Полутела и их свойства*

Е. М. ВЕЧТОМОВ
Вятский государственный гуманитарный университет
e-mail: vecht@mail.ru

А. В. ЧЕРАНЕВА
Вятский государственный университет
e-mail: center@extedu.kirov.ru

УДК 512.55

Ключевые слова: полутело, ядро, неприводимое ядро, дополняемое ядро, решётка ядер, ограниченное полутело, полутело с образующей, пучок полутел, полутело сечений, бирегулярное полутело.

Аннотация

В первой части статьи излагаются начала теории полутел: вводятся основные понятия, доказываются исходные свойства полутел, рассматриваются некоторые методы исследования полутел. Изучаются полутела с образующей, в частности ограниченные полутела. Рассматриваются также элементы теории ядер полутел: строение главных ядер; ядро, порождённое элементом $2 = 1+1$; неприводимый и максимальный спектры полутел; свойства решётки ядер полутела. Приводится фрагмент теории агр-полуколец, служащий основой нового метода в теории полутел. Вторая часть работы посвящена пучкам и функциональным представлениям полутел. Описываются свойства полутел сечений пучков полутел над нульмерным компактом. Строятся два структурных пучка полутел, являющихся аналогами пучков Пирса и Ламбека для колец. Эти пучки дают изоморфные функциональные представления произвольных, сильно гельфандовых и бирегулярных полутел. В результате получаются пучковые характеризации сильно гельфандовых, бирегулярных и булевых полутел.

Abstract

E. M. Vechtomov, A. V. Cheraneva, Semifields and their properties, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 5, pp. 3—54.

An introduction to the theory of semifields is included in the first part of the article: basic concepts, initial properties, and several methods of investigating semifields are examined. Semifields with a generator, in particular bounded semifields, are considered. Elements of the theory of kernels of semifields are also included in the paper: the structure of principal kernels; the kernel generated by the element $2 = 1 + 1$; indecomposable and maximal spectra of semifields; properties of the lattice of kernels of a semifield. A fragment of arp-semiring theory, which is the basis of a new method in semifield theory, is also included in the first part. The second part of the work is devoted to sheaves of semifields and functional representations of semifields. Properties of semifields of sections of semifield sheaves over a zero-dimensional compact are described. Two structural sheaves of semifields, which are the analogs of Pierce and Lambek sheaves for rings, are constructed. These sheaves give isomorphic functional representations of arbitrary, strongly Gelfand, and biregular semifields. As a result, sheaf characterizations of strongly Gelfand, biregular, and Boolean semifields are obtained.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 08-01-11000 ано.

Фундаментальная и прикладная математика, 2008, том 14, № 5, с. 3—54.

Введение

Теория полутел — перспективное направление современной алгебры, которое можно рассматривать и как составную часть теории полуколец, и как теорию групп с дополнительной коммутативно-ассоциативной бинарной операцией.

Под *полутелом* понимается алгебраическая структура, являющаяся одновременно мультипликативной группой и аддитивной коммутативной полугруппой, причём умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон. Полутела с добавленным нулём — это в точности полукольца с делением, не являющиеся кольцами. Понятие полутела является весьма широким обобщением понятия решёточно упорядоченной группы.

Примеры полуколец были явно указаны ещё Дедекиндом [70] и Гильбертом [77] в конце 19-го столетия. Исторически первым примером является, конечно, натуральный ряд с добавленным нулём относительно обычных операций сложения и умножения чисел. Понятие полукольца было определено Вандивером [86] в 1934 году. Развитие теории полуколец началось в 50-е годы XX века. Благодаря запросам компьютеризации полукольца активно исследуются последние 20—25 лет. Современная теория полуколец находит применения в компьютерной алгебре и дискретной математике [73, 76], в идемпотентном анализе и теории оптимального управления [34, 81]. Полукольцам посвящены работы [11, 12, 15, 30, 58, 75]. Большая библиография по теории полуколец приведена в [72—74].

В 60-е годы XX века стали изучаться полутела. Им посвящены первые работы Вейнерта [87—90], доказавшего в 1962 году, что класс идемпотентных полутел совпадает с классом решёточно упорядоченных групп, имеющих дистрибутивные решётки конгруэнций [1,31]. Заметной вехой в становлении теории полутел стала работа С. В. Полина [37] 1974 года. В ней введён естественный (разностный) порядок на полутелах, описаны простые полуполя, доказана коммутативность сократимых простых полутел. В статье [79] 1990 года Хатчинс и Вейнерт изучали общие свойства ядер полутел. Важные свойства решёток конгруэнций (ядер) полутел установил А. Н. Семёнов [42]. Отметим следующие важные работы о полутелах: [2, 3, 10, 13, 19, 22—26, 39, 43, 44, 51—55, 64, 75, 78].

В связи с развитием идемпотентного анализа В. П. Масловым и его учениками исследовались вопросы линейной алгебры и теории уравнений над идемпотентными полуполями [34, 47, 64, 81]. Линейной алгеброй над полукольцами занимается А. Э. Гутерман.

Полутела изучались в кандидатских диссертациях последних лет [4, 40, 49, 56]. А. В. Ряттель [40] исследовала алгебраические расширения идемпотентных полуполей и линейно упорядоченные полутела. И. И. Богданов [4] занимался условиями коммутативности и аддитивной структурой полутел. О. В. Старостина [49] завершила построение теории абелево-регулярных положительных полуколец (arp-полуколец), уточнила взаимосвязи arp-полуколец и полутел их обратимых элементов. А. В. Черанева [56] исследовала свойства ядер полутел и возможность функционального представления полутел.

С функциональной алгеброй связаны диссертации [7,36,45,60,63]. Полукольца непрерывных функций со значениями в некоторых топологических полутелах изучала В. И. Варанкина [6,7], а полуполя непрерывных положительных функций на топологических пространствах рассматривали М. Н. Подлевских [35,36], И. А. Семёнова [45,46], Д. В. Широков [62,63]. В. В. Чермных [57,59,60] изучал полукольца сечений пучков полуколец. Начало систематическому изучению полуколец и полуполей непрерывных функций положила статья [8] 1998 года. Укажем также обзор [14]. Новые результаты о полуполях непрерывных функций опубликованы в [27,61].

Полутела обладают рядом специфических алгебраических свойств. Мультипликативные группы полутел являются группами без кручения. В неидемпотентных полутелах аддитивный порядок элементов бесконечен. Конгруэнции на полутелах однозначно определяются своими классами единицы — ядрами. Относительно естественного порядка полутела являются упорядоченными алгебраическими системами. Каждое полутело имеет кольцо разностей, возможно тривиальное [55]. Сократимые полутела (полукольца) — это в точности полутела (полукольца), изоморфно вложимые в кольца (равносильно, вложимые в свои кольца разностей) [37,73], поэтому изучение полутел допускает методы теории колец. Каждое полутело служит расширением сократимого полутела при помощи идемпотентного полутела [43]. Тем не менее класс всевозможных полутел значительно шире этих двух важнейших классов полутел, а изучение произвольных полутел далеко не сводится к исследованию идемпотентных полутел и сократимых полутел. Значение полуполей и полутел в теории полуколец подобно значению полей и тел в теории колец.

Наряду с кольцами и дистрибутивными решётками с наименьшим элементом полутела с нулём образуют важнейший класс полуколец, играющий существенную роль в структурной теории полуколец. Изучались различные сочетания этих трёх классов полуколец. Подполукольца прямых произведений ограниченной дистрибутивной решётки и кольца охарактеризованы в [73, утверждение 12.15]. Полукольцевые объединения кольца и полутела описаны М. А. Лукиным в [32,33] и в [17]. Симбиозом дистрибутивных решёток и полутел служат агр-полукольца, теория которых построена в [18, 20, 21, 48—50].

В то время как в общей теории полуколец используются кольце-модульные, полугрупповые, решёточные, универсально-алгебраические и пучковые понятия и методы, при исследовании полутел применяются также методы теории групп (используемые для некоммутативных групп и абелевых групп без кручения), теории решёточно упорядоченных групп, других упорядоченных алгебраических систем.

При исследовании полутел можно применить функциональный подход, при котором полутело реализуется в виде полутела сечений пучка некоторых более просто устроенных полутел над топологическим пространством. Многие кольца допускают хорошие функциональные (пучковые) представления (см. [9, 68, 80, 83]), которые зачастую переносятся и на полукольца (см.

[18,20,50,57—60]). Рассматривались пучковые представления и некоторых других типов универсальных алгебр [66,69].

Важнейшие понятия и примеры теории полутел рассматриваются в разделе 1. Простейшим структурным свойствам полутел посвящён раздел 2. В разделах 3 и 4 представлены результаты, связанные с ядрами полутел. Так, в разделе 4 даётся спектральный критерий существования образующей в полутеле. Нужный нам фрагмент теории агр-полуколец излагается в разделе 5. В разделах 6—8 закладываются основы теории пучковых представлений полутел, начало которой положено в серии работ [16, 22—26] 2008 года. В этом отношении наиболее полно охарактеризован класс бирегулярных полутел (раздел 9).

1. Основные понятия

Определим начальные понятия теории полутел.

Определение 1.1. *Полутелом* называется алгебраическая структура U с бинарными операциями сложения $+$ и умножения $\cdot$, такими что $\langle U,+\rangle$ — коммутативная полугруппа, $\langle U,\cdot\rangle$ — группа с единицей 1 и умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон.

В сигнатуре $\langle +,\cdot,^{-1},1\rangle$ типа $(2,2,1,0)$ класс всех полутел образует многообразие. Поэтому гомоморфные образы полутел и прямое произведение всякого непустого семейства полутел снова будут полутелами. Понятия подполутела, конгруэнции на полутеле, фактор-полутела, гомоморфизма и прямого произведения полутел определяются стандартно. Для полутел выполняются известные теорема о гомоморфизме и теоремы об изоморфизме (см. [79, § 3]).

Полутело с коммутативным умножением называется *полуполем*. Полутело с тождеством $a+a=a$ (эквивалентным $1+1=1$) называется *идемпотентным*, а полутело с аддитивным сокращением $a+c=b+c \Longrightarrow a=b$ — *сократимым*. *Зероидное* полутело — это полутело, в котором $a+b=a$ для некоторых его элементов a, b. Идемпотентные полутела зероидны. Полутела, зероидные и сократимые одновременно, *тривиальны*, т. е. состоят из единственного элемента 1.

Определение 1.2. *Полукольцом* называется алгебра $\langle S,+,\cdot,0\rangle$ с двумя бинарными операциями сложения $+$ и умножения $\cdot$, если $\langle S,+,0\rangle$ — коммутативный моноид, $\langle S,\cdot\rangle$ — полугруппа, умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон и справедливы тождества $0\cdot a=a\cdot 0=0$.

Полукольца также образуют многообразие. Если полукольцо S имеет нейтральный элемент 1 по умножению, то S — *полукольцо с единицей*. Полукольцо с ненулевой единицей называется *делимым*, если все его ненулевые элементы обратимы. Всякое делимое полукольцо S является либо телом (кольцом), либо антикольцом, т. е. удовлетворяет квазитождеству $a+b=0 \Longrightarrow a=0$ [73, утверждение 3.27]. Во втором случае делимое полукольцо называется *полутелом с нулём*.

Очевидны следующие утверждения:

1) если $\langle S, +, \cdot, 0\rangle$ — полутело с нулём, то $\langle S \setminus 0, +, \cdot\rangle$ — полутело;
2) если $\langle U, +, \cdot\rangle$ — полутело, то $\langle U \cup 0, +, \cdot, 0\rangle$ — полутело с нулём, где $a + 0 = 0 + a = a$ и $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ для любого $a \in U \cup 0$.

Мы имеем два эквивалентных определения полутела: как мультипликативной группы с дополнительной бинарной операцией сложения и как делимого полукольца, не являющегося кольцом, с выброшенным нулём.

Одним из важнейших понятий теории полутел является понятие ядра.

Определение 1.3. *Ядром* полутела называется класс 1 произвольной конгруэнции на нём (С. В. Полин [37] использовал термин «идеал»).

Ясно, что любая конгруэнция ρ на полутеле U однозначно определяется каждым своим классом, в частности ядром $[1]_\rho$.

Множество $\operatorname{Con} U$ всех ядер полутела U образует полную модулярную решётку относительно операций умножения и пересечения ядер, канонически изоморфную решётке всевозможных конгруэнций на U [79, теорема 3.6].

Полутело U называется *дистрибутивным* (*цепным*, *простым*), если решётка $\operatorname{Con} U$ дистрибутивна (соответственно является цепью, двухэлементна).

Одна из характеризаций ядер полутела дана в следующем предложении, другие характеризации можно найти в [79, теорема 3.2].

Предложение 1.1. *Подмножество A полутела U является ядром тогда и только тогда, когда A — нормальная подгруппа в U со свойством*

$$x, y \in U \ \ \& \ \ x + y = 1 \ \ \& \ \ a, b \in A \implies ax + by \in A. \qquad (1.1)$$

Доказательство. Действительно, если $A = [1]_\rho$, $\rho \in \operatorname{Con} U$, то A — нормальная подгруппа. Если $x + y = 1$, $a \,\rho\, 1$, $b \,\rho\, 1$ для некоторых $x, y \in U$, $a, b \in A$, то $(ax + by) \,\rho\, (x + y) = 1$, т. е. $ax + by \in A$.

Обратно, пусть A — нормальная подгруппа группы $\langle U, \cdot\rangle$, для которой выполняется условие (1.1). Определим отношение эквивалентности ρ на U следующим образом: $u \,\rho\, v \iff uv^{-1} \in A$ для любых $u, v \in U$. Пусть $u \,\rho\, v$ и $s \,\rho\, t$, где $u, v, s, t \in U$. Поскольку A — нормальная подгруппа, то $(us) \,\rho\, (vt)$, $u^{-1} \,\rho\, v^{-1}$. Так как $uv^{-1} \in A$, то $u = av$ для некоторого $a \in A$. Тогда для любого $k \in U$ элемент $(av + 1 \cdot k)(v + k)^{-1} = av(v + k)^{-1} + 1 \cdot k(v + k)^{-1}$ лежит в A, что следует из условия (1.1), поскольку $v(v + k)^{-1} + k(v + k)^{-1} = 1$. Это значит, что $(u+k) \,\rho\, (v+k)$ для любого $k \in U$. Отсюда получаем, что $(u+s) \,\rho\, (v+s) \,\rho\, (v+t)$. Осталось отметить, что $[1]_\rho = \{u \in U \mid u \,\rho\, 1\} = \{u \in U \mid u \in A\} = A$. $\square$

Если M — подмножество полутела U, то через (M) обозначим наименьшее ядро в U, содержащее M; оно равно пересечению всех ядер в U, содержащих M. Если при этом $U = (M)$, то M называется *множеством образующих* полутела U (как ядра). Для $u \in U$ полагаем $(u) = (\{u\})$, это *главное ядро* полутела, порождённое u.

Определение 1.4. Если $U = (u)$ для некоторого элемента u полутела U, то u называется *образующей*, а само U — *полутелом с образующей*. Полутело $U = (2)$ с образующей $2 = 1 + 1$ называется *ограниченным*.

Образующую полутела, являющуюся его центральным элементом, назовём *центральной образующей* полутела. Подполутело полутела, являющееся одновременно его ядром, назовём *ядерным подполутелом*. Легко убедиться, что главное ядро (2) полутела U является наименьшим ядерным подполутелом в U. Ясно также, что ядро A полутела U будет подполутелом в U в том и только в том случае, когда фактор-полутело U/A идемпотентно.

Примеры полутел.

1. Множество F^+ всех положительных элементов любого линейно упорядоченного поля F образует полуполе относительно операций сложения и умножения в F. В частности, полуполями являются $\mathbb{R}^+$ и $\mathbb{Q}^+$.
2. Произвольная решёточно упорядоченная (мультипликативная) группа $\langle G, \cdot, \leqslant\rangle$ является идемпотентным полутелом $\langle G, +, \cdot\rangle$, где $a+b = \sup\{a, b\}$. Обратно, всякое идемпотентное полутело $\langle U, +, \cdot\rangle$ превращается в решёточно упорядоченную группу $\langle G, \cdot, \leqslant\rangle$ с порядком $\leqslant$: $a \leqslant b$ означает $a + b = b$.
3. Имеется полуполе $U(X)$ всех непрерывных положительных действительнозначных функций над произвольным топологическим пространством X с поточечно заданными операциями сложения и умножения функций. Если сложение функций заменить операцией $\vee$ взятия их точной верхней грани, $(f \vee g)(x) = \max\bigl(f(x), g(x)\bigr)$ при всех $x \in X$ для любых $f, g \in U(X)$, то получим идемпотентное полуполе $U^{\vee}(X)$.
4. Сократимым некоммутативным полутелом является множество верхних треугольных матриц n-го порядка, $n \geqslant 2$, с элементами из линейно упорядоченного поля с обычными операциями сложения и умножения, на главной диагонали которых находятся положительные элементы.
5. Имеется сократимое полутело $(P-T)[[x]]$ всевозможных степенных рядов $f = f_0 + f_1x + \ldots + f_mx^m + \ldots$ от одной переменной x над телом T (все коэффициенты f_m принадлежат T), свободный член которых лежит в подполутеле P тела T ($f_0 \in P$).
6. Имеется полуполе $P(X)$ всех ненулевых рациональных функций (дробей многочленов) от множества X коммутирующих переменных с коэффициентами из фиксированного полуполя P с нулём.
7. Прямое произведение непустого семейства (U_i) полутел является полутелом. Так, прямое произведение $U \times V$ нетривиальных сократимого полутела U и идемпотентного полутела V будет несократимым незероидным полутелом.

Перечислим некоторые универсальные конгруэнции на полутеле U.

1. *Тривиальные конгруэнции* $\mathbf{0}$ *и* $\mathbf{1}$. Это отношение равенства, являющееся наименьшей конгруэнцией на полутеле U и отношение $U \times U$ — наибольшая (одноклассовая) конгруэнция на U. Им соответствуют единичное ядро $\{1\}$ и само U.

2. *Аддитивное уравнивание.* Для любых $a, b \in U$ положим
$$a \,\rho\, b \Longleftrightarrow \exists\, c \in U \ (a + c = b + c).$$
Получаем конгруэнцию на полутеле U, для которой фактор-полутело U/ρ сократимо. Более того, любой гомоморфизм U в сократимое полутело пропускается через U/ρ.
3. *Главная конгруэнция* $\rho(a, b)$. Это наименьшая конгруэнция на полутеле U, содержащая пару (a, b) данных элементов из U. Главное ядро (a) — ядро конгруэнции $\rho(1, a)$.
4. *Сократимая часть полутела* [43]. Для $a, b \in U$ положим
$$a \,\rho\, b \iff \forall\, u, v \in U \ (a + u = a + v \Longleftrightarrow b + u = b + v).$$
Полученная конгруэнция на U такова, что $S(U) = [1]_\rho$ будет наибольшим сократимым ядерным подполутелом полутела U, $S(U)$ называется сократимой частью U. При этом $U/S(U)$ идемпотентно.

2. Исходные свойства и методы

Рассмотрим основополагающие свойства и элементарные методы исследования полутел.

Лемма 2.1 [74, предложение 20.37]. *В любом полутеле выполняется квазитождество*
$$a + b + c = a \Longrightarrow a + b = a.$$

Доказательство. Пусть $a+b+c = a$ для элементов a, b, c полутела U. Умножим обе части равенства справа на $a^{-1}ba^{-1}$, затем прибавим к обеим частям ca^{-1} и сгруппируем члены в левой части: $(ba^{-1} + ca^{-1})(1 + ba^{-1}) = ba^{-1} + ca^{-1}$. Тогда $1 + ba^{-1} = 1$ и, стало быть, $a + b = a$. □

На любом полутеле U имеется «разностное» отношение $\leqslant$: $a \leqslant b$ означает, что $a = b$ или $a + c = b$ для некоторого элемента $c \in U$. Это бинарное отношение рефлексивно и, очевидно, транзитивно. Его антисимметричность вытекает из леммы 2.1.

Определение 2.1 [37, пункт 1]. Разностное отношение $\leqslant$ на полутеле U является отношением порядка и называется *естественным порядком* на полутеле U.

Свойство 2.1. Относительно естественного порядка всякое полутело U является упорядоченным полутелом, т. е. $a \leqslant b$ влечёт $a + c \leqslant b + c$, $ac \leqslant bc$ и $ca \leqslant cb$ для всех $a, b, c \in U$.

Это одно из важнейших свойств полутел. Заметим, что на идемпотентных полутелах неравенство $a \leqslant b$ эквивалентно равенству $a + b = b$.

Докажем ряд утверждений о ядрах полутел.

Свойство 2.2. При гомоморфизме полутел прообраз ядра есть ядро. При эпиморфизме образ ядра полутел есть ядро.

Доказательство. В доказательстве нуждается только вторая часть утверждения. Пусть $\varphi\colon U \to V$ — эпиморфизм полутел и $A \in \operatorname{Con} U$. Рассмотрим множество $B = \{\varphi(a) \mid a \in A\}$. Очевидно, что B — нормальная подгруппа. Пусть $x + y = 1$, $x, y \in V$, $z, t \in B$, $a, b \in U$ и $c, k \in A$ такие, что $\varphi(a) = x$, $\varphi(b) = y$, $\varphi(c) = z$, $\varphi(k) = t$. Тогда для $d = (a+b)^{-1} \in U$ выполняется равенство $da + db = 1$, причём $\varphi(d) = 1$. Поскольку $c, k \in A$, то $dac + dbk \in A$, а значит, $\varphi(dac + dbk) = \varphi(d)xz + \varphi(d)yt = xz + yt \in B$. По предложению 1.1 B — ядро в V. □

Свойство 2.3. Если A — ядро полутела U, $a, b \in U$, $a + a^{-1} \in A$ или $a + a^{-1} + b \in A$, то $a \in A$.

Доказательство. Пусть $a + a^{-1} \in A$. Тогда в фактор-полутеле U/A для элемента $w = aA$ получаем $w + w^{-1} = 1$. Поэтому $w \leqslant 1$, $w^{-1} \leqslant 1$, $w \geqslant 1$, $w = 1$, т. е. $aA = A$ и $a \in A$. На основании леммы 2.1 получаем второе утверждение. □

Свойство 2.4 [37, следствие 1.1]. Каждое ядро A любого полутела U выпукло относительно естественного порядка на U: если $a, c \in A$, $b \in U$ и $a \leqslant b \leqslant c$, то $b \in A$.

Доказательство. Для некоторых $u, v \in U$ имеем $a + u = b$ и $b + v = c$, т. е. $a + u + v = c$. В фактор-полутеле $U/A = \{dA\colon d \in U\}$ выполняется равенство $A + uA + vA = A$. Отсюда получаем, что $bA = (a + u)A = A + uA = A$ в силу леммы 2.1 и $b \in A$. □

Свойство 2.5 [37, пункт 2]. Всякое полутело либо идемпотентно, либо содержит полуполе $\mathbb{Q}^+$ в качестве подполутела.

