

Абелевы группы, малые относительно различных классов групп

С. Я. ГРИНШПОН

Томский государственный университет
e-mail: grinshpon@ctc.tsu.ru

И. В. ГЕРДТ

Томский университет систем управления
и радиоэлектроники
e-mail: Irina_Gerdr@mail.ru

УДК 512.541

Ключевые слова: малая группа, прямая сумма, прямое произведение, группа гомоморфизмов, вполне разложимая группа, узкая группа.

Аннотация

В статье исследуются абелевы группы, малые относительно различных классов групп. Получено полное описание вполне разложимых групп без кручения, малых относительно произвольного класса групп без кручения. Выделены прямые произведения групп, малые относительно класса узких групп.

Abstract

S. Ya. Grinshpon, I. V. Gerdt, Abelian groups that are small with respect to different classes of groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 5, pp. 55–65.

In this paper, we study Abelian groups that are small with respect to different classes of groups. Completely decomposable torsion free groups that are small with respect to an arbitrary class of torsion free groups are described completely. Direct products of groups small with respect to the class of slender groups are derived.

При исследовании групп гомоморфизмов абелевой группы A в абелеву группу B значительный интерес представляют гомоморфизмы в прямые суммы и прямые произведения и гомоморфизмы из прямых сумм и прямых произведений. В [3] доказано, что существует естественный изоморфизм

$$\text{Hom}\left(A, \prod_{i \in I} B_i\right) \cong \prod_{i \in I} \text{Hom}(A, B_i).$$

Если же взять группы гомоморфизмов $\text{Hom}\left(A, \bigoplus_{i \in I} B_i\right)$ и $\bigoplus_{i \in I} \text{Hom}(A, B_i)$, то в общем случае естественного изоморфизма нет. Можно лишь утверждать, что

$$\bigoplus_{i \in I} \text{Hom}(A, B_i) \subset \text{Hom}\left(A, \bigoplus_{i \in I} B_i\right) \subset \prod_{i \in I} \text{Hom}(A, B_i).$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2008, том 14, № 5, с. 55–65.

© 2008 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

Возникает естественный вопрос: для каких абелевых групп A будет существовать изоморфизм

$$\text{Hom}\left(A, \bigoplus_{i \in I} B_i\right) \cong \bigoplus_{i \in I} \text{Hom}(A, B_i)?$$

Пусть $\mathfrak{K}$ — некоторый класс абелевых групп. Группу A назовём $\mathfrak{K}$ -малой (или малой относительно $\mathfrak{K}$), если для любого гомоморфизма $\varphi: A \rightarrow \bigoplus_{i \in I} B_i$, где $B_i \in \mathfrak{K}$ для всякого $i \in I$, существует конечное подмножество J множества I , такое что $\varphi A \subset \bigoplus_{i \in J} B_i$.

Очевидно, что группа A является $\mathfrak{K}$ -малой тогда и только тогда, когда существует естественный изоморфизм

$$\text{Hom}\left(A, \bigoplus_{i \in I} B_i\right) \cong \bigoplus_{i \in I} \text{Hom}(A, B_i),$$

где $B_i \in \mathfrak{K}$ для всякого $i \in I$.

Если класс $\mathfrak{K}$ совпадает с классом всех абелевых групп, то $\mathfrak{K}$ -малую группу A будем называть *малой*.

Заметим, что введённое определение малой абелевой группы согласуется с определением в [2] малого объекта в категории с копроизведениями.

В [1] рассматриваются свойства $\mathfrak{K}$ -малых групп, исследуются $\mathfrak{K}$ -малые прямые суммы групп и даётся полное описание малых групп и групп, малых относительно класса $\mathfrak{D}$ всех делимых групп.

В настоящей статье изучаются малые абелевы группы относительно различных классов групп. Нам понадобятся следующие результаты из [1].

Лемма 1 [1, лемма 2]. Любой эпиморфный образ $\mathfrak{K}$ -малой группы является $\mathfrak{K}$ -малой группой. (В частности, прямые слагаемые и фактор-группы $\mathfrak{K}$ -малой группы являются $\mathfrak{K}$ -малыми группами.)

