О Т-пространствах и связанных с ними понятиях и результатах

А. В. ГРИШИН
Московский педагогический государственный университет
e-mail: grishinaleksandr@yandex.ru

УДК 512.552

Ключевые слова: Т-пространство, Т-идеал, многообразие, центральный многочлен, матрица.

Аннотация

В статье даётся краткий обзор концепции Т-пространства и связанных с ней результатов, устанавливается связь между Т-пространствами и так называемыми многообразиями пар, аналогичная связи между Т-идеалами и многообразиями алгебр. Вводятся понятия А-эквивалентности и Т-эквивалентности, рассматриваются некоторые приложения.

Abstract

A. V. Grishin, On T-spaces and related concepts and results, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 5, pp. 77—84.

The paper is a brief survey of the T-space conception and related results. A connection between T-spaces and so-called varieties of pairs, analogous to the connection between T-ideals and varieties of algebras, is established. The concepts of A-equivalency and T-equivalency are introduced, after that some applications are considered.

1. Концепция Т-пространства

Понятие Т-пространства, введённое автором около 20 лет назад, уже прочно вошло в обиход современной комбинаторной алгебры и теории PI-колец. С его помощью был решён ряд достаточно долго остававшихся открытыми проблем. Это, в первую очередь, такие проблемы конечной базируемости, как проблема Мальцева, проблема Шпехта в положительной характеристике и т. д. Интересно, что аппарат Т-пространств оказался одинаково эффективным как при доказательстве положительных утверждений, так и при построении контрпримеров.

Изначально в [2] Т-пространство определялось как линейное подпространство в свободной ассоциативной алгебре $F = k\langle x_1, \ldots, x_i, \ldots\rangle$ над полем k, устойчивое относительно подстановок (эндоморфизмов алгебры F). Это определение естественным образом переносится и на относительно свободные алгебры.

Фундаментальная и прикладная математика, 2008, том 14, № 5, с. 77—84.

Существенным развитием концепции Т-пространства стал теоретико-модульный подход, при котором Т-пространство определяется как унитарный правый модуль над полугрупповой алгеброй kT, где T — полугруппа эндоморфизмов алгебры F. Это приводит к определению *абстрактного Т-пространства* (см. [3]), а также его важного частного случая — так называемого *комбинаторного модуля* (см. [10]). Расширяя таким образом понятие Т-пространства, мы освобождаемся от необходимости рассматривать только подпространства в относительно свободных алгебрах. Можно рассматривать ещё и фактор-Т-пространства, прямые суммы и т. д. Кроме того, имеется большой запас примеров Т-пространств иной природы, связанных со следами, квазимногочленами и некоторыми другими специальными конструкциями (см. [3,10]).

Теория Т-пространств в нулевой характеристике заметно отличается от соответствующей теории в характеристике $p > 0$. Если в первой любой разумный kT-модуль нётеров (см. [3, 9, 10]), но пока нет никаких существенных структурных результатов, то во второй имеется много примеров бесконечной базируемости (см. [1, 4, 8, 10]) и довольно продвинутая теория, описывающая структуру относительно свободной алгебры Грассмана $F^{(3)} = F/\big([[x_1, x_2], x_3]\big)^T$. Эта алгебра играет чрезвычайно важную роль в построении примеров неконечной базируемости.

Ясно, что нётеровость свободной алгебры F как Т-пространства, которая имеет место в нулевой характеристике, даёт, в частности, положительное решение проблемы Шпехта, впервые найденное А. Р. Кемером [5]. С другой стороны, в характеристике $p > 0$ Т-пространства являются источником (по-видимому, пока единственным) примеров неконечно базируемых Т-идеалов.

2. Многообразия пар

Хорошо известно взаимно-однозначное соответствие между многообразиями ассоциативных алгебр, Т-идеалами алгебры F и относительно свободными алгебрами, т. е. фактор-алгебрами алгебры F по соответствующему Т-идеалу. Можно установить аналогичную связь между Т-пространствами и так называемыми *многообразиями пар*.

Рассмотрим категорию $\mathfrak{P}$, объектами которой являются всевозможные пары (S, A), где A — ассоциативная k-алгебра, а S — линейное подпространство в алгебре A.

Морфизмом пар $\bar{\varphi}\colon (S_1, A_1) \to (S_2, A_2)$ назовём такой гомоморфизм k-алгебр $\varphi\colon A_1 \to A_2$, что $\varphi(S_1) \subset S_2$.

Скажем, что морфизм $\bar{\varphi}$ *инъективен*, если φ — инъективный гомоморфизм и $\varphi(S_1) = \varphi(A_1) \cap S_2$. Например, если $S_1 \subsetneqq S_2 \subset A$, то тождественное отображение алгебры A не индуцирует инъективного гомоморфизма пар.

Пусть имеется некоторое семейство пар (S_i, A_i) и $\prod S_i$, $\prod A_i$ — соответствующие прямые произведения. Пара $\big(\prod S_i, \prod A_i\big)$ называется *прямым произведением* пар (S_i, A_i).

Если I — идеал алгебры A, то пару $(S+I/I, A/I)$ назовём *фактор-парой* пары (S, A) по идеалу I.

Скажем, что (S_1, A_1) — подпара пары (S_2, A_2), если $A_1 \subset A_2$ и $A_1 \cap S_2 = S_1$.

Пусть S — произвольное непустое подмножество алгебры A (не обязательно подпространство). Положим

$$\mathrm{In}(A, S) = \{f \in F \mid f(A) \subset S\},$$

где через $f(A)$ обозначено множество всевозможных значений многочлена f при подстановке вместо переменных элементов алгебры A. Ясно, что множество $\mathrm{In}(A, S)$ устойчиво относительно действия полугруппы T (Т-множество), причём если S — подпространство в A (подалгебра, идеал), то $\mathrm{In}(A, S)$ — Т-пространство в F (Т-подалгебра, Т-идеал).

