Гомоморфная устойчивость абелевых групп

С. Я. ГРИНШПОН
Томский государственный университет
e-mail: grinshpon@ctc.tsu.ru

Т. А. ЕЛЬЦОВА
Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники
e-mail: yeltsova@yandex.ru

УДК 512.541

Ключевые слова: гомоморфный образ, группа гомоморфизмов, однородная группа, вполне транзитивная группа, узкая группа.

Аннотация

Для абелевых групп из некоторых классов даётся ответ на вопрос, когда объединение гомоморфных образов группы является подгруппой другой группы. В связи с этим вводится понятие гомоморфно устойчивой группы и исследуется гомоморфная устойчивость групп из различных классов абелевых групп.

Abstract

S. Ya. Grinshpon, T. A. Yeltsova, Homomorphic images of Abelian groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 5, pp. 67—76.

For some classes of Abelian groups, an answer to the following question is presented: when the union of homomorphic images of a group is a subgroup of another group? In connection with this, the concept of a homomorphically stable group is introduced, and homomorphic stability of groups from different classes of Abelian groups is studied.

Хорошо известно, что пересечение любого множества подгрупп группы также является подгруппой этой группы. Однако объединение (теоретико-множественное) подгрупп группы не обязательно является подгруппой этой группы.

При изучении абелевых групп интерес представляет вопрос, в каких случаях объединение подгрупп со специальными свойствами (вполне характеристических, сервантных, гомоморфных образов фиксированной группы) является подгруппой.

Введём следующее определение.

Определение. Группу A назовём *гомоморфно устойчивой относительно группы* B, если объединение гомоморфных образов группы A в группе B является подгруппой группы B, т. е. если $\bigcup\limits_{\alpha\in\mathrm{Hom}(A,B)} \operatorname{Im}\alpha$ — подгруппа группы B.

Фундаментальная и прикладная математика, 2008, том 14, № 5, с. 67—76.

Везде далее в этой статье под группой будет пониматься аддитивно записанная абелева группа.

В [2, 3] решён вопрос о гомоморфной устойчивости прямых сумм групп, получено полное описание гомоморфно устойчивых вполне разложимых, сепарабельных и жёстких групп. Также исследована гомоморфная устойчивость произвольных групп относительно прямых произведений.

Рассмотрим гомоморфную устойчивость относительно периодических групп. Обозначим через $T(A)$ периодическую часть группы A. Будем говорить, что A — *группа с нулевой характеристикой*, если выполняется одно из двух условий:

1) A — непериодическая группа и фактор-группа $A/T(A)$ содержит хотя бы один элемент нулевой характеристики;
2) A — периодическая группа.

Теорема 1. *Всякая группа с нулевой характеристикой гомоморфно устойчива относительно любой периодической группы.*

Доказательство.

I. Пусть B — периодическая группа, A — непериодическая группа с нулевой характеристикой,

$$H = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{Hom}\,(A,B)} \mathrm{Im}\,\alpha$$

и $h_1, h_2 \in H$, $h_1 - h_2 \neq 0$. Рассмотрим в группе $A/T(A)$ элемент $a + T(A)$, имеющий характеристику $(0, 0, \ldots, 0, \ldots)$. Обозначим через $\langle a + T(A)\rangle_*$ подгруппу, сервантно порождённую в группе $A/T(A)$ элементом $a + T(A)$. Так как $\chi\big(a + T(A)\big) = (0, 0, \ldots, 0, \ldots)$, то $\langle a + T(A)\rangle_* = \langle a + T(A)\rangle$. Группа $\langle a + T(A)\rangle$ бесконечная циклическая, поэтому существует элемент $\beta \in \mathrm{Hom}(\langle a+T(A)\rangle, \langle h_1 - h_2\rangle)$, такой что $\beta\big(a+T(A)\big) = h_1 - h_2$. Группа $\langle h_1 - h_2\rangle$, будучи ограниченной, является алгебраически компактной. Так как алгебраически компактные группы сервантно инъективны, то существует гомоморфизм $\bar\beta$ группы $A/T(A)$ в группу $\langle h_1 - h_2\rangle$, продолжающий гомоморфизм β. Гомоморфизм $\bar\beta$ можно рассматривать как гомоморфизм группы $A/T(A)$ в группу B.