Это свойство вытекает из свойства 2.4.

Следующее утверждение хорошо известно для решёточно упорядоченных групп [31].

Свойство 2.6 [11, с. 14]. Мультипликативная группа любого полутела является группой без кручения, т. е. все её отличные от 1 элементы имеют бесконечный порядок.

Доказательство. Если $a^n = 1$ для элемента a полутела U и $n \in \mathbb{N}$, то

$$a(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + 1) = a^n + (a^{n-1} + \ldots + a) = \\ = 1 + (a^{n-1} + \ldots + a) = a^{n-1} + \ldots + a + 1.$$

Отсюда следует, что $a = 1$. □

Следующие два свойства вытекают из свойства 2.6.

Свойство 2.7. Для каждого ядра A любого полутела U, если $a \in U$, $n \in \mathbb{N}$ и $a^n \in A$, то $a \in A$.

Свойство 2.8. Конечные полутела тривиальны.

Полезным понятием и методом изучения полутел служит кольцо разностей полутела.

Определение 2.2. *Кольцо разностей* полутела U — это пара $\langle R(U), h\rangle$, где $R(U)$ — кольцо и $h\colon U \to R(U)$ — гомоморфизм, обладающие следующими свойствами:

1) $R(U) = h(U) - h(U)$;
2) для любого гомоморфизма $f\colon U \to T$, где T — кольцо, существует единственный гомоморфизм $g\colon R(U) \to T$, такой что $g \circ h = f$.

Кольцо разностей $\langle R(U), h\rangle$ строится обычным образом. На множестве пар $U \times U$ вводится отношение эквивалентности

$$\sim\colon (a, b) \sim (c, d) \Longleftrightarrow a + d + u = b + c + u$$

для подходящего элемента $u \in U$ $(a, b, c, d \in U)$. В фактор-множестве $R(U) = (U \times U)/\sim$ над классами эквивалентности производятся операции сложения $[a, b]+[c, d] = [a+c, b+d]$ и умножения $[a, b]\cdot[c, d] = [ac+bd, ad+bc]$. (Класс $[a, b]$ моделирует разность $a-b$.) Получаем кольцо $R(U)$ и канонический гомоморфизм $h\colon U \to R(U)$, $h(a) = [a + b, b] = [a + 1, 1]$ для любого $a \in U$. Единицей служит элемент $[2, 1]$, нулём — элемент $[1, 1]$, а элементом, противоположным элементу $[a, b]$, — элемент $[b, a]$.

Кольцо разностей $R(U)$ определено однозначно с точностью до изоморфизма над полутелом U.

Хорошо известно, что инъективность гомоморфизма h равносильна сократимости полутела U [73]. Сюръективность h эквивалентна тому, что $R(U) = \{0\}$, что, в свою очередь, эквивалентно зероидности полутела U [51].

Обозначим через $\operatorname{Id} R(U)$ решётку всех идеалов кольца $R(U)$ относительно $\subseteq$. Рассмотрим отображение $\delta\colon \operatorname{Con} U \to \operatorname{Id} R(U)$, ставящее в соответствие каждой конгруэнции ρ на полутеле U идеал его кольца разностей $R(U)$ по правилу

$$\delta(\rho) = \{[a, b] \in R(U)\colon a, b \in U \ \&\ a\ \rho\ b\},$$

и отображение $\gamma\colon \operatorname{Id} R(U) \to \operatorname{Con} U$, ставящее в соответствие каждому идеалу I кольца $R(U)$ конгруэнцию на U по правилу

$$a\ \gamma(I)\ b \Longleftrightarrow [a, b] \in I \quad \text{для любых} \quad a, b \in U.$$

Конгруэнции вида $\gamma(I)$ называются *идеальными*.

Известно [8], что отображение δ является эпиморфизмом решётки конгруэнций $\operatorname{Con} U$ сократимого полукольца U на решётку идеалов $\operatorname{Id} R(U)$ кольца разностей $R(U)$, а отображение γ — $\cap$-вложением $\operatorname{Id} R(U)$ в $\operatorname{Con} U$, образом которого служит множество всех идеальных конгруэнций на U.

Лемма 2.2. *Для любого элемента u сократимого полутела U справедливо равенство $\delta\big((u)\big) = R(u-1)R$, где $R(u-1)R$ — главный идеал кольца $R = R(U)$, порождённый элементом $u - 1$.*

Доказательство. Для $u \in U$ имеет место цепочка включений

$$\gamma\Big(\delta\big((u)\big)\Big) = \gamma\Big(\big((u)-1\big)U\Big) \supseteq \gamma(R(u-1)R) = (R(u-1)R)+1) \cap U \supseteq (u).$$

Получаем, что $\delta\big((u)\big) = \delta\big(\gamma(R(u-1)R)\big) = R(u-1)R$. □

Сократимое ядро — это ядро сократимой конгруэнции. Конгруэнция ρ на полутеле U называется *сократимой*, если

$$\forall\, a,b,c \in U\ \ (a+c)\ \rho\ (b+c) \Longrightarrow a\ \rho\ b.$$

Предложение 2.1. *Пусть ρ — произвольная конгруэнция на полутеле U. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *ρ идеальна на полутеле U*;
2) *ρ сократимая*;
3) *U/ρ — сократимое полутело.*

Доказательство. Эквивалентность условий 2) и 3) непосредственно следует из определения сократимой конгруэнции, поскольку записи

$$(a+c)\ \rho\ (b+c) \Longrightarrow a\ \rho\ b$$

и

$$[a]_\rho + [c]_\rho = [a+c]_\rho = [b+c]_\rho = [b]_\rho + [c]_\rho \Longrightarrow [a]_\rho = [c]_\rho$$

эквивалентны для любых $a,b,c \in U$ и $\rho \in \mathrm{Con}\, U$.

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть конгруэнция $\rho \in \mathrm{Con}\, U$ идеальна, т. е. $\rho = \gamma(I)$ для некоторого идеала I кольца разностей $R(U)$ полутела U. Пусть $(a+c)\ \rho\ (b+c)$ для некоторых $a,b,c \in U$. Тогда $[a+c, b+c] \in I$. Но пары (a,b) и $(a+c, b+c)$ эквивалентны, так как $a+b+c+x = b+a+c+x$ для любого $x \in U$, поэтому $[a+c, b+c] = [a,b] \in I$. По определению идеальной конгруэнции получаем, что $a\ \rho\ b$.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть ρ обладает свойством сократимости. Рассмотрим идеал $I = \delta(\rho)$ кольца $R(U)$ и покажем, что $a\ \rho\ b \Longleftrightarrow [a,b] \in I$ для всех $a,b \in U$. Очевидно, что если $a\ \rho\ b$, то $[a,b] \in I$. Предположим, что $[a,b] \in I$. Это значит, что для некоторых $c,d \in U$, таких что $c\ \rho\ d$, выполняется равенство $[a,b] = [c,d]$. Тогда существует такой элемент $x \in U$, что $a+d+x = b+c+x$, поэтому $(a+d+x+c)\ \rho\ (b+c+x+d)$. Поскольку ρ сократима, то $a\ \rho\ b$. □

Заметим, что в [79, следствие 6.2] показано, что решётка идеалов кольца разностей сократимого полутела изоморфна решётке сократимых конгруэнций этого полутела.

Следствие 2.1. *Для сократимой конгруэнции ρ на произвольном полутеле U верно равенство $\rho = \gamma\big(\delta(\rho)\big)$.*

Говорят, что полутело U является *расширением полутела P с помощью полутела K*, если существует такая конгруэнция ρ на U, что $[1]_\rho = P$, а U/ρ изоморфно K.

Теорема 2.1 [43, теорема 2]. *Любое полутело U является расширением сократимого полутела $S(U)$ с помощью идемпотентного полутела $U/S(U)$.*

Свойство 2.9 [42, теорема 1]. Для любого конечного числа полутел $U_1, \dots, U_n$ имеет место изоморфизм

$$\mathrm{Con}(U_1 \times \ldots \times U_n) \cong \mathrm{Con}\, U_1 \times \ldots \times \mathrm{Con}\, U_n.$$

Замечание 2.1. Аналог свойства 2.9 верен для полуколец с 1 [11], модулей над кольцом с 1, решёток [1]. Но он не имеет места для абелевых групп (достаточно рассмотреть группу $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$).

Ядро A полутела U называется *дополняемым*, если найдётся такое ядро $A' \in \mathrm{Con}\, U$, что $AA' = U$ и $A \cap A' = \{1\}$. При этом ядро A' называется *дополнением* ядра A.

Свойство 2.10 [42, следствие 1]. В любом полутеле каждое ядро имеет не более одного дополнения.

Теорема 2.2. *Решётка $\mathrm{Con}\, U$ всех ядер полутела U является модулярной алгебраической решёткой, и все её дополняемые элементы образуют в ней булеву подрешётку.*

Действительно, модулярность решётки $\mathrm{Con}\, U$ вытекает из наличия групповой (мультипликативной) операции в полутеле U. По свойству 2.9 дополняемые элементы решётки $\mathrm{Con}\, U$ нейтральны. Нейтральные элементы в модулярной решётке образуют дистрибутивную подрешётку [29, с. 188].

А. Н. Семёновым было доказано [42, теорема 2], что если решётка конгруэнций полутела содержит диамант M_3, то она содержит также «счётный» диамант $M_{\aleph_0}$ (через M_τ обозначена решётка, полученная из антицепи мощности τ присоединением наибольшего и наименьшего элементов).

Свойство 2.11. Если U — полутело, то $M_3 \subseteq \mathrm{Con}\, U$ влечёт $M_3 \subseteq M_{\aleph_0} \subseteq \subseteq \mathrm{Con}\, U$.

Следствие 2.2. *Любое полутело с конечным числом ядер дистрибутивно.*

Замечание 2.2. Неизвестно, всякая ли конечная дистрибутивная решётка изоморфна решётке $\mathrm{Con}\, U$ для некоторого полутела U. Для идемпотентных полуполей (коммутативных решёточно упорядоченных групп) эта проблема решается отрицательно [1], а для групп положительно [84].

3. Полутела с образующей. Ограниченность

Рассмотрение полутел с образующей мотивируется следующими обстоятельствами. Во-первых, всякое полутело вкладывается в полутело с образующей (теорема 3.6). Во-вторых, полутела с образующей обладают некоторыми важными дополнительными свойствами, например, в них собственные ядра содержатся в максимальных ядрах (теорема 4.2). Вложение в полутело с образующей является одним из инструментов исследования произвольных полутел. Понятие образующей полутела служит аналогом единицы в кольцах и обобщает понятие сильной единицы в решёточно упорядоченных группах.

Теорема 3.1. *Для любого полутела U следующие условия эквивалентны*:

1) *U ограниченно*;
2) *любая конгруэнция на U сократима*;
3) *решётка конгруэнций на U канонически изоморфна решётке идеалов кольца разностей* (*т. е. δ — изоморфизм*).

Доказательство. Покажем, что из условия 1) вытекает условие 2). Пусть ρ — конгруэнция на полутеле U. Рассмотрим фактор-полутело U/ρ. По теореме 2.1 существует сократимая часть $S(U/\rho)$, содержащая элемент 2. Конгруэнция $\rho(1,2)$ на U совпадает с наибольшей конгруэнцией $\mathbf{1}$, поэтому наибольшей на U/ρ будет конгруэнция, склеивающая 1 и 2. Значит, полутело $U/\rho = S(U/\rho)$ сократимо, и по предложению 2.1 конгруэнция ρ сократима.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 3). Поскольку любая конгруэнция на полутеле U сократима, то по предложению 2.1 на U все конгруэнции идеальны. Поэтому эпиморфизм $\delta\colon \operatorname{Con} U \to \operatorname{Id} R(U)$ будет изоморфизмом.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 1). Так как элементы 1 и 2 находятся в отношении $\rho(1,2)$, то идеал $\delta\bigl(\rho(1,2)\bigr)$ содержит единицу $[2,1]$, т. е. $\delta\bigl(\rho(1,2)\bigr) = R(U)$. Решётки $\operatorname{Con} U$ и $\operatorname{Id} R(U)$ по условию канонически изоморфны, поэтому все конгруэнции на U идеальны, а значит, сократимы по предложению 2.1. Поэтому по следствию 2.1

$$\rho(1,2) = \gamma\Bigl(\delta\bigl(\rho(1,2)\bigr)\Bigr) = \gamma\bigl(R(U)\bigr) = \mathbf{1}. \qquad \square$$

Следствие 3.1 [79, теорема 5.7]. *Ограниченные полутела сократимы.*

Предложение 3.1. *В любом полутеле U главное ядро, порождённое центральным элементом $a \in U$, большим 1, совпадает с множеством*

$$\{p \in U\colon \exists n \in \mathbb{N}\ a^{-n} \leqslant p \leqslant a^n\}. \tag{3.1}$$

Доказательство. Обозначим множество (3.1) через A. По свойству 2.4 $A \subseteq (a)$. Докажем, что множество A является ядром, а значит, совпадает с (a). Пусть $x, y \in U$ такие, что $x + y = 1$, $b \in A$. Тогда

$$bx + y \leqslant a^n x + y \leqslant a^n x + a^n y = a^n,$$
$$a^{-n} = a^{-n}x + a^{-n}y \leqslant a^{-n}x + y \leqslant bx + y$$

для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, что A замкнуто относительно операции умножения и взятия обратного элемента. Осталось показать, что A — нормальная подгруппа. Для этого достаточно доказать, что $pbp^{-1} \in A$ для любого $p \in U$ и $b \in A$. Поскольку a — центральный элемент, то

$$a^{-n} = pa^{-n}p^{-1} \leqslant pbp^{-1} \leqslant pa^n p^{-1} = a^n.$$

Предложение доказано. $\square$

Следствие 3.2 [37, лемма 2.1]. *В любом полутеле U*

$$(2) = \{p \in U\colon \exists\, n \in \mathbb{N}\ 2^{-n} \leqslant p \leqslant 2^n\}.$$

Теорема 3.2. *Подполутело (2) любого полутела U ограниченно.*

Доказательство. В доказательстве нуждается лишь факт, что для любого $a \in (2)$ существуют такие $x', y' \in (2)$, что $2^{-m} + x' = a$ и $a + y' = 2^m$, $m \in \mathbb{N}$. Для этого дважды применим предложение 3.1. Для a существуют такие $x, y \in U$, что $2^{-n} + x = a$ и $a + y = 2^n$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$2^{-n-1} + (2^{-n-1} + x) = 2^{-n} + x = a \leqslant 2^n \leqslant 2^n + 2^n = 2^{n+1},$$

т. е. $x' = 2^{-n-1} + x \in (2)$. Далее,

$$2^{-n-1} \leqslant 2^{-n} \leqslant a \leqslant a + y + a + y = 2^{n+1},$$

т. е. $y' = a + 2y \in (2)$, $m = n + 1$. □

Из этой теоремы вытекает следующий структурный результат, усиливающий теорему 2.1.

Теорема 3.3. *Любое полутело U является расширением ограниченного полутела с помощью идемпотентного полутела.*

Рассмотрим несколько свойств, касающихся образующих полутела.

Свойство 3.1. Всякое нетривиальное полутело с образующей обладает образующей, большей 1.

Доказательство. Если u — образующая полутела U, то по лемме 2.3 образующей U будет элемент $u + u^{-1}$, а значит, и элемент $(u + u^{-1})^2 = u^2 + u^{-2} + 2 > 1$. □

Свойство 3.2. Гомоморфный образ полутела с образующей есть полутело с образующей.

Доказательство. Действительно, если $f\colon U \to V$ — гомоморфизм полутела U на полутело V и $U = (u)$, то $V = \big(f(u)\big)$, поскольку прообраз ядра при гомоморфизме полутел всегда является ядром. □

Теорема 3.4. *Если полутело U имеет конечное число образующих, то оно является полутелом с образующей.*

Доказательство. Пусть дано полутело $U = (u_1) \cdot \ldots \cdot (u_n)$ с конечным множеством образующих $\{u_1, \ldots, u_n\}$. По свойству 2.3 все элементы $u_1, \ldots, u_n$ лежат в ядре (u) для $u = u_1 + u_1^{-1} + \ldots + u_n + u_n^{-1}$. Поэтому $U = (u)$. □

Следствие 3.3. *Всякое полутело, имеющее конечное множество ядер, является полутелом с образующей.*

Свойство 3.3. Конечно порождённые ядра в любом идемпотентном полутеле главные.

Свойство 3.3 — известный в теории решёточно упорядоченных групп результат [1, с. 396].

Теорема 3.5. *Прямое произведение конечного числа полутел $U_1, \ldots, U_n$ имеет образующую тогда и только тогда, когда все U_k — полутела с образующей.*

Доказательство. Пусть $U = U_1 \times \ldots \times U_n$. В силу свойства 3.2 достаточно показать, что если $U_k = (a_k)$ для $k = 1, \ldots, n$, то U — полутело с образующей. Определим $u_k \in U$, $k = 1, \ldots, n$, как строку, в которой все координаты, кроме k-й, равны 1, а на k-м месте стоит элемент a_k. Ясно, что $(u_1) \cdot \ldots \cdot (u_n) = U$. Остаётся применить теорему 3.4. □

Свойство 3.4. Если элемент u является образующей (центральной образующей) сократимого полутела U, то $R(U)(u-1)R(U) = R(U)$ (элемент $u-1$ обратим в $R(U)$).

Это свойство вытекает из леммы 2.2. Обратное утверждение неверно: в сократимом неограниченном полутеле $u - 1 = 1$ при $u = 2$.

Теорема 3.6. *Любое полутело* (*идемпотентное полутело*) *U изоморфно вкладывается — в качестве наибольшего собственного ядра — в зероидное* (*идемпотентное*) *полутело V с центральной образующей. При этом все собственные ядра полутела V — это в точности ядра полутела U.*

Доказательство. Пусть U — произвольное полутело. Возьмём бесконечную циклическую группу $G = \{x^m \mid m \in \mathbb{Z}\}$ и рассмотрим мультипликативную группу $V = U \times G$. Положим $ux^m \equiv (u, x^m)$ и $ux^0 \equiv u$ для любых $u \in U$ и $m \in \mathbb{Z}$. Операция умножения на множестве V покоординатная. Введём операцию сложения на V: для любых $m, n \in \mathbb{Z}$ и элементов $u, v \in U$ положим

$$ux^m + vx^n = vx^n + ux^m = \begin{cases} ux^m, & \text{если } \ m > n, \\ (u+v)x^m & \text{при } \ m = n. \end{cases}$$

Легко проверить, что данное множество V с введёнными операциями умножения и сложения является зероидным полутелом (а если U идемпотентное, то идемпотентным), имеющим подполутело U. Покажем, что любое ядро A в U является также ядром в V. Поскольку U — прямой сомножитель мультипликативной группы V, то A будет нормальной подгруппой в V. Возьмём $s, t \in A$, $u, v \in U$ и $ux^m + vx^n \in V$ с условием $ux^m + vx^n = 1$. Заметим, что одно из чисел m или n равно нулю, а другое не больше нуля. Пусть $m = 0$. Если $n < 0$, то $1 = ux^m + vx^n = u$ и $ux^m s + vx^n t = s \in A$; если $n = 0$, то $u + v = 1$ и $ux^m s + vx^n t = us + vt \in A$.

Рассмотрим теперь $ux^m \in V \setminus U$, т. е. $u \in U$, $m \neq 0$, и возьмём произвольный элемент $vx^n \in V$. Выберем целое число k так, чтобы $-mk < n < mk$. Тогда $(ux^m)^{-k} + vx^n + (ux^m)^k = (ux^m)^k$ принадлежит главному ядру (ux^m), значит, $vx^n = (ux^m)^{-k} + vx^n$ также принадлежит (ux^m) по предложению 2.4. Поэтому элемент ux^m порождает всё полутело V, а элемент x служит центральной образующей полутела V. Отсюда также следует, что U является наибольшим собственным ядром полутела V. □

Предложение 3.2. *Если полутело вложимо в тело, то оно вложимо в некоторое сократимое полутело с центральной образующей.*

Доказательство. Пусть полутело U является подполутелом тела T. Возьмём множество V всевозможных формальных степенных рядов

$$f = t_m x^m + t_{m-1} x^{m-1} + \ldots, \quad m \in \mathbb{Z}, \tag{3.2}$$

от центральной переменной x с коэффициентами $t_k \in T$ и старшим коэффициентом $t_m \in U$ ($m \in \mathbb{Z}$). Относительно обычных операций сложения и умножения степенных рядов V становится полутелом, содержащим полутело U в качестве подполутела при отождествлении всех $u \in U$ с $ux^0 \in V$. Центральный элемент $x \in V$ больше 1, так как $x = 1 + (x + (-1)x^0)$. Он служит образующей полутела V. Действительно, возьмём в V произвольный элемент f, определённый формулой (3.2). При $n = |m|+1$ имеем $x^n = f + (x^n + (-t_m)x^m + (-t_{m-1})x^{m-1} + \ldots)$ и $f = x^{-n} + (t_m x^m + \ldots + (t_{-n} - 1)x^{-n} + \ldots)$. Значит, $x^{-n} < f < x^n$, и $f \in (x)$ по утверждению 3.1. Заметим, что кольцом разностей полутела V будет тело всех формальных степенных рядов (3.2) с коэффициентами из тела T. □

Предложение 3.3. *Если сократимое полутело содержит подполутело, изоморфное бесконечному прямому произведению нетривиальных полутел, то оно не вложимо ни в какое ограниченное полутело.*

Доказательство. Пусть сократимое полутело U содержит подполутело $V = U_1 \times \ldots \times U_n \times \ldots$, где U_n — нетривиальные сократимые полутела для всех натуральных чисел n. При этом $(1, 1, \ldots, 1, \ldots) = 1$ в U. Предположим от противного, что U является подполутелом ограниченного полутела W. Рассмотрим элемент $u = (2, 4, \ldots, 2^n, \ldots) \in V \subseteq (2) = W$. По следствию 3.2 найдётся такое натуральное n, что $u < 2^n$ в полутеле W. Это значит, что $u + w = 2^n$ для некоторого единственного элемента $w \in W$. Кольцо разностей $R(U)$ полутела W содержит подкольцо $V - V$, которое будет кольцом разностей полутела V. Поскольку кольцо $(U_1 - U_1) \times \ldots \times (U_n - U_n) \times \ldots$ также служит кольцом разностей для V, то можно отождествить $V - V$ с $(U_1 - U_1) \times \ldots \times (U_n - U_n) \times \ldots$ и считать, что $w \in V - V$. Тогда $w = (2^n - 2, 2^n - 4, \ldots, 0, -2^n, (-3)2^n, \ldots) \in W$ является делителем нуля в кольце $V - V \subseteq W - W$, что невозможно. □

Замечание 3.1. Остаётся открытым вопрос о вложимости произвольного сократимого полутела в сократимое полутело с образующей.

Предложение 3.4. *Для того чтобы прямое произведение непустого семейства $(U_i)_{i \in I}$ нетривиальных полутел имело центральную образующую, необходимо и достаточно, чтобы I было конечно, а все U_i были полутелами с центральной образующей.*

Доказательство. Достаточность вытекает из предложения 3.5.

