.$$

Заметим, что $\|A'\|^{+}=-\infty$, $\|A'\|^{-}=0$. Значит, $\mathrm{d}(A)=4$, что противоречит условию $\mathrm{d}(A)=3$.

3б. Матрица A содержит два столбца, состоящие из двух элементов 0 и двух элементов $-\infty$. Пусть $a_{i4}=0$, $a_{j4}=0$. В соответствии с утверждением шага 4 доказательства возможны три случая.

3б.1. $a_{l5}=0$, $a_{s5}=0$, $\{l,s\}\cap\{i,j\}=\varnothing$. В этом случае равенство $a_{ik}\oplus a_{lk}=a_{jk}\oplus a_{sk}$ выполняется при всех $k\in\{1,\dots,5\}$ и выражает GM-линейную зависимость строк матрицы A, $\mathrm{GMr}(A)\leqslant 3$, что противоречит условию $\mathrm{GMr}(A)>3$.

3б.2. $a_{i5}=0$, $a_{q5}=0$, $j\neq q$. Обозначим $\{r\}=\{1,2,3,4\}\setminus\{i,j,q\}$. В этом случае равенство $a_{ik}\oplus a_{rk}=a_{jk}\oplus a_{qk}$ выполняется при всех $k\in\{1,\dots,5\}$ и выражает GM-линейную зависимость строк матрицы A, $\mathrm{GMr}(A)\leqslant 3$, что противоречит условию $\mathrm{GMr}(A)>3$.

3б.3. $a_{j5}=0$, $a_{q5}=0$, $i\neq q$. Случай рассматривается аналогично 3б.2.

4. В матрице A ровно четыре столбца содержат три элемента 0 и один элемент $-\infty$. С точностью до обозначений номеров столбцов можно считать, что эти столбцы имеют номера 1, 2, 3 и 4. Можно также полагать, что $a_{11}=-\infty$,

$a_{22} = -\infty$, $a_{33} = -\infty$ и $a_{44} = -\infty$, так как равные $-\infty$ элементы первых четырёх столбцов стоят в строках с разными номерами. Далее возможны четыре случая.

Рассмотрим отдельно все случаи возможных значений числа столбцов матрицы A, содержащих два элемента $-\infty$.

4a. Матрица A содержит три столбца, состоящие из двух элементов 0 и двух элементов $-\infty$.

Не ограничивает общности предположение, что $a_{15} = 0$, так как если $a_{i5} = 0$, $i \neq 1$, меняем местами i-ю и 1-ю строки матрицы A и i-й и 1-й столбцы получившейся матрицы, в результате получаем матрицу V. Согласно обозначениям $v_{15} = 0$, $v_{11} = -\infty$, $v_{22} = -\infty$, $v_{33} = -\infty$ и $v_{44} = -\infty$, кроме того, каждый из первых четырёх столбцов матрицы V содержит лишь один элемент $-\infty$. Согласно утверждению 2.2 перестановки строк и столбцов не влияют на ранги матриц, поэтому, рассматривая вместо матрицы A, матрицу V, мы сводим рассуждения к случаю $a_{15} = 0$. Аналогично не ограничивает общности предположение, что $a_{25} = 0$. Итак, считаем, что $a_{25} = 0$.

Рассмотрим все возможные случаи поведения элементов шестого столбца матрицы A.

4a.1. Случай $a_{16} = 0$, $a_{26} = 0$ невозможен согласно утверждению шага 4 доказательства.

4a.2. Пусть $a_{36} = 0$, $a_{46} = 0$. Пусть также $a_{i7} = 0$, $a_{j7} = 0$. В соответствии с утверждением шага 4 доказательства невозможен случай $\{i, j\} = \{3, 4\}$ и случай $\{i, j\} = \{1, 2\}$. Пусть, например, $i = 1$, $j = 4$, остальные возможные случаи для i и j сводятся к рассматриваемому перестановками строк и столбцов. Итак,

$$A = \begin{pmatrix} -\infty & 0 & 0 & 0 & 0 & -\infty & 0 \\ 0 & -\infty & 0 & 0 & 0 & -\infty & -\infty \\ 0 & 0 & -\infty & 0 & -\infty & 0 & -\infty \\ 0 & 0 & 0 & -\infty & -\infty & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Равенство $a_{1k} \oplus a_{3k} = a_{2k} \oplus a_{4k}$ выполняется при всех $k \in \{1, \ldots, 7\}$ и выражает GM-линейную зависимость строк матрицы A, $\mathrm{GMr}(A) \leqslant 3$, что противоречит условию $\mathrm{GMr}(A) > 3$.

4a.3. Пусть $a_{i6} = 0$, $a_{j6} = 0$, $\{i, j\} \neq \{3, 4\}$ и $\{i, j\} \neq \{1, 2\}$. Будем считать, что $i = 1$ и $j = 3$, остальные возможные случаи для i и j сводятся к рассматриваемому перестановками строк и столбцов. Таким образом, $a_{16} = 0$ и $a_{36} = 0$. Для седьмого столбца в соответствии с утверждением шага 4 доказательства осталось только четыре возможных варианта.

4a.3.1. $a_{17} = 0$, $a_{47} = 0$. Итак,

$$A = \begin{pmatrix} -\infty & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\infty & 0 & 0 & 0 & -\infty & -\infty \\ 0 & 0 & -\infty & 0 & -\infty & 0 & -\infty \\ 0 & 0 & 0 & -\infty & -\infty & -\infty & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через A' подматрицу размера 4×4 матрицы A, составленную из столбцов с номерами из множества $\{1,5,6,7\}$:

$$A' = \begin{pmatrix} -\infty & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\infty & -\infty \\ 0 & -\infty & 0 & -\infty \\ 0 & -\infty & -\infty & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $\|A'\|^+ = -\infty$, $\|A'\|^- = 0$. Значит, $\mathrm{d}(A) = 4$, что противоречит условию $\mathrm{d}(A) = 3$.

4а.3.2. $a_{27} = 0$, $a_{37} = 0$. В этом случае

$$A = \begin{pmatrix} -\infty & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\infty \\ 0 & -\infty & 0 & 0 & 0 & -\infty & 0 \\ 0 & 0 & -\infty & 0 & -\infty & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix}.$$

Обозначим через A' подматрицу размера 4×4 матрицы A, составленную из столбцов с номерами из множества $\{3,5,6,7\}$:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\infty \\ 0 & 0 & -\infty & 0 \\ -\infty & -\infty & 0 & 0 \\ 0 & -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $\|A'\|^+ = 0$, $\|A'\|^- = -\infty$. Значит, $\mathrm{d}(A) = 4$, что противоречит условию $\mathrm{d}(A) = 3$.

4а.3.3. $a_{27} = 0$, $a_{47} = 0$. В этом случае

$$A = \begin{pmatrix} -\infty & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\infty \\ 0 & -\infty & 0 & 0 & 0 & -\infty & 0 \\ 0 & 0 & -\infty & 0 & -\infty & 0 & -\infty \\ 0 & 0 & 0 & -\infty & -\infty & -\infty & 0 \end{pmatrix}.$$

Равенство $a_{1k} \oplus a_{4k} = a_{2k} \oplus a_{3k}$ выполняется при всех k и выражает GM-линейную зависимость строк матрицы A, $\mathrm{GMr}(A) \leqslant 3$, что противоречит условию $\mathrm{GMr}(A) > 3$.