Пусть φ — естественный эпиморфизм группы A на группу $A/T(A)$ и $\gamma = \bar\beta\varphi$. Имеем $\gamma \in \mathrm{Hom}(A, B)$ и $\gamma(a) = \bar\beta\big(a + T(A)\big) = \beta\big(a + T(A)\big) = h_1 - h_2$. Значит, $h_1 - h_2 \in H$. Следовательно, группа A гомоморфно устойчива относительно группы B.

II. Пусть A и B — периодические группы. Так как

$$\mathrm{Hom}(A, B) \cong \prod_p \mathrm{Hom}(A_p, B_p),$$

где A_p, B_p — p-компоненты групп A и B соответственно, то, не умаляя общности, можно считать, что A и B — p-группы. Пусть

$$H = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{Hom}(A,B)} \mathrm{Im}\,\alpha,$$

$h_1, h_2 \in H$ и $h_1 - h_2 \neq 0$. Запишем группу A в виде $A = D \oplus C$, где D — делимая часть группы A, C — редуцированная группа.

а) Рассмотрим сначала случай, когда C — неограниченная группа. Известно, что неограниченная редуцированная p-группа имеет циклические прямые слагаемые сколь угодно больших порядков [4, с. 142]. Выберем в группе C такое циклическое прямое слагаемое $\langle c\rangle$, что $\mathrm{o}(c) \geqslant \mathrm{o}(h_1 - h_2)$. Имеем $C = C_1 \oplus \langle c\rangle$ и $A = D \oplus C_1 \oplus \langle c\rangle$. Существует гомоморфизм β группы $\langle c\rangle$ в группу $\langle h_1 - h_2\rangle$, такой что $\beta(c) = h_1 - h_2$. Пусть π — проекция группы A на прямое слагаемое $\langle c\rangle$ и $\gamma = \beta\pi$. Отображение γ можно рассматривать как гомоморфизм группы A в группу B. Имеем $\gamma(c) = h_1 - h_2$ и, значит, $h_1 - h_2 \in H$.

б) Пусть C — ограниченная группа и $D = 0$. Всякая ограниченная p-группа является прямой суммой циклических p-групп [4, с. 107]. Группу A ($A = C$) можно записать в виде $A = \langle c\rangle \oplus A_1$, где $\mathrm{o}(c) = p^m$ и $p^m A_1 = 0$ (т. е. p^m — наибольший порядок циклических прямых слагаемых в разложении группы A). Так как гомоморфизмы не увеличивают порядок элемента, то $\mathrm{o}(h_1 - h_2) \leqslant p^m$, и поэтому $\mathrm{o}(c) \geqslant \mathrm{o}(h_1 - h_2)$. Рассуждениями, аналогичными приведённым для случая а), получаем, что существует такой гомоморфизм $\gamma \in \mathrm{Hom}(A, B)$, что $\gamma(c) = h_1 - h_2$.

в) Пусть теперь C — ограниченная группа и $D \neq 0$. Запишем группу B в виде $B = D_1 \oplus C_1$, где D_1 — делимая часть группы B, C_1 — редуцированная группа. Если $D_1 = 0$, то $\mathrm{Hom}(A, B) = \mathrm{Hom}(C, C_1)$ и мы находимся в ситуации случая б).

Пусть $D_1 \neq 0$. Запишем элемент $h_1 - h_2$ в виде $d_1 + c_1$, где $d_1 \in D_1$, $c_1 \in C_1$. Выберем в группе D такой элемент d, что $\mathrm{o}(d) \geqslant \mathrm{o}(d_1)$. Учитывая инъективность группы D_1, получаем, что существует гомоморфизм φ_1 группы D в группу D_1, такой что $\varphi_1 d = d_1$. Запишем группу C в виде $C = \langle c\rangle \oplus C_1$, где $\mathrm{o}(c) = p^m$ и $p^m C_1 = 0$. Имеем $\mathrm{o}(c) \geqslant \mathrm{o}(c_1)$, и поэтому существует гомоморфизм $\varphi_2 \in \mathrm{Hom}(C, C_1)$, такой что $\varphi_2(c) = c_1$.

Пусть π_1, π_2 — проекции группы A на прямые слагаемые D и C соответственно, и пусть $\gamma = \varphi_1\pi_1 + \varphi_2\pi_2$. Имеем $\gamma \in \mathrm{Hom}(A, B)$ и $\gamma(d + c) = d_1 + c_1 = h_1 - h_2$. Значит, $h_1 - h_2 \in H$.