Необходимость. Пусть прямое произведение $U = \prod U_i$ непустого семейства $(U_i)_{i \in I}$ нетривиальных полутел имеет центральную образующую $(a_i)_{i \in I}$. Согласно предложению 3.1 считаем, что $(a_i)_{i \in I} > 1$ в U. По предложению 3.1 для любого индекса $i \in I$ элемент $a_i > 1$ в полутеле U_i служит его центральной образующей. Предположим, что множество I бесконечно; тогда оно содержит копию натурального ряда $\mathbb{N}$. Возьмём элемент $(b_i)_{i \in I} \in U$, такой что $b_i = a_i^i$ для любого $i \in \mathbb{N} \subseteq I$ и $b_j = 1$ для $j \in I \setminus \mathbb{N}$. По теореме 3.1 существует $n \in \mathbb{N}$, для которого $(b_i)_{i \in I} \leqslant (a_i)^n_{i \in I} = (a_i^n)_{i \in I}$. При $i = n+1$ имеем $a_{n+1}^{n+1} \leqslant a_{n+1}^n$, откуда $a_{n+1} \leqslant 1$. Получаем противоречие с $a_{n+1} > 1$. Теорема доказана. $\square$

В частности, получаем следующую теорему.

Теорема 3.7. *Прямое произведение непустого семейства $(U_i)_{i \in I}$ полутел является ограниченным полутелом тогда и только тогда, когда почти все сомножители U_i тривиальны, а остальные — бесконечные ограниченные полутела.*

Замечание 3.2. Известно, что многообразие $\mathbf{I}$ всех идемпотентных полуполей содержится в любом нетривиальном подмногообразии многообразия $\mathbf{J}$ всех идемпотентных полутел [31, с. 215]. Рассмотрим произвольное нетривиальное многообразие $\mathbf{M}$ полутел. По теореме 3.7 в $\mathbf{M}$ существует неограниченное полутело U. Фактор-полутело $U/(2) \in \mathbf{M}$ нетривиально и идемпотентно. Поэтому $\mathbf{M} \cap \mathbf{J}$ — нетривиальное подмногообразие в $\mathbf{J}$. Значит, $\mathbf{I} \subseteq \mathbf{M} \cap \mathbf{J} \subseteq \mathbf{M}$. Вывод: многообразие всех идемпотентных полуполей является наименьшим нетривиальным многообразием и в классе всевозможных полутел.

Приведём несколько примеров.

Пример 3.1. Пусть $U(X)$ — полуполе всех непрерывных положительных вещественных функций, заданных на произвольном топологическом пространстве X, с поточечными операциями сложения и умножения функций. В [61] доказано, что $U(X)$ имеет образующую тогда и только тогда, когда пространство X псевдокомпактно, т. е. все функции из $U(X)$ ограниченные. Данные условия равносильны ограниченности полуполя $U(X)$. Именно на этом основании и было введено понятие ограниченного полутела. Отметим также, что для того чтобы все конечно порождённые ядра полуполя $U(X)$ были главными, необходимо и достаточно, чтобы X являлось F-пространством [61].

Пример 3.2. По предложению 3.3 сократимое полуполе $(\mathbb{R}^+)^m$, где m — бесконечный кардинал, не вкладывается в ограниченные полутела.

Пример 3.3. Цепное полуполе $^*(\mathbb{R}^+) = (^*\mathbb{R})^+$, являющееся неархимедовым расширением полуполя $\mathbb{R}^+$ всех положительных действительных чисел, не имеет максимальных ядер.

Пример 3.4. Возьмём любое простое полуполе, скажем $\mathbb{R}^+$, и последовательно расширим его с помощью конструкции теоремы 3.6 счётное число раз. Тогда в объединении получим полуполе, решётка собственных ядер которого изоморфна цепи $\mathbb{N}$ натуральных чисел.

4. Неприводимые ядра. Дистрибутивность

В этом разделе вводятся важные понятия неприводимого и максимального спектров полутела, рассматриваются условия дистрибутивности полутел, доказываются простейшие свойства дистрибутивных полутел.

Определение 4.1. Собственное ядро $A \in \mathrm{Con}\, U$ называется *неприводимым* (*слабо неприводимым*), если из $B \cap C \subseteq A$ (из $B \cap C = A$) следует, что $B \subseteq A$ или $C \subseteq A$ для любых $B, C \in \mathrm{Con}\, U$; A называется *максимальным*, если из $A \subseteq B$ следует, что $A = B$ или $B = U$ для любого $B \in \mathrm{Con}\, U$.

Лемма 4.1. *Для произвольных ядер A, B, K полутела U, среди которых хотя бы одно является подполутелом, верны равенства*

$$AK \cap BK = (A \cap B)K, \tag{4.1}$$

$$(A \cap K)(B \cap K) = AB \cap K. \tag{4.2}$$

Доказательство. Предположим сначала, что $A \cap B = \{1\}$ и K — подполутело. Рассмотрим в полутеле U ядра $(A \cap BK)(B \cap K)$, $(B \cap AK)(A \cap K)$ и ядерное подполутело $V = (A \cap BK)(B \cap AK)K$. Эти ядра являются дополнениями элемента K в интервале $[(A \cap K)(B \cap K), V]$ модулярной решётки $\mathrm{Con}\, V$, поскольку

$$\begin{aligned}
&(A \cap BK)(B \cap K)K = (A \cap BK)K = AK \cap BK = \\
&\quad = (B \cap AK)K = (B \cap AK)(A \cap K)K, \\
&(A \cap BK)(B \cap K) \cap K = (B \cap K)\big((A \cap BK) \cap K\big) = \\
&\quad = (B \cap K)(A \cap K) = (B \cap AK)(A \cap K) \cap K.
\end{aligned}$$

Значит, $(A \cap BK)(B \cap K) = (B \cap AK)(A \cap K)$ по свойству 2.10. Докажем равенство

$$A \cap BK = A \cap K. \tag{4.3}$$

Достаточно проверить включение $A \cap BK \subseteq A \cap K$. Пусть $a \in A \cap BK$. Тогда по доказанному $a \in (A \cap K)(B \cap AK)$, т. е. $a = a_1 b$ для некоторых $a_1 \in A \cap K$ и $b \in B$. Поэтому $a_1^{-1} a = b \in A \cap B = \{1\}$, откуда $a = a_1 \in A \cap K$. Мы имеем

$$AK \cap BK = K(A \cap BK) = K(A \cap K) = K = (A \cap B)K.$$

Включение $(A \cap K)(B \cap K) \subseteq AB \cap K$ очевидно. Пусть $ab = k \in K$, где $a \in A$, $b \in B$. Тогда $a = kb^{-1} \Longrightarrow a \in A \cap KB \subseteq K$ по (4.3) и $b = a^{-1}k \subseteq K$. Получаем равенство (4.2) для $A \cap B = \{1\}$.

Пусть теперь $A \cap B = D$. Рассмотрим полутело U/D. Будем обозначать ядра полутела U/D штрихами, т. е. если $C \supseteq D$, то $C' = C/D$. Поскольку для $A' \cap B' = \{1\}$ равенства (4.1), (4.2) доказаны, то

$$\begin{aligned}
&\big(A(DK) \cap B(DK)\big)' = \big(A(DK)\big)' \cap \big(B(DK)\big)' = \\
&\quad = (A'(DK)') \cap (B'(DK)') = (DK)', \\
&\big((A \cap DK)(B \cap DK)\big)' = \big((A' \cap (DK)'\big)(B' \cap (DK)') = \\
&\quad = A'B' \cap (DK)' = (AB \cap DK)',
\end{aligned}$$

откуда получаем (4.1), (4.2).

Осталось проверить данные равенства для случая, когда B — ядерное подполутело. Из модулярности решётки $\mathrm{Con}\, U$ и уже доказанного получаем

$$(A \cap K)(B \cap K) = (A \cap K)B \cap K = AB \cap KB \cap K = AB \cap K,$$
$$AK \cap BK = K(B \cap AK) = K(B \cap A)(B \cap K) = K(A \cap B). \qquad \square$$

Теорема 4.1. *Любое собственное ядро произвольного полутела лежит в некотором его неприводимом ядре.*

Доказательство. Пусть A — собственное ядро полутела U. Рассмотрим два случая: $(2)A \neq U$ и $(2)A = U$.

Пусть $(2)A \neq U$ и $b \in U \setminus (2)A$. Рассмотрим упорядоченное по включению множество ядерных подполутел

$$\{K \in \operatorname{Con} U \colon (2)A \subseteq K,\ b \notin K\}.$$

Это множество непусто и удовлетворяет условию леммы Цорна, поскольку объединение цепочки ядер полутела всегда является ядром. Поэтому в нём найдётся максимальный элемент M. Докажем, что ядро M неприводимо. Пусть $B \cap C \subseteq M$ для некоторых ядер B, C полутела U. Тогда по предложению 4.1 $BM \cap CM = (B \cap C)M = M$. Так как $b \notin M$, то $b \notin BM$ или $b \notin CM$. Значит, $B \subseteq BM = M$ или $C \subseteq CM = M$.

Пусть $(2)A = U$. Тогда $2 \notin A$, и упорядоченное множество ядер

$$\{K \in \operatorname{Con} U \colon A \subseteq K,\ 2 \notin K\}$$

имеет максимальный элемент M. Проверим неприводимость ядра M. Пусть $B \cap C \subseteq M$ для некоторых $B, C \in \operatorname{Con} U$. Допустим от противного, что B и C не содержатся в M. Тогда $BM = U$ и $CM = U$. Заметим, что $(B \cap M)CM = U = (C \cap M)BM$ и в силу модулярности решётки $\operatorname{Con} U$

$$(B \cap M)C \cap M = (B \cap M)(C \cap M) = (C \cap M)B \cap M.$$

Элемент M в интервале $[(B \cap M)(C \cap M), U]$ решётки $\operatorname{Con} U$ не может иметь два разных дополнения $(B \cap M)C$ и $(C \cap M)B$ по свойству 2.10, поэтому $(B \cap M)C = (C \cap M)B$. Отсюда по закону модулярности получаем противоречие с предположением:

$$B \subseteq BC = (B \cap M)C(C \cap M)B = (B \cap M)C \cap (C \cap M)B =$$
$$= (BM)[(C(CM)B)] = (B \cap M)(C \cap M)(B \cap C) \subseteq M. \qquad \square$$

Следствие 4.1. *В любом полутеле максимальные ядра неприводимы.*

Пространство $\operatorname{Sp} U$ всех неприводимых ядер полутела U, рассматриваемое со стоуновской топологией, назовём *неприводимым спектром* полутела U. Его подпространство $\operatorname{Max} U$, состоящее из всех максимальных ядер, называется *максимальным спектром* полутела U. В пучковых представлениях неприводимый спектр полутела заменяет понятие первичного спектра кольца.

Множества $D(A) = \{P \in \operatorname{Sp} U \colon A \nsubseteq P\}$, $A \in \operatorname{Con} U$, объявляются открытыми в стоуновской топологии. Для элемента $u \in U$ полагаем $D(u) = D\big((u)\big)$. Ясно, что $D(1) = \varnothing$, $D(U) = \operatorname{Sp} U$ и $D\big(\prod A_i\big) = \bigcup D(A_i)$ для любого семейства ядер A_i полутела U. Для $A, B \in \operatorname{Con} U$ выполняется равенство $D(A \cap B) = D(A) \cap D(B)$. Тем самым множества $D(A)$ действительно дают топологию на множестве $\operatorname{Sp} U$. Множества $D(u)$, $u \in U$, образуют базу стоуновской топологии на $\operatorname{Sp} U$. Аналогично вводится топология на множестве $\operatorname{Max} U$. Получаем T_0-пространство $\operatorname{Sp} U$ и T_1-пространство $\operatorname{Max} U$.

Следствие 4.2. *Если $D(A) = \operatorname{Sp} U$ для ядра $A \in \operatorname{Con} U$, то $A = U$.*

Теорема 4.2. *Для любого полутела U эквивалентны следующие условия:*
1) *U — полутело с образующей;*
2) *неприводимый спектр $\operatorname{Sp} U$ компактен;*
3) *максимальный спектр $\operatorname{Max} U$ компактен и любое собственное ядро полутела U содержится в некотором максимальном ядре.*

Доказательство. Докажем, что из свойства 1) следуют 2) и 3). Пусть A — собственное ядро полутела $U = (e)$. Рассмотрим упорядоченное по включению множество ядер в U, содержащих A и не содержащих e. По лемме Цорна в этом множестве существует максимальный элемент M. Очевидно, M будет максимальным ядром полутела U.

Пусть $\bigcup D(A_i) = \operatorname{Sp} U$ для некоторого семейства ядер A_i из $\operatorname{Con} U$. Тогда $\operatorname{Sp} U = D(\prod A_i)$, и $\prod A_i = U$. Действительно, если $\prod A_i$ — собственное ядро в U, то по доказанному оно содержится в некотором максимальном ядре M и $M \in \operatorname{Sp} U$ по следствию теоремы 4.1, что невозможно. Найдётся конечное число ядер $A_1, \ldots, A_n$ из семейства (A_i), таких что $e \in A_1 \cdot \ldots \cdot A_n$. Тогда $A_1 \cdot \ldots \cdot A_n = U$. Значит, $D(A_1) \cup \ldots \cup D(A_n) = D(U) = \operatorname{Sp} U$. Это доказывает и компактность спектра $\operatorname{Max} U$.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Имеем $\operatorname{Sp} U = D(a_1) \cup \ldots \cup D(a_n)$ для конечного числа некоторых элементов $a_1, \ldots, a_n \in U$. Тогда $\prod (a_i) = U$ по теореме 4.1. Остаётся воспользоваться свойством 3.3. Импликация 3) $\Longrightarrow$ 1) доказывается аналогично. □

Предложение 4.1. *Любое неприводимое ядро в полутеле U содержит некоторое минимальное неприводимое ядро.*

Доказательство. Пусть A — неприводимое ядро в U. Рассмотрим упорядоченное множество $Y = \{P \in \operatorname{Sp} U \mid P \subseteq A\}$ и произвольную убывающую цепочку (Q_α) ядер из этого множества. Если мы покажем, что ядро $Q = \bigcap Q_\alpha$ неприводимо, то по лемме Цорна найдётся минимальное неприводимое ядро, содержащееся в A. Пусть $B \cap C \subseteq Q$ для некоторых $B, C \in \operatorname{Con} U$. Предположим от противного, что существуют $b \in B \setminus Q$, $c \in C \setminus Q$. Тогда найдутся $Q_i, Q_j \in (Q_\alpha)$, такие что $b \notin Q_i$, $c \notin Q_j$. Не умаляя общности, допустим, что $Q_i \subseteq Q_j$. Тогда $B \cap C \nsubseteq Q_i$, но $Q_i \supseteq Q$; противоречие. Значит, $B \subseteq Q$ или $C \subseteq Q$. □

Рассмотрим свойства неприводимых ядер в дистрибутивных полутелах.

Псевдодополнением ядра A полутела U называется множество

$$A^* = \{u \in U \mid (u) \cap A = \{1\}\}.$$

Заметим, что $(AB)^* \subseteq A^* \cap B^*$ и $A \subseteq A^{**}$ для любых $A, B \in \operatorname{Con} U$.

Предложение 4.2. *Для любого полутела U эквивалентны следующие условия.*

1. *Полутело U дистрибутивно.*
2. *Все слабо неприводимые ядра полутела U неприводимы.*
3. *Все собственные ядра полутела U являются пересечениями его неприводимых ядер.*
4. $D(A) \subseteq D(B) \Longleftrightarrow A \subseteq B$ *для любых* $A, B \in \operatorname{Con} U$.
5. $D(A) = D(B) \Longrightarrow A = B$ *для всех* $A, B \in \operatorname{Con} U$.

Доказательство. Докажем импликацию $1 \Longrightarrow 2$. Пусть для некоторого ядра P дистрибутивного полутела U из $A \cap B = P$ следует $A = P$ или $B = P$ для любых $A, B \in \operatorname{Con} U$, и пусть $C \cap D \subseteq P$. Тогда $P(C \cap D) = PC \cap PD = P$, поэтому $PC = P$ или $PD = P$, откуда получаем $C \subseteq P$ или $D \subseteq P$. Таким образом, P неприводимо.

Докажем импликацию $2 \Longrightarrow 3$. Достаточно показать, что любое собственное ядро произвольного полутела является пересечением слабо неприводимых ядер. Пусть $A \in \operatorname{Con} U$ и $u \in U \setminus A$. По лемме Цорна среди ядер B полутела U, таких что $A \subseteq B$ и $u \notin B$, существует максимальное ядро P. Очевидно, ядро P слабо неприводимо.

Убедимся в справедливости импликации $4 \Longrightarrow 1$. Действительно, условие 4 означает, что решётка $\operatorname{Con} U$ изоморфна дистрибутивной решётке всех открытых множеств топологического пространства $\operatorname{Sp} U$.

Наконец, эквивалентность условий 3—5 вытекает непосредственно из определений. □

Предложение 4.2 носит общий характер. Оно справедливо также для групп с нормальными подгруппами в качестве ядер и для колец с идеалами.

Непустое множество $V \subseteq U$, не содержащее 1, назовём *закрытым*, если $(a) \cap (b) \cap V \neq \varnothing$ для любых $a, b \in V$.

Предложение 4.3. *Любое дистрибутивное полутело U обладает следующими свойствами.*

1. *Псевдодополнение любого ядра A в U есть наибольшее ядро, дающее в пересечении с A единицу, т. е. $\operatorname{Con} U$ — решётка с псевдодополнениями.*
2. *Для любого закрытого множества V и ядра A полутела U, таких что $A \cap V = \varnothing$, существует неприводимое ядро в U, содержащее A и не пересекающееся с V.*
3. *Пересечение всех неприводимых ядер полутела U равно $\{1\}$.*
4. $(AB)^* = A^* \cap B^*$, $(A \cap B)^* \supseteq A^* B^*$, *где* $A, B \in \operatorname{Con} U$.
5. *Для любого неприводимого ядра P полутела U множество*
$$O_P = \{a \in U \mid (a)^* \nsubseteq P\}$$
является ядром, содержащимся в P.
6. *Если $O_P = P$, $P \in \operatorname{Sp} U$, то P — минимальное неприводимое ядро.*

7. *Если $P \subseteq Q$, то $O_Q \subseteq O_P$ для $P, Q \in \operatorname{Sp} U$.*
8. *Если $O_P \subseteq Q$, то $O_Q \subseteq P$ для $P, Q \in \operatorname{Sp} U$.*
9. *Ядро A полутела U дополняемо тогда и только тогда, когда $D(A)$ замкнуто в $\operatorname{Sp} U$.*
10. *Для всякого $u \in U$ множество $D(u)$ компактно в пространстве $\operatorname{Sp} U$.*
11. *Если $(u) \cap (v) = \{1\}$ для $u, v \in U$, то $(u)(v) = (uv)$.*
12. *Если для ядра A и элемента u полутела U множества $D(A)$ и $D(u)$ замкнуты и $D(A) \subseteq D(u)$, то A — главное ядро.*

Доказательство. 1. Действительно, пусть $u, v \in A^*$, $x, y \in U$, $x + y = 1$. Тогда

$$A \cap (uv) \subseteq A \cap (u)(v) = \big(A \cap (u)\big)\big(A \cap (v)\big) = \{1\},$$
$$(xu + y) \cap A \subseteq (u) \cap A = \{1\}, \quad (u) = (u^{-1}),$$

значит, $uv, xu+y, u^{-1} \in A^*$. Также $(x^{-1}ux) = (u)$ для всех $x \in U$, поэтому A^* — ядро в U, являющееся наибольшим его ядром, пересекающимся с A по $\{1\}$.

2. Рассмотрим упорядоченное множество ядер

$$L = \{K \in \operatorname{Con} U \mid A \subseteq K,\ K \cap V = \varnothing\}.$$

Это множество непусто и удовлетворяет лемме Цорна. Поэтому в нём найдётся максимальный элемент M. Докажем, что ядро M неприводимо. Пусть $B \cap C = M$ для некоторых ядер B, C полутела U. Поскольку V — закрытое множество и $M \cap V = \varnothing$, то $B \cap V = \varnothing$ или $C \cap V = \varnothing$. Так как M максимально в L, то $B = M$ или $C = M$.

3. См. пункт 3 предложения 4.2.

4. Очевидно, что $C \cap AB = (C \cap A)(C \cap B) = \{1\}$ тогда и только тогда, когда $C \subseteq A^*$ и $C \subseteq B^*$. Этим доказано первое равенство. Пусть $c \in A^*B^*$. По свойству 2 данного предложения псевдодополнение любого ядра в дистрибутивном полутеле есть ядро, поэтому $(c)^* \supseteq (A^*B^*)^* = A^{**} \cap B^{**} \supseteq A \cap B$ и $(c) \subseteq (c)^{**} \subseteq (A \cap B)^*$.

5. Пусть $P \in \operatorname{Sp} U$, $a \in O_P$ и $x \in (a)^* \setminus P$. Так как P неприводимо и $\{1\} = (a) \cap (x) \subseteq P$, то $(a) \subseteq P$ и, следовательно, $O_P \subseteq P$. Докажем, что O_P — ядро. Пусть $a, b \in O_P$. Тогда $a^{-1} \in O_P$. По предыдущему свойству $(ab)^* \supseteq \big((a)(b)\big)^* = (a)^* \cap (b^*)$. Поскольку P — неприводимое ядро, то $(a)^* \cap (b^*) \nsubseteq P$, откуда $(ab)^* \nsubseteq P$, поэтому $ab \in O_P$. Кроме того, $(a) = (u^{-1}au)$ для любого $u \in U$. Значит, O_P — нормальная подгруппа в U. Если $x + y = 1$, то $(ax + y)^* \supseteq (a)^*$, так как $(ax + y) \subseteq (a)$, поэтому $ax + y \in O_P$.

6. Пусть существует такое $Q \in \operatorname{Sp} U$, что $Q \subsetneqq P$. Возьмём произвольный элемент $a \in P \setminus Q$. Тогда, с одной стороны, $\{1\} = (a) \cap (a)^* \subseteq Q$, откуда следует, что $(a)^* \subseteq Q \subseteq P$, а с другой — $(a)^* \nsubseteq P$. Противоречие.

7. Утверждение очевидно.

8. Предположим, что найдётся $a \in O_Q \setminus P \subseteq Q$. Тогда $(a)^* \subseteq P$, и так как $(a) \subseteq (a)^{**} \nsubseteq P$, то $(a)^* \subseteq O_P \subseteq Q$. Получили противоречие с выбором элемента a.