4а.3.4. $a_{37} = 0$, $a_{47} = 0$. В этом случае

$$A = \begin{pmatrix} -\infty & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\infty \\ 0 & -\infty & 0 & 0 & 0 & -\infty & -\infty \\ 0 & 0 & -\infty & 0 & -\infty & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\infty & -\infty & -\infty & 0 \end{pmatrix}.$$

Равенство $a_{1k} \oplus a_{4k} = a_{2k} \oplus a_{3k}$ выполняется при всех $k \in \{1,\ldots,7\}$ и выражает GM-линейную зависимость строк матрицы A, $\mathrm{GMr}(A) \leqslant 3$, что противоречит условию $\mathrm{GMr}(A) > 3$.

4б. Матрица A содержит только два столбца, состоящие из двух элементов 0 и двух элементов $-\infty$. Согласно рассуждениям пунктов 4а.1, 4а.2 и 4а.3 можем считать без ограничения общности, что возможны только два случая.

4б.1. $a_{15} = 0$, $a_{25} = 0$, $a_{16} = 0$, $a_{36} = 0$.

4б.2. $a_{15} = 0$, $a_{25} = 0$, $a_{36} = 0$, $a_{46} = 0$.

В обоих случаях равенство $a_{1k} \oplus a_{4k} = a_{2k} \oplus a_{3k}$ выполняется для всех $k \in \{1, \ldots, 6\}$ и выражает GM-линейную зависимость строк матрицы A, $\mathrm{GMr}(A) \leqslant 3$, что противоречит условию $\mathrm{GMr}(A) > 3$.

4в. Матрица A содержит только один столбец, состоящий из двух элементов 0 и двух элементов $-\infty$. Согласно рассуждениям пункта 4а, можем считать без ограничения общности, что возможен только случай $a_{15} = 0$, $a_{25} = 0$. Равенство $a_{1k} \oplus a_{4k} = a_{2k} \oplus a_{3k}$ выполняется при всех $k \in \{1, \ldots, 5\}$ и выражает GM-линейную зависимость строк матрицы A, $\mathrm{GMr}(A) \leqslant 3$, что противоречит условию $\mathrm{GMr}(A) > 3$.

4г. Матрица A не содержит столбцов, содержащих два элемента $-\infty$. В этом случае в матрице A только четыре столбца, но число столбцов матрицы A равно $m \geqslant 5$. Противоречие.

Итак, мы предположили существование такой матрицы B, что $\mathrm{d}(B) = 3$, $\mathrm{GMr}(B) > 3$, и привели это предположение к противоречию. Значит, $\mathrm{GMr}(B) \leqslant 3$, строки матрицы B GM-линейно зависимы. В силу произвольности выбора строк матрицы B имеем, что любые четыре строки матрицы M GM-линейно зависимы, $\mathrm{GMr}(M) \leqslant 3$. Но по следствию 2.5 $\mathrm{GMr}(M) \geqslant \mathrm{d}(M)$. Значит, $\mathrm{GMr}(M) = 3$.

Равенство $\mathrm{GMc}(M) = 3$ доказывается аналогично. □

4.2. Матрицы над $\mathbb{R}_{\max}$

Утверждение 4.4. *Пусть* $M \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R}_{\max})$, $\mathrm{d}(M) = 2$. *Тогда* $\mathrm{GMr}(M) = \mathrm{GMc}(M) = 2$.

Доказательство. Покажем, что любые три строки матрицы M GM-линейно зависимы. Обозначим через $A \in \mathcal{M}_{3\times m}$ подматрицу матрицы M, образованную тремя произвольными строками матрицы M. Поскольку A — подматрица матрицы M, всякий d-невырожденный минор размера $r\times r$ матрицы A будет d-невырожденным минором того же размера в матрице M. Поэтому $\mathrm{d}(A) \leqslant \mathrm{d}(M)$. Если $\mathrm{d}(A) < \mathrm{d}(M)$, то строки матрицы A GM-линейно зависимы согласно утверждениям 2.1 (случай $\mathrm{d}(A) = 0$) и 2.7 (случай $\mathrm{d}(A) = 1$). Будем считать далее, что $\mathrm{d}(A) = \mathrm{d}(M) = 2$.

Если $m < 3$, то строки матрицы A GM-линейно зависимы согласно следствию 2.6. Далее считаем, что $m \geqslant 3$.

Согласно утверждению 2.9 $\mathrm{trop}(A) \leqslant 2$. По теореме 2.8 $\mathrm{Ir}(A) \leqslant 2$, т. е. строки матрицы A строго линейно зависимы. Таким образом, найдутся множества $I_k \subset \{1, 2, 3\}$, $J_k \subset \{1, 2, 3\}$, $k \in \{1, \ldots, m\}$, $I_k \cap J_k = \varnothing$, $I_k \cup J_k = \{1, 2, 3\}$ для всех $k \in \{1, \ldots, m\}$, и найдутся $\{\lambda_i \in \mathbb{R}_{\max}\}$, $i \in \{1, 2, 3\}$, не все λ_i равны $-\infty$, такие что для всех $k \in \{1, \ldots, m\}$

$$\bigoplus_{i\in I_k} \lambda_i \otimes a_{ik} = \bigoplus_{j\in J_k} \lambda_j \otimes a_{jk}.$$

1. Пусть найдётся $p \in \{1, 2, 3\}$, такое что $\lambda_p = -\infty$. Согласно утверждению 2.2, не ограничивая общности, можно считать, что $p = 1$. Строгая линейная зависимость строк матрицы A принимает следующий вид: для всех $k \in \{1, \ldots, m\}$

$$\bigoplus_{i \in I_k \setminus \{1\}} \lambda_i \otimes a_{ik} = \bigoplus_{j \in J_k \setminus \{1\}} \lambda_j \otimes a_{jk}. \tag{4.4}$$

Если $|I_k \setminus \{1\}| = 2$ или $|I_k \setminus \{1\}| = 0$, то $\lambda_2 \otimes a_{2k} \oplus \lambda_3 \otimes a_{3k} = -\infty$, т. е. $\lambda_2 \otimes a_{2k} = \lambda_3 \otimes a_{3k} = -\infty$. Если $|I_k \setminus \{1\}| = 1$, то из уравнения (4.4) сразу следует, что $\lambda_2 \otimes a_{2k} = \lambda_3 \otimes a_{3k}$. Значит, для всех $k \in \{1, \ldots, m\}$ верно $\lambda_2 \otimes a_{2k} = \lambda_3 \otimes a_{3k}$. Кроме того, $\lambda_1 = -\infty$, поэтому либо $\lambda_2 \neq -\infty$, либо $\lambda_3 \neq -\infty$ в равенстве (4.4). Итак, ввиду того что для всех $k \in \{1, \ldots, m\}$ верно $\lambda_2 \otimes a_{2k} = \lambda_3 \otimes a_{3k}$, строки матрицы A GM-линейно зависимы.