Теорема 2 [1, теорема 4]. Пусть $\mathfrak{K}$ — некоторый класс абелевых групп и $A = \bigoplus_{i \in I} C_i$, где для каждой группы C_i существует группа B_i из класса $\mathfrak{K}$, такая что $\text{Hom}(C_i, B_i) \neq 0$. Группа A является $\mathfrak{K}$ -малой тогда и только тогда, когда I — конечное множество и каждая группа C_i является $\mathfrak{K}$ -малой.

Следствие 3 [1, следствие 6]. Пусть $A = \bigoplus_{i=1}^n C_i$ и $\mathfrak{K}$ — некоторый класс абелевых групп. Группа A является $\mathfrak{K}$ -малой тогда и только тогда, когда каждая группа C_i является $\mathfrak{K}$ -малой.

Всюду далее в этой статье под группой будет пониматься абелева группа.

Рассмотрим вначале малость делимых групп относительно произвольного класса групп $\mathfrak{K}$ и покажем, что при изучении $\mathfrak{K}$ -малых групп можно ограничиться редуцированными группами.

Пусть $\mathfrak{K}$ — некоторый класс групп.

Теорема 4. *Группа A является $\mathfrak{K}$ -малой тогда и только тогда, когда её делимая и редуцированная части являются $\mathfrak{K}$ -малыми группами.*

Доказательство. Любая группа A представима в виде $A = D \oplus R$, где D — делимая часть группы A , R — редуцированная часть группы A . Применяя следствие 3, получаем утверждение теоремы. $\square$

Эта теорема сводит проблему описания строения $\mathfrak{K}$ -малых групп к проблеме описания строения $\mathfrak{K}$ -малых делимых и $\mathfrak{K}$ -малых редуцированных групп.

Пусть p — фиксированное простое число и $\mathfrak{D}_p$ — некоторый класс делимых p -групп. В лемме 5 приводятся примеры групп, не являющихся $\mathfrak{D}_p$ -малыми группами.

Лемма 5.

1. Квазициклическая группа $\mathbb{Z}(p^\infty)$ не является $\mathfrak{D}_p$ -малой.
2. Полная рациональная группа $\mathbb{Q}$ не является $\mathfrak{D}_p$ -малой.

Доказательство.

1. Пусть C является группой $\mathbb{Z}(p^\infty)$, и пусть $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ — образующие группы C , где

$$pc_1 = 0, \quad pc_2 = c_1, \dots, \quad pc_n = c_{n-1}, \dots$$

Пусть $B = \bigoplus_{i=1}^{\infty} B_i$, где B_i являются группами типа p^∞ для всякого $i \in I$, и пусть $a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni}, \dots$ — образующие группы B_i , $i \in I$, где

$$pa_{1i} = 0, \quad pa_{2i} = a_{1i}, \dots, \quad pa_{ni} = a_{n-1,i}, \dots$$

Рассмотрим подгруппу L группы B , порождённую элементами

$$a_{11}, \quad a_{21} + a_{12}, \dots, \quad a_{n1} + a_{n-1,2} + \dots + a_{1n}, \dots$$

Имеем

$$p(a_{11}) = 0, \quad p(a_{21} + a_{12}) = a_{11}, \dots,$$

$$p(a_{n1} + a_{n-1,2} + \dots + a_{1n}) = a_{n-1,1} + \dots + a_{1,n-1}, \dots$$

Значит, $L \cong \mathbb{Z}(p^\infty)$, т. е. $L \cong B_i$ для любого $i \in I$. Гомоморфизм φ зададим следующим образом:

$$\varphi(c_1) = a_{11}, \quad \varphi(c_2) = a_{21} + a_{12}, \dots, \quad \varphi(c_n) = a_{n1} + a_{n-1,2} + \dots + a_{1n}, \dots$$

Получили $\varphi(C) = L$. Из строения L следует, что C не может содержаться в прямой сумме конечного числа групп B_i . Следовательно, $\mathbb{Z}(p^\infty)$ не является $\mathfrak{D}_p$ -малой группой.