9. Если $D(A)$ замкнуто в $\operatorname{Sp} U$, то $\operatorname{Sp} U \setminus D(A) = D(B)$ для некоторого ядра $B \in \operatorname{Con} U$. Тогда $D(AB) = \operatorname{Sp} U = D(U)$, $D(A \cap B) = \varnothing = D(\{1\})$ и $AB = U$, $A \cap B = \{1\}$ по предложению 4.2. Обратно, пусть A дополняемо. Тогда $D(A) \cup D(A') = D(U) = \operatorname{Sp} U$ и $D(A) \cap D(A') = D(1) = \varnothing$, откуда открытое множество $D(A)$ также замкнуто в $\operatorname{Sp} U$.

10. В самом деле, пусть $D(u) \subseteq \bigcup D(u_i)$ для некоторого семейства элементов u_i полутела U. Тогда $D\big((u)\big) \subseteq D\big(\prod(u_i)\big)$. Поэтому $(u) \subseteq \prod(u_i)$ по предложению 4.2, т. е. $u \in \prod(u_i)$. Значит, $u \in \prod(u_{ij}) = (u_{i1}) \cdot \ldots \cdot (u_{in})$ для конечного числа элементов u_{ij}. Тогда $(u) \subseteq (u_{i1}) \cdot \ldots \cdot (u_{in})$ и $D\big((u)\big) \subseteq D\big((u_{i1}) \cdot \ldots \cdot (u_{in})\big) = D(u_{i1}) \cup \ldots \cup D(u_{in})$.

11. Очевидно, что $(uv) \subseteq (u)(v)$. Поскольку $(u) \cap (v) = \{1\}$, то $u \in P$ или $v \in P$ для любого $P \in \operatorname{Sp} U$. Но тогда если $uv \in P$, то $u, v \in P$ и $(u)(v) \subseteq P$. Поэтому $(u)(v) = (uv)$ по пункту 3 предложения 4.2.

12. По свойству 9 ядра A и (u) дополняемы. Поэтому $(u) = A(u) = A \cdot \big(A' \cap (u)\big)$ и $A \cap \big(A' \cap (u)\big) = \{1\}$. Значит, элемент u однозначно разлагается в произведение $u = vw$ при $v \in A$ и $w \in A' \cap (u)$. Поэтому $(v) = (v)\big((w) \cap A\big) = (v)(w) \cap A = A$. □

Предложение 4.4. *Если некоторое ядерное подполутело K полутела U дистрибутивно, то и само полутело U дистрибутивно.*

Доказательство. Поскольку решётка конгруэнций полутела модулярна, достаточно показать, что если $\operatorname{Con} U$ содержит диамант, то и $\operatorname{Con} K$ содержит диамант. Предположим, что найдутся три различных ядра A, B, C, не лежащих в K, таких что $AB = AC = BC = E$, $A \cap B = A \cap C = B \cap C = D$. Тогда по лемме 4.1

$$AK = AK \cap EK = AK \cap BKCK = (AK \cap BK)(AK \cap CK) = \\ = K(A \cap B)(A \cap C) = KD = BK = CK = EK.$$

Из второй теоремы об изоморфизмах следует, что $DK/D \cong K/(D \cap K)$, а это значит, что

$$\operatorname{Con}(DK/D) \cong \operatorname{Con}\big(K/(D \cap K)\big).$$

Поскольку $\operatorname{Con}(DK/D)$ содержит диамант $(D/D, A/D, B/D, C/D, E/D)$, то и $\operatorname{Con}\big(K/(D \cap K)\big)$, а значит, и $\operatorname{Con} K$ тоже содержат диамант. Теорема доказана. □

Решётка L называется *ретрактом* решётки S, если существуют гомоморфизмы $\pi\colon S \to L$ и $\chi\colon L \to S$, такие что $\pi \circ \chi = 1$.

Предложение 4.5. $\operatorname{Con}(2)$ — *ретракт* $\operatorname{Con} U$ *для любого полуполя* U.

Доказательство. Пусть A — ядро подполуполя (2) и $\rho = \rho(A) \in \operatorname{Con}(2)$. Докажем, что A является ядром в U. Поскольку в полуполе операция умножения коммутативна, то A — нормальная подгруппа и в U. Осталось проверить свойство. Возьмём произвольный элемент $a \in A$, и пусть $x + y = 1$ для некоторых

$x, y \in U$. Тогда

$$ax + y + ax + y + ay + x = a(2x + y) + (2y + x) = a(x + 1) + (y + 1).$$

Легко убедиться, что элементы $2x + y = (x + 1)$, $2y + x = (y + 1)$, $(x + 1) \cdot 3^{-1}$, $(y+1) \cdot 3^{-1}$, $a(x+1)+(y+1)$ принадлежат (2). Так как $(x+1) \cdot 3^{-1} + (y+1) \cdot 3^{-1} = 1$, то $a(x+1) \cdot 3^{-1} + (y+1) \cdot 3^{-1} \in A$. Аналогично показывается, что $a(y+1) \cdot 3^{-1} + (x+1) \cdot 3^{-1} \in A$. Так как (2) является ограниченным полуполем по теореме 3.2, а по теореме 3.1 все конгруэнции подполуполя (2) внутри него сократимы и $(ax + y) \cdot 3^{-1}, (ay + x) \cdot 3^{-1}, (a + 1) \cdot 3^{-1} \in (2)$, то

$$\begin{aligned}
&(a(x + 1) \cdot 3^{-1} + (y + 1) \cdot 3^{-1}) \; \rho \; (a(y + 1) \cdot 3^{-1} + (x + 1) \cdot 3^{-1}) \Longrightarrow \\
&\quad \Longrightarrow (ax \cdot 3^{-1} + y \cdot 3^{-1}) \; \rho \; (ay \cdot 3^{-1} + x \cdot 3^{-1}) \Longrightarrow \\
&\quad \Longrightarrow (ax \cdot 2^{-1} + y \cdot 2^{-1}) \; \rho \; (ay \cdot 2^{-1} + x \cdot 2^{-1}) \Longrightarrow \\
&\quad \Longrightarrow ax + y = (ax \cdot 2^{-1} + y \cdot 2^{-1} + ax \cdot 2^{-1} + y \cdot 2^{-1}) \; \rho \; (ay \cdot 2^{-1} + x \cdot 2^{-1} + \\
&\quad + ax \cdot 2^{-1} + y \cdot 2^{-1}) = (a \cdot 2^{-1} + 2^{-1}) \; \rho \; 1.
\end{aligned}$$

Значит, $ax + y \in A$, т. е. A — ядро в U.

Рассмотрим отображение ограничения $\pi\colon \operatorname{Con} U \to \operatorname{Con}(2)$, $\pi(A) = A \cap (2)$ для любого $A \in \operatorname{Con} U$. По доказанному π сюръективно. Очевидно, оно сохраняет пересечение ядер. Так как (2) — ядерное подполутело, то по лемме 4.1 π сохраняет и произведение ядер: $\pi(AB) = (AB) \cap (2) = \big(A \cap (2)\big)\big(B \cap (2)\big) = \pi(A)\pi(B)$ для любых $A, B \in \operatorname{Con} U$. Гомоморфизм $\chi\colon \operatorname{Con}(2) \to \operatorname{Con} U$ есть тождественное вложение. Тогда $\pi \circ \chi = 1$. Утверждение доказано. $\square$

Из предложений 4.4 и 4.5 выводим следующую теорему.

Теорема 4.3. *Полуполе U дистрибутивно тогда и только тогда, когда дистрибутивно подполуполе* (2).

В теореме 3.1 было доказано, что решётка конгруэнций полуполя $U = (2)$ канонически изоморфна решётке идеалов его кольца разностей. Поэтому справедливо следующее следствие.

Следствие 4.3. *Полуполе U дистрибутивно тогда и только тогда, когда дистрибутивна решётка идеалов кольца разностей полуполя* (2).

5. agp-полукольца

Сформулируем ряд основных результатов теории agp-полуколец, которые применим далее к исследованию полутел.

Определение 5.1. Полукольцо S с единицей 1 называется *абелево-регулярным положительным*, или кратко *agp-полукольцом*, если S — положительное (т. е. элемент $a+1$ обратим в S для любого $a \in S$), регулярное (т. е. для каждого $a \in S$ уравнение $axa = a$ разрешимо в S) полукольцо, каждый идемпотент e ($e^2 = e$) которого централен. Agp-полукольцо S называется *булевым*, если для каждого его идемпотента e существует дополнение, т. е. такой элемент $e' \in S$, что $e + e' = 1$ и $e \cdot e' = 0$.

Множество всех обратимых элементов агр-полукольца S будем обозначать $U(S)$, а множество идемпотентов — $L(S)$.

Перечислим простейшие свойства агр-полукольца S [18, предложение 2.1]:

1) каждый элемент a агр-полукольца S представляется в виде произведения $a = e_a \cdot u$ обратимого элемента $u \in U(S)$ и однозначно определённого идемпотента $e_a \in L(S)$;
2) $aS = bS \iff a = b \cdot u$ для некоторого $u \in U(S) \iff e_a = e_b$;
3) $aS + bS = (a+b)S$, или $fS + gS = (f \vee g)S$, где $f = e_a$, $g = e_b$, $f \vee g = e_{f+g}$. Это означает, что агр-полукольцо является полукольцом Безу: в нём каждый конечно порождённый идеал главный;
4) для любых $f, g \in L(S)$, $u, v \in U(S)$ $fu + gv = (f \vee g)w$ для некоторого $w \in U(S)$;
5) $\langle U(S), +, \cdot \rangle$ — полутело без нуля;
6) $\langle L(S), \vee, \cdot \rangle$ — дистрибутивная решётка с 0 и 1 относительно операции умножения полукольца S и сложения $\vee$, определяемого формулой $f \vee g = e_{f+g}$.

Для каждого идемпотента $e \in L(S)$ агр-полукольца S определим следующие конгруэнции $\varphi(e)$ и $\psi(e)$ на полутеле $U(S)$:

$$u \,\varphi(e)\, v \iff eu = ev,$$
$$u \,\psi(e)\, v \iff u + ex = v + ey \text{ для некоторых } x, y \in U(S).$$

Лемма 5.1 [21, 48]. *Конгруэнции $\psi(e)$ и $\varphi(e)$ являются дополнениями друг друга в решётке $\operatorname{Con} U(S)$ для любого $e \in L(S)$:*

$$\varphi(e) \cap \psi(e) = \mathbf{0}, \quad \varphi(e) \circ \psi(e) = \mathbf{1}.$$

Этот результат может быть назван основной леммой, поскольку он позволяет на основе работы [18] завершить построение теории агр-полуколец (см. [48,49]).

С каждым агр-полукольцом S можно связать тройку $\langle L(S), U(S), \varphi_S \rangle$, где $\langle U(S), +, \cdot \rangle$ — полутело без нуля, $\langle L(S), \vee, \cdot \rangle$ — дистрибутивная решётка, $\varphi_S \colon L(S) \to \operatorname{Con} U(S)$ — решёточный антигомоморфизм.

Вводится также категория абстрактных троек $\langle L, U, \varphi \rangle$, состоящих из ограниченной дистрибутивной решётки L, полутела без нуля U и решёточного антигомоморфизма $\varphi \colon L \to \operatorname{Con} U$, переводящего 0 в 1 и 1 в 0. Абстрактная тройка называется *индуцированной* $\langle L, U, \varphi \rangle$, если она соответствует некоторому агр-полукольцу.

Теорема 5.1. *Для того чтобы абстрактная тройка $\langle L, U, \varphi \rangle$ была индуцированной, необходимо и достаточно, чтобы все элементы $\operatorname{Im} \varphi$ были дополняемы в решётке $\operatorname{Con} U$.*

Теорема 5.2. *Любое агр-полукольцо однозначно — с точностью до изоморфизма — определяется своей индуцированной тройкой.*

Заметим, что абстрактную тройку $\langle L, U, \varphi\rangle$, для которой $\operatorname{Im}\varphi$ вкладывается в булеву подрешётку решётки $\operatorname{Con} U$, можно заменить тройкой $\langle L, U, \psi\rangle$, где $\psi\colon L \to \operatorname{Con} U$, $e \mapsto \psi(e)$, — гомоморфизм, определённый формулой $\psi(e) = \big(\varphi(e)\big)'$.

На произвольном булевом полукольце S по любому его максимальному идеалу M задаётся конгруэнция $\Theta(M)$:

$$s\,\Theta(M)\,t \iff es = et \text{ для некоторого } e \in L(S)\setminus M \quad (\forall s, t \in S).$$

Теорема 5.3 [18]. *Любое булево полукольцо S изоморфно полукольцу всех глобальных сечений пучка полутел с нулём $S/\Theta(M)$ над нульмерным компактом $\operatorname{Max} S$. Обратно, полукольцо всех глобальных сечений произвольного пучка полутел с нулём булево.*

Лемма 5.2 [50]. *Для любого булева полукольца S и любого $M \in \operatorname{Max} S$*

$$S/\Theta(M) \cong \Big(U(S) \,/ \bigvee_{e \in M} \varphi(e')\Big) \cup \{0\}.$$

Доказательство. Для любых $f, g \in L(S)$ соотношение $f\ \Theta(M)\ g$ означает, что $f \in M \iff g \in M$. Действительно, если $f\ \Theta(M)\ g$, то для некоторого $e \in L \setminus M$ выполнено $ef = eg$. Тогда $ef \in M \iff eg \in M$, или $f \in M \iff g \in M$ в силу простоты идеала M. Обратно, если $f, g \in L \setminus M$, то $fg \in L \setminus M$ и $f \cdot fg = g \cdot fg$, а если $f, g \in M$, то $f'g' \in L \setminus M$ и $f \cdot f'g' = g \cdot g'f'$. Значит, $\Theta(M)|_{L(S)}$ — двухклассовая конгруэнция. Для любых $u, v \in U(S)$ соотношение $u\,\Theta(M)\,v$ равносильно тому, что $u\varphi(e')v$ для некоторого $e \in P$. Следовательно, $\Theta(M)|_{U(S)} = \bigvee\limits_{e \in M} \varphi(e')$. Поэтому $(fu)\Theta(M)(gv)$ означает, что $fu, gv \in M$, или $u\,\Big(\bigvee\limits_{e \in M} \varphi(e')\Big)\,v$. □

Конгруэнции агр-полукольца определяются согласованными конгруэнциями на $L(S)$ и $U(S)$.

Пусть S — агр-полукольцо, σ — конгруэнция на дистрибутивной решётке $L(S)$ и τ — конгруэнция на полутеле $U(S)$. Пара конгруэнций (σ, τ) называется *согласованной*, если она удовлетворяет условию

$$e\sigma f \Longrightarrow \tau \circ \varphi(e) = \tau \circ \varphi(f).$$

Теорема 5.4 [48]. *Бинарное отношение ρ на агр-полукольце S является конгруэнцией на S тогда и только тогда, когда $\sigma = \rho|_{L(S)}$ и $\tau = \rho|_{U(S)}$ — конгруэнции на $L(S)$ и $U(S)$ соответственно, образующие согласованную пару (σ, τ), и*

$$(eu)\ \rho\ (fv) \iff e\ \sigma\ f \text{ и } u\ \big(\tau \circ \varphi(e)\big)\ v.$$

6. Полутело сечений пучка полутел

В этом разделе мы введём понятие пучка полутел (см. [5, 28]) и изложим основные свойства полутела сечений произвольного пучка полутел над нульмерным компактом.

Определение 6.1. *Пучком полутел* называется тройка $\langle X, \Pi, p\rangle$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) Π и X — топологические пространства, называемые соответственно *накрывающим* и *базисным пространствами* пучка;
2) $p\colon \Pi \to X$ — локальный гомеоморфизм, называемый *проекцией* пучка;
3) для каждой точки $x \in X$ множество $U_x = p^{-1}(x)$ является полутелом, называемым *слоем* пучка в точке x;
4) послойные операции сложения и умножения полутела непрерывны в Π;
5) отображение 1, переводящие каждую точку $x \in X$ в единицу $1_x \in U_x$, непрерывно (это отображение называется *единичным сечением* пучка).

Пучок полутел $\langle X, \Pi, p\rangle$ обозначим через Π и будем говорить, что $\Pi = \dot{\bigcup} U_x$ — пучок полутел U_x над пространством X. *Сечением* пучка Π над $Y \subseteq X$ называется любое непрерывное отображение $\sigma\colon Y \to \Pi$, удовлетворяющее условию $p \circ \sigma = 1_Y$. Сечение над открытым множеством Y называется *локальным*, а сечение, определённое над всем пространством X, — *глобальным сечением* или просто *сечением* пучка.

Аналогичным образом определяется пучок полуколец. Кроме единичного сечения, в пятом условии учитывается также нулевое сечение.

Будем обозначать через $\Gamma = \Gamma(X, \Pi)$ полутело всех сечений пучка Π полутел над топологическим пространством X с поточечно заданными операциями сложения и умножения сечений.

Пучок Π полутел (полуколец) U_x называется *факторным*, если для любых точки $x \in X$ и элемента $u \in U_x$ существует сечение $s \in \Gamma$, проходящее через u: $s(x) = u$.

Пусть дан пучок Π полутел U_x над топологическим пространством X. Для точки $x \in X$ и множества $Y \subseteq X$ через Γ^x и Γ^Y обозначим следующие ядра полутела сечений $\Gamma = \Gamma(X, \Pi)$:

$$\Gamma^x = \{s \in \Gamma \mid s(x) = 1_x \in U_x\},$$
$$\Gamma^Y = \{s \in \Gamma \mid s = 1 \text{ на } Y\} = \bigcap\{\Gamma^x \mid x \in Y\}.$$

Компактом называется любое компактное хаусдорфово пространство.

Определение 6.2. Пучок Π полутел над топологическим пространством X называется *компактным пучком*, если

1) X — компакт;
2) Π — факторный пучок;
3) $\Gamma^x \cdot \Gamma^y = \Gamma$ для любых точек $x \neq y$ из X.

Хаусдорфово топологическое пространство называется *нульмерным*, если его открыто-замкнутые множества образуют базу топологии.

Важнейший общий пример компактного пучка полутел даёт следующее утверждение.

Предложение 6.1. *Любой пучок полутел над нульмерным компактом компактен.*

Доказательство. Пусть $x \in X$ и $u \in U_x$. Имеется локальное сечение a над некоторой открытой окрестностью V точки x. Значит, существует открыто-замкнутая окрестность $W \subseteq V$ точки x. Сечение $s \in \Gamma$, равное a на W и 1 на $X \setminus W$, принимает значение u в точке x. Далее возьмём в X отличные друг от друга точки x, y и открыто-замкнутое множество $W \subseteq X$, содержащее x и не содержащее y. Тогда произвольное сечение $s \in \Gamma$ разлагается в произведение ab, где $a = 1$ на W и $a = s$ на $X \setminus W$, $b = s$ на W и $b = 1$ на $X \setminus W$. При этом $a \in \Gamma^x$, $b \in \Gamma^y$ и $\Gamma = \Gamma^x \cdot \Gamma^y$. □

Лемма 6.1. *Пусть A — ядро полутела $U(S)$ агр-полукольца S. Тогда для любых $s, t \in S$, таких что $s + t = 1$, и для любого $a \in A$ элемент $sa + t$ лежит в A.*

Доказательство. Пусть выполнены условия леммы и $\rho(A)$ — конгруэнция на полутеле $U(S)$ с ядром A. Очевидно, что пара конгруэнций $\big(\mathbf{0}, \rho(A)\big)$ является согласованной. По теореме 5.4 паре $\big(\mathbf{0}, \rho(A)\big)$ соответствует конгруэнция ρ на S, для которой $\rho(A) = \rho|_{U(S)}$. Поэтому имеем $a\ \rho(A)\ 1$, $a\ \rho\ 1$, $(sa)\ \rho\ s$, $(sa + t)\ \rho\ 1$. Пусть $s = e_s u$, $t = e_t v$, где $e_a, e_t \in L(S)$, $u, v \in U(S)$. Тогда $as + t = e_s \cdot (ua) + e_t \cdot v = (e_s \vee e_t)w$ для некоторого $w \in U(S)$. Так как $s + t = 1$, то $e_s \vee e_t = 1$ и $as + t = w \in A$. □

Доказательство следующей важной технической леммы существенно опирается на теорию агр-полуколец.

Лемма 6.2. *Пусть a — элемент ядра A полутела сечений $\Gamma = \Gamma(X, \Pi)$ пучка Π полутел U_x над нульмерным компактом X, W — произвольное открыто-замкнутое подмножество в X. Тогда сечение*

$$b = \begin{cases} a & \text{на } \ W, \\ 1 & \text{на } \ X \setminus W \end{cases} \tag{6.1}$$

принадлежит ядру A.

Доказательство. Рассмотрим топологическое пространство $\Pi' = \Pi \mathbin{\dot\cup} X$, являющееся топологической суммой пространств Π и X, и отображение $p' \colon \Pi' \to X$, такое что

$$p' = \begin{cases} p(y), & \text{если } \ y \in \Pi, \\ y, & \text{если } \ y \in X. \end{cases}$$

Отождествим точки x множества X с нулями 0_x соответствующих полутел $U_x \cup 0_x$. Получаем пучок Π' полутел с нулём над X, полукольцо сечений

$S = \Gamma(X, \Pi')$ которого является булевым полукольцом по теореме 5.3, причём $U(S) = \Gamma$. Пусть A — ядро полутела Γ и $a \in A$. Тогда элемент b, равный $ua + v$, где

$$u = \begin{cases} 1 & \text{на } W, \\ 0 & \text{на } X \setminus W, \end{cases} \qquad v = \begin{cases} 0 & \text{на } W, \\ 1 & \text{на } X \setminus W, \end{cases}$$

имеет вид (6.1) и по лемме 6.1 также принадлежит ядру A. □

Пусть дано полутело сечений $\Gamma = \Gamma(X, \Pi)$ пучка Π полутел U_x над топологическим пространством X. Для каждой точки $x \in X$ определим отображение $\pi_x \colon \Gamma \to U_x$ по следующему правилу:

$$\pi_x(s) = s(x) = s_x \quad \text{для любого} \quad s \in \Gamma.$$

Очевидно, что π_x является гомоморфизмом полутела Γ в полутело U_x для произвольного $x \in X$. Для факторного пучка отображения π_x являются эпиморфизмами.

Предложение 6.2. *Пусть $A, B \in \operatorname{Con}\Gamma$, $\Gamma = \Gamma(X, \Pi)$ — полутело сечений пучка полутел U_x над нульмерным компактом X. Тогда $\pi_x(A) = \pi_x(B)$ для всех $x \in X$ тогда и только тогда, когда $A = B$.*

Доказательство. Если $A = B$, то очевидно, что для любого $x \in X$ выполнено $\pi_x(A) = \pi_x(B)$. Обратно. Пусть $a \in A$. Для каждой точки $x \in X$ существует такой элемент $b \in B$, что $b(x) = a(x)$. Поэтому $b = a$ на некоторой открыто-замкнутой окрестности $W(x)$, и можно считать, что $b = 1$ на $X \setminus W(x)$. Используя компактность и нульмерность пространства X, выберем его конечное покрытие непересекающимися открыто-замкнутыми множествами $W_1, \ldots, W_n$ так, чтобы $b_i = a$ на W_i и $b_i = 1$ на $X \setminus W_i$ при всех $i = 1, \ldots, n$. Тогда $b_1, \ldots, b_n \in B$ по лемме 6.2 и $a = b_1 \cdot \ldots \cdot b_n \in B$. Значит, $A \subseteq B$. Аналогично $B \subseteq A$. □

Следствие 6.1. *Если $A \in \operatorname{Con}\Gamma$, Γ=$\Gamma(X,\ \Pi)$ — полутело сечений пучка полутел U_x над нульмерным компактом X и $\pi_x(A) = U_x$ для всех $x \in X$, то $A = U$.*

Отметим, что следствием предложение 6.2 является свойство 2.9.