2. Пусть теперь для всех $p \in \{1, 2, 3\}$ верно $\lambda_p \neq -\infty$. Можно умножить i-ю строку матрицы A на λ_i, согласно утверждению 2.2 это не повлияет на ранги матриц. Таким образом, можно считать, не ограничивая общности, что строгая линейная зависимость строк матрицы A имеет следующий вид: для всех $k \in \{1, \ldots, m\}$ верно, что

$$\bigoplus_{i \in I_k} a_{ik} = \bigoplus_{j \in J_k} a_{jk}. \tag{4.5}$$

Далее, если максимальный элемент j-го столбца матрицы A равен $b_j \neq -\infty$, можно умножить j-й столбец матрицы A на $-b_j$, и это не нарушит равенства (4.5). Таким образом, можно считать, не ограничивая общности, что либо максимальный элемент любого столбца матрицы A равен 0, либо в этом столбце вообще нет элементов, отличных от $-\infty$. Кроме того, для матрицы A выполняется равенство (4.5), причём если j-й столбец содержит хотя бы один элемент, равный 0, то он содержит по крайней мере два элемента, равных 0, как видно из равенства (4.5). Пусть матрица $B \in \mathcal{M}_{3\times m}(\mathbb{B})$ такая, что $b_{ij} = 0$ тогда и только тогда, когда $a_{ij} = 0$.

2a. Предположим, что матрица B содержит (3×3)-подматрицу

$$B' = \begin{pmatrix} b_{1p_1} & b_{1p_2} & b_{1p_3} \\ b_{2p_1} & b_{2p_2} & b_{2p_3} \\ b_{3p_1} & b_{3p_2} & b_{3p_3} \end{pmatrix},$$

такую что $\|B'\|^+ \neq \|B'\|^-$. Будем считать, что $\|B'\|^+ = 0$, $\|B'\|^- = -\infty$. (Случай $\|B'\|^+ = -\infty$, $\|B'\|^- = 0$ рассматривается аналогично.) Обозначим

$$A' = \begin{pmatrix} a_{1p_1} & a_{1p_2} & a_{1p_3} \\ a_{2p_1} & a_{2p_2} & a_{2p_3} \\ a_{3p_1} & a_{3p_2} & a_{3p_3} \end{pmatrix}.$$

Согласно определению матрицы B имеем, что $\|A'\|^+ = 0$. Так как $\mathrm{d}(A) < 3$, имеем $\|A'\|^- = 0$ и, поскольку элементы матрицы A не превосходят 0, получим, что существует нечётная перестановка $\sigma \in \mathrm{S}_3 \setminus \mathrm{A}_3$, такая что $a_{t,p_{\sigma(t)}} = 0$ для всех

$t \in \{1,2,3\}$. Но в этом случае по определению матрицы B получаем $b_{t,p_{\sigma(t)}} = 0$ для всех $t \in \{1,2,3\}$, т. е. $\|B'\|^- = 0$. Противоречие.

2б. Значит, для любой (3×3)-подматрицы B' матрицы B верно, что $\|B'\|^+ = \|B'\|^-$, и $\mathrm{d}(B) \leqslant 2$. Согласно утверждению 4.2 строки матрицы B GM-линейно зависимы: найдутся множества $I \subset \{1,2,3\}$, $J \subset \{1,2,3\}$, $I \cap J = \varnothing$, $I \cup J = \{1,2,3\}$, и найдутся $\{\mu_i \in \mathbb{B}\}$, $i \in \{1,2,3\}$, не все μ_i равны $-\infty$, такие что для всех $k \in \{1,\ldots,m\}$

$$\bigoplus_{i\in I} \mu_i \otimes b_{ik} = \bigoplus_{j\in J} \mu_j \otimes b_{jk}. \tag{4.6}$$

Возможны три случая.

2б.1. Все μ_i, $i \in \{1,2,3\}$, отличны от $-\infty$. Если k-й столбец содержит элемент, отличный от $-\infty$, то согласно определению матрицы B и равенству (4.6) имеем

$$\bigoplus_{i\in I} a_{ik} = \bigoplus_{j\in J} a_{jk} = 0,$$

а если все элементы k-го столбца равны $-\infty$, то

$$\bigoplus_{i\in I} a_{ik} = \bigoplus_{j\in J} a_{jk} = -\infty.$$

Поэтому выполняется равенство

$$\bigoplus_{i\in I} a_{ik} = \bigoplus_{j\in J} a_{jk},$$

которое определяет GM-линейную зависимость строк матрицы A.

2б.2. Ровно одно μ_i равно $-\infty$. Будем считать, что $\mu_1 = -\infty$, случаи $\mu_2 = -\infty$ и $\mu_3 = -\infty$ сводятся к рассматриваемому перенумерацией строк. Имеем для всех $k \in \{1,2,\ldots,m\}$ равенство $b_{2k} = b_{3k}$. Если $b_{2k} = b_{3k} = 0$, то и $a_{2k} = a_{3k} = 0$ ввиду определения матрицы B. Если же $b_{2k} = b_{3k} = -\infty$, то $a_{2k} \neq 0$, $a_{3k} \neq 0$. Далее, если $a_{1k} = 0$, то максимальный элемент k-го столбца матрицы A равен 0. Но если максимальный элемент k-го столбца матрицы A равен 0, то k-й столбец содержит по крайней мере два элемента, равных 0. Но это не так, поскольку $a_{2k} \neq 0$, $a_{3k} \neq 0$. Значит, максимальный элемент k-го столбца не равен 0. Согласно доказанному ранее в пункте 2, если столбец матрицы A имеет максимальным элементом не 0, то этот столбец состоит только из элементов $-\infty$. В этом случае для k-го столбца выполняется равенство $a_{2k} = a_{3k} = -\infty$. Итак, для всех k выполняется равенство $a_{2k} = a_{3k}$, которое и определяет GM-линейную зависимость строк матрицы A.

2б.3. $\mu_i = \mu_j = -\infty$, $i \neq j$, $i \in \{1,2,3\}$, $j \in \{1,2,3\}$. Пусть $s \in \{1,2,3\}\setminus\{i,j\}$. Равенство (4.6) в этом случае выглядит как $b_{sk} = -\infty$ для всех $k \in \{1,2,\ldots,m\}$, т. е. $a_{sk} \neq 0$ для всех $k \in \{1,2,\ldots,m\}$. Итак, s-я строка матрицы A не содержит ни одного элемента, равного 0. Фиксируем произвольное $k \in \{1,2,\ldots,m\}$. Предположим, что $a_{ik} \neq 0$ и $a_{ik} \neq -\infty$. Далее, если $a_{jk} = 0$, то максимальный элемент 0 встречается в k-м столбце матрицы A только один раз, что неверно ввиду рассуждений пункта 2. Если $a_{jk} \neq 0$, то максимальный элемент k-го столбца равен $a_{ik} \oplus a_{jk}$ и отличен от 0 и $-\infty$. С другой стороны, максимальный элемент любого столбца либо равен 0, либо этот столбец состоит только из элементов $-\infty$. Противоречие.

Значит, $a_{ik} = 0$ или $a_{ik} = -\infty$. Если $a_{ik} = 0$, то максимальный элемент k-го столбца равен 0 и максимальный элемент должен встретиться среди элементов столбца второй раз. А поскольку $a_{sk} \neq 0$, получаем $a_{jk} = 0$.