Итак, любая периодическая группа A также гомоморфно устойчива относительно группы B. □

Следствие 2. *Всякая периодическая группа гомоморфно устойчива относительно любой группы.*

Доказательство. Пусть A — периодическая группа, B — произвольная группа. Для всякого гомоморфизма $\eta \in \mathrm{Hom}(A, B)$ имеем $\mathrm{Im}\,\eta \subset T(B)$, где $T(B)$ — периодическая часть группы B, и поэтому η можно рассматривать как гомоморфизм группы A в периодическую группу $T(B)$. Остаётся применить предыдущую теорему. □

Рассмотрим гомоморфную устойчивость групп без кручения. Напомним соответствующие определения.

Группа без кручения называется *однородной*, если все её ненулевые элементы имеют один и тот же тип [5].

Обозначим через $\chi(g)$ характеристику элемента g группы без кручения G, а через p_i — i-е простое число.

Редуцированная группа без кручения G называется *вполне транзитивной*, если для любых её элементов g_1, g_2, для которых $\chi(g_1) \leqslant \chi(g_2)$, существует такой эндоморфизм η группы G, что $\eta g_1 = g_2$.

Для однородных вполне транзитивных групп справедлив следующий результат.

Теорема 3. *Любая однородная вполне транзитивная группа гомоморфно устойчива относительно любой группы.*

Доказательство. Пусть A — однородная вполне транзитивная группа, B — произвольная группа. Докажем, что группа A гомоморфно устойчива относительно группы B, т. е. $\bigcup\limits_{\alpha\in \mathrm{Hom}(A,B)} \mathrm{Im}\,\alpha$ — подгруппа группы B.

Возьмём два элемента b_1 и b_2 из объединения $\bigcup\limits_{\alpha\in \mathrm{Hom}(A,B)} \mathrm{Im}\,\alpha$. Тогда существуют гомоморфизмы α_1 и α_2 из группы A в группу B и элементы a_1 и a_2 группы A, такие что $b_1 = \alpha_1 a_1$, $b_2 = \alpha_2 a_2$.

Пусть элементы a_1 и a_2 имеют характеристики $\chi(a_1) = (k_1, \ldots, k_n, \ldots)$ и $\chi(a_2) = (l_1, \ldots, l_n, \ldots)$. Так как группа A однородная, то $\chi(a_1)$ и $\chi(a_2)$ эквивалентны, т. е. k_i не равно l_i лишь для конечного числа номеров i.

Пусть $K = \{i \in \mathbb{N} \mid k_i > l_i\}$. Это множество конечно. Рассмотрим два случая.

а) Пусть K — непустое множество. Возьмём натуральное число

$$m = \prod_{i\in K} p_i^{k_i - l_i}.$$

Уравнение $mx = a_1$ в группе A имеет единственное решение $c \in A$. Элемент c имеет характеристику $\chi(c) = (s_1, \ldots, s_n, \ldots)$, где

$$s_i = \begin{cases} l_i, & \text{если } \ i \in K, \\ k_i, & \text{если } \ i \in \mathbb{N} \setminus K. \end{cases}$$

Тогда $\chi(c) < \chi(a_1)$, $\chi(c) \leqslant \chi(a_2)$. Так как A — вполне транзитивная группа, то существуют такие эндоморфизмы φ и ψ группы A, что $\varphi c = a_1$ и $\psi c = a_2$. Тогда

$$b_1 = \alpha_1 a_1 = \alpha_1(\varphi c) = (\alpha_1\varphi)c, \quad b_2 = \alpha_2 a_2 = \alpha_2(\psi c) = (\alpha_2\psi)c.$$

б) Пусть $K = \varnothing$. Тогда $\chi(a_1) \leqslant \chi(a_2)$. В качестве элемента c возьмём элемент a_1, а в качестве эндоморфизма φ — тождественный эндоморфизм. Повторяя изложенные выше рассуждения, приходим к идентичному результату:

$$b_1 = \alpha_1 a_1 = \alpha_1(\varphi c) = (\alpha_1\varphi)c, \quad b_2 = \alpha_2 a_2 = \alpha_2(\psi c) = (\alpha_2\psi)c.$$

Теперь рассмотрим разность элементов b_1 и b_2. С учётом только что полученных равенств имеем

$$b_1 - b_2 = (\alpha_1\varphi)c - (\alpha_2\psi)c = (\alpha_1\varphi - \alpha_2\psi)c.$$