Лемма 6.3. *Для полутела $\Gamma = \Gamma(X, \Pi)$ сечений пучка полутел U_x над нульмерным компактом X справедливы следующие утверждения.*

1. *Если A_x — ядро в U_x, $x \in X$, то $\pi^{-1}(A_x)$ — ядро в Γ.*
2. *Если $A \in \operatorname{Con}\Gamma$, то $\pi_x(A) \in \operatorname{Con} U_x$ для любой точки $x \in X$.*
3. *$\pi_y\big(\pi_x^{-1}(A)\big) = U_y$ для любых $x, y \in X$, $x \neq y$, $A \in \operatorname{Con} U_x$.*
4. *$\pi_x(AB) = \pi_x(A)\pi_x(B)$, $\pi_x(A \cap B) = \pi_x(A) \cap \pi_x(B)$ для $A, B \in \operatorname{Con}\Gamma$, $x \in X$.*

Доказательство. Утверждения 1 и 2 следуют из свойства 2.2.

3. Пусть $A \in \operatorname{Con} U$, x, y, $x \neq y$, — точки из X. Рассмотрим ядро $\pi_y\big(\pi_x^{-1}(A)\big)$ в U_y и произвольную точку $b_y \in U_y$. Возьмём сечение $b \in \Gamma$, такое что $b(y) = b_y$.

Найдётся открыто-замкнутая окрестность W точки y, не содержащая точку x. Тогда сечение

$$s = \begin{cases} b & \text{на } W, \\ 1 & \text{на } X \setminus W \end{cases}$$

принадлежит $\pi_x^{-1}(A)$. Поэтому $b(y) = s(y) \in \pi_y\big(\pi_x(A)\big)$.

4. Равенство $\pi_x(AB) = \pi_x(A)\pi_x(B)$ очевидно. Включение $\pi_x(A \cap B) \subseteq \pi_x(A) \cap \pi_x(B)$ выполняется всегда. Докажем, что $\pi_x(A \cap B) \supseteq \pi_x(A) \cap \pi_x(B)$. Пусть $d_x \in \pi_x(A) \cap \pi_x(B)$. Это значит, что существуют $a \in A$, $b \in B$, такие что $a(x) = d_x = b(x)$. Сечения равны в точке, значит, равны в некоторой открыто-замкнутой окрестности $W(x)$. Элемент

$$d' = \begin{cases} d & \text{на } W(x), \\ 1 & \text{на } X \setminus W(x) \end{cases}$$

по лемме 6.2 принадлежит $A \cap B$, и $d_x = \pi_x(d')$. □

Теорема 6.1. *Максимальные (неприводимые) ядра полутела $\Gamma = \Gamma(X, \Pi)$ сечений пучка полутел U_x над нульмерным компактом X — это в точности ядра вида $\pi_x^{-1}(K_x)$, где $x \in X$ и K_x — максимальное (неприводимое) ядро в U_x.*

Доказательство. Максимальность. Пусть K — максимальное ядро в Γ. Поскольку $K \neq \Gamma$, то согласно следствию 6.1 найдётся точка $x \in X$, такая что $\pi_x(K) \neq U_x$. Тогда $\pi^{-1}\big(\pi_x(K)\big) = K$ в силу максимальности K. Предположим, что $\pi_x(K)$ — немаксимальное ядро. Тогда существует ядро A_x, такое что $\pi_x(K) \subseteq A_x \subseteq U_x$. Но тогда $K \subseteq \pi^{-1}(A_x) \neq U$, противоречие. Обратно, если K_x — максимальное ядро в U_x, то очевидно, что $\pi_x^{-1}(K_x)$ — максимальное в Γ.

Неприводимость. Пусть K — неприводимое ядро в Γ. По следствию 6.1 найдётся такая точка $x \in X$, что $U_x \neq \pi_x(K)$. Очевидно, что $\pi_x(K)$ неприводим в U_x. Предположим, что $K \neq \pi_x^{-1}\big(\pi_x(K)\big)$, т. е. найдётся точка $y \in X$, отличная от x, такая что $U_y \neq \pi_y(K)$. Рассмотрим открыто-замкнутые непересекающиеся окрестности $W(x)$ и $W(y)$ точек x и y и ядра A, B, состоящие соответственно из элементов вида

$$u = \begin{cases} a & \text{на } W(x), \\ 1 & \text{на } X \setminus W(x), \end{cases} \qquad v = \begin{cases} b & \text{на } W(y), \\ 1 & \text{на } X \setminus W(y) \end{cases}$$

для любых $a, b \in \Gamma$. Но тогда $A \cap B = \{1\} \subseteq K$ и $A \nsubseteq K$, $B \nsubseteq K$, противоречие с неприводимостью ядра K. Обратное утверждение вытекает из леммы 6.3. □

Теорема 6.2. *Полутело $\Gamma = \Gamma(X, \Pi)$ сечений пучка Π полутел U_x над нульмерным компактом X дистрибутивно (ограниченно, зероидно) в том и только том случае, когда дистрибутивны (ограниченны, зероидны) все его слои U_x.*

Доказательство. Если полутело Γ дистрибутивно, то в силу леммы 6.3 дистрибутивны и все полутела $U_x = \pi_x(\Gamma)$. Также очевидно, что если Γ ограниченно или зероидно, то соответственно ограниченны или зероидны все слои U_x.

Обратно. Дистрибутивность. Пусть дистрибутивны все слои U_x. Для доказательства дистрибутивности полутела Γ достаточно проверить включение $AB \cap AC \subseteq A(B \cap C)$, $A, B, C \in \operatorname{Con} \Gamma$. Пусть $u \in AB \cap AC$. Для каждой точки $x \in X$ имеем $A_x(B_x \cap C_x) = A_x B_x \cap A_x C_x$, где K_x обозначает ядро $\pi_x(K)$ при $K \in \operatorname{Con} \Gamma$. По лемме 6.3 $u(x) \in A_x B_x \cap A_x C_x = A_x(B_x \cap C_x)$. Значит, существует такой элемент $u' \in A(B \cap C)$, что $u'(x) = u(x)$, поэтому $u' = u$ на некоторой открыто-замкнутой окрестности точки x. Поскольку X — нульмерный компакт, то можно выбрать конечное его покрытие попарно не пересекающимися открыто-замкнутыми множествами $W_1, \ldots, W_n$ и сечения $u'_1, \ldots, u'_n \in A(B \cap C)$, для которых выполняются равенства $u'_i = u$ на W_i, $i = 1, \ldots, n$. По лемме 6.2 можно считать, что элементы u'_i $(i = 1, \ldots, n)$ имеют вид

$$u'_i = \begin{cases} u & \text{на } \; W_i, \\ 1 & \text{на } \; X \setminus W_i. \end{cases}$$

Остаётся заметить, что $u = u'_1 \cdot \ldots \cdot u'_n \in A(B \cap C)$.

Ограниченность, зероидность. Пусть все слои полутела Γ ограниченные (зероидные). Рассмотрим произвольный элемент $a \in \Gamma$. Для каждой точки $x \in X$ найдётся $n \in \mathbb{N}$ $(b_x \in U_x)$, такое что $2_x^{-n} \leqslant a(x) \leqslant 2_x^n$ $(a(x) + b_x = a(x))$. Но тогда неравенство $2^{-n} \leqslant a \leqslant 2^n$ (равенство $a + b = a$ для некоторого $b \in \Gamma$, такого что $b(x) = b_x$) выполняется на некоторой открыто-замкнутой окрестности $W(x)$ точки x. Завершают доказательство этой части рассуждения, аналогичные случаю дистрибутивности (в случае ограниченности достаточно выбрать 2^m, где m — максимальная степень элемента 2 из выбранных). □

Замечание 6.1. При переходе от полутела Γ к слоям U_x и обратно сохраняются также свойства коммутативности, идемпотентности и сократимости полутел.

Предложение 6.3. *Пусть Π — пучок простых полутел U_x над нульмерным компактом X. Тогда отношение равенства на произвольном открыто-замкнутом множестве в X является дополняемой конгруэнцией полутела сечений $\Gamma = \Gamma(X, \Pi)$. Если Γ — полутело с образующей, то верно и обратное.*

Доказательство. Пусть Y — открыто-замкнутое множество. Тогда очевидно, что конгруэнция ρ, определяемая соотношением

$$a \,\rho\, b \iff a = b \text{ на } Y,$$

имеет дополнение ρ', определяемое соотношением

$$a \rho' b \iff a = b \text{ на } X \setminus Y.$$

Обратно, пусть $\Gamma = (e)$ и A, A' — ядра дополняемых конгруэнций полутела Γ. Рассмотрим множество $Y = \{x \in X \mid \pi_x(A) = \{1_x\}\}$. Так как $AA' = \Gamma$ и $A \cap A' = \{1\}$, то по предложению 6.2 имеем $\pi_x(A)\pi_x(A') = U_x$ и $\pi_x(A) \cap \pi_x(A') = \{1_x\}$ для каждого $x \in X$, поэтому $A_x = \{1_x\}$ для $x \in Y$ и $A'_x = \{1_x\}$ для $x \in X \setminus Y$. Существуют единственные $a \in A$, $a' \in A'$, такие что

$aa' = e$. Поскольку $a = 1$ на Y, $a' = 1$ на $X \setminus Y$, то $a = e$ на $X \setminus Y$, $a' = e$ на Y и Y — открыто-замкнутое множество. $\square$

7. Аналоги пучков Пирса и Ламбека

Построим для полутел структурные пучки типа пучков Пирса [83] и Ламбека [80] из теории колец.

Определение 7.1. *Функциональным представлением* или *пучковым представлением* полутела U называется произвольный гомоморфизм $\alpha\colon U \to \Gamma(X, \Pi)$ полутела U в полутело $\Gamma(X, \Pi)$ всех сечений некоторого пучка Π полутел над топологическим пространством X. Представление α называется *точным*, *полным* или *изоморфным*, если α соответственно мономорфизм, эпиморфизм или изоморфизм полутел.

Пучок Пирса $\mathcal{P}(U)$

Пусть U — произвольное нетривиальное полутело. Обозначим через $\mathfrak{B}(U)$ булеву подрешётку в $\operatorname{Con} U$ всех дополняемых ядер полутела U (теорема 2.2). Рассмотрим тройку $\langle \mathfrak{B}(U), U, \varphi \rangle$, где вложение $\varphi\colon \mathfrak{B}(U) \to \operatorname{Con} U$ задаётся правилом $\varphi(A) = A'$ для любого $A \in \mathfrak{B}(U)$, A' — дополнение A в $\operatorname{Con} U$. Эта тройка по теореме 5.1 является индуцированной, поэтому существует булево полукольцо S, такое что $\mathfrak{B}(U) \cong L(S)$, $U \cong U(S)$. Решётка всех идеалов булева полукольца S изоморфна дистрибутивной решётке всех идеалов булевой решётки $L(S)$ [18, предложение 2.1]. Поэтому множество $\operatorname{Max} \mathfrak{B}(U)$ всех максимальных идеалов булевой решётки $\mathfrak{B}(U)$ со стоуновской топологией, являющееся нульмерным компактом [29, с. 140], гомеоморфно максимальному спектру $\operatorname{Max} S$. По теореме 5.3 булево полукольцо S изоморфно полукольцу всех сечений $\Gamma = \Gamma(\operatorname{Max} S, \Pi_S)$ пучка полутел с нулём $S/\Theta(M)$, $M \in \operatorname{Max} S$, над нульмерным компактом $\operatorname{Max} S$, где

$$\Pi_S = \dot{\bigcup_{M \in \operatorname{Max} S}} S/\Theta(M).$$

Множество $W = \{0_M \mid M \in \operatorname{Max} S\}$ открыто-замкнуто в Π_S. Оно открыто как образ нулевого сечения пучка. Покажем, что множество $\Pi_S \setminus W$ открыто. Возьмём произвольный элемент $a \neq 0_M$ произвольного слоя $S/\Theta(M)$. В силу факторности пучка Π_S найдутся такие элементы $s, t \in \Gamma$, что $s(M) = a$, $t(M) = a^{-1}$. Тогда сечение st равно единичному сечению на некоторой открытой окрестности V точки M, причём $a \in s(V) \subseteq \Pi_S \setminus W$ и $s(V)$ открыто в $\Pi_S \setminus W$. Поэтому подпространство $\mathcal{P}(U) = \Pi_S \setminus W$ является накрывающим пространством пучка полутел $\bigl(S/\Theta(M)\bigr) \setminus \{0_M\}$ над $\operatorname{Max} S$. Тогда полутело U будет изоморфно подполутелу $\Gamma\bigl(\operatorname{Max} S, \mathcal{P}(U)\bigr)$ всех обратимых сечений в $\Gamma(\operatorname{Max} S, \Pi_S)$.

Слой $\Gamma_{\mathcal{M}}$ полученного пучка $\mathcal{P}(U)$ изоморфен по лемме 5.2 полутелу

$$U \,/ \bigvee_{e \in M} \varphi(e') \cong U \,/ \bigvee \mathcal{M},$$

где максимальный идеал M булевой решётки $L(S)$ соответствует $\mathcal{M} \in \operatorname{Max} \mathfrak{B}(U)$. Имеем

$$\bigvee \mathcal{M} = \prod \mathcal{M} = \bigcup_{A \in \mathcal{M}} A.$$

Собственное ядро A полутела U назовём *p-ядром*, если не существует собственного дополняемого ядра в U, строго содержащего A. Ядра вида $\bigvee \mathcal{M}$ являются p-ядрами. Действительно, предположим, что найдётся собственное ядро $A \in \mathfrak{B}(U)$, такое что $\bigvee \mathcal{M} \subset A$. Поскольку $\mathcal{M}$ — максимальный идеал в $\mathfrak{B}(U)$, то $A' \in \bigvee \mathcal{M}$. Получаем, что $A' \subseteq \bigvee \mathcal{M} \subset A \subset U$, противоречие. Ядро $\bigvee \mathcal{M}$ может совпадать с U, тогда слой $\Gamma_M = U \,/ \bigvee \mathcal{M}$ тривиален (одноэлементен).

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 7.1. *Любое полутело U изоморфно полутелу всех сечений пучка $\mathcal{P}(U)$ полутел $\Gamma_{\mathcal{M}}$, являющихся фактор-полутелами полутела U по некоторым его p-ядрам, над нульмерным компактом $\operatorname{Max} \mathfrak{B}(U)$.*

Полутело U называется *неразложимым*, если $\mathfrak{B}(U)$ — двухэлементная цепь. Только для неразложимых полутел U (и тривиального полутела) пучок $\mathcal{P}(U)$ имеет единственный слой U.

Следствие 7.1. *Если множество $\mathfrak{B}(U)$ конечно, то полутело U изоморфно прямому произведению конечного числа неразложимых полутел.*

Пучок Ламбека $\mathfrak{L}(U)$

Рассмотрим полутела, в которых множества O_P, $P \in \operatorname{Sp} U$, являются ядрами. В таких полутелах семейство ядер O_P по всем $P \in \operatorname{Sp} U$ является *открытым семейством ядер* (конгруэнций) полутела U: для любого элемента $a \in U$ множество

$$\{P \in \operatorname{Sp} U \mid a \in O_P\} = \{P \in \operatorname{Sp} U \mid (a)^* \nsubseteq P\} = D((a)^*)$$

открыто в $\operatorname{Sp} U$. Поэтому для полутела U существует структурный пучок $\mathfrak{L}(U)$ фактор-полутел U/O_P над топологическим пространством $\operatorname{Sp} U$ [69]. Гомоморфизм $\alpha\colon U \to \Gamma\big(\operatorname{Sp} U, \mathfrak{L}(U)\big)$ полутела U в полутело сечений $\Gamma\big(\operatorname{Sp} U, \mathfrak{L}(U)\big)$ задаётся формулой

$$\alpha(u)(P) = uO_P \in U/O_P \quad \text{для всех} \quad u \in U \quad \text{и} \quad P \in \operatorname{Sp} U.$$

Получаем функциональное представление α полутела U в пучке $\mathfrak{L}(U)$. Если в полутеле U к тому же псевдодополнения всех главных ядер являются ядрами, то мы получим точное вложение полутела U в $\Gamma\big(\operatorname{Sp} U, \mathfrak{L}(U)\big)$. Действительно, предположим, что $a \in \bigcap_{P \in \operatorname{Sp} U} O_P$. Тогда $(a)^*$ по определению не содержится ни в одном неприводимом ядре P. По теореме 4.1 получаем $(a)^* = U$, т. е. $a = 1$.

Назовём полутело U *полутелом с условием K*, если множества $(a)^*$ и O_P являются ядрами в U для любых $a \in U$, $P \in \operatorname{Sp} U$. По предложению 4.3 требуемым свойством обладают дистрибутивные полутела.

Предложение 7.1. *Пусть U — полутело с условием K. Тогда существует точное функциональное представление U в факторном пучке $\mathfrak{L}(U)$ полутел U/O_P над неприводимым спектром* $\operatorname{Sp} U$.

В предположении, что все собственные ядра дистрибутивного полутела U содержатся в максимальных ядрах, аналогичным образом получаем точное функциональное представление полутела U в пучке $\mathfrak{L}(U) = \dot{\bigcup}(U/O_M)$ над пространством $\operatorname{Max} U$.

Замечание 7.1. Теорема 7.1 даёт изоморфное представление любого полутела U в пирсовском пучке $\mathcal{P}(U)$, а предложение 7.1 — точное представление дистрибутивных полутел в их ламбековском пучке. Возникает естественная задача нахождения условий полноты ламбековского представления произвольного дистрибутивного полутела.

8. Сильно гельфандовы полутела

Применим ламбековское представление к функциональной характеризации сильно гельфандовых полутел.

Определение 8.1. Полутело называется *гельфандовым*, если для любых его неравных максимальных ядер M и N найдутся такие элементы $u \in M \setminus N$ и $v \in N \setminus M$, что $(u) \cap (v) = \{1\}$. Полутело U назовём *сильно гельфандовым*, если для любых двух различных максимальных ядер M и N в U существует дополняемое ядро $A \subseteq M$, не лежащее в N.

Для произвольного нетривиального полутела U зададим отображение $\varphi\colon \operatorname{Max} U \to \operatorname{Max} \mathfrak{B}(U)$ формулой

$$\varphi(M) = \{A \in \mathfrak{B}(U) \mid A \subseteq M\}$$

для любого $M \in \operatorname{Max} U$.

Рассмотрим свойства отображения φ.

Свойство 8.1. Отображение φ непрерывно.

Возьмём базисное открытое множество

$$D(A) = \{\mathcal{M} \in \operatorname{Max} \mathfrak{B}(U) \mid A \notin \mathcal{M}\}$$

топологического пространства $\operatorname{Max} \mathfrak{B}(U)$, $A \in \mathfrak{B}(U)$. Множество

$$\varphi^{-1}\big(D(A)\big) = \{M \in \operatorname{Max} U \mid \varphi(M) \in D(A)\} = \\ = \{M \in \operatorname{Max} U \mid A \notin \varphi(M)\} = \{M \in \operatorname{Max} U \mid A \nsubseteq M\}$$

открыто в $\operatorname{Max} U$.

Свойство 8.2. Отображение φ инъективно тогда и только тогда, когда U сильно гельфандово.

Свойство вытекает из определения φ и определения 8.1.

Свойство 8.3. Если каждое собственное ядро полутела U содержится в максимальном ядре, то сюръективность φ равносильна тому, что $\bigvee \mathcal{M} \neq U$ (слой $U \,/\, \bigvee \mathcal{M}$ нетривиален) для всех $\mathcal{M} \in \operatorname{Max} \mathfrak{B}(U)$.

Для любого $\mathcal{M} \in \operatorname{Max} \mathfrak{B}(U)$ имеем

$$\bigvee \mathcal{M} \neq U \iff \bigvee \mathcal{M} \subseteq M \text{ для некоторого } M \in \operatorname{Max} U \iff \\ \iff \mathcal{M} = \varphi(M) \text{ для подходящего } M \in \operatorname{Max} U.$$

Свойство 8.4. Образ отображения φ плотен в $\operatorname{Max} \mathfrak{B}(U)$ тогда и только тогда, когда любое собственное дополняемое ядро полутела U лежит в некотором максимальном ядре.

Плотность $\operatorname{Im} \varphi$ в $\operatorname{Max} \mathfrak{B}(U)$ означает, что $\operatorname{Im} \varphi \cap D(A') \neq \varnothing$ для всех собственных $A \in \mathfrak{B}(U)$. Последнее равносильно тому, что для любого собственного $A \in \mathfrak{B}(U)$ найдётся $M \in \operatorname{Max} U$, для которого $A' \nsubseteq M$, или $A \subseteq M$.

Определение 8.2. Полутело U назовём *бирегулярным*, если все его главные ядра дополняемы.

Свойство 8.5. Если полутело U бирегулярно, то φ — гомеоморфное вложение $\operatorname{Max} U$ в $\operatorname{Max} \mathfrak{B}(U)$.

В силу свойств 8.1 и 8.2 отображение φ непрерывно и инъективно. Базисные открытые множества максимального спектра $\operatorname{Max} U$ имеют вид $D(u) = \{M \in \operatorname{Max} U \mid (u) \nsubseteq M\}$, $u \in U$. Их образы $\varphi\big(D(u)\big) = D\big((u)\big) \cap \operatorname{Im} \varphi$ открыты в подпространстве $\operatorname{Im} \varphi$ пространства $\operatorname{Max} \mathfrak{B}(U)$.

Свойство 8.6. Если U — полутело с образующей, то отображение φ сюръективно.

По теореме 4.2 собственные ядра полутела $U = (u)$ содержатся в максимальных ядрах. По свойству 8.3 достаточно доказать, что $\bigvee \mathcal{M} \neq U$ для любого $\mathcal{M} \in \operatorname{Max} \mathfrak{B}(U)$. Если $\bigvee \mathcal{M} = U$, то $u \in A$ для некоторого $A \in \mathcal{M}$, откуда $A = U$, что невозможно.