Пусть теперь $a_{ik} = -\infty$. Поскольку максимальный элемент k-го столбца матрицы A встречается среди элементов этого столбца по крайней мере два раза и $a_{sk} \neq 0$, $a_{ik} \neq 0$, максимальный элемент k-го столбца отличен от 0. Если же столбец матрицы A имеет максимальным элементом не 0, то столбец состоит только из элементов $-\infty$. Поэтому $a_{ik} = a_{jk} = -\infty$. Итак, мы показали, что $a_{ik} = a_{jk}$ для произвольного $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Равенство $a_{ik} = a_{jk}$ и определяет GM-линейную зависимость строк матрицы A.

Итак, мы показали, что строки матрицы A GM-линейно зависимы. В силу произвольности выбора строк матрицы A имеем, что любые три строки матрицы M GM-линейно зависимы, $\mathrm{GMr}(M) \leqslant 2$. Но по следствию 2.5 $\mathrm{GMr}(M) \geqslant \mathrm{d}(M)$. Значит, $\mathrm{GMr}(M) = 2$.

Равенство $\mathrm{GMc}(M) = 2$ доказывается аналогично. □

Утверждение 4.5. *Пусть* $M \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R}_{\max})$, $\mathrm{d}(M) = 3$. *Тогда* $\mathrm{GMr}(M) = \mathrm{GMc}(M) = 3$.

Доказательство. Покажем, что любые четыре строки матрицы M GM-линейно зависимы. Обозначим через $A \in \mathcal{M}_{4\times m}$ подматрицу матрицы M, образованную четырьмя произвольными строками матрицы M. Поскольку A — подматрица матрицы M, всякий d-невырожденный минор размера $r \times r$ матрицы A будет d-невырожденным минором того же размера в матрице M. Поэтому $\mathrm{d}(A) \leqslant \mathrm{d}(M)$. Если $\mathrm{d}(A) < \mathrm{d}(M)$, то строки матрицы A GM-линейно зависимы согласно утверждениям 2.1 (случай $\mathrm{d}(A) = 0$), 2.7 (случай $\mathrm{d}(A) = 1$) и 4.4 (случай $\mathrm{d}(A) = 2$). Будем считать далее, что $\mathrm{d}(A) = \mathrm{d}(M) = 3$.

Если $m < 4$, то строки матрицы A GM-линейно зависимы согласно следствию 2.6. Далее считаем, что $m \geqslant 4$.

Согласно утверждению 2.9 $\mathrm{trop}(A) \leqslant 3$. По теореме 2.8 $\mathrm{Ir}(A) \leqslant 3$, т. е. строки матрицы A строго линейно зависимы. Таким образом, найдутся множества $I_k \subset \{1, 2, 3, 4\}$, $J_k \subset \{1, 2, 3, 4\}$, $k \in \{1, \ldots, m\}$, такие что $I_k \cap J_k = \varnothing$, $I_k \cup J_k = \{1, 2, 3, 4\}$ для всех $k \in \{1, \ldots, m\}$, и найдутся $\{\mu_i \in \mathbb{R}_{\max}\}$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, не все μ_i равны $-\infty$, такие что для всех $k \in \{1, \ldots, m\}$

$$\bigoplus_{i\in I_k} \mu_i \otimes a_{ik} = \bigoplus_{j\in J_k} \mu_j \otimes a_{jk}. \tag{4.7}$$

Рассмотрим все различные возможности для числа номеров $p \in \{1, 2, 3, 4\}$, таких что $\mu_p = -\infty$.

1. Пусть в равенстве (4.7) для всех $p \in \{1, 2, 3, 4\}$ верно $\mu_p \neq -\infty$. Согласно утверждению 2.2 умножение строк или столбцов на элементы, отличные от $-\infty$, не влияет на ранги матриц, поэтому можно считать, не ограничивая общности, что для всех $k \in \{1, \ldots, m\}$ верно, что

$$\bigoplus_{i \in I_k} a_{ik} = \bigoplus_{j \in J_k} a_{jk}. \tag{4.8}$$

Если максимальный элемент j-го столбца матрицы A равен $b_j \neq -\infty$, можно умножить j-й столбец матрицы A на $-b_j$, и это не нарушит равенства (4.8). Согласно утверждению 2.2 можно считать без ограничения общности, что либо максимальный элемент любого столбца матрицы A равен 0, либо в этом столбце вообще нет элементов, отличных от $-\infty$. Кроме того, для матрицы A выполняется равенство (4.8), причём если j-й столбец содержит хотя бы один элемент, равный 0, то он содержит по крайней мере два элемента, равных 0, как видно из равенства (4.8). Обозначим через $B \in \mathcal{M}_{4\times m}(\mathbb{B})$ такую матрицу, что $b_{ij} = 0$ тогда и только тогда, когда $a_{ij} = 0$.

1а. Предположим, что матрица B содержит (4×4)-подматрицу

$$B' = \begin{pmatrix} b_{1p_1} & b_{1p_2} & b_{1p_3} & b_{1p_4} \\ b_{2p_1} & b_{2p_2} & b_{2p_3} & b_{2p_4} \\ b_{3p_1} & b_{3p_2} & b_{3p_3} & b_{3p_4} \\ b_{4p_1} & b_{4p_2} & b_{4p_3} & b_{4p_4} \end{pmatrix},$$

такую что $\|B'\|^+ \neq \|B'\|^-$. Не ограничивая общности, будем считать, что $\|B'\|^+ = 0$, $\|B'\|^- = -\infty$. Обозначим

$$A' = \begin{pmatrix} a_{1p_1} & a_{1p_2} & a_{1p_3} & a_{1p_4} \\ a_{2p_1} & a_{2p_2} & a_{2p_3} & a_{2p_4} \\ a_{3p_1} & a_{3p_2} & a_{3p_3} & a_{3p_4} \\ a_{4p_1} & a_{4p_2} & a_{4p_3} & a_{4p_4} \end{pmatrix}.$$

Согласно определению матрицы B имеем $\|A'\|^+ = 0$. Поскольку $\mathrm{d}(A) < 4$, имеем $\|A'\|^- = 0$ и, так как элементы матрицы A не превосходят 0, получим, что существует нечётная перестановка $\sigma \in \mathrm{S}_4 \setminus \mathrm{A}_4$, такая что $a_{t,p_{\sigma(t)}} = 0$ для всех $t \in \{1, 2, 3, 4\}$. Но в этом случае по определению матрицы B получаем $b_{t,p_{\sigma(t)}} = 0$ для всех $t \in \{1, 2, 3, 4\}$, т. е. $\|B'\|^- = 0$. Противоречие.

1б. Значит, для любой (4×4)-подматрицы B' матрицы B верно, что $\|B'\|^+ = \|B'\|^-$, и $\mathrm{d}(B) \leqslant 3$. Согласно утверждению 4.3 строки матрицы B GM-линейно зависимы: найдутся множества $I \subset \{1, 2, 3, 4\}$, $J \subset \{1, 2, 3, 4\}$, такие что $I \cap J = \varnothing$, $I \cup J = \{1, 2, 3, 4\}$, и найдутся $\{\lambda_i \in \mathbb{B}\}$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, не все λ_i равны $-\infty$, такие что для всех $k \in \{1, \ldots, m\}$

$$\bigoplus_{i \in I} \lambda_i \otimes b_{ik} = \bigoplus_{j \in J} \lambda_j \otimes b_{jk}. \tag{4.9}$$

Возможны четыре случая.