2. Предположим, что группа $\mathbb{Q}$ является $\mathfrak{D}_p$ -малой. Тогда по лемме 1 группа $\mathbb{Q}/\mathbb{Q}_p$ также является $\mathfrak{D}_p$ -малой. Но $\mathbb{Q}/\mathbb{Q}_p \cong \mathbb{Z}(p^\infty)$ [3, с. 29], а в пункте 1 доказано, что группа $\mathbb{Z}(p^\infty)$ не является $\mathfrak{D}_p$ -малой. Следовательно, $\mathbb{Q}$ не $\mathfrak{D}_p$ -малая группа. $\square$

Следующая теорема даёт ответ на вопрос, какие делимые группы являются $\mathfrak{D}_p$ -малыми?

Теорема 6. Делимая группа A является $\mathfrak{D}_p$ -малой тогда и только тогда, когда A — периодическая группа, для которой p -компонента A_p равна нулю.

Доказательство. Необходимость. Пусть делимая группа A является $\mathfrak{D}_p$ -малой. Если в группе A есть элементы бесконечного порядка, то группа A не может быть $\mathfrak{D}_p$ -малой, так как $\mathbb{Q}$ не $\mathfrak{D}_p$ -малая группа (лемма 5). Следовательно, A — периодическая группа. Так как $\mathbb{Z}(p^\infty)$ не является $\mathfrak{D}_p$ -малой группой (лемма 5), то $A_p = 0$.

Достаточность. Пусть A — периодическая группа, для которой $A_p = 0$. По свойству групп гомоморфизмов гомоморфизм из q -группы в p -группу при $q \neq p$ равен нулю. Следовательно, образ группы A равен нулю, и группа A является $\mathfrak{D}_p$ -малой. $\square$

Теперь рассмотрим малость относительно класса делимых групп без кручения.

Теорема 7. Пусть $\mathfrak{D}_1$ — некоторый класс делимых групп без кручения. Делимая группа A является $\mathfrak{D}_1$ -малой тогда и только тогда, когда ранг без кручения группы A конечен.

Доказательство. Делимая группа A представима в виде

$$A = A_1 \oplus A_2,$$

где

$$A_1 \cong \bigoplus_{r_0(A)} \mathbb{Q}, \quad A_2 \cong \bigoplus_p \left(\bigoplus_{r_p(A)} \mathbb{Z}(p^\infty) \right),$$

$r_0(A)$ — ранг без кручения группы A , $r_p(A)$ — p -ранг группы A .

Необходимость. Пусть A — $\mathfrak{D}_1$ -малая группа. Так как A_1 — прямое слагаемое группы A , то A_1 также является $\mathfrak{D}_1$ -малой группой (лемма 1). По теореме 2 A_1 имеет конечный ранг, т. е. группа A имеет конечный ранг без кручения.

Достаточность. Согласно следствию 3 достаточно показать, что группы A_1 и A_2 являются $\mathfrak{D}_1$ -малыми.

Так как ранг без кручения группы A конечен, то $A_1 \cong \bigoplus_{i=1}^k Q_i$, где $Q_i \cong \mathbb{Q}$ ($i \in I$). Докажем, что $\mathbb{Q}$ является $\mathfrak{D}_1$ -малой группой. Пусть $\varphi: \mathbb{Q} \rightarrow \bigoplus_{i \in I} Q_i$, где $Q_i \cong \mathbb{Q}$, и пусть a — произвольный ненулевой элемент группы $\mathbb{Q}$. Тогда существует такое конечное подмножество J множества I , что $\varphi(a) \in \bigoplus_{i \in J} Q_i$.

Так как $\mathbb{Q}$ — группа ранга один, то для любого элемента $b \in \mathbb{Q}$ существуют натуральное число m и целое число n , такие что $na = mb$. Имеем

$$m\varphi(b) = \varphi(mb) = \varphi(na) = n\varphi(a) \in \bigoplus_{i \in J} Q_i,$$

и значит, $\varphi(b) \in \bigoplus_{i \in J} Q_i$. Следовательно, $\varphi Q \subset \bigoplus_{i \in J} Q_i$, и поэтому Q — $\mathfrak{D}_1$ -малая группа. Применяя следствие 3, получаем, что A_1 — $\mathfrak{D}_1$ -малая группа.

Так как любой гомоморфизм группы A_2 в прямую сумму групп из класса $\mathfrak{D}_1$ равен нулю, то A_2 является $\mathfrak{D}_1$ -малой группой. $\square$

Итогом исследования малости делимой группы относительно класса делимых групп является теорема 8, которая следует из теорем 6 и 7.