Предложение 8.1. *Максимальные спектры гельфандовых полутел хаусдорфовы, а каждое их неприводимое ядро может содержаться только в одном максимальном ядре.*

Доказательство. Предполагаем, что U — гельфандово полутело с непустым спектром $\operatorname{Max} U$. Возьмём в $\operatorname{Max} U$ точки $M \neq N$. Найдутся элементы $u \in M \setminus N$ и $v \in N \setminus M$ с условием $(u) \cap (v) = \{1\}$. Для открытых множеств $D(u)$ и $D(v)$ пространства $\operatorname{Max} U$ имеем $D(u) \cap D(v) = D\big((u) \cap (v)\big) = D(1) = \varnothing$, $M \in D(v)$ и $N \in D(u)$, что и доказывает хаусдорфовость $\operatorname{Max} U$. Если теперь $P \in \operatorname{Sp} U$ и $P \subseteq M \cap N$, то включение $(u) \cap (v) = \{1\} \subseteq P$ влечёт $u \in P \subseteq M \cap N$ или $v \in P \subseteq M \cap N$, что невозможно. $\square$

Полутело, имеющее наибольшее собственное ядро, назовём *локальным*. Бирегулярные полутела и локальные полутела сильно гельфандовы, а сильно гельфандовы полутела гельфандовы.

Пространство X называется *вполне несвязным*, если любые две его точки разделяются открыто-замкнутым подмножеством.

Свойства 8.1, 8.2, теорема 4.2 и нульмерность $\operatorname{Max}\mathfrak{B}(U)$ дают следующее утверждение.

Предложение 8.2. *Если полутело U сильно гельфандово, то пространство $\operatorname{Max} U$ вполне несвязно. Если к тому же U — полутело с образующей, то $\operatorname{Max} U$ — нульмерный компакт.*

Носителем сечения $s \in \Gamma = \Gamma(X, \Pi)$ пучка Π полутел U_x называется замкнутое подмножество $\operatorname{supp} s = \{x \in X \mid s(x) \neq 1_x = 1(x)\}$ базисного пространства X.

Предложение 8.3. *Для полутела сечений $\Gamma = \Gamma(X, \Pi)$ любого компактного пучка Π локальных полутел U_x справедливы следующие утверждения.*

1. *Полутело Γ гельфандово.*
2. *Если X нульмерно, то полутело Γ сильно гельфандово.*
3. *Если Γ — полутело с образующей, то $\operatorname{Max}\Gamma$ гомеоморфно X.*

Доказательство. 1. Пусть M, N — различные максимальные ядра полутела Γ. Учитывая локальность слоёв U_x, по теореме 6.1 получаем $M = \pi_x^{-1}(P)$ и $N = \pi_y^{-1}(Q)$ для точек $x \neq y$ из X и максимальных ядер P и Q полутел U_x и U_y соответственно. Факторность пучка Π обеспечивает существование сечения $a \in \Gamma^x$, для которого $a(y) \notin Q$. Найдётся сечение $b \notin \pi_x^{-1}(P)$, равное 1 на замкнутом множестве $\operatorname{supp} a = \{x \in X \mid a(x) \neq 1\}$. Ясно, что $a \in M \setminus N$, $b \in N \setminus M$ и $(a) \cap (b) = \{1\}$, что доказывает гельфандовость полутела Γ.

2. Пусть X нульмерно и M, N, $M \neq N$, — максимальные ядра полутела Γ. Как и выше, $M = \pi_x^{-1}(P)$ и $N = \pi_y^{-1}(Q)$ для точек $x \neq y$ из X и $P \in \operatorname{Max} U_x$, $Q \in \operatorname{Max} U_y$. Возьмём открыто-замкнутое множество $W \subseteq X$, содержащее точку x и не содержащее точку y, и положим $A = \{a \in \Gamma \mid a = 1 \text{ на } W\}$. Ясно, что ядро A дополняемо в Γ, $A' = \{a \in \Gamma \mid a = 1 \text{ на } X \setminus W\}$. Поэтому A лежит в M, но не в N.

3. Пусть $\Gamma = (e)$. В силу утверждения 2 полутело Γ гельфандово, и по предложению 8.1 и теореме 4.2 $\operatorname{Max}\Gamma$ — компакт. Обозначим через M_x $(x \in X)$ единственное максимальное ядро локального полутела U_x. Рассмотрим отображение $f\colon X \to \operatorname{Max}\Gamma$, заданное формулой $f(x) = \pi_x^{-1}(M_x)$. Оно является биекцией по теореме 6.1. Покажем, что f — искомый гомеоморфизм. Для этого достаточно доказать непрерывность f в произвольной точке $x \in X$. Возьмём базисное открытое множество $D(a)$, $a \in \Gamma$, образа $\pi_x^{-1}(M_x)$ точки x при отображении f. Поскольку элемент $a(x) \notin M_x$ порождает слой U_x, то $e(x) \in \big(a(x)\big)$. В полутеле U_x элемент $e(x)$ выражается через элемент $a(x)$ с помощью конечной последовательности «ядерных» операций умножения, взятия обратного элемента и линейных комбинаций $ub + vc$ $(u + v = 1)$. Выполняя те же самые

операции над сечениями из Γ, проходящими через соответствующие элементы слоя U_x, получим сечение $s \in (a)$, равное $e(x)$ в точке x. Поэтому $s = e$ на некоторой окрестности W точки x. Тогда $s(y) \notin M_y$ для любой точки $y \in W$, откуда $a(y) \notin M_y$ для всех $y \in W$. Значит, $a \notin \pi_y^{-1}(M_y) = f(y)$ при всех $y \in W$. Следовательно, $f(W) \subseteq D(a)$, что завершает доказательство непрерывности f. $\square$

Следствие 8.1. *Для полутела сечений $\Gamma = \Gamma(X, \Pi)$ компактного пучка Π локальных полутел U_x, являющегося полутелом с образующей, равносильны следующие условия*:

1) *полутело Γ сильно гельфандово*;
2) *для любых двух различных максимальных ядер M и N полутела Γ существует элемент $a \in M \setminus N$, порождающий дополняемое ядро (a) в Γ*;
3) *пространство X нульмерно.*

Доказательство. Предложения 8.3 и 8.2 влекут эквивалентность 1) $\Longleftrightarrow$ 3). Импликация 2) $\Longrightarrow$ 1) очевидна.

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть полутело $\Gamma = (e)$ сильно гельфандово. По предложению 8.3 $X \approx \operatorname{Max}\Gamma$ — нульмерный компакт. Рассмотрим $M \neq N$ из $\operatorname{Max}\Gamma$. Возьмём x, y и W такие же, как и в доказательстве утверждения 2 предложения 8.3, и рассмотрим сечение $a \in \Gamma^W$, равное e на $X \setminus W$. Ядро (a) имеет дополнение (b), где $b \in \Gamma^{X \setminus W}$ и $b = e$ на W. Очевидно, что $a \in M \setminus N$. $\square$

Следствие 8.2. *Если U — сильно гельфандово полутело с образующей, то $\operatorname{Max} U$ гомеоморфно $\operatorname{Max}\mathfrak{B}(U)$.*

Доказательство. Искомый гомеоморфизм осуществляет отображение φ. По предложению 8.2 $\operatorname{Max} U$ вполне несвязно. На основании свойств 8.1, 8.2, 8.3 φ является непрерывной биекцией компакта $\operatorname{Max} U$ на нульмерный компакт $\operatorname{Max}\mathfrak{B}(U)$. $\square$

Предложение 8.4. *Пусть U — гельфандово полутело с образующей и с условием K, Y и Z — непересекающиеся замкнутые множества в $\operatorname{Max} U$. Тогда фактор-полутела U/O_M ($M \in \operatorname{Max} U$) локальны и $O_Y O_Z = U$, где $O_Y = \bigcap\{O_N \mid N \in Y\}$.*

Доказательство. Предположим, что ядро O_M, $M \in \operatorname{Max} U$, содержится и в максимальном ядре $N \neq M$. Найдутся элементы $u \in M \setminus N$ и $v \in N \setminus M$ с условием $(u) \cap (v) = \{1\}$, тогда $u \in O_M \subseteq N$, что невозможно. Это и означает локальность полутела U/O_M. Поэтому также $O_M O_K = U$ при $K \neq M$ из $\operatorname{Max} U$.

Наличие образующей у полутела U обеспечивает компактность максимального спектра $\operatorname{Max} U$ (теорема 4.2), а предложение 8.1 даёт хаусдорфовость. Поэтому замкнутое множество Y компактно. Зафиксируем $M \in \operatorname{Max} U \setminus Y$ и докажем равенство $M O_Y = U$. Возьмём $N \in Y$. Так как $O_M O_N = U$, то существует элемент $u \in O_N \setminus M$, т. е. $(u)^* \nsubseteq N$, $N \in D\big((u)^*\big)$ и $u \in O_K$ при всех $K \in D\big((u)^*\big)$. Открытые множества вида $D\big((u)^*\big)$ покрывают компактное множество Y. Значит, найдётся конечное число элементов $u_1, \ldots, u_n U \setminus M$, таких что $Y \subseteq D\big((u_1)^*\big) \cup \ldots \cup D\big((u_n)^*\big)$ и $u_i \in O_K$ при всех $K \in D\big((u_i)^*\big)$, $i = 1, \ldots, n$.

Поскольку ядро M неприводимо, то существует элемент $u \in (u_1)\ldots(u_n) \setminus M$, т. е. $u \in O_Y \setminus M$. Тогда $MO_Y = U$.

Наконец, пусть $O_Y O_Z \neq U$. Тогда $O_Y O_Z \subseteq M$ для некоторого $M \in \operatorname{Max} U$, $MO_Y = M$ и $MO_Z = M$. Так как $Y \cap Z = \varnothing$, то $M \in (\operatorname{Max} U) \setminus Y$ или $M \in (\operatorname{Max} U) \setminus Z$. В первом случае $MO_Y = U$, а во втором — $MO_Z = U$. Полученное противоречие даёт равенство $O_Y O_Z = U$. □

Теорема 8.1. *Произвольное полутело U с образующей с условием К сильно гельфандово тогда и только тогда, когда оно изоморфно полутелу $\Gamma(X, \Pi)$ всех сечений некоторого пучка Π локальных полутел U_x над нульмерным компактом X.*

Доказательство. Следствие 8.1 даёт достаточность. Обратно, пусть полутело $U = (e)$ с условием К сильно гельфандово. Рассмотрим мономорфизм полутела U в полутело сечений $\Gamma = \Gamma\big(\operatorname{Max} U, \mathfrak{L}(U)\big)$. Теорема 4.2 и предложение 8.2 показывают, что $\operatorname{Max} U$ — нульмерный компакт. Каждый слой U/O_M ($M \in \operatorname{Max} U$) локален по предложению 8.4. Остаётся доказать полноту представления α.

Отождествим U с $\alpha(U)$. При этом $O_M = U \cap \Gamma^M$ для всех $M \in \operatorname{Max} U$. Возьмём $s \in \Gamma$. Для всякого $M \in \operatorname{Max} U$ найдутся элемент $v \in U$ и открыто-замкнутая окрестность W точки M в $\operatorname{Max} U$, на которой $v = s$. Рассмотрим ядра $O_W = \bigcap\{O_N \mid N \in W\}$ и $O_{\operatorname{Max} U \setminus W} = \bigcap\{O_N \mid N \in \operatorname{Max} U \setminus W\}$ в U. Для них $O_W O_{\operatorname{Max} U \setminus W} = U$ по предложению 8.4. Имеем $v = w \cdot u$ при $w \in O_W$ и $u \in O_{\operatorname{Max} U \setminus W}$. Ясно, что $u = 1$ на $\operatorname{Max} U \setminus W$ и $u = s$ на W. Поэтому существует конечное семейство открыто-замкнутых множеств $W_1, \ldots, W_n$ нульмерного компакта $\operatorname{Max} U$, образующих его разбиение, и такие элементы $u_1, \ldots, u_n \in U$, что $u_1 = s$ на W_1 и $u_1 = 1$ на $\operatorname{Max} U \setminus W_1, \ldots,$ $u_n = s$ на W_n и $u_n = 1$ на $\operatorname{Max} U \setminus W_n$. Значит, $s = u_1 \cdot \ldots \cdot u_n \in U$. Теорема доказана. □

Лемма 8.1. *Всякое локальное дистрибутивное ограниченное полуполе U является цепным.*

Доказательство. Полуполе U имеет коммутативное кольцо разностей $R(U)$. По теореме 3.1 решётка идеалов $\operatorname{Id} R(U)$ изоморфна решётке ядер $\operatorname{Con} U$. Поэтому коммутативное кольцо $R(U)$ локально и дистрибутивно. Тогда в силу [38, теорема 1.21] кольцо $R(U)$ цепное. Значит, цепным будет и полуполе U. □

Следствие 8.3. *Полуполе изоморфно полуполю всех сечений пучка цепных ограниченных полуполей над нульмерным компактом тогда и только тогда, когда оно сильно гельфандово, дистрибутивно и ограниченно.*

Доказательство. Пусть Γ — полуполе всех сечений пучка цепных ограниченных полуполей над нульмерным компактом. Цепные ограниченные полуполя дистрибутивны и локальны. Поэтому по теореме 6.2 полуполе Γ дистрибутивно и ограниченно. По теореме 8.1 Γ сильно гельфандово.

Обратно, пусть U — сильно гельфандово дистрибутивное ограниченное полуполе. По теореме 8.1 $U \cong \Gamma(X, \Pi)$ для некоторого пучка Π локальных полутел U_x

над нульмерным компактом X. По теореме 6.2 слои U_x — дистрибутивные ограниченные полуполя. Остаётся применить лемму 8.1. $\square$

9. Бирегулярные и булевы полутела

Изучим строение бирегулярных полутел с помощью пучковых представлений Пирса и Ламбека и применим полученные результаты к описанию булевых полутел.

Напомним, что полутело *бирегулярно*, если все его главные ядра дополняемы. Полутело назовём *булевым*, если все его ядра дополняемы. Булевость нетривиального полутела U означает, что решётка его ядер $\mathrm{Con}\, U$ булева, т. е. $\mathrm{Con}\, U = \mathfrak{B}(U)$.

Предложение 9.1. *Любое бирегулярное полутело U обладает следующими свойствами.*

1. *Полутело U дистрибутивно.*
2. *В полутеле U неприводимые ядра совпадают с максимальными ядрами, т. е. $\mathrm{Sp}\, U = \mathrm{Max}\, U$.*
3. *Каждое собственное ядро в U является пересечением максимальных ядер, его содержащих.*
4. *$O_P = P$ для всех $P \in \mathrm{Sp}\, U$.*
5. *В полутеле U пересечение и произведение конечного числа главных ядер — главные ядра.*
6. *Множества $D(u)$, $u \in U$, — это в точности компактные открыто-замкнутые подмножества пространства $\mathrm{Max}\, U$.*
7. *$\mathrm{Max}\, U$ — нульмерное локально компактное пространство.*
8. *$\mathrm{Max}\, \mathfrak{B}(U)$ является компактификацией $\mathrm{Max}\, U$.*
9. *Точка $\mathcal{M} \in \mathrm{Max}\, \mathfrak{B}(U)$ изолированная тогда и только тогда, когда $\mathcal{M} = \varphi(M)$ для некоторого максимального дополняемого ядра M полутела U.*
10. *Главные ядра полутела U образуют обобщённо булеву решётку — подрешётку булевой решётки $\mathfrak{B}(U)$. Она изоморфна решётке всех компактных открыто-замкнутых подмножеств пространства $\mathrm{Max}\, U$.*

Доказательство. 1. Проверка дистрибутивности решётки ядер полутела U сводится к проверке закона дистрибутивности для главных ядер. А поскольку главные ядра в U дополняемы, то теорема 2.2 даёт свойство дистрибутивности для главных ядер.

2. По следствию 4.1 имеем $\mathrm{Max}\, U \subseteq \mathrm{Sp}\, U$. Пусть P — неприводимое ядро, a — произвольный элемент полутела U, не лежащий в P. Тогда $(a)P \supseteq (a)(a)^* = U$. Отсюда следует, что P максимально.

3. Утверждение вытекает из предложения 4.2 и свойств 1 и 2 настоящего предложения.

4. Пусть $P \in \operatorname{Sp} U$. По пункту 5 предложения 4.3 имеем $O_P \subseteq P$. Если $a \in P$, то $(a)^* \nsubseteq P$, откуда $a \in O_P$.

5. Возьмём $u, v \in U$. Имеем $(u) = [(u) \cap (v)] \cdot [(u) \cap (v)']$, откуда $(u) \cap (v) = (b)$, $(u) \cap (v)' = (a)$ для таких однозначно определённых сечений $b \in (u) \cap (v)$, $a \in (u) \cap (v)'$, что $ba = ab = u$. Поскольку $(a) \cap (v) = \{1\}$, то в силу пункта 11 предложения 4.3 $(u)(v) = [(u) \cap (v)'](v) = (a)(v) = (av)$.

6. По свойствам 1 и 2 U дистрибутивно и $\operatorname{Sp} U = \operatorname{Max} U$. Возьмём $u \in U$. По пункту 10 предложения 4.3 открытое множество $D(u)$ компактно. По пункту 9 предложения 4.3 открытое множество $D\big((u)'\big)$ служит дополнением $D(u)$. Поэтому $D(u)$ замкнуто. Обратно, возьмём компактное открыто-замкнутое подмножество Y в $\operatorname{Max} U$. Имеем $Y = D(A)$ для подходящего ядра A полутела U. Покроем компактное множество $D(A)$ конечным числом открыто-замкнутых множеств $D(u_1), \dots, D(u_m)$. Различные пересечения этих множеств образуют конечное разбиение множества $D(A)$ попарно не пересекающимися открыто-замкнутыми множествами, имеющими в силу пункта 12 предложения 4.3 вид $D(v_1), \dots, D(v_n)$ для некоторых $v_1, \dots, v_n \in U$. Применяя пункт 11 предложения 4.3, получаем

$$Y = D(A) = D(v_1) \cup \ldots \cup D(v_n) = D(v_1 \cdot \ldots \cdot v_n).$$

7. Свойство является следствием свойства 6.

8. Свойство вытекает из свойств 8.4, 8.5 отображения φ.

9. Изолированность точки $\mathcal{M} \in \operatorname{Max} \mathfrak{B}(U)$ равносильна тому, что

$$\{\mathcal{M}\} = D(A) = \{\mathcal{N} \in \operatorname{Max} \mathfrak{B}(U) \mid A \notin \mathcal{N}\} = \{\mathcal{N} \in \operatorname{Max} \mathfrak{B}(U) \mid A' \in \mathcal{N}\}$$

для некоторого $A \in \mathfrak{B}(U)$. При этом $\mathcal{M}$ является единственным максимальным идеалом булевой решётки $\mathfrak{B}(U)$ с условием $A' \in \mathcal{M}$: $\mathcal{M} = \{B \in \mathfrak{B}(U) \mid B \subseteq A'\}$, $A' = M$.

10. Свойство вытекает из свойства 6. □

По свойству 8 предложения 9.1 для любого бирегулярного полутела U отождествим $\operatorname{Max} U$ с его образом в $\operatorname{Max} \mathfrak{B}(U)$ при гомеоморфизме φ.

Следствие 9.1. *Для всякого булева полутела U множество $\operatorname{Max} U$ совпадает с множеством изолированных точек пространства $\operatorname{Max} \mathfrak{B}(U)$.*

Доказательство. Утверждение вытекает из свойства 9 предложения 9.1. □

Теорема 9.1. *Произвольное полутело U бирегулярно тогда и только тогда, когда оно изоморфно полутелу всех сечений некоторого пучка простых полутел и тривиальных полутел над нульмерным компактом.*

Доказательство. По теореме 7.1 бирегулярное полутело U изоморфно полутелу сечений пирсовского пучка полутел $U \,/ \bigvee \mathcal{M}$ по всем $\mathcal{M} \in \operatorname{Max} \mathfrak{B}(U)$. Покажем, что ядро $M = \bigvee \mathcal{M}$, не равное U, в бирегулярном полутеле U максимально. Предположим, что $\bigvee \mathcal{M} \subset A$ для некоторого ядра A полутела U. Возьмём $a \in A \setminus \bigvee \mathcal{M}$. Поскольку $\mathcal{M}$ — максимальный идеал в $\mathfrak{B}(U)$, то $(a)' \in \mathcal{M}$ и $(a)' \subseteq \bigvee \mathcal{M}$. Но тогда $(a)' \subseteq \bigvee \mathcal{M} \subseteq A$, откуда $U = (a)(a)' \subseteq A$, противоречие с предположением. Итак, для $\bigvee\mathcal{M} \neq U$ получаем $\mathcal{M} = \varphi(M)$ для $M \in \operatorname{Max} U$. В этом случае фактор-полутело $U \,/\, \bigvee\mathcal{M}$ простое. В противном случае $\bigvee\mathcal{M} = U$, и полутело $U \,/\, \bigvee\mathcal{M}$ тривиально.

Обратно, пусть дан пучок Π простых и тривиальных полутел U_x над нульмерным компактом X и $a \in \Gamma = \Gamma(X, \Pi)$. Для доказательства бирегулярности полутела $\Gamma(X, \Pi)$ рассмотрим замкнутое множество $Y = \{x \in X \mid a(x) \neq 1\}$ в X и ядро $B = \{b \in \Gamma \mid b = 1 \text{ на } Y\}$ полутела Γ. Имеем $(a) \cap B = \{1\}$. По теореме 6.1 неприводимые ядра в Γ — это в точности ядра Γ^x по всем точкам $x \in X$, в которых слои U_x — простые полутела. Поэтому в случае $(a)B \neq \Gamma$ имеем $(a)B \subseteq \Gamma^y$ для некоторой точки $y \in X$ по теореме 4.1. Тогда $a(y) = 1$ и $x \notin Y$. Найдётся открыто-замкнутая окрестность W точки y, не пересекающаяся с Y. Но тогда в силу факторности пучка найдётся сечение $b \in B$, не равное 1 в точке y, что противоречит включению $B \subseteq \Gamma^y$. Значит, $(a)B = \Gamma$, и произвольное главное ядро (a) дополняемо в Γ. $\square$

Пучок Π полутел над топологическим пространством X называется *хаусдорфовым*, если его накрывающее пространство хаусдорфово. Это равносильно тому, что для любого $a \in \Gamma(X, \Pi)$ множество $\{x \in X \mid a(x) = 1\}$ открыто-замкнуто.

Теорема 9.2. *Полутело U с образующей бирегулярно тогда и только тогда, когда $U \cong \Gamma(X, \Pi)$ для некоторого (хаусдорфова) пучка Π простых полутел U_x над нульмерным компактом X.*

Доказательство. Пусть дано бирегулярное полутело $U = (e)$. Оно дистрибутивно и сильно гельфандово. По теореме 8.1 U изоморфно полутелу сечений $\Gamma = \Gamma\big(\operatorname{Max} U, \mathfrak{L}(U)\big)$ пучка Π полутел U/O_M над нульмерным компактом $X = \operatorname{Max} U$. По свойству 4 предложения 9.1 для любого $M \in \operatorname{Max} U$ фактор-полутело $U_M = U/O_M = U/M$ является простым полутелом. Докажем хаусдорфовость накрывающего пространства $\mathfrak{L}(U)$, т. е. проверим, что для любого сечения $a \in \Gamma$ открытое множество $Y = \{x \in X \mid a(x) = 1\}$ замкнуто в X. Главное ядро (a) имеет в Γ дополнение $(a)'$. При этом $e = bc$ для некоторых $b \in (a)$ и $c \in (a)'$. Имеем $b = 1$ на Y и $c = e \neq 1$ на Y. Поскольку $(c) \cap (a) = \{1\}$, то по утверждению 4 предложения 6.3 и $\big(c(x)\big) \cap \big(a(x)\big) = \{1_x\}$ для всех $x \in X$. Так как $a \neq 1$ на $X \setminus Y$ и полутела U_x простые, то $c = 1$ на $X \setminus Y$. Поэтому множество $X \setminus Y = \{x \in X \mid c(x) = 1\}$ открыто и Y открыто-замкнуто.