Отображения α_1 и α_2 — гомоморфизмы группы A в группу B, φ и ψ — эндоморфизмы группы A. Тогда $\alpha_1\varphi$ и $\alpha_2\psi$ являются гомоморфизмами группы A в группу B. Их разность $\alpha_1\varphi - \alpha_2\psi$ также является гомоморфизмом группы A в группу B. Обозначим этот гомоморфизм через β, т. е. $\alpha_1\varphi - \alpha_2\psi = \beta$. Элемент c принадлежит группе A. Тогда βc принадлежит объединению $\bigcup\limits_{\alpha\in\mathrm{Hom}(A,B)} \mathrm{Im}\,\alpha$. Следовательно, группа A гомоморфно устойчива относительно группы B. □

Из данной теоремы вытекает следствие.

Следствие 4. *Прямая сумма однородных вполне транзитивных групп гомоморфно устойчива относительно любой группы.*

Доказательство. По доказанной теореме всякая однородная вполне транзитивная группа гомоморфно устойчива относительно любой группы. Тогда прямая сумма однородных вполне транзитивных групп гомоморфно устойчива относительно любой группы [3, теорема 1]. □

Пусть A и B — группы, причём B — группа без кручения. Обозначим через $\chi(A,B)$ множество характеристик всех ненулевых элементов вида ηa, где $\eta \in \mathrm{Hom}(A,B)$, $a \in A$. Множество $\chi(A,B)$ является частично упорядоченным относительно естественного порядка на множестве характеристик.

Рассмотрим гомоморфную устойчивость относительно однородных вполне транзитивных групп идемпотентного вида, т. е. таких однородных групп, в которых каждый ненулевой элемент имеет тип $\mathbf{t}$ и $\mathbf{t} = \mathbf{t}^2$. Понятно, что тип $\mathbf{t}$ идемпотентен $(\mathbf{t} = \mathbf{t}^2)$ тогда и только тогда, когда ему принадлежит характеристика $(k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots)$, у которой для каждого n либо $k_n = 0$, либо $k_n = \infty$.

Сначала докажем следующую лемму.

Лемма 5. *Если группа A гомоморфно устойчива относительно однородной вполне транзитивной группы B идемпотентного типа и $\mathrm{Hom}(A,B) \neq 0$, то $\bigcup\limits_{\alpha\in\mathrm{Hom}(A,B)} \mathrm{Im}\,\alpha = mB$ для некоторого натурального числа m.*

Доказательство. Пусть группа A гомоморфно устойчива относительно однородной вполне транзитивной группы B идемпотентного типа, т. е. $\bigcup\limits_{\alpha\in\mathrm{Hom}(A,B)} \mathrm{Im}\,\alpha$ есть подгруппа группы B. Обозначим её через H, т. е. $\bigcup\limits_{\alpha\in\mathrm{Hom}(A,B)} \mathrm{Im}\,\alpha = H$. Докажем, что группа H является вполне характеристической подгруппой группы B. Возьмём произвольный эндоморфизм η группы B и элемент h группы H. Тогда существует гомоморфизм γ из группы A в группу B и элемент a группы A, такие что $h = \gamma a$. Подействуем эндоморфизмом η на элемент h. Получим $\eta h = \eta(\gamma a) = (\eta\gamma)a$. Так как γ — гомоморфизм группы A в группу B, а η — эндоморфизм группы B, то $\eta\gamma$ — гомоморфизм группы A в группу B. Следовательно, $\eta h = (\eta\gamma)a$ принадлежит группе $\bigcup\limits_{\alpha\in\mathrm{Hom}(A,B)} \mathrm{Im}\,\alpha = H$.

Значит, любой эндоморфизм группы B переводит подгруппу H в себя. Следовательно, подгруппа H является вполне характеристической подгруппой группы B. Учитывая, что B — вполне транзитивная однородная группа идемпотентного типа, получаем, что $H = mB$ для некоторого натурального числа m [1]. □

Теорема 6. *Пусть B — однородная вполне транзитивная группа идемпотентного типа. Группа A является гомоморфно устойчивой относительно группы B тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие: если $\chi(A, B) \neq \varnothing$, то множество $\chi(A, B)$ содержит наименьшую в этом множестве характеристику.*

Доказательство. Пусть B — однородная вполне транзитивная группа идемпотентного типа.