1б.1. Все λ_i, $i \in \{1,2,3,4\}$, отличны от $-\infty$. Тогда уравнение

$$\bigoplus_{i\in I} a_{ik} = \bigoplus_{j\in J} a_{jk}$$

определяет GM-линейную зависимость строк матрицы A: если k-й столбец содержит элемент, отличный от $-\infty$, то согласно определению матрицы B и равенству (4.9) имеем

$$\bigoplus_{i\in I} a_{ik} = \bigoplus_{j\in J} a_{jk} = 0,$$

а если все элементы k-го столбца равны $-\infty$, то

$$\bigoplus_{i\in I} a_{ik} = \bigoplus_{j\in J} a_{jk} = -\infty.$$

Строки матрицы A GM-линейно зависимы.

1б.2. Ровно одно λ_i равно $-\infty$. Будем считать, что $\lambda_4 = -\infty$, остальные случаи рассматриваются аналогично. Из равенства (4.9) следует, что найдутся множества $I' \subset \{1,2,3\}$, $J' \subset \{1,2,3\}$, такие что $I' \cap J' = \varnothing$, $I' \cup J' = \{1,2,3\}$ и для всех $k \in \{1,\ldots,m\}$

$$\bigoplus_{i\in I'} b_{ik} = \bigoplus_{j\in J'} b_{jk}.$$

Покажем, что выполняется равенство

$$\bigoplus_{i\in I'} a_{ik} = \bigoplus_{j\in J'} a_{jk},$$

которое определяет GM-линейную зависимость строк матрицы A. Если максимальный элемент k-го столбца матрицы A равен 0, то 0 среди элементов k-го столбца встречается по крайней мере дважды и

$$\bigoplus_{i\in I'} a_{ik} = \bigoplus_{j\in J'} a_{jk} = 0.$$

С другой стороны, если максимальный элемент k-го столбца матрицы A отличен от 0, то все элементы k-го столбца равны $-\infty$ и

$$\bigoplus_{i\in I'} a_{ik} = \bigoplus_{j\in J'} a_{jk} = -\infty.$$

Итак, строки матрицы A GM-линейно зависимы.

1б.3. Пусть теперь ровно два из четырёх λ_i равны $-\infty$. Будем считать, что $\lambda_1 = \lambda_2 = -\infty$, остальные случаи рассматриваются аналогично. Согласно равенству (4.9) имеем для всех $k \in \{1,2,\ldots,m\}$ равенство $b_{3k} = b_{4k}$. Если $b_{3k} = b_{4k} = 0$, то и $a_{3k} = a_{4k} = 0$ ввиду определения матрицы B.

Если же $b_{3k} = b_{4k} = -\infty$, то $a_{3k} \neq 0$, $a_{4k} \neq 0$. Если $a_{1k} = 0$, то максимальный элемент k-го столбца матрицы A равен 0. Но если максимальный элемент k-го столбца матрицы A равен 0, то k-й столбец содержит по крайней мере два элемента, равных 0. Значит, $a_{2k} = 0 = a_{1k}$.

Если $a_{1k} \neq 0$ и максимальный элемент k-го столбца равен 0, то 0 встречается среди элементов k-го столбца матрицы A ровно один раз, поскольку $a_{1k} \neq 0$, $a_{3k} \neq 0$, $a_{4k} \neq 0$. Но если 0 является максимальным элементом k-го столбца, то среди элементов k-го столбца он встречается по крайней мере два раза. Противоречие. Значит, максимальный элемент k-го столбца матрицы A отличен от 0. Но если максимальный элемент столбца матрицы A имеет максимальным элементом не 0, то этот столбец состоит только из элементов $-\infty$. В этом случае для k-го столбца выполняется равенство $a_{1k} = a_{2k} = a_{3k} = a_{4k} = -\infty$.

Итак, для любого k выполняется одно из равенств $a_{3k} = a_{4k} = 0$, $a_{1k} = a_{2k} = 0$, $a_{1k} = a_{2k} = a_{3k} = a_{4k} = -\infty$. Поэтому равенство $a_{1k} \oplus a_{3k} = a_{2k} \oplus a_{4k}$ выполняется для всех k и определяет GM-линейную зависимость строк матрицы A.

1б.4. Пусть теперь только одно из четырёх λ_i отлично от $-\infty$. Будем считать, что $\lambda_1 \neq -\infty$, остальные случаи рассматриваются аналогично. Из равенства (4.9) следует, что для всех $k \in \{1, \ldots, m\}$ выполнено равенство $b_{1k} = -\infty$. В соответствии с определением матрицы B это означает, что $a_{1k} \neq 0$.

Зафиксируем произвольное $k \in \{1, \ldots, m\}$. Если максимальный элемент k-го столбца отличен от 0, то $a_{ik} = -\infty$ для всех $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. В противном случае среди элементов a_{2k}, a_{3k}, a_{4k} найдутся два равных 0. Обозначим равные 0 элементы через $a_{i(k),k}$ и $a_{j(k),k}$. Обозначим также $\mu'_1 = -\infty$, $\mu'_p = 0$ при $p \in \{2, 3, 4\}$. Положим $i(k) \in I'_k$, $j(k) \in J'_k$. Таким образом, равенство

$$\bigoplus_{i \in I'_k} \mu'_i \otimes a_{ik} = \bigoplus_{j \in J'_k} \mu'_j \otimes a_{jk}$$

определяет строгую линейную зависимость строк матрицы A, причём коэффициент ровно при одной из строк равен $-\infty$. Доказательство случая 1б.4. сводится к доказательству случая 2.

2. Пусть теперь в равенстве (4.7) ровно одно μ_i из четырёх равно $-\infty$. С точностью до перестановки строк можно считать, что $\mu_1 = -\infty$. Если для всех $k \in \{1, \ldots, m\}$ верно, что $a_{1k} = -\infty$, то система, состоящая только из первой строки матрицы A, GM-линейно зависима.

Пусть теперь найдётся такое $s \in \{1, \ldots, m\}$, что $a_{1s} \neq -\infty$. Согласно утверждению 2.2 умножение строк или столбцов на элементы, отличные от $-\infty$, не влияет на ранги матриц. Поэтому можно считать, не ограничивая общности, что для любого $k \in \{1, \ldots, m\}$ верно, что

$$\bigoplus_{i \in I_k \setminus \{1\}} a_{ik} = \bigoplus_{j \in J_k \setminus \{1\}} a_{jk}. \tag{4.10}$$

Если $\max\{a_{2k}, a_{3k}, a_{4k}\} = a_{ik}$ отличен от $-\infty$, можно умножить k-й столбец матрицы A на $-a_{ik}$, и это не нарушит равенства (4.10). Поскольку $a_{1s} \neq -\infty$, имеем, что $\max\limits_{k\in\{1,\ldots,m\}}\{a_{1k}\} = a_{1q} \neq -\infty$. Можно умножить первую строку матрицы A на $-a_{1q}$, и это не повлияет на равенство (4.10), так как первая строка матрицы A в нём не участвует. Согласно утверждению 2.2 мы можем считать, не ограничивая общности, что максимальный элемент k-го столбца матрицы A не превосходит 0, максимальный элемент 1-й строки матрицы A равен 0. Кроме того, если среди элементов a_{2k}, a_{3k}, a_{4k} нет элемента 0, то $a_{2k} = a_{3k} = a_{4k} = -\infty$. Если же один из элементов a_{2k}, a_{3k}, a_{4k} равен 0, то среди элементов a_{2k}, a_{3k}, a_{4k} найдётся по крайней мере два равных 0, как показывает равенство (4.10).