Пусть $\mathfrak{D}'$ — некоторый класс делимых групп. Обозначим через $P(\mathfrak{D}')$ — множество всех таких простых чисел p , для которых в классе $\mathfrak{D}'$ существует группа с ненулевой p -компонентой A_p .

Теорема 8. Делимая группа A является $\mathfrak{D}'$ -малой тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

- 1) если в классе $\mathfrak{D}'$ есть хотя бы одна периодическая группа, то A — периодическая группа, у которой $A_p = 0$ для всякого $p \in P(\mathfrak{D}')$;
- 2) если каждая группа класса $\mathfrak{D}'$ является группой без кручения, то ранг без кручения группы A конечен.

Учитывая все вышедоказанное, получаем полное описание малой делимой группы относительно произвольного класса групп $\mathfrak{K}$.

Пусть $\mathfrak{K}$ — произвольный класс групп. Обозначим через $D(\mathfrak{K})$ класс групп, состоящий из делимых частей групп класса $\mathfrak{K}$.

Теорема 9. Делимая группа A является $\mathfrak{K}$ -малой тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

- 1) если в классе $D(\mathfrak{K})$ есть хотя бы одна периодическая группа, то A — периодическая группа, у которой p -компонента A_p равна нулю для всякого $p \in P(D(\mathfrak{K}))$;
- 2) если каждая группа класса $D(\mathfrak{K})$ является группой без кручения, то ранг без кручения группы A конечен.

Теоремы 4 и 9 показывают, что при изучении $\mathfrak{K}$ -малых групп можно ограничиться редуцированными группами.

В [1, теорема 10] доказано, что малые группы и группы, малые относительно класса $\mathfrak{D}$ всех делимых групп, — это в точности конечно порождённые группы. Учитывая, что всякая делимая группа является нередуцированной группой, получаем, что теорема 10 из [1] может быть дополнена ещё одним условием 4). Пусть $\mathfrak{N}$ — класс всех нередуцированных групп. Справедлив следующий результат.

Теорема 10. Для группы A следующие условия эквивалентны:

- 1) A — $\mathfrak{D}$ -малая группа;
- 2) A — конечно порождённая группа;
- 3) A — малая группа;
- 4) A — $\mathfrak{N}$ -малая группа.

Рассмотрим группы, малые относительно класса групп без кручения.

Пусть $\mathfrak{L}$ — некоторый класс групп без кручения. Заметим, что всякая периодическая группа является $\mathfrak{L}$ -малой группой.

Пусть A — смешанная группа, $T(A)$ — её периодическая часть.

Предложение 11. *Смешанная группа A является $\mathfrak{L}$ -малой тогда и только тогда, когда $A/T(A)$ — $\mathfrak{L}$ -малая группа.*

Доказательство. Необходимость. Пусть A — $\mathfrak{L}$ -малая группа. По свойству $\mathfrak{L}$ -малых групп (лемма 1) $A/T(A)$ — $\mathfrak{L}$ -малая группа.

Достаточность. Пусть A — смешанная группа, а C — группа без кручения. Тогда всякий гомоморфизм $\varphi \in \text{Hom}(A, C)$ допускает представление в виде $\varphi = \varphi_1 \pi$, где $\pi: A \rightarrow A/T(A)$ — канонический эпиморфизм, а φ_1 — следующий гомоморфизм из группы $\text{Hom}(A/T(A), C)$: $\varphi_1(a + T(A)) = \varphi a$ для всякого элемента $a + T(A) \in A/T(A)$.

Пусть теперь φ — гомоморфизм смешанной группы A в группу $\bigoplus_{i \in I} B_i$, где $B_i \in \mathfrak{L}$ для всякого $i \in I$. Имеем $\varphi = \varphi_1 \pi$, где $\varphi_1 \in \text{Hom}\left(A/T(A), \bigoplus_{i \in I} B_i\right)$. Так как $A/T(A)$ — $\mathfrak{L}$ -малая группа, то существует такое конечное подмножество J множества I , что $\varphi_1(A/T(A)) \subset \bigoplus_{i \in J} B_i$. Следовательно, $\varphi A \subset \bigoplus_{i \in J} B_i$, и поэтому A — $\mathfrak{L}$ -малая группа. $\square$

Назовём подгруппу A группы G *факторно ограниченной*, если фактор-группа G/A является ограниченной.