Необходимость. Пусть группа A гомоморфно устойчива относительно группы B и $\chi(A, B) \neq \varnothing$. Тогда по лемме 5 существует такое натуральное число m, что $\bigcup\limits_{\alpha\in\mathrm{Hom}(A,B)} \mathrm{Im}\,\alpha = mB$. Занумеруем все простые числа в порядке возрастания. Пусть $m = p_{i_1}^{k_1} \cdot p_{i_2}^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_{i_n}^{k_n}$ — разложение числа m в произведение степеней простых чисел. Рассмотрим характеристику $(l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots)$, где $l_j = 0$, если $j \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ и $l_{i_s} = k_s$ при $s = \overline{1, n}$.

Пусть $(r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots) \in \chi(A, B)$. Тогда существует такой элемент $b \in \bigcup\limits_{\alpha\in\mathrm{Hom}(A,B)} \mathrm{Im}\,\alpha$, что $\chi(b) = (r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots)$. Так как элемент b принадлежит подгруппе mB, то $\chi(b) = (r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots) \geqslant (l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots)$. Таким образом, характеристика $(l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots)$ в множестве $\chi(A, B)$ является наименьшей.

Достаточность. Если $\chi(A, B) = \varnothing$, то $\mathrm{Hom}(A, B) = 0$ и понятно, что группа A гомоморфно устойчива относительно группы B. Пусть $\chi(A, B) \neq \varnothing$ и в $\chi(A, B)$ существует наименьшая характеристика $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots)$. Тогда существует такой элемент b из группы B, что $b = \eta a$ для некоторого гомоморфизма η группы A в группу B и некоторого элемента a из группы A и $\chi(b) = v$.

Возьмём элементы b_1 и b_2 из объединения $\bigcup\limits_{\alpha\in\mathrm{Hom}(A,B)} \mathrm{Im}\,\alpha$. Тогда характеристики этих элементов $\chi(b_1)$ и $\chi(b_2)$ лежат во множестве $\chi(A, B)$, следовательно, $\chi(b_1) \geqslant v = \chi(b)$ и $\chi(b_2) \geqslant v = \chi(b)$. Группа B вполне транзитивная. Следовательно, существуют эндоморфизмы α_1 и α_2 группы B, такие что $\alpha_1 b = b_1$ и $\alpha_2 b = b_2$.

Рассмотрим разность $b_1 - b_2$. Имеем

$$b_1 - b_2 = \alpha_1 b - \alpha_2 b = \alpha_1(\eta a) - \alpha_2(\eta a) = (\alpha_1\eta)a - (\alpha_2\eta)a = (\alpha_1\eta - \alpha_2\eta)a.$$

Так как α_1 и α_2 — эндоморфизмы группы B, а η — гомоморфизм группы A в группу B, то $\alpha_1\eta$ и $\alpha_2\eta$ — гомоморфизмы группы A в группу B. Следовательно, $\alpha_1\eta - \alpha_2\eta$ — гомоморфизм группы A в группу B. Обозначим его через δ, т. е. $\alpha_1\eta - \alpha_2\eta = \delta$. Тогда получим $b_1 - b_2 = \delta a$, где δ — гомоморфизм группы A

в группу B, a — элемент группы A. Следовательно, разность $b_1 - b_2 = \delta a$ принадлежит $\bigcup\limits_{\alpha \in \mathrm{Hom}(A,B)} \mathrm{Im}\, \alpha$. Значит, группа A гомоморфно устойчива относительно группы B. □

Из доказанной теоремы вытекает следствие.

Следствие 7. *Всякая группа гомоморфно устойчива относительно любой p-локальной вполне транзитивной группы (p — некоторое простое число).*

Доказательство. Пусть B — некоторая p-локальная вполне транзитивная группа, где p — i-е простое число. Тогда характеристика любого элемента группы B имеет вид $(\infty, \infty, \ldots, \infty, k, \infty, \ldots)$, где k — некоторое неотрицательное целое число, стоящее на i-м месте. Следовательно, группа B является однородной вполне транзитивной группой идемпотентного типа.

Пусть A — произвольная группа. Рассмотрим множество

$$\chi(A, B) = \{\eta a \mid a \in A,\ \eta \in \mathrm{Hom}(A, B),\ \eta a \neq 0\}.$$

Так как элемент ηa принадлежит группе B, то характеристика произвольного элемента из множества $\chi(A, B)$ имеет вид $(\infty, \infty, \ldots, \infty, k, \infty, \ldots)$, где k — некоторое неотрицательное целое число, стоящее на i-м месте. Тогда в множестве $\chi(A, B)$ имеется наименьшая характеристика, так как в любом подмножестве множества целых неотрицательных чисел есть наименьшее число. Следовательно, по теореме 6 группа A гомоморфно устойчива относительно группы B. □

Далее исследуем гомоморфную устойчивость прямых произведений групп без кручения. В большинстве доказанных ниже результатов предполагается неизмеримость множества компонент в прямых произведениях рассматриваемых групп. Это ограничение зависит лишь от аксиоматики теории множеств. Пока неизвестно, совместно или нет существование измеримых кардинальных чисел с аксиоматикой ZF теории множеств.