Обозначим через K_1 множество таких $k \in \{1,\ldots,m\}$, что $a_{1k} = 0$. Множество K_1 непусто, так как $q \in K_1$. Обозначим через K_2 множество таких $k \in \{1,\ldots,m\}$, что $a_{2k} = a_{3k} = a_{4k} = -\infty$. Согласно рассуждениям предыдущего абзаца, если k не принадлежит множеству K_2, то по крайней мере два элемента из a_{2k}, a_{3k}, a_{4k} равны 0.

2а. Пусть для некоторого k верно, что $a_{1k} \neq -\infty$ и $k \in K_2$. Покажем, что для матрицы $C \in \mathcal{M}_{3\times(m-1)}(\mathbb{R}_{\max})$, полученной вычёркиванием k-го столбца и 1-й строки матрицы A, верно, что $\mathrm{d}(C) \leqslant 2$. Предположим, что это не так. Тогда существуют такие $\{i,j,l\} \subset \{1,\ldots,m\} \setminus \{k\}$, что для матрицы

$$D = \begin{pmatrix} a_{2i} & a_{2j} & a_{2l} \\ a_{3i} & a_{3j} & a_{3l} \\ a_{4i} & a_{4j} & a_{4l} \end{pmatrix}$$

верно, что $\|D\|^+ \neq \|D\|^-$. Тогда для матрицы

$$D' = \begin{pmatrix} a_{1i} & a_{1j} & a_{1l} & a_{1k} \\ a_{2i} & a_{2j} & a_{2l} & a_{2k} \\ a_{3i} & a_{3j} & a_{3l} & a_{3k} \\ a_{4i} & a_{4j} & a_{4l} & a_{4k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1i} & a_{1j} & a_{1l} & a_{1k} \\ a_{2i} & a_{2j} & a_{2l} & -\infty \\ a_{3i} & a_{3j} & a_{3l} & -\infty \\ a_{4i} & a_{4j} & a_{4l} & -\infty \end{pmatrix}$$

верно, что $\|D'\|^+ \neq \|D'\|^-$, и $\mathrm{d}(A) = 4$. Но это не так, $\mathrm{d}(A) = 3$. Противоречие.

Значит, $\mathrm{d}(C) \leqslant 2$. Обозначим через $C' \in \mathcal{M}_{3\times m}(\mathbb{R}_{\max})$ матрицу, составленную из 2-й, 3-й и 4-й строк матрицы A. $\mathrm{d}(C') = \mathrm{d}(C)$, поскольку матрица C' получена из матрицы C добавлением столбцов, состоящих только из элементов $-\infty$. Согласно утверждению 4.4 строки матрицы C' GM-линейно зависимы, и значит, строки матрицы A GM-линейно зависимы.

2б. Теперь пусть для всех $k \in K_2$ верно $a_{1k} = -\infty$, т. е. и $K_1 \cap K_2 = \varnothing$. Обозначим $r = m - |K_1| - |K_2|$. Обозначим через $F \in \mathcal{M}_{3\times r}(\mathbb{R}_{\max})$ матрицу, полученную из матрицы A отбрасыванием столбцов с номерами из множества $K_1 \cup K_2$ и отбрасыванием 1-й строки. Согласно доказанному ранее в пункте 2 доказательства этого утверждения в каждом столбце матрицы F содержатся по крайней мере два элемента, равных 0. Обозначим далее через $H \in \mathcal{M}_{4\times m}(\mathbb{B})$ такую матрицу, что $h_{ij} = 0$ тогда и только тогда, когда $a_{ij} \geqslant 0$. Матрица A, согласно рассуждениям пункта 2, не содержит элементов, больших 0, поэтому можно считать, не ограничивая общности, что $h_{ij} = 0$ тогда и только тогда, когда $a_{ij} = 0$. Обозначим через $V \in \mathcal{M}_{3\times r}(\mathbb{B})$ матрицу, полученную из матрицы H

отбрасыванием столбцов с номерами из множества $K_1 \cup K_2$ и отбрасыванием 1-й строки. В каждом столбце матрицы V содержатся по крайней мере два элемента, равных 0.

2б.1. Покажем, что $\mathrm{d}(V) \leqslant 2$. Пусть это не так. Тогда найдутся такие $\{k_2, k_3, k_4\} \subset \{1, \dots, m\} \setminus (K_1 \cup K_2)$, что для матрицы

$$D = \begin{pmatrix} h_{2k_2} & h_{2k_3} & h_{2k_4} \\ h_{3k_2} & h_{3k_3} & h_{3k_4} \\ h_{4k_2} & h_{4k_3} & h_{4k_4} \end{pmatrix}$$

верно, что $\|D\|^+ \neq \|D\|^-$.

Выберем любое $k_1 \in K_1 \neq \varnothing$. Обозначим

$$D' = \begin{pmatrix} h_{1k_1} & h_{1k_2} & h_{1k_3} & h_{1k_4} \\ h_{2k_1} & h_{2k_2} & h_{2k_3} & h_{2k_4} \\ h_{3k_1} & h_{3k_2} & h_{3k_3} & h_{3k_4} \\ h_{4k_1} & h_{4k_2} & h_{4k_3} & h_{4k_4} \end{pmatrix}.$$

Согласно обозначениям имеем $h_{1k_2} = -\infty$, $h_{1k_3} = -\infty$, $h_{1k_4} = -\infty$, $h_{1k_1} = 0$. Поэтому $h_{1k_1} \otimes \mathrm{perm}(D) = \mathrm{perm}(D') = 0$. Пусть перестановка $\sigma \in \mathrm{S}_4$ такая, что $a_{1,k_{\sigma(1)}} \otimes \ldots \otimes a_{4,k_{\sigma(4)}} = 0$. Тогда $\sigma(1) = 1$, потому что $h_{1k_2} = -\infty$, $h_{1k_3} = -\infty$, $h_{1k_4} = -\infty$, $h_{1k_1} = 0$. Таким образом, так как $\|D\|^+ \neq \|D\|^-$, то и $\|D'\|^+ \neq \|D'\|^-$. Будем считать, не ограничивая общности, что $\|D'\|^+ = 0$, $\|D'\|^- = -\infty$. (Другой случай рассматривается аналогично.) Обозначим

$$S' = \begin{pmatrix} a_{1k_1} & a_{1k_2} & a_{1k_3} & a_{1k_4} \\ a_{2k_1} & a_{2k_2} & a_{2k_3} & a_{2k_4} \\ a_{3k_1} & a_{3k_2} & a_{3k_3} & a_{3k_4} \\ a_{4k_1} & a_{4k_2} & a_{4k_3} & a_{4k_4} \end{pmatrix}.$$

Согласно определению матрицы D' имеем $\|S'\|^+ = 0$, $\|S'\|^- < 0$, поскольку $\|D'\|^+ = 0$, $\|D'\|^- = -\infty$. Таким образом, для (4×4)-подматрицы S' матрицы A верно, что $\|S'\|^+ \neq \|S'\|^-$, т. е. $\mathrm{d}(A) = 4$. Но это не так, $\mathrm{d}(A) = 3$. Противоречие. Значит, действительно $\mathrm{d}(V) \leqslant 2$.