Теорема 12. *Следующие условия для группы G эквивалентны:*

- 1) G — $\mathfrak{L}$ -малая группа;
- 2) любая факторно ограниченная подгруппа группы G является $\mathfrak{L}$ -малой группой;
- 3) некоторая факторно ограниченная подгруппа группы G является $\mathfrak{L}$ -малой группой;
- 4) любая подгруппа конечного индекса группы G является $\mathfrak{L}$ -малой группой;
- 5) некоторая подгруппа конечного индекса группы G является $\mathfrak{L}$ -малой группой.

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\implies$ 2). Пусть G — $\mathfrak{L}$ -малая группа. Пусть φ — гомоморфизм группы A в группу $\bigoplus_{i \in I} B_i$, где $B_i \in \mathfrak{L}$ для всякого $i \in I$. Так как A — факторно ограниченная группа, то найдётся такое натуральное число m , что $mG \subset A$. Рассмотрим сужение φ_1 гомоморфизма φ на mG , т. е. $\varphi_1 = \varphi|_{mG}$. Эпиморфный образ mG группы G является $\mathfrak{L}$ -малой группой (лемма 1). Значит, существует такое конечное подмножество $J \subset I$, что $\varphi_1(mG) \subset \bigoplus_{i \in J} B_i$. Тогда

$$m(\varphi A) = \varphi(mA) = \varphi_1(mA) \subset \bigoplus_{i \in J} B_i.$$

Так как любая группа B_i ($i \in I$) является группой без кручения, то $\varphi A \subset \bigoplus_{i \in J} B_i$, и поэтому A — $\mathfrak{L}$ -малая группа.

Импликация 2) $\implies$ 3) очевидна.

Проверим, что справедлива импликация 3) $\implies$ 1). Пусть A — $\mathfrak{L}$ -малая факторно ограниченная подгруппа группы G и φ — гомоморфизм группы G в группу $\bigoplus_{i \in I} B_i$, где $B_i \in \mathfrak{L}$ для всякого $i \in I$. Пусть $\varphi_1 = \varphi|_A$. Так как A — $\mathfrak{L}$ -малая группа, то существует такое конечное подмножество $J \subset I$, что $\varphi_1 A \subset \bigoplus_{i \in J} B_i$.

Учитывая факторную ограниченность группы A , получаем, что существует натуральное число m , такое что $mG \subset A$. Тогда

$$m(\varphi G) = \varphi(mG) = \varphi_1(mG) \subset \bigoplus_{i \in J} B_i.$$

Значит, $\varphi G \subset \bigoplus_{i \in J} B_i$, и следовательно, G — $\mathfrak{L}$ -малая группа.

Так как любая подгруппа конечного индекса является факторно ограниченной подгруппой, то доказательство импликации 2) $\implies$ 4) очевидно.

Импликация 4) $\implies$ 5) очевидна.

Убедимся, что справедлива импликация 5) $\implies$ 3). Пусть A — $\mathfrak{L}$ -малая подгруппа конечного индекса, т. е. G/A — конечная группа, и $\{m_1, m_2, \dots, m_s\}$ — множество порядков элементов из G/A . Если n — наименьшее общее кратное чисел $m_1, m_2, \dots, m_s$, то $n(G/A) = 0$, т. е. G/A — ограниченная группа. Следовательно, A — $\mathfrak{L}$ -малая факторно ограниченная подгруппа группы G . $\square$

Теорема 13. Любая группа без кручения конечного ранга является $\mathfrak{L}$ -малой.

Доказательство. Пусть $\{a_i\}_{i=1, n}$ — максимальная независимая система элементов группы без кручения A ранга n и $\varphi: A \rightarrow \bigoplus_{i \in I} B_i$ — произвольный гомоморфизм, где $B_i \in \mathfrak{L}$ ($i \in I$). Существует такое конечное подмножество J множества I , что $\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_n) \in \bigoplus_{i \in J} B_i$. Для любого элемента $a \in A$ существуют натуральное число m и целые числа $m_1, \dots, m_n$, такие что $ma = m_1 a_1 + \dots + m_n a_n$. Имеем

$$\varphi(ma) = m\varphi(a) = m_1 \varphi(a_1) + \dots + m_n \varphi(a_n) \in \bigoplus_{i \in J} B_i.$$

Из того, что $\varphi(a)$ — элемент бесконечного порядка, следует, что $\varphi(a) \in \bigoplus_{i \in J} B_i$.