Напомним определение узкой группы, которое понадобится нам в дальнейшем [5, с. 189]. Пусть P обозначает прямое произведение счётного множества бесконечных циклических групп, т. е. $P = \prod\limits_{n=1}^{\infty} \langle e_n \rangle$, где $\mathrm{o}(e_n) = \infty$. Группа без кручения G называется узкой, если при любом гомоморфизме $\eta \colon P \to G$ для почти всех n выполняется равенство $\eta e_n = 0$.

Рассмотрим гомоморфную устойчивость прямых произведений групп без кручения относительно узких групп.

Теорема 8. *Пусть B — узкая группа и $\{A_i\}_{i \in I}$ — семейство групп без кручения, каждая из которых гомоморфно устойчива относительно группы B, причём множество I неизмеримо. Тогда группа $\prod\limits_{i \in I} A_i$ также гомоморфно устойчива относительно группы B.*

Доказательство. Пусть $A = \prod\limits_{i \in I} A_i$. Возьмём произвольные элементы c и d из множества $\bigcup\limits_{\gamma \in \mathrm{Hom}(A,B)} \mathrm{Im}\, \gamma$. Тогда существуют гомоморфизмы α, β группы A

в группу B и элементы a_1, a_2 из группы A, такие что $c = \alpha a_1$, $d = \beta a_2$. Обозначим для каждого $i \in I$ через π_i проекцию группы A на группу A_i, а через ρ_i — координатное вложение группы A_i в группу A.

Пусть α_i и β_i являются ограничениями гомоморфизмов α и β соответственно на подгруппе $\rho_i\pi_i A$ ($i \in I$). Из [5, теорема 94.4] следует, что для гомоморфизмов α и β существуют соответственно конечные подмножества I_α и I_β множества I, такие что для всякого элемента $a \in A$ имеем

$$\alpha a = \sum_{i\in I_\alpha} \alpha_i(\rho_i\pi_i a), \quad \beta a = \sum_{i\in I_\beta} \beta_i(\rho_i\pi_i a).$$

Пусть $I' = I_\alpha \cap I_\beta$. Возможны два случая: 1) $I' = \varnothing$, 2) $I' \neq \varnothing$.

В первом случае рассмотрим следующий гомоморфизм δ группы A в группу B: для всякого элемента $a \in A$ положим

$$\delta a = \sum_{i\in I_\alpha} \alpha_i(\rho_i\pi_i a) + \sum_{i\in I_\beta} \beta_i(\rho_i\pi_i a).$$

Пусть h — элемент группы A, для которого $\pi_i h = \pi_i a_1$, если $i \in I_\alpha$, $\pi_i h = -\pi_i a_2$, если $i \in I_\beta$ и $\pi_i h = 0$, если $i \in I \setminus (I_\alpha \cup I_\beta)$. Имеем

$$\delta h = \sum_{i\in I_\alpha} \alpha_i(\rho_i\pi_i h) + \sum_{i\in I_\beta} \beta_i(\rho_i\pi_i h) =$$
$$= \sum_{i\in I_\alpha} \alpha_i(\rho_i\pi_i a_1) - \sum_{i\in I_\beta} \beta_i(\rho_i\pi_i a_2) = \alpha a_1 - \beta a_2 = c - d.$$

Значит, $c - d \in \operatorname{Im}\delta$, и поэтому $c - d \in \bigcup\limits_{\gamma\in \operatorname{Hom}(A,B)} \operatorname{Im}\gamma$.