2б.2. Согласно утверждениям 2.1 (случай $\mathrm{d}(V) = 0$), 2.7 (случай $\mathrm{d}(V) = 1$) и 4.2 (случай $\mathrm{d}(V) = 2$) строки матрицы V GM-линейно зависимы. Например, для всех $k \in \{1, \dots, m\} \setminus (K_1 \cup K_2)$

$$\lambda_2 \otimes h_{2k} \oplus \lambda_3 \otimes h_{3k} = \lambda_4 \otimes h_{4k}. \tag{4.11}$$

(Случаи $\lambda_2 \otimes h_{2k} = \lambda_3 \otimes h_{3k} \oplus \lambda_4 \otimes h_{4k}$ и $\lambda_3 \otimes h_{3k} = \lambda_2 \otimes h_{2k} \oplus \lambda_4 \otimes h_{4k}$ рассматриваются аналогично.) Если $\lambda_i = \lambda_j = -\infty$, $i \neq j$, то для всех $k \in \{1, \dots, m\} \setminus (K_1 \cup K_2)$ верно, что $h_{lk} = -\infty$, где $\{l\} = \{2, 3, 4\} \setminus \{i, j\}$. Поскольку в каждом столбце матрицы V содержится два равных 0 элемента, имеем, что для всех $k \in \{1, \dots, m\} \setminus (K_1 \cup K_2)$ верно $h_{ik} = h_{jk} = 0$. Поэтому равенство $h_{ik} \oplus h_{lk} = h_{jk} = 0$ даёт GM-линейную зависимость строк матрицы V.

Если же среди элементов λ_2, λ_3, λ_4 найдутся два не равных $-\infty$ (равных 0), то, поскольку в каждом столбце матрицы V только один элемент может быть отличен от 0, ввиду равенства (4.11) верно, что $h_{2k} \oplus h_{3k} = h_{4k} = 0$ для всех $k \in \{1, \ldots, m\} \setminus (K_1 \cup K_2)$.

Таким образом, можно считать без ограничения общности, что для всех $k \in \{1, \ldots, m\} \setminus (K_1 \cup K_2)$ верно, что $h_{2k} \oplus h_{3k} = h_{4k} = 0$. Это означает, что $a_{2k} \oplus a_{3k} = a_{4k} = 0$ ввиду определения матрицы V. Заметим, что, поскольку все элементы матрицы A не превосходят 0, то и $a_{2k} \oplus a_{3k} = a_{1k} \oplus a_{4k} = 0$.

Далее, пусть $k \in K_1$. Тогда согласно предположению пункта 2б $k \notin K_2$. По доказанному ранее в пункте 2, поскольку k не принадлежит K_2, по крайней мере два элемента из a_{2k}, a_{3k}, a_{4k} равны 0 и только один из них может быть меньше 0. Таким образом, $a_{2k} \oplus a_{3k} = 0$. С другой стороны, согласно определению K_1 верно, что $a_{1k} = 0$. Итак, для всех $k \in K_1$ верно $a_{2k} \oplus a_{3k} = a_{1k} \oplus a_{4k} = 0$.

Если $k \in K_2$, то $a_{ik} = -\infty$ для всех $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ по предположению пункта 2б и определению множества K_2. Поэтому $a_{2k} \oplus a_{3k} = a_{1k} \oplus a_{4k} = -\infty$.

Итак, если $k \in \{1, \ldots, m\} \setminus K_2$, то $a_{2k} \oplus a_{3k} = a_{1k} \oplus a_{4k} = 0$; если $k \in K_2$, то $a_{2k} \oplus a_{3k} = a_{1k} \oplus a_{4k} = -\infty$. Таким образом, для всех $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ верно, что $a_{2k} \oplus a_{3k} = a_{1k} \oplus a_{4k}$. Это равенство определяет GM-линейную зависимость строк матрицы A.

3. Пусть найдутся $p_1 \in \{1, 2, 3, 4\}$, $p_2 \in \{1, 2, 3, 4\}$, $p_1 \neq p_2$, такие что $\mu_{p_1} = -\infty$, $\mu_{p_2} = -\infty$ в равенстве (4.7). Будем считать, что $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, остальные случаи рассматриваются аналогично. Строгая линейная зависимость примет следующий вид: для всех $k \in \{1, \ldots, m\}$ верно, что

$$\bigoplus_{i \in I_k \setminus \{1,2\}} \mu_i \otimes a_{ik} = \bigoplus_{j \in J_k \setminus \{1,2\}} \mu_j \otimes a_{jk}.$$

Если $|I_k \setminus \{1, 2\}| = 2$ или $|I_k \setminus \{1, 2\}| = 0$, то $\mu_3 \otimes a_{3k} \oplus \mu_4 \otimes a_{4k} = -\infty$, т. е. $\mu_3 \otimes a_{3k} = \mu_4 \otimes a_{4k} = -\infty$. Если $|I_k \setminus \{1\}| = 1$, то $\mu_3 \otimes a_{3k} = \mu_4 \otimes a_{4k}$. Значит, для всех $k \in \{1, \ldots, m\}$ верно, что $\mu_3 \otimes a_{3k} = \mu_4 \otimes a_{4k}$. Кроме того, $\mu_1 = \mu_2 = -\infty$, поэтому либо $\mu_3 \neq -\infty$, либо $\mu_4 \neq -\infty$. Итак, ввиду того что для всех $k \in \{1, \ldots, m\}$ верно, что $\mu_3 \otimes a_{3k} = \mu_4 \otimes a_{4k}$, имеем, что строки матрицы A GM-линейно зависимы.

Итак, мы показали, что строки матрицы A GM-линейно зависимы. В силу произвольности выбора строк матрицы A имеем, что любые четыре строки матрицы M GM-линейно зависимы, $\mathrm{GMr}(M) \leqslant 3$. Но по следствию 2.5 $\mathrm{GMr}(M) \geqslant \mathrm{d}(M)$. Значит, $\mathrm{GMr}(M) = 3$.

Равенство $\mathrm{GMc}(M) = 3$ доказывается аналогично. □

Теперь мы можем доказать следующие теоремы.

Теорема 4.6. *Пусть* $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R}_{\max})$ *или* $A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{B})$, $\mathrm{d}(A) \leqslant 3$. *Тогда* $\mathrm{GMr}(A) = \mathrm{d}(A) = \mathrm{GMc}(A)$.