Обратное доказано в теореме 9.1. $\square$

Предложение 9.2. *Для того чтобы полутело U было булевым, необходимо и достаточно, чтобы все слои пучка $\mathcal{P}(U)$ являлись простыми или тривиальными полутелами, а $\operatorname{Max} U$ совпадало с множеством изолированных точек базисного пространства $\operatorname{Max} \mathfrak{B}(U)$.*

Доказательство. Теорема 9.1 и следствие 9.1 дают необходимость.

Докажем достаточность. По теореме 7.1 $U \cong \Gamma\big(\operatorname{Max} \mathfrak{B}(U), P(U)\big)$. Тогда по теореме 9.1 полутело U бирегулярно. По условию и в силу свойства 9 предложения 9.1 все максимальные ядра полутела U дополняемы. Возьмём произвольное ядро A в U. Рассмотрим $D(A) = \{M \in \operatorname{Max} U \mid A \nsubseteq M\}$. Поскольку $\operatorname{Max} U$ дискретно, то множество $\operatorname{Max} U \setminus D(A)$ есть $D(B)$ для некоторого ядра B из $\operatorname{Con} U$. Имеем $D(A \cap B) = D(A) \cap D(B) = \varnothing$ и $D(AB) = \operatorname{Max} U$, откуда $B = A'$ по пункту 1 предложения 9.1 и по предложению 4.2. Поэтому полутело U булево. $\square$

Следствие 9.2. *Полутело является булевым полутелом с образующей тогда и только тогда, когда оно изоморфно прямому произведению конечного числа простых полутел.*

Следствие 9.3. *Если все максимальные ядра бирегулярного полутела дополняемы, то оно булево.*

Следствие 9.4. *Для булева полутела U пространство $\operatorname{Max} \mathfrak{B}(U)$ есть стоун-чеховская компактификация дискретного пространства $\operatorname{Max} U$.*

Доказательство. Из свойства 8 предложения 9.1 и следствия 9.1 вытекает, что нульмерный компакт $\operatorname{Max} \mathfrak{B}(U)$ является компактификацией дискретного пространства $\operatorname{Max} U$. Для проверки того, что эта компактификация служит компактификацией Стоуна—Чеха, достаточно показать, что замыкание в $\bar{Y}$ в $\operatorname{Max} \mathfrak{B}(U)$ произвольного подмножества $Y \subseteq \operatorname{Max} U$ открыто [65, следствие 3.6.2]. Имеем $Y = D(A) = \{M \in \operatorname{Max} U \mid A' \subseteq M\}$ и $\operatorname{Max} U \setminus Y = D(A')$, как и в предложении 9.2. Тогда

$$\bar{Y} = \{\mathcal{M} \in \operatorname{Max} \mathfrak{B}(U) \mid A' \in \mathcal{M}\} = \operatorname{Max} \mathfrak{B}(U) \setminus \{\mathcal{M} \in \operatorname{Max} \mathfrak{B}(U) \mid A \in \mathcal{M}\} -$$

открытое множество в $\operatorname{Max} \mathfrak{B}(U)$. $\square$

Следствие 9.5. *Решётка $\operatorname{Con} U$ любого булева полутела U изоморфна булеану множества $\operatorname{Max} U$.*

Применим теперь пучок Ламбека $\mathfrak{L}(U)$ к изучению бирегулярных полутел U.

Предложение 9.3. *Для произвольного бирегулярного полутела U пучки $\mathcal{P}(U)$ и $\mathfrak{L}(U)$ совпадают тогда и только тогда, когда U — полутело с образующей.*

Доказательство. Пусть пучки $\mathcal{P}(U)$ и $\mathfrak{L}(U)$ совпадают. Тогда $\operatorname{Max} U = \operatorname{Max} \mathfrak{B}(U)$, откуда по свойству 2 предложения 9.1 и теореме 4.2 получаем, что полутело U является полутелом с образующей.

Обратно, пусть U — бирегулярное полутело с образующей. Тогда по теореме 4.2 $\operatorname{Max} U$ компактно, $\operatorname{Max} U \approx \operatorname{Max} \mathfrak{B}(U)$ и $U/O_M = U/M = U \big/ \bigvee M$. $\square$

Пусть Π — пучок полутел над топологическим пространством X. Через $\Gamma_{00}(X, \Pi)$ будем обозначать множество всех тех сечений $s \in \Gamma(X, \Pi)$, которые имеют компактный носитель $\operatorname{supp} s$.

Лемма 9.1. *Множество $\Gamma_{00}(X, \Pi)$ является подполутелом полутела $\Gamma(X, \Pi)$ в том и только том случае, когда множество $\operatorname{supp} 2 = \{x \in X \mid 1_x + 1_x \neq 1_x\}$ компактно в X.*

Доказательство. Необходимость очевидна.

Достаточность. Для любых $s, t, u, v \in \Gamma(X, \Pi)$, $u + v = 1$, имеем

$$\operatorname{supp}(st) \cup \operatorname{supp}(su + tv) \subseteq \operatorname{supp} s \cup \operatorname{supp} t, \quad \operatorname{supp}(tst^{-1}) = \operatorname{supp} s^{-1} = \operatorname{supp} s,$$
$$\operatorname{supp}(s + t) \subseteq \operatorname{supp} s \cup \operatorname{supp} t \cup \operatorname{supp} 2.$$

Предположим, что носитель $\operatorname{supp} 2$ компактен. Тогда для $s, t \in \Gamma_{00}(X, \Pi)$ и $u, v, w \in \Gamma(X, \Pi)$, $u + v = 1$, получаем $st, s^{-1}, s + t, wsw^{-1}, su + tv \in \Gamma_{00}(X, \Pi)$. Поэтому множество $\Gamma_{00}(X, \Pi)$ будет ядерным подполутелом полутела $\Gamma(X, \Pi)$. □

Подчеркнём, что все слои-полутела U_x пучка Π при $x \in X \setminus \operatorname{supp} 2$ идемпотентны. Поэтому если базисное пространство пучка полутел некомпактно, а носитель $\operatorname{supp} 2$ компактен, то все его слои — за исключением слоёв над компактным множеством — идемпотентные полутела.

Теорема 9.3. *Любое бирегулярное полутело U изоморфно полутелу всех сечений с компактными носителями хаусдорфова пучка $\mathfrak{L}(U)$ простых полутел U/M над нульмерным локально компактным пространством $\operatorname{Max} U$.*

Доказательство. Рассмотрим ламбековское представление α бирегулярного полутела U. По свойствам 2, 4, 7 предложения 9.1 пучок $\mathfrak{L}(U)$ имеет простые слои U/M и нульмерное локально компактное базисное пространство $\operatorname{Max} U$.

Проверим хаусдорфовость пучка $\mathfrak{L}(U)$. Заметим, что для любого $u \in U$ справедливо равенство $\operatorname{supp} \alpha(u) = D(u)$. Пусть $s \in \Gamma\big(\operatorname{Max} U, \mathfrak{L}(U)\big)$ и $M \in \operatorname{supp} s$. Существует элемент $u \in U$, для которого $\alpha(u)(M) = s(M)$. Значит, $\alpha(u) = s$ на некотором открытом множестве $Y \subseteq \operatorname{Max} U$. Но тогда $M \in D(u) \cap Y \subseteq \operatorname{supp} s$. Тем самым носитель всякого сечения пучка $\mathfrak{L}(U)$ — открытое множество.

Осталось доказать сюръективность отображения α. Пусть $s \in \Gamma_{00}\big(\operatorname{Max} U, \mathfrak{L}(U)\big)$. Его носитель $\operatorname{supp} s$ есть компактное открыто-замкнутое подмножество в $\operatorname{Max} U$. Для любого $M \in \operatorname{supp} s$ найдутся $u \in U$ и открыто-замкнутое множество $Y \subseteq \operatorname{supp} s$, такие что $M \in Y$ и $s = \alpha(u)$ на Y. Существуют ядра A и B полутела U, для которых $D(A) = Y$ и $D(B) = \operatorname{Max} U \setminus Y$ (именно $A = \bigcap(\operatorname{Max} U \setminus Y)$ и $B = \bigcap Y$). По пункту 9 предложения 4.3 имеем $B = A'$. Поэтому $u = ab$ для некоторых $a \in A$ и $b \in B$. Тогда $\alpha(a) = \alpha(u) = s$ на Y и $\alpha(a) = 1$ на $\operatorname{Max} U \setminus Y$. Открыто-замкнутые множества Y покрывают компакт $\operatorname{supp} s$. Поэтому можно выбрать конечное покрытие $\operatorname{supp} s$ этими множествами $Y_1, \ldots, Y_n$, причём считать их попарно не пересекающимися. Как было показано, с ними связаны такие элементы $a_1, \ldots, a_n$, что $\alpha(a_i) = s$ на Y_i и $\alpha(a_i) = 1$ на $\operatorname{Max} U \setminus Y_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Получаем, что $s = \alpha(a_1) \cdot \ldots \cdot \alpha(a_n) = \alpha(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n)$. Теорема доказана. □

Имеет место и обратное утверждение.

Теорема 9.4. *Если Π — пучок простых полутел U_x над нульмерным локально компактным пространством X, для которого носитель $\operatorname{supp} 2$ компактен, то полутело $\Gamma_{00}(X, \Pi)$ бирегулярно.*

Доказательство. По лемме 9.1 множество $\Gamma_{00}(X,\Pi)$ будет подполутелом полутела $\Gamma(X,\Pi)$. Возьмём сечение $s \in \Gamma_{00}(X,\Pi)$. По условию $\operatorname{supp} s$ — компактное подмножество нульмерного локально компактного пространства X. Оно содержится в некотором компактном открыто-замкнутом множестве $Y \subseteq X$. Требуется доказать, что главное ядро (s) полутела $\Gamma_{00}(X,\Pi)$ дополняемо. Достаточно показать, что дополнением (s) будет ядро

$$A = \{t \in \Gamma_{00}(X,\Pi) \mid t = 1 \text{ на } \operatorname{supp} s\}.$$

Имеем $(s) \cap A = \{1\}$. Для проверки равенства $(s)A = \Gamma_{00}(X,\Pi)$ рассмотрим пучок $\Pi' = \Pi|_Y$ простых полутел U_x над нульмерным компактом Y, индуцированный пучком Π. При этом $\Gamma(Y,\Pi') = \Gamma_{00}(X,\Pi)|_Y$. Докажем, что $(s|_Y)\cdot A|_Y = \Gamma_{00}(Y,\Pi')$. Тогда $(s)A = \Gamma_{00}(X,\Pi)$. Возьмём точку $y \in Y$. Если $y \in \operatorname{supp} s$, то $s(y) \neq 1$. Если же $y \notin \operatorname{supp} s$, то найдутся открыто-замкнутая окрестность $Z \subseteq Y \operatorname{supp} s$ точки y и сечение $t \in A$, равное 1 вне Z и $t(y) \neq 1$. По предложению 6.2 получаем равенство $(s|_Y)\cdot A|_Y = \Gamma(Y,\Pi')$. □

С учётом теоремы 4.2 частным случаем теорем 9.3 и 9.4 становится теорема 9.2.

Предложение 9.4. *Хаусдорфовость пучка* Π *простых полутел над нульмерным компактом* X *равносильна существованию образующей в полутеле сечений* $\Gamma(X,\Pi)$.

Доказательство. Пусть пучок Π хаусдорфов. Тогда нульмерный компакт X можно покрыть конечным числом попарно не пересекающихся открыто-замкнутых множеств $\operatorname{supp} s_1, \ldots, \operatorname{supp} s_n$. Сечение $s = s_1 \cdot \ldots \cdot s_n \in \Gamma(X,\Pi)$ нигде не равно 1. По предложению 6.2 $(s) = \Gamma(X,\Pi)$.

Обратно, предположим, что $\Gamma(X,\Pi)$ — полутело с образующей u. Возьмём произвольное сечение $s \in \Gamma(X,\Pi)$. Как и в теореме 9.4, доказывается, что главное ядро (s) имеет дополнение $\{t \in \Gamma(X,\Pi) \mid t = 1 \text{ на } \operatorname{supp} s\}$. Значит, $u = pq$ для некоторых $p \in (s)$ и $q \in (s)'$. Очевидно, что $(s) = (p)$ и $(s)' = (q)$. Тогда $\operatorname{supp} s \cup \operatorname{supp} q = X$ и $\operatorname{supp} s \cap \operatorname{supp} q = \varnothing$. Поэтому носитель $\operatorname{supp} s$ открыт, что и требовалось установить. □

Возникает вопрос: всякий ли пучок простых полутел над нульмерным компактом хаусдорфов?

Лемма 9.2. *Если* Π — *хаусдорфов пучок простых полутел* U_x *над нульмерным локально компактным пространством* X, *для которого носитель* $\operatorname{supp} 2$ *компактен, и* $\operatorname{supp} s \subseteq \operatorname{supp} A$ *для элемента* s *и ядра* A *полутела* $\Gamma_{00}(X,\Pi)$, *то* $s \in A$.

Доказательство. Определим *носитель ядра* A как множество $\operatorname{supp} A = \bigcup \operatorname{supp} a$ по всем $a \in A$. Ясно, что $\operatorname{supp}(t) = \operatorname{supp} t$ и $\operatorname{supp} AB = \operatorname{supp} A \cup \operatorname{supp} B$ для любых элемента t и ядер A, B из $\Gamma_{00}(X,\Pi)$. В хаусдорфовом пучке носитель $\operatorname{supp} A$ открыт. Пусть $\operatorname{supp} s \subseteq \operatorname{supp} A$. Компактное множество $\operatorname{supp} s$ содержится в объединении Y конечного числа компактных открыто-замкнутых множеств $\operatorname{supp} a_1, \ldots, \operatorname{supp} a_n$ при $a_1, \ldots, a_n \in A$. Имеем

$$\operatorname{supp}\big((a_1) \cdot \ldots \cdot (a_n) \cdot (s)\big) = \operatorname{supp}\big((a_1) \cdot \ldots \cdot (a_n)\big) \subseteq Y.$$

Как и в доказательстве теоремы 9.4, рассмотрим пучок $\Pi' = \Pi|_Y$ полутел U_x над нульмерным компактом Y; для него $\Gamma(Y, \Pi') = \Gamma_{00}(X, \Pi)|_Y$. Беря ограничения всех рассматриваемых сечений на Y, по предложению 6.2 получаем, что $(a_1) \cdot \ldots \cdot (a_n) \cdot (s) = (a_1) \cdot \ldots \cdot (a_n)$ над Y, откуда следует равенство самих этих ядер. Значит, $s \in (a_1) \cdot \ldots \cdot (a_n) \subseteq A$. □

Теорема 9.5. *Всякий хаусдорфов пучок* Π *простых полутел* U_x *над нульмерным локально компактным пространством* X*, для которого носитель* $\operatorname{supp} 2$ *компактен, изоморфен пучку Ламбека* $\mathfrak{L}\big(\Gamma_{00}(X, \Pi)\big)$.

Доказательство. Полутело $U = \Gamma_{00}(X, \Pi)$ бирегулярно по теореме 9.4 и изоморфно полутелу $\Gamma_{00}\big(\operatorname{Max} U, L(U)\big)$ по теореме 9.3. Для произвольной точки $x \in X$ положим $M_x = \{s \in \Gamma_{00}(X, \Pi) \mid s(x) = 1\}$. Множество M_x служит ядром гомоморфизма π_x полутела $\Gamma_{00}(X, \Pi)$ на простое полутело U_x. Поэтому M_x является максимальным ядром полутела U. Покажем, что других максимальных ядер в полутеле U нет. Пусть A — ядро полутела U, не содержащееся ни в каком M_x, $x \in X$. Тогда $X = \operatorname{supp} A$, и $A = U$ по лемме 9.2.

Множества $\operatorname{Max} U$ и X совпадают при отождествлении $M_x \equiv x$ для всех $x \in X$. При этом совпадают и их топологии. Множества $D(s) = \operatorname{supp} s$, $s \in U = \Gamma_{00}(X, \Pi)$, образуют открытую базу топологического пространства $\operatorname{Max} U$. Для хаусдорфова пучка Π носители $\operatorname{supp} s$ открыты в X. Покажем, что они образуют открытую базу пространства X. Возьмём открытое подмножество Y нульмерного локально компактного пространства X. Для любой точки $x \in Y$ существует такое сечение $s \in U$, что $s(x) \neq 1$ и $s = 1$ вне Y. Компактное открыто-замкнутое множество $\operatorname{supp} s$ содержит точку x и лежит в Y. Таким образом, пространства $\operatorname{Max} U$ и X имеют одни и те же открытые множества, т. е. $\operatorname{Max} U = X$ как топологические пространства.

Гомоморфизмы π_x, $x \in X$, дают канонические изоморфизмы $U/M_x \cong U_x$, индуцирующие гомеоморфизм накрывающих пространств пучков $\mathfrak{L}(U)$ и Π, а это и означает изоморфность пучков $\mathfrak{L}\big(\Gamma_{00}(X, \Pi)\big)$ и Π. □

Заметим, что теоремы 9.3, 9.4 и 9.5 являются аналогом результата Даунса—Гофмана [68, теорема I] о бирегулярных кольцах.

Рассмотрим теперь непустое семейство $(U_i)_{i \in I}$ полутел, почти все (кроме конечного числа) из которых идемпотентны. *Прямой суммой* $\bigoplus U_i$ этого семейства полутел называется подполутело прямого произведения $\prod U_i$, состоящее в точности из элементов-строк (u_i), почти все координаты которых равны 1 ($1_i \in U_i$). Для конечного индексного множества I имеем $\bigoplus U_i = \prod U_i$. Дизъюнктное объединение полутел U_i, наделённое дискретной топологией, является пучком Π полутел U_i над дискретным пространством I. При этом $\Gamma(I, \Pi) = \prod U_i$ и $\Gamma_{00}(I, \Pi) = \bigoplus U_i$.

Предложение 9.5. *Класс бирегулярных полутел замкнут относительно конечных прямых произведений, прямых сумм, ядерных подполутел и гомоморфных образов.*

Доказательство. Если U — прямое произведение бирегулярных полутел $U_1, \ldots, U_n$ и $u = (u_1, \ldots, u_n) \in U_1 \times \ldots \times U_n$, то по предложению 6.2 $(u) = (u_1) \times \ldots \times (u_n)$, откуда $(u)' = (u_1)' \times \ldots \times (u_n)'$. Из этого следует, что и любая прямая сумма U семейства бирегулярных полутел $(U_i)_{i \in I}$ является бирегулярным полутелом. При этом пучок Ламбека $\mathfrak{L}(U)$ есть дизъюнктное объединение пучков $\mathfrak{L}(U_i)$ по всем $i \in I$.

Пусть A — ядерное подполутело бирегулярного полутела U. Полутело A изоморфно $\Gamma_{00}(\operatorname{supp} A, \Pi)$ для пучка Π, являющегося ограничением пучка $\mathfrak{L}(U)$ над открытым подмножеством $\operatorname{supp} A$ в $\operatorname{Max} U$. Действительно, любое сечение $s \in \Gamma_{00}(\operatorname{supp} A, \Pi)$ продолжается до сечения $t \in \Gamma_{00}\bigl(\operatorname{Max} U, \mathfrak{L}(U)\bigr)$, равного 1 вне $\operatorname{supp} A$. Тогда ядро (s) полутела A имеет дополнение $(t)' \cap A$, и пучок $\mathfrak{L}(A)$ изоморфен Π.

Пусть U — бирегулярное полутело. Любой его гомоморфный образ изоморфен соответствующему фактор-полутелу U/A, где A — ядро полутела U. Рассмотрим канонический гомоморфизм $\pi\colon U \to U/A$, $\pi(u) = uA$ для каждого $u \in U$. Требуется доказать, что главное ядро (uA), $u \in U$, полутела U/A дополняемо в нём. Имеем $\pi^{-1}\bigl((uA)\bigr) = (u)A$. Ядро $\pi\bigl((u)'A\bigr) = (u)'A/A$ полутела U/A является дополнением ядра $(uA) = (u)A/A$. Действительно, $(u)A/A \cdot (u)'A/A = U/A$ и $(u)A/A \cap (u)'A/A = \bigl((u)A \cap (u)'A\bigr)/A = A/A$ в силу дистрибутивности полутела U. Полутело U/A изоморфно $\Gamma_{00}(\operatorname{Max} U \setminus \operatorname{supp} A, \Pi)$ для пучка Π, служащего ограничением пучка $\mathfrak{L}(U)$ над замкнутым подмножеством $\operatorname{Max} U \setminus \operatorname{supp} A$ пространства $\operatorname{Max} U$. Заметим, что в силу общей теории пучков [28, теорема 3.3.1], нульмерности и локальной компактности пространства $\operatorname{Max} U$ всякое сечение $s \in \Gamma_{00}(\operatorname{Max} U \setminus \operatorname{supp} A, \Pi)$ продолжается до сечения $t \in \Gamma_{00}\bigl(\operatorname{Max} U, \mathfrak{L}(U)\bigr)$, равного 1 вне некоторой компактной открыто-замкнутой окрестности $\operatorname{supp} s$. Тогда ядро (s) полутела A имеет дополнение $(t)' \cap A$, и пучок $\mathfrak{L}(A)$ изоморфен Π. $\square$

Теорема 9.6. *Любое бирегулярное полутело раскладывается в прямое произведение бирегулярного идемпотентного полутела и бирегулярного ограниченного полуполя.*

Доказательство. Отождествим полутело U с полутелом сечений $\Gamma = \Gamma\bigl(\operatorname{Max} \mathfrak{B}(U), \mathcal{P}(U)\bigr)$ по теореме 7.1. Рассмотрим ядро $A = (2)$ и соответствующее ему множество $Y = \{x \in \operatorname{Max} \mathfrak{B}(U) \mid 1_x + 1_x \neq 1_x\}$. Легко убедиться, что множество $B = \{u \in U \mid u = 1 \text{ на } Y\}$ является дополнением ядра A в $\operatorname{Con} U$. Тогда U изоморфно полутелу $A \times (U/A)$, причём полутело A ограниченно по теореме 3.2 и, стало быть, сократимо по следствию 3.1, а полутело U/A идемпотентно. Полутела A и U/A бирегулярны по предыдущему предложению. Заметим, что из теоремы С. В. Полина [37, теорема 2] о коммутативности простых сократимых полутел следует, что сократимое бирегулярное полутело A

коммутативно. Действительно, такое полутело V является подпрямым произведением сократимых простых полутел V/M по всем M из $\operatorname{Max} V$ по теореме 3.1 и свойству 3 предложения 9.1. □

Следствие 9.6. *Сократимые бирегулярные полутела коммутативны и ограниченны.*

Следующая теорема даёт полное описание булевых полутел.