Рассмотрим второй случай. Так как $\rho_i\pi_i A \cong A_i$ для всякого $i \in I$, то любая группа $\rho_i\pi_i A$ ($i \in I$) гомоморфно устойчива относительно группы B. Значит, для всякого $i \in I$ существуют гомоморфизм φ_i группы $\rho_i\pi_i A$ в группу B и элемент $a^{(i)} \in A$, такие что

$$\alpha_i(\rho_i\pi_i a_1) - \beta_i(\rho_i\pi_i a_2) = \varphi_i\bigl(\rho_i\pi_i a^{(i)}\bigr).$$

Пусть $I'_\alpha = I_\alpha \backslash I'$ и $I'_\beta = I_\beta \backslash I'$. Рассмотрим следующий гомоморфизм μ группы A в группу B: для всякого элемента $a \in A$ положим

$$\mu a = \sum_{i\in I'_\alpha} \alpha_i(\rho_i\pi_i a) + \sum_{i\in I'_\beta} \beta_i(\rho_i\pi_i a) + \sum_{i\in I'} \varphi_i(\rho_i\pi_i a).$$

Пусть h — элемент группы A, для которого $\pi_i h = \pi_i a^{(i)}$, если $i \in I'$, $\pi_i h = \pi_i a_1$, если $i \in I'_\alpha$, $\pi_i h = -\pi_i a_2$, если $i \in I'_\beta$ и $\pi_i h = 0$, если $i \in I \setminus (I_\alpha \cup I_\beta)$. Имеем

$$\mu h = \sum_{i\in I'_\alpha} \alpha_i(\rho_i\pi_i h) + \sum_{i\in I'_\beta} \beta_i(\rho_i\pi_i h) + \sum_{i\in I'} \varphi_i(\rho_i\pi_i h) =$$
$$= \sum_{i\in I'_\alpha} \alpha_i(\rho_i\pi_i a_1) - \sum_{i\in I'_\beta} \beta_i(\rho_i\pi_i a_2) + \sum_{i\in I'} \varphi_i(\rho_i\pi_i h) =$$

$$= \sum_{i\in I'_\alpha} \alpha_i(\rho_i\pi_i a_1) - \sum_{i\in I'_\beta} \beta_i(\rho_i\pi_i a_2) + \sum_{i\in I'} \varphi_i\big(\rho_i\pi_i a^{(i)}\big) =$$

$$= \sum_{i\in I'_\alpha} \alpha_i(\rho_i\pi_i a_1) - \sum_{i\in I'_\beta} \beta_i(\rho_i\pi_i a_2) + \left(\sum_{i\in I'} \alpha_i(\rho_i\pi_i a_1) - \sum_{i\in I'} \beta_i(\rho_i\pi_i a_2)\right) =$$

$$= \left(\sum_{i\in I'_\alpha} \alpha_i(\rho_i\pi_i a_1) + \sum_{i\in I'} \alpha_i(\rho_i\pi_i a_1)\right) - \left(\sum_{i\in I'_\beta} \beta_i(\rho_i\pi_i a_2) + \sum_{i\in I'} \beta_i(\rho_i\pi_i a_2)\right) =$$

$$= \sum_{i\in I_\alpha} \alpha_i(\rho_i\pi_i a_1) - \sum_{i\in I_\beta} \beta_i(\rho_i\pi_i a_2) = \alpha a_1 - \beta a_2 = c - d.$$

Итак, $c - d \in \operatorname{Im}\mu$, и поэтому $c - d \in \bigcup\limits_{\gamma\in \operatorname{Hom}(A,B)} \operatorname{Im}\gamma$.

Таким образом, группа A гомоморфно устойчива относительно группы B. □

Для исследования гомоморфной устойчивости прямого произведения сепарабельных групп без кручения нам понадобится результат о гомоморфной устойчивости сепарабельных групп, т. е. групп, в которых каждое конечное подмножество элементов содержится в прямом слагаемом этой группы, являющемся прямой суммой групп ранга 1.

Теорема 9 [3, теорема 6]. *Всякая сепарабельная группа гомоморфно устойчива относительно любой группы.*

Из теорем 8 и 9 получаем следующий результат.

Следствие 10. *Прямое произведение сепарабельных групп без кручения (в частности, любая векторная группа) с неизмеримым множеством компонент является гомоморфно устойчивой группой относительно любой узкой группы.*

Учитывая, что всякая счётная редуцированная группа без кручения является узкой [7], получаем следующий результат.

Следствие 11. *Прямое произведение сепарабельных групп без кручения (в частности, любая векторная группа) с неизмеримым множеством компонент является гомоморфно устойчивой группой относительно любой счётной редуцированной группы без кручения.*

Пусть p — произвольное простое число. Обозначим через J_p аддитивную группу кольца целых p-адических чисел.