Доказательство. Пусть $\mathrm{d}(A) = 3$. Согласно утверждениям 2.1 (случай $\mathrm{d}(A) = 0$), 2.7 (случай $\mathrm{d}(A) = 1$), 4.2 (случай $\mathrm{d}(A) = 2$, $\mathbb{B}$), 4.3 (случай $\mathrm{d}(A) = 3$, $\mathbb{B}$), 4.4 (случай $\mathrm{d}(A) = 2$, $\mathbb{R}_{\max}$), 4.5 (случай $\mathrm{d}(A) = 3$, $\mathbb{R}_{\max}$) верно, что $\mathrm{GMr}(A) = \mathrm{d}(A)$. Ясно, что $\mathrm{d}(A^{\mathrm{t}}) = \mathrm{d}(A) \leqslant 3$, поэтому $\mathrm{GMc}(A) = \mathrm{GMr}(A^{\mathrm{t}}) = \mathrm{d}(A^{\mathrm{t}}) = \mathrm{d}(A)$. Итак, $\mathrm{GMr}(A) = \mathrm{d}(A) = \mathrm{GMc}(A)$. □

Теорема 4.7. *Матрица* A *из примера* 3.1 *содержит минимально возможные среди всех матриц над* $\mathbb{R}_{\max}$ ($\mathbb{B}$) *числа строк и столбцов при условии* $\mathrm{GMr}(A) \neq \neq \mathrm{d}(A)$. *Матрица* A^{t} *содержит минимально возможные среди всех матриц над* $\mathbb{R}_{\max}$ ($\mathbb{B}$) *числа строк и столбцов при условии* $\mathrm{GMc}(A) \neq \mathrm{d}(A)$.

Доказательство. Матрица A содержит пять строк и шесть столбцов. Докажем первое утверждение теоремы.

Пусть B — произвольная матрица. Рассмотрим два случая.

1. Пусть число строк матрицы B не больше четырёх. Возможны два случая.

1.1. $\mathrm{d}(B) = 4$. Тогда $\mathrm{GMr}(B) \geqslant 4$ по следствию 2.5 и $\mathrm{GMr}(B) \leqslant 4$, поскольку матрица B содержит не более четырёх строк. Таким образом, $\mathrm{GMr}(B) = 4 = = \mathrm{d}(B)$.

1.2. $\mathrm{d}(B) \leqslant 3$. Согласно теореме 4.6 $\mathrm{GMr}(B) = \mathrm{d}(B)$.

2. Пусть матрица B содержит не более пяти столбцов. Возможны три случая.

2.1. $\mathrm{d}(B) = 5$. Тогда $\mathrm{GMr}(B) \geqslant 5$ по следствию 2.5. Матрица B содержит не более пяти столбцов, поэтому, применяя следствие 2.6, имеем, что $\mathrm{GMr}(B) \leqslant 5$. Таким образом, $\mathrm{GMr}(B) = 5 = \mathrm{d}(B)$.

2.2. $\mathrm{d}(B) = 4$. Если матрица B содержит не более четырёх строк, то $\mathrm{GMr}(B) \leqslant 4$. Но согласно следствию 2.5 $\mathrm{GMr}(B) \geqslant \mathrm{d}(B)$. Поэтому $\mathrm{GMr}(B) = = \mathrm{d}(B) = 4$.

Если матрица B содержит не менее пяти строк и не более четырёх столбцов, то согласно следствию 2.6 любые пять строк матрицы B GM-линейно зависимы и $\mathrm{GMr}(B) \leqslant 4$. Но согласно следствию 2.5 $\mathrm{GMr}(B) \geqslant \mathrm{d}(B)$. Поэтому $\mathrm{GMr}(B) = \mathrm{d}(B) = 4$.

Пусть теперь матрица B содержит не менее пяти строк и пять столбцов. Обозначим через C подматрицу матрицы B, образованную её произвольными пятью строками. Каждый d-невырожденный минор матрицы C содержится в матрице B, поэтому $\mathrm{d}(C) \leqslant 4$, т. е. $\|C\|^+ = \|C\|^-$. Согласно теореме 2.4 строки матрицы C GM-линейно зависимы. В силу произвольности выбора строк матрицы C $\mathrm{GMr}(B) \leqslant 4$. Но согласно следствию 2.5 $\mathrm{GMr}(B) \geqslant \mathrm{d}(B)$. Поэтому $\mathrm{GMr}(B) = \mathrm{d}(B) = 4$.

2.3. $\mathrm{d}(B) \leqslant 3$. Согласно теореме 4.6 $\mathrm{GMr}(B) = \mathrm{d}(B)$.

Таким образом, первое утверждение теоремы доказано. Второе утверждение доказывается аналогично. □

Теорема 4.8. *Матрица* A *из примера 3.1 содержит минимально возможные среди всех матриц над* $\mathbb{R}_{\max}$ ($\mathbb{B}$) *числа строк и столбцов при условии* $\mathrm{GMr}(A) > > \mathrm{GMc}(A)$. *Матрица* A^{t} *содержит минимально возможные среди всех матриц над* $\mathbb{R}_{\max}$ ($\mathbb{B}$) *числа строк и столбцов при условии* $\mathrm{GMc}(A) > \mathrm{GMr}(A)$.

Доказательство. Пусть матрица M такова, что $\mathrm{GMr}(M) > \mathrm{GMc}(M)$. Согласно следствию 2.5 $\mathrm{GMc}(M) \geqslant \mathrm{d}(M)$. Это означает, что $\mathrm{GMr}(M) > \mathrm{d}(M)$. Поскольку $\mathrm{GMr}(M) \neq \mathrm{d}(M)$, из теоремы 4.7 следует, что матрица M содержит не менее пяти строк и не менее шести столбцов. Второе утверждение теоремы доказывается аналогично. □

Следствие 4.9. *Пусть* $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R}_{\max})$ *или* $A \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{B})$, $\mathrm{GMr}(A) \leqslant 4$. *Тогда* $\mathrm{d}(A) = \mathrm{GMr}(A)$.

Доказательство. Согласно следствию 2.5 $\mathrm{GMr}(A) \geqslant \mathrm{d}(A)$. Предположим, что $\mathrm{GMr}(A) > \mathrm{d}(A)$. Тогда $\mathrm{d}(A) < 4$, т. е. $\mathrm{d}(A) \leqslant 3$. Согласно теореме 4.6 $\mathrm{GMr}(A) = \mathrm{d}(A)$. Противоречие. Значит, $\mathrm{d}(A) = \mathrm{GMr}(A)$. □

Автор благодарен своему научному руководителю А. Э. Гутерману за постановку задачи и интересные обсуждения.

Литература

[1] Akian M., Gaubert S., Guterman A. Linear independence over tropical semirings and beyond. — 2008. — `arXiv:math.AC/0812.3496v1`; in press.

[2] Akian M., Gaubert S., Guterman A. Tropical Linear Independence and Mean Payoff Games. — Preprint.

[3] Gondran M., Minoux M. L'indépendance linéaire dans les dioïdes // Bull. Direction Études Rech. Sér. C. Math., Inform. — 1978. — Vol. 1. — P. 67—90.

[4] Izhakian Z. The tropical rank of a tropical matrix. — 2006. — `arXiv:math.AC/0604208v1`, `arXiv:math.AC/0604208v2`.