Так как это выполняется для любого $a \in A$, то $\varphi A \subset \bigoplus_{i \in J} B_i$, и поэтому A — $\mathfrak{L}$ -малая группа. $\square$

Исследуем теперь вполне разложимые группы без кручения, малые относительно класса вполне разложимых групп без кручения и произвольного класса групп без кручения.

Предложение 14. Пусть $\mathfrak{L}_1$ — некоторый класс групп без кручения, содержащий все группы ранга 1. Вполне разложимая группа без кручения является $\mathfrak{L}_1$ -малой тогда и только тогда, когда она имеет конечный ранг.

Доказательство. Пусть $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$, где $r(A_i) = 1$ ($i \in I$). По теореме 2 группа A является $\mathfrak{L}_1$ -малой тогда и только тогда, когда I — конечное множество и каждая группа A_i является $\mathfrak{L}_1$ -малой. Применяя к группе A_i теорему 13, получаем утверждение предложения 14. $\square$

Следствие 15. Пусть $\mathfrak{L}_2$ — класс всех вполне разложимых групп без кручения. Вполне разложимая группа без кручения является $\mathfrak{L}_2$ -малой тогда и только тогда, когда она имеет конечный ранг.

Учитывая, что всякая счётная сепарабельная группа без кручения вполне разложима [4, теорема 87.1], получаем следующий результат.

Следствие 16. Пусть $\mathfrak{L}_3$ — класс всех счётных сепарабельных групп без кручения. Сепарабельная группа A из класса $\mathfrak{L}_3$ является малой относительно этого класса тогда и только тогда, когда A имеет конечный ранг.

Рассмотрим малость вполне разложимых групп без кручения относительно произвольного класса групп без кручения. Пусть $\mathfrak{L}$ — некоторый класс групп без кручения, A — вполне разложимая группа без кручения, т. е. $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$, где $r(A_i) = 1$ ($i \in I$). Для любого $i \in I$ обозначим

$$\mathfrak{L}_i = \{G \in \mathfrak{L} \mid \text{в } G \text{ существует ненулевой элемент } g, \text{ такой что } t(g) \geq t(A_i)\}.$$

Пусть $\mathfrak{L}' = \bigcup_{i \in I} \mathfrak{L}_i$. Очевидно, что $\mathfrak{L}'$ является подклассом класса $\mathfrak{L}$.

Теорема 17. Вполне разложимая группа $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ является $\mathfrak{L}$ -малой тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие: ни для какого бесконечного подмножества I' множества I не существует отображения $\alpha: I' \rightarrow \mathfrak{L}'$, такого что для любого $i \in I'$ справедливо $\alpha(i) \in \mathfrak{L}_i$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ — $\mathfrak{L}$ -малая вполне разложимая группа. Предположим, что для некоторого бесконечного подмножества I' множества I существует отображение $\alpha: I' \rightarrow \mathfrak{L}'$, такое что для любого $i \in I'$ справедливо $\alpha(i) \in \mathfrak{L}_i$. Обозначим $\alpha(i)$ через B_i . Пусть для всякого $i \in I'$ φ_i — некоторый ненулевой гомоморфизм группы A_i в группу B_i . По определению подкласса $\mathfrak{L}'$ такой гомоморфизм существует. Действительно, так как $B_i \in \mathfrak{L}_i$, то в B_i существует такой элемент b , что $t(b) \geq t(A_i)$. Тогда для подгруппы $\langle b \rangle_* \subset B_i$ имеем $t(\langle b \rangle_*) \geq t(A_i)$. Существует ненулевой гомоморфизм φ_i , принадлежащий группе $\text{Hom}(A_i, \langle b \rangle_*)$ [4, предложение 85.5]. Можно считать, что этот гомоморфизм принадлежит группе $\text{Hom}(A_i, B_i)$. Гомоморфизм $\varphi: A \rightarrow \bigoplus_{i \in I'} B_i$ зададим следующим образом: для всякого $i \in I'$ и для любого элемента $a_i \in A_i$ положим $\pi_i \varphi(a_i) = \varphi_i(a_i)$, $\pi_j \varphi(a_i) = 0$ при $j \neq i$ (π_i — проекция прямой суммы $\bigoplus_{i \in I'} B_i$ на прямое слагаемое B_i) и $\varphi(a_i) = 0$, если $i \in I \setminus I'$. Так как I' — бесконечное множество, то φA не будет содержаться в конечной прямой сумме групп B_i , т. е. A не $\mathfrak{L}$ -малая группа.