Теорема 12. *Пусть B — группа без кручения, не содержащая подгрупп, изоморфных одной из групп P или J_p, где p — произвольное простое число. Если $\{A_i\}_{i\in I}$ — семейство групп без кручения, каждая из которых гомоморфно устойчива относительно группы B, и множество I неизмеримо, то группа $\prod\limits_{i\in I} A_i$ также гомоморфно устойчива относительно группы B.*

Доказательство. Пусть $A = \prod\limits_{i\in I} A_i$. Рассмотрим вначале случай, когда B — редуцированная группа. Тогда B не содержит никакой подгруппы, изоморфной одной из групп Q, P или J_p, где p — произвольное простое число. Значит, B — узкая группа [6], и поэтому по теореме 8 группа A гомоморфно устойчива относительно группы B.

Пусть теперь B — нередуцированная группа. Тогда $B = D \oplus B'$, где D — делимая группа, B' — редуцированная группа. Так как B' не содержит подгрупп, изоморфных одной из групп Q, P или J_p, то B' — узкая группа. Пусть π_1, π_2 — проекции группы B на прямые слагаемые D и B' соответственно. Если $\alpha, \beta \in \mathrm{Hom}(A, B)$, то $\pi_1\alpha, \pi_1\beta \in \mathrm{Hom}(A, D)$; $\pi_2\alpha, \pi_2\beta \in \mathrm{Hom}(A, B')$. Для любых элементов a_1 и a_2 из группы A имеем

$$\alpha a_1 = \pi_1\alpha a_1 + \pi_2\alpha a_1, \quad \beta a_2 = \pi_1\beta a_2 + \pi_2\beta a_2.$$

Тогда

$$\alpha a_1 - \beta a_2 = (\pi_1\alpha a_1 - \pi_1\beta a_2) + (\pi_2\alpha a_1 - \pi_2\beta a_2).$$

Так как $\pi_2\alpha a_1 - \pi_2\beta a_2 \in B'$ и B' — узкая группа, то по теореме 8 существуют гомоморфизм $\lambda \in \mathrm{Hom}(A, B')$ и элемент $a_3 \in A$, такие что $\pi_2\alpha a_1 - \pi_2\beta a_2 = \lambda a_3$ (если $\pi_2\alpha a_1 - \pi_2\beta a_2 = 0$, то полагаем $\lambda = 0$, а в качестве a_3 берём произвольный ненулевой элемент группы A). Существует такой гомоморфизм $\xi\colon \langle a_3\rangle \to D$, что $\xi a_3 = \pi_2\alpha a_1 - \pi_2\beta a_2$. В силу инъективности группы D [4, теорема 21.1] гомоморфизм ξ можно продолжить до гомоморфизма η группы A в группу D. Итак, имеем $\alpha a_1 - \beta a_2 = \eta a_3 + \lambda a_3$. Так как гомоморфизмы η и λ можно рассматривать как гомоморфизмы группы A в группу B (D и B' — подгруппы группы B), то $\alpha a_1 - \beta a_2 = (\eta + \lambda)a_3$, где $\eta + \lambda \in \mathrm{Hom}(A, B)$. Значит, группа A гомоморфно устойчива относительно группы B. $\square$

Следствие 13. *Прямое произведение сепарабельных групп без кручения (в частности, любая векторная группа) с неизмеримым множеством компонент является гомоморфно устойчивой относительно любой группы без кручения, не содержащей подгрупп, изоморфных одной из групп P или J_p, где p — произвольное простое число.*

Литература

[1] Гриншпон С. Я. Вполне характеристические подгруппы абелевых групп и вполне транзитивность // Фундамент. и прикл. мат. — 2002. — Т. 8, вып. 2. — С. 407—473.

[2] Гриншпон С. Я., Ельцова Т. А. Гомоморфно устойчивые абелевы группы // Вестник ТГУ. — 2003. — № 280. — С. 31—33.

[3] Гриншпон С. Я., Ельцова Т. А. Гомоморфные образы абелевых групп // Фундамент. и прикл. мат. — 2007. — Т. 13, вып. 3. — С. 17—24.

[4] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1. — М.: Мир, 1974.

[5] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 2. — М.: Мир, 1977.

[6] Nunke R. J. Slender groups // Bull. Amer. Math. Soc. — 1961. — Vol. 67. — P. 274—275.

[7] Sasiada E. Proof that every countable and reduced torsion-free Abelian group is slender // Bull. Acad. Polon. Sci. — 1959. — Vol. 7. — P. 143—144.