Теорема 9.7. *Полутело булево тогда и только тогда, когда оно изоморфно прямой сумме некоторого семейства простых полутел, почти все из которых идемпотентны.*

Доказательство. Пусть дано булево полутело U. По теореме 9.3 оно изоморфно $\Gamma_{00}\big(\operatorname{Max} U, \mathfrak{L}(U)\big)$. Пространство $\operatorname{Max} U$ дискретно. В самом деле, для любого $M \in \operatorname{Max} U$ имеем

$$\{M\} = \{N \in \operatorname{Max} U \mid M \subseteq N\} = \{N \in \operatorname{Max} U \mid M' \nsubseteq N\} = D(M').$$

Тогда $\Gamma_{00}\big(\operatorname{Max} U, \mathfrak{L}(U)\big) = \bigoplus U/M$ по всем $M \in \operatorname{Max} U$.

Обратно, пусть дана прямая сумма $\bigoplus U_i$ некоторого семейства $(U_i)_{i \in I}$ простых полутел, почти все из которых идемпотентны. Имеем $\bigoplus U_i = \Gamma_{00}(I, \Pi)$, где Π — дискретный пучок простых полутел U_i над дискретным пространством I. По теореме 9.4 полутело $\bigoplus U_i$ бирегулярно, значит, и дистрибутивно. По теореме 9.5 спектр $\operatorname{Sp}\big(\bigoplus U_i\big) = \operatorname{Max}\big(\bigoplus U_i\big)$ гомеоморфен дискретному пространству I. Остаётся применить пункт 9 предложения 4.3. □

Отметим, что все ядра полутела $\bigoplus U_i$ имеют вид

$$M(J) = \Big\{(u_i) \in \bigoplus U_i \mid u_i = 1 \text{ при всех } i \in J\Big\}, \quad J \subseteq I.$$

При этом $\operatorname{supp} M(J) = I \setminus J$, а максимальность ядра $M(J)$ равносильна одноэлементности множества J.

Следствие 9.7. *Класс булевых полутел замкнут относительно конечных прямых произведений, гомоморфных образов и ядерных подполутел.*

Следствие 9.8. *Булеан любого непустого множества изоморфен решётке всех ядер некоторого булева полутела.*

Приведём несколько характерных примеров бирегулярных полутел.

Пример 9.1. Пусть X — нульмерное локально компактное пространство и U — идемпотентное простое полутело, взятое с дискретной топологией. Например, U — дискретное полуполе $\mathbb{R}^{\vee}$ всех положительных действительных (или рациональных $\mathbb{Q}^{\vee}$) чисел со сложением $\vee = \max$ и обычным умножением. Рассмотрим полутело $C_{00}(X, U)$ всех непрерывных отображений $X \to U$ с компактными носителями относительно поточечно заданных операций сложения и умножения отображений. Возьмём простой пучок Π полутел с накрывающим пространством $X \times U$ с топологией произведения, базисным пространством X и проекцией $p\colon X \times U \to X$; все его слои совпадают с полутелом U. Сечениями пучка Π служат в точности локально постоянные отображения $X \to U$.

Получаем, что $C_{00}(X,U) = \Gamma_{00}(X,\Pi)$ — бирегулярное полутело по теореме 9.4. Если пространство X дискретно, то $C_{00}(X,U) = \bigoplus U_x$, где $U_x = U$ по всем $x \in X$. По теореме 9.7 полутело $C_{00}(X,U)$ булево тогда и только тогда, когда пространство X дискретно.

Пример 9.2. Пусть X — нульмерный компакт, U — сократимое простое полуполе с дискретной топологией и Π — простой пучок над X со слоем U. Здесь в качестве U можно взять полуполе $\mathbb{R}^+$ всех положительных действительных (или рациональных $\mathbb{Q}^+$) чисел с обычными операциями сложения и умножения чисел. Тогда $\Gamma(X,\Pi) = C(X,U)$ — ограниченное полуполе всех непрерывных функций $X \to U$; каждая из них принимает конечное множество значений в полуполе U. Полуполе $C(X,U)$ бирегулярно и будет булевым только для конечных пространств X.

Пример 9.3. Пусть X — бесконечное множество и U_1 — идемпотентное полуполе всех функций $X \to \mathbb{R}^\vee$, почти всюду равных той или иной константе. Полуполе U_1 является бирегулярным полуполем с образующей. Но U_1 небулево, поскольку не является дополняемым его ядро, состоящее из функций, почти всюду равных 1. Образующими элементами полуполя U_1 служат функции, нигде не равные 1. Максимальный спектр $\operatorname{Max} U_1$ есть одноточечная компактификация Александрова дискретного пространства X.

Пример 9.4. Сократимое полуполе U_2 всех функций, заданных на бесконечном множестве X, принимающих значения в $\mathbb{R}^+$ и постоянных почти всюду, является ограниченным небулевым бирегулярным полуполем. Образующими в U_2 также являются функции, не принимающие значение 1. Максимальный спектр $\operatorname{Max} U_2$ гомеоморфен $\operatorname{Max} U_1$. Заметим, что $U_2 \cong C(\operatorname{Max} U_2, \mathbb{R}^+)$, а $U_1 \cong C(\operatorname{Max} U_1, \mathbb{R}^\vee)$, где полуполя $\mathbb{R}^+$ и $\mathbb{R}^\vee$ рассматриваются с дискретной топологией.

Пример 9.5 (продолжение примера 3.1). Возьмём теперь произвольное тихоновское пространство X. Дистрибутивность полуполя $U(X)$ равносильна тому, что X есть F-пространство [62]. Сильная гельфандовость $U(X)$ эквивалентна нульмерности пространства X (см. [46]). Бирегулярность полуполя $U(X)$ означает конечность X.

В дополнение к примеру 9.2 приведём следующее утверждение.

Предложение 9.6. *Любое бирегулярное полутело U, все фактор-полутела которого по максимальным ядрам изоморфны полуполю $\mathbb{Q}^+$, изоморфно полуполю $C(\operatorname{Max} U, \mathbb{Q}^+)$, где $\mathbb{Q}^+$ рассматривается с дискретной топологией.*

Доказательство. Действительно, в силу теоремы 9.3, следствия 9.6 и теоремы 4.2 полутело U изоморфно полуполю $\Gamma\big(\operatorname{Max} U, \mathfrak{L}(U)\big)$. Легко убедиться, что $\mathfrak{L}(U)$ есть простой пучок над нульмерным компактом $\operatorname{Max} U$ со слоем $\mathbb{Q}^+$. Поэтому $U \cong C(\operatorname{Max} U, Q+)$. □

В заключение укажем, что исследование бирегулярных полутел может быть продолжено. Согласно теореме 9.6 изучение бирегулярных полутел сводится к исследованию ограниченных бирегулярных полуполей и и идемпотентных бирегулярных полутел. Поскольку сократимые простые полутела изоморфны подполуполям полуполя $\mathbb{R}^+$ [37, теорема 2], то при исследовании ограниченных бирегулярных полуполей важная роль отводится пучкам полуполей, изоморфных $\mathbb{R}^+$, над нульмерными компактами. Теоремы 9.3 и 9.7 фактически дают пучковое представление решёточно упорядоченных групп, в которых соответственно все главные l-идеалы дополняемы и все l-идеалы дополняемы. Теоремы 9.3, 9.4 и 9.5 сводят описание бирегулярных полутел к хаусдорфовым пучкам простых полутел над нульмерными локально компактными пространствами. Отметим, что можно уточнить эту связь, установив эквивалентность категории бирегулярных полутел с категорией соответствующих пучков.

Авторы выражают искреннюю признательность профессору Александру Васильевичу Михалёву за внимание к работе и поддержку.

Литература

[1] Биркгоф Г. Теория решёток. — М.: Наука, 1984.

[2] Богданов И. И. Алгебраические расширения полуполей // Успехи мат. наук. — 2004. — Т. 59, № 1. — С. 181—182.

[3] Богданов И. И. Об аддитивной структуре полутел // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 2004. — № 1. — С. 48—50.

[4] Богданов И. И. Полиномиальные соотношения в полукольцах: Дис.... канд. физ.-мат. наук. — М.: МГУ, 2004.

[5] Бредон Г. Теория пучков. — М.: Наука, 1988.

[6] Варанкина В. И. Максимальные идеалы в полукольцах непрерывных функций // Фундамент. и прикл. мат. — 1995. — Т. 1, вып. 4. — С. 923—937.

[7] Варанкина В. И. Максимальные идеалы и делимость в полукольцах непрерывных функций: Дис.... канд. физ.-мат. наук. — Киров: Вятский гос. пед. ун-т, 1996.

[8] Варанкина В. И., Вечтомов Е. М., Семёнова И. А. Полукольца непрерывных неотрицательных функций: делимость, идеалы, конгруэнции // Фундамент. и прикл. мат. — 1998. — Т. 4, вып. 2. — С. 493—510.

[9] Вечтомов Е. М. Функциональные представления колец. — М.: МПГУ им. Ленина, 1993.

[10] Вечтомов Е. М. О конгруэнциях на полутелах // Материалы международной конференции «Проблемы алгебры и кибернетики», посвящённой памяти академика С. А. Чунихина. — Гомель: Гомельский гос. ун-т, 1995. — С. 38—39.

[11] Вечтомов Е. М. Введение в полукольца. — Киров: Вятский гос. пед. ун-т, 2000.

[12] Вечтомов Е. М. Две общие структурные теоремы о полумодулях // Абелевы группы и модули. — 2000. — Вып. 15. — С. 17—23.

[13] Вечтомов Е. М. О свойствах полутел // Мат. вестн. педвузов и университетов Волго-Вятского региона. — 2001. — Вып. 3. — С. 11—20.

[14] Вечтомов Е. М. Полукольца непрерывных отображений // Вестн. ВятГГУ. — 2004. — № 10. — С. 57—64.

[15] Вечтомов Е. М. О трёх радикалах для полумодулей // Вестн. ВятГГУ. Информатика. Математика. Язык. — 2005. — № 13. — С. 148—151.

[16] Вечтомов Е. М. Функциональное представление полутел // Междунар. алгебраическая конференция, посвящённая 100-летию рождения А. Г. Куроша. Тезисы докладов. — М.: Механико-математический факультет МГУ, 2008. — С. 58—60.

[17] Вечтомов Е. М., Лукин М. А. Полукольца, являющиеся объединением кольца и полутела // Успехи мат. наук. — 2008. — Т. 63, № 6. — С. 159—160.

[18] Вечтомов Е. М., Михалёв А. В., Чермных В. В. Абелево-регулярные положительные полукольца // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. — 1997. — Т. 20. — С. 282—309.

[19] Вечтомов Е. М., Ряттель А. В. Аддитивно идемпотентные полуполя // Вестн. ВятГГУ. — 2002. — № 7. — С. 96—102.

[20] Вечтомов Е. М., Старостина О. В. Обобщённые абелево-регулярные положительные полукольца // Вестн. Сыктывкарского ун-та. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. — 2007. — Вып. 7. — С. 3—16.

[21] Вечтомов Е. М., Старостина О. В. Структура абелево-регулярных положительных полуколец // Успехи мат. наук. — 2007. — Т. 62, № 1. — С. 199—200.

[22] Вечтомов Е. М., Черанева А. В. К теории полутел // Успехи мат. наук. — 2008. — Т. 63, № 2. — С. 161—162.

[23] Вечтомов Е. М., Черанева А. В. Неприводимые ядра полутел // Мат. вестн. педвузов и университетов Волго-Вятского региона. — 2008. — Вып. 10. — С. 25—31.

[24] Вечтомов Е. М., Черанева А. В. Пучки полутел над нульмерным компактом // Мат. вестн. педвузов и университетов Волго-Вятского региона. — 2008. — Вып. 10. — С. 32—44.

[25] Вечтомов Е. М., Черанева А. В. Аналог пучкового представления Пирса для полутел // Современная математика и математическое образование, проблемы истории и философии математики. Междунар. научная конференция. — Тамбов, 2008. — С. 24—27.

[26] Вечтомов Е. М., Черанева А. В. О свойствах полутел // Междунар. алгебраическая конференция, посвящённая 100-летию со дня рождения А. Г. Куроша. Тезисы докладов. — М.: Механико-математический факультет МГУ, 2008. — С. 56—57.

[27] Вечтомов Е. М., Чупраков Д. В. Конгруэнции на полукольцах непрерывных функций и F-пространства // Вестн. Сыктывкарского ун-та. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. — 2008. — Вып. 8. — С. 15—26.

[28] Годеман Р. Алгебраическая топология и теория пучков. — М.: Изд. иностр. лит., 1961.

[29] Гретцер Г. Общая теория решёток. — М.: Мир, 1982.

[30] Ильин С. Н. О применимости к полукольцам двух теорем теории колец и модулей // Мат. заметки. — 2008. — Т. 83, вып. 4. — С. 536—544.

[31] Копытов В. М. Решёточно упорядоченные группы. — М.: Наука, 1984.

[32] Лукин М. А. Дизъюнктное полукольцевое объединение кольца и полутела // Чебышёвский сб. — 2005. — Т. 6, № 4 (16). — С. 138—148.

[33] Лукин М. А. О полукольцевых объединениях кольца и полутела // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 2008. — № 12. — С. 76—80.

[34] Маслов В. П., Колокольцов В. Н. Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. — М.: Наука, 1994.

[35] Подлевских М. Н. Замкнутые конгруэнции на полукольцах непрерывных функций // Фундамент. и прикл. мат. — 1999. — Т. 5, вып. 3. — С. 947—952.

[36] Подлевских М. Н. Полукольца непрерывных функцией с топологией поточечной сходимости: Дис.. . . канд. физ.-мат. наук. — Киров: Вятский гос. пед. ун-т, 1999.

[37] Полин С. В. Простые полутела и полуполя // Сиб. мат. журн. — 1974. — Т. 15, № 1. — С. 90—101.

[38] Пунинский Г. Е., Туганбаев А. А. Кольца и модули — М.: Союз, 1998.

[39] Ряттель А. В. О линейно упорядоченных полутелах // Вестн. Вятского гос. пед. ун-та, 2000. — № 3-4. — С. 178—182.

[40] Ряттель А. В. Положительно упорядоченные полутела: Дис.. . . канд. физ.-мат. наук. — Киров: Вятский гос. гуман. ун-т, 2002.

[41] Семёнов А. Н. О подалгебрах полуколец непрерывных функций // Мат. вестн. педвузов Волго-Вятского региона. — 1998. — Вып. 1. — С. 83—90.

[42] Семёнов А. Н. О решётке конгруэнций полутел // Вестн. ВятГГУ. — 2003. — № 9. — С. 92—95.

[43] Семёнов А. Н. О строении полутел // Вестн. ВятГГУ. — 2003. — № 8. — С. 105—107.

[44] Семёнов А. Н. Порядки на полуполях // Мат. вестн. педвузов и университетов Волго-Вятского региона. — 2004. — Вып. 6. — С. 77—92.

[45] Семёнова И. А. Конгруэнции на полукольцах непрерывных функций: Дис.. . . канд. физ.-мат. наук. — Киров: Вятский гос. пед. ун-т, 1998.

[46] Семёнова И. А. Максимальные конгруэнции на полуполе непрерывных положительных функций // Фундамент. и прикл. мат. — 2000. — Т. 8, вып. 1. — С. 305—310.

[47] Сергеев С. Н. Идемпотентные аналоги теорем отделимости и образующие идемпотентных полумодулей: Автореферат дис.. . . канд. физ.-мат. наук. — М.: МГУ, 2008.

[48] Старостина О. В. Строение абелево-регулярных положительных полуколец // Чебышёвский сб. — 2005. — Т. 6, № 4 (16). — С. 142—151.

[49] Старостина О. В. Абелево-регулярные положительные полукольца: Дис.. . . канд. физ.-мат. наук. — Киров: Вятский гос. гуман. ун-т, 2007.

[50] Старостина О. В. Функциональные представления абелево-регулярных положительных полуколец // Мат. вестн. педвузов и университетов Волго-Вятского региона. — 2007. — Вып. 9. — С. 70—75.

[51] Черанева А. В. О конгруэнциях на полутелах // Чебышёвский сб. — 2005. — Т. 6, № 4 (16). — С. 164—171.

[52] Черанева А. В. О сократимых конгруэнциях на полутелах // Вестн. ВятГГУ. Информатика. Математика. Язык. — 2005. — № 3. — С. 160—163.

[53] Черанева А. В. О главном ядре, порождённом 2 // Мат. вестн. педвузов и университетов Волго-Вятского региона. — 2006. — Вып. 8. — С. 120—125.

[54] Черанева А. В. О дистрибутивности полутел // Современные методы физико-математических наук. Тр. междунар. конф. Т. 1. — Орел: Орловский гос. ун-т, 2006. — С. 198—200.

[55] Черанева А. В. Кольцо разностей полутела // Вестн. ВятГГУ. Информатика. Математика. Язык. — 2007. — № 4. — С. 205—207.

[56] Черанева А. В. Ядра и пучки полутел: Дис.. . . канд. физ.-мат. наук. — Киров: ВятГГУ, 2008.

[57] Чермных В. В. О полноте пучковых представлений полуколец // Фундамент. и прикл. мат. — 1996. — Т. 2, вып. 1. — С. 267—277.

[58] Чермных В. В. Полукольца. — Киров: Вятский гос. пед. ун-т, 1997.

[59] Чермных В. В. Полукольца сечений пучков // Вестн. ВятГГУ. Информатика. Математика. Язык. — 2005. — № 13. — С. 151—158.

[60] Чермных В. В. Функциональные представления полуколец и полумодулей: Дис.... докт. физ.-мат. наук. — Киров: ВятГГУ, 2007.

[61] Чупраков Д. В. О главных ядрах полуполей непрерывных функций // Современная математика и математическое образование, проблемы истории и философии математики. Междунар. науч. конф. — Тамбов: Тамбовский гос. ун-т, 2008. — С. 33—36.

[62] Широков Д. В. Условия дистрибутивности решётки конгруэнций полуполя непрерывных положительных функций // Вестн. ВятГГУ. — 2003. — № 8. — С. 137—140.

[63] Широков Д. В. Идеалы в полукольцах непрерывных функций: Дис.... канд. физ.-мат. наук. — Киров: ВятГГУ, 2005.

[64] Шпиз Г. Б. Решение алгебраических уравнений в идемпотентных полуполях // Успехи мат. наук. — 2000. — Т. 55, № 5. — С. 185—186.

[65] Энгелькинг Р. Общая топология. — М.: Мир, 1986.

[66] Applications of Sheaves. Proc. of Research Symp. on Applications of Sheaf Theory to Logic, Algebra and Analysis, Durham, July 9—21, 1977 / M. P. Fourman, C. J. Mulvey, D. S. Scott, eds. — Springer, 1979. — (Lect. Notes Math.; Vol. 753).

[67] Artamonova I. I., Chermnykh V. V., Mikhalev A. V., Varankina V. I., Vechtomov E. M. Semirings: sheaves and continuous functions // Semigroups with Applications, Including Semigroup Rings. — Saint-Petersburg, 1999. — P. 23—58.

[68] Dauns J., Hofmann K. H. The represention of biregular rings by sheaves // Math. Z. — 1966. — Vol. 91, no. 2. — P. 103—123.

[69] Davey B. A. Sheaf spaces and sheaves of universal algebras // Math. Z. — 1973. — Vol. 134, no. 4. — P. 275—290.

[70] Dedekind R. Über die Theorie ganzen algebraischen Zahlen // Suppl. XI to P. G. Lejeune Dirichlet: Vorlesungen über Zahlentheorie, 4 Anfl. — Braunschweig, 1894.

[71] Gillman L., Jerison M. Rings of continuous functions. — New York: Springer, 1976.

[72] Glazek K. A. Guide to the Literature on Semirings and Their Applications in Mathematics and Information Sciences. — Dordrecht: Kluwer Academic, 2002.

[73] Golan J. S. The Theory of Semirings with Applications in Mathematics and Theoretical Computer Science. — Pitman, 1991. — (Pitman Monographs and Surveys in Pure and Appl. Math.; Vol. 54).

[74] Golan J. S. Semirings and Their Applications. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1999.

[75] Hebisch U., Weinert H. J. Semirings and semifields // Handbook of Algebra. Vol. I / M. Hazewinkel, ed. — Amsterdam: North-Holland, 1996. — P. 425—462.

[76] Hebisch U., Weinert H. J. Semirings. Algebraic Theory and Applications in Computer Science. — Singapore: World Scientific, 1998.

[77] Hilbert D. Über den Zahlbergriff // Jahresber. Deutsch. Math. Verein. — 1899. — B. 8. — S. 180—184.

[78] Hutchins H. C. Division semirings with $1 + 1 = 1$ // Semigroup Forum. — 1981. — Vol. 22, no. 2. — P. 181—188.

[79] Hutchins H. C., Weinert H. J. Homomorphisms and kernel of semifields // Period. Mat. — 1990. — Vol. 21, no. 2. — P. 113—152.

[80] Lambek J. On representation of modules by sheaves of factor modules // Can. Math. Bull. — 1971. — Vol. 14, no. 3. — P. 359—368.

[81] Maslov V. P., Samborskii S. N. Idempotent Analysis. — Providence: Amer. Math. Soc., 1992. — (Adv. Sov. Math.; Vol. 13).

[82] Mitchell S., Sinutoke P. The theory of semifields // Kyungpook Math. J. — 1982. — Vol. 22. — P. 325—347.

[83] Pierce R. S. Modules over Commutative Regular Rings. — Providence: Amer. Math. Soc., 1967. — (Mem. Amer. Math. Soc.; Vol. 70).

[84] Silcock H. L. Generalized products and the lattice of normal subgroups of a group // Algebra Universalis. — 1977. — Vol. 7. — P. 361—372.

[85] Vandiver H. S. Note on a simple type of algebra in which cancellation law of addition does not hold // Bull. Amer. Math. Soc. — 1934. — Vol. 40. — P. 914—920.

[86] Vechtomov E. M. Rings and sheaves // J. Math. Sci. — 1995. — Vol. 74, no. 1. — P. 749—798.

[87] Weinert H. J. Über Halbring und Halbkörper. I // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. — 1962. — Vol. 13, no. 3-4. — P. 365—378.

[88] Weinert H. J. Über Halbring und Halbkörper. II // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. — 1963. — Vol. 14, no. 1-2. — P. 209—227.

[89] Weinert H. J. Über Halbring und Halbkörper. III // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. — 1964. — Vol. 15, no. 1—2. — P. 177—194.

[90] Weinert H. J. Ein Struktursatz für idempotente Halbkörper // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. — 1964. — Vol. 15, no. 3—4. — P. 289—295.