Достаточность. Пусть в множестве I нет бесконечных подмножеств, т. е. множество I конечно. Тогда группа $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ является группой без кручения конечного ранга. Значит, по теореме 13 A является $\mathfrak{L}$ -малой группой.

Пусть I — бесконечное множество и нет такого отображения $\alpha: I' \rightarrow \mathfrak{L}'$, что для любого $i \in I'$ справедливо $\alpha(i) \in \mathfrak{L}_i$. Предположим, что A не $\mathfrak{L}$ -малая группа, т. е. существует гомоморфизм

$$\varphi: A = \bigoplus_{i \in I} A_i \rightarrow \bigoplus_{j \in J} B_j,$$

где $B_j \in \mathfrak{L}$ ($j \in J$), такой что

$$\varphi\left(\bigoplus_{i \in I} A_i\right) \not\subseteq \bigoplus_{j \in J_1} B_j$$

для любого конечного подмножества $J_1 \subset J$.

Пусть для всякого $j \in J$ π_j — проекция прямой суммы $\bigoplus_{j \in J} B_j$ на прямое слагаемое B_j . Для всякого $i \in I$ обозначим через φ_i ограничение гомоморфизма φ на прямое слагаемое A_i . Для всякого $i \in I$ обозначим через J_i множество $\{j \in J \mid \pi_j \varphi_i \neq 0\}$. Так как A_i — группа конечного ранга, то A_i — $\mathfrak{L}$ -малая группа (теорема 13). Поэтому для всякого $i \in I$ J_i — конечное множество. Пусть I' и J' — следующие подмножества множеств I и J соответственно:

$$I' = \{i \in I \mid J_i \neq \emptyset\}, \quad J' = \left\{j \in J \mid \pi_j \varphi\left(\bigoplus_{i \in I} A_i\right) \neq 0\right\}.$$

Так как группа A не является $\mathfrak{L}$ -малой, то J' — бесконечное множество, но $J' = \bigcup_{i \in I'} J_i$, и так как все J_i — непустые конечные множества, то множество I' бесконечно. Понятно, что в этом случае существует такое отображение $\beta: I' \rightarrow \bigcup_{i \in I'} J_i$, что $\beta(i) \in J_i$. Обозначим для всякого $i \in I$ $\beta(i)$ через j_i .

Тогда имеем $\pi_{j_i} \varphi_i \neq 0$, $\pi_{j_i} \varphi_i \in \text{Hom}(A_i, B_{j_i})$. Пусть $a \in A_i$, $a \neq 0$. Тогда $\pi_{j_i} \varphi_i(a) \in B_{j_i}$ и $t(\pi_{j_i} \varphi_i(a)) \geq t(A_i)$. Значит, $B_{j_i} \in \mathfrak{L}_i$. Итак, существует отображение $\alpha: I' \rightarrow \mathfrak{L}'$, а именно $\alpha(i) = B_{\beta(i)} = B_{j_i}$, для которого $\alpha(i) \in \mathfrak{L}_i$ для всякого $i \in I'$. Противоречие. Следовательно, A — $\mathfrak{L}$ -малая группа. $\square$

В заключение работы рассмотрим прямые произведения групп, малые относительно классов узких групп. Д. Лось открыл замечательный класс групп без кручения — класс узких групп. Пусть P обозначает прямое произведение счётно-го числа бесконечных циклических групп, $P = \prod_{n=1}^{\infty} \langle e_n \rangle$, где $o(e_n) = \infty$. Группа без кручения A называется *узкой* [4, с. 189], если при любом гомоморфизме $\eta: P \rightarrow G$ для почти всех n выполняется равенство $\eta e_n = 0$.

Напомним, что кардинальное число $\mathfrak{m}$ называется *измеримым*, если множество X мощности $\mathfrak{m}$ допускает счётно-аддитивную меру μ , принимающую лишь два значения 0 и 1 и такую, что $\mu(X) = 1$, $\mu(x) = 0$ для всех $x \in X$.

Пусть $\mathfrak{S}$ — некоторый класс узких групп.

Теорема 18. Пусть $\{A_i\}_{i \in I}$ — некоторое семейство групп без кручения, где множество I неизмеримо. Группа $\prod_{i \in I} A_i$ является $\mathfrak{S}$ -малой тогда и только тогда, когда каждая группа A_i ($i \in I$) является $\mathfrak{S}$ -малой.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\pi_i: \prod_{i \in I} A_i \rightarrow A_i$ — проекция. Тогда каждая группа A_i ($i \in I$) является $\mathfrak{S}$ -малой, как эпиморфный образ $\mathfrak{S}$ -малой группы (лемма 1).

Достаточность. Пусть φ — некоторый гомоморфизм из группы $\prod_{i \in I} A_i$ в группу $\bigoplus_{j \in J} B_j$, где $B_j \in \mathfrak{S}$ ($j \in J$). Группа $\bigoplus_{j \in J} B_j$ является узкой [4, теорема 94.3]. Так как любой гомоморфизм $\varphi: \prod_{i \in I} A_i \rightarrow \bigoplus_{j \in J} B_j$ полностью определяется своим ограничением на подгруппе $\bigoplus_{i \in I} A_i$ и множество $I_\varphi = \{i \in I \mid \varphi A_i \neq 0\}$ конечно [4, теорема 94.4], то

$$\varphi\left(\prod_{i \in I} A_i\right) = \varphi\left(\bigoplus_{i \in I_\varphi} A_i\right) = \sum_{i \in I_\varphi} \varphi A_i.$$

Так как каждая группа A_i ($i \in I$) является $\mathfrak{S}$ -малой, то для каждого $i \in I_\varphi$ существует конечное подмножество $J_i \subset J$, такое что $\varphi A_i \subset \bigoplus_{j \in J_i} B_j$. Следовательно,

$$\varphi\left(\prod_{i \in I} A_i\right) \subset \bigoplus_{j \in J^*} B_j,$$

где $J^* = \bigcup_{i \in I_\varphi} J_i$, т. е. $\prod_{i \in I} A_i$ — $\mathfrak{S}$ -малая группа. $\square$

Теорема 19. Всякое прямое произведение групп без кручения конечного ранга с неизмеримым множеством компонент является $\mathfrak{S}$ -малой группой.

Доказательство. Пусть $\{A_i\}_{i \in I}$ — некоторое семейство групп без кручения конечного ранга, где множество I неизмеримо. Применяя теорему 13, получаем, что каждая группа A_i ($i \in I$) является $\mathfrak{S}$ -малой группой. По теореме 18 $\prod_{i \in I} A_i$ является $\mathfrak{S}$ -малой группой. $\square$

Следствие 20. Векторная группа, множество компонент ранга 1 которой неизмеримо, является $\mathfrak{S}$ -малой группой.

Теорема 21. Пусть $\mathfrak{R}_1$ — класс всех счётных редуцированных групп без кручения, $\{A_i\}_{i \in I}$ — некоторое семейство групп без кручения, где множество I неизмеримо, и $A = \prod_{i \in I} A_i$. Тогда имеют место следующие утверждения:

- 1) группа A является $\mathfrak{R}_1$ -малой тогда и только тогда, когда каждая группа A_i ($i \in I$) является $\mathfrak{R}_1$ -малой;

- 2) если каждая группа A_i ($i \in I$) имеет конечный ранг, то A — $\mathfrak{R}_1$ -малая группа;
- 3) если A — векторная группа, то A — $\mathfrak{R}_1$ -малая группа.

Доказательство. Все группы из класса $\mathfrak{R}_1$ являются узкими [4, предложение 94.2]. Тогда утверждения данной теоремы следуют из теорем 18, 19 и следствия 20. $\square$

Литература

- [1] Гердт И. В. Малые абелевы группы // Фундамент. и прикл. мат. — 2007. — Т. 13, вып. 3. — С. 3—8.
- [2] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 1. — М.: Мир, 1977.
- [3] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1. — М.: Мир, 1974.
- [4] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 2. — М.: Мир, 1977.