Отметим, что если S — нулевое подпространство, то $\mathrm{In}(A, S)$ — Т-идеал тождеств алгебры A.

Элементы множества $\mathrm{In}(A, S)$ будем называть *включениями* алгебры A в множество S. Тождества являются частным случаем включений.

В связи с данным определением можно рассмотреть следующий пример. Пусть $\mathbb{R}_n$ — алгебра $(n \times n)$-матриц над полем вещественных чисел и S — подмножество в $\mathbb{R}_n$, состоящее из матриц с неотрицательным определителем. Что представляет собой множество $\mathrm{In}(\mathbb{R}_n, S)$? Ясно, что в него заведомо входят все одночлены, содержащие каждую переменную с чётной кратностью.

Пусть (S_i, A_i) — некоторое семейство пар. Прямо из определения следует, что многочлен f является включением для всех пар семейства тогда и только тогда, когда он является включением для пары $\bigl(\prod S_i, \prod A_i\bigr)$.

Назовём *тождеством* пары (S, A) пару многочленов (f, g) из F^2, где $f \in \mathrm{In}(A, S)$, а $g \in \mathrm{In}(A, 0)$ — тождество алгебры A. Рассмотрим Т-пространство тождеств пары (S, A)

$$\Theta(S, A) = \mathrm{In}(A, S) \times \mathrm{In}(A, 0) \subset F^2.$$

Легко убедиться, что пара (f, g) является тождеством семейства пар (S_i, A_i) тогда и только тогда, когда она является тождеством прямого произведения этих пар, причём

$$\Theta\Bigl(\prod S_i, \prod A_i\Bigr) = \bigcap_i \Theta(S_i, A_i).$$

Кроме того, прямо из определений следует, что если пара многочленов (f, g) является тождеством пары (S, A), то она является тождеством подпары, фактор-пары (сюръективного образа).

Пусть теперь $\mathfrak{D}$ — некоторое непустое множество пар из категории $\mathfrak{P}$ и $\Theta = V \times I$ — Т-пространство тождеств, выполняющихся на всех парах из $\mathfrak{D}$. Рассмотрим всевозможные гомоморфизмы $\alpha_i \colon F \to A_i$, где A_i — всевозможные вторые компоненты пар из $\mathfrak{D}$ (алгебры A_i при различных индексах могут повторяться). Тогда гомоморфизмы α_i индуцируют вложение $\bar{\alpha} \colon (V/I, F/I) \hookrightarrow \prod\bigl(S_i, \prod A_i\bigr)$, где $\bar{\alpha} = \prod \alpha_i$. В самом деле, $F/I \hookrightarrow \prod A_i$, $V/I = F/I \cap \bigl(\prod S_i\bigr)$.

Итогом сказанного выше является следующий аналог теоремы Биркгофа (доказательство такое же, как и в классическом случае).

Теорема 1. *Следующие два определения многообразия пар* $\mathfrak{M}$ *эквивалентны*:

1) $\mathfrak{M}$ — *подкласс категории* $\mathfrak{P}$, *замкнутый относительно взятия подпар, сюръективных образов и прямых произведений*;
2) $\mathfrak{M}$ — *подкласс категории* $\mathfrak{P}$, *удовлетворяющих некоторому T-пространству тождеств.*

3. Вербальные подпространства в алгебре A. Главные относительно A T-пространства

Прямо из определения следует, что если $S_1 \subset S_2$, то $\mathrm{In}(A, S_1) \subset \mathrm{In}(A, S_2)$. Обратное неверно. Более того, может быть, что $\mathrm{In}(A, S_1) = \mathrm{In}(A, S_2)$, но S_1 и S_2 не связаны никакими включениями.

Пример. Пусть $A = k_n$ — алгебра $(n \times n)$-матриц над полем нулевой характеристики k, а S_1 и S_2 — подалгебры верхних и нижних треугольных матриц соответственно. Тогда, как будет следовать из приводимой ниже теоремы 2, $\mathrm{In}(A, S_1) = \mathrm{In}(A, S_2) = \mathrm{C}_n = \mathrm{In}(A, ke)$ — T-подалгебра центральных многочленов в алгебре F (e — единичная матрица).

Однако для любого семейства подпространств S_i алгебры A, имеющих одно и то же T-пространство $\mathrm{In}(A, S_i)$, существует наименьшее S с этим свойством. Пусть V — некоторое T-пространство в F. Подпространство в A вида

$$P(V, A) = \{f(A) \mid f \in V\}$$

назовём *проекцией* T-пространства V на алгебру A. Если $V = \mathrm{In}(A, S_i)$, то проекция $S = P(A, V)$ и есть, как нетрудно убедиться, наименьшее подпространство алгебры A, имеющее то же самое T-пространство включений.

Подпространство $S \subset A$ назовём *вербальным*, если $S = P(V, A)$ для некоторого T-пространства V.

Ясно, что если $V_1 \subset V_2$, то $P(V_1, A) \subset P(V_2, A)$. Однако может быть, что $P(V_1, A) = P(V_2, A)$, но $V_1 \neq V_2$.

Пример. Пусть $A = k_n$, f — некоторый центральный многочлен, не являющийся тождеством алгебры A и не порождающий всё T-пространство C_n, $V_1 = \{f\}^T$ — T-пространство, порождённое f, а $V_2 = \mathrm{C}_n$. Легко видеть, что $P(V_1, A) = P(V_2, A) = ke$, но $V_1 \neq V_2$.

Если V_i — некоторое семейство T-пространств, дающих одну и ту же проекцию S на алгебру A, то существует наибольшее T-пространство, дающее эту проекцию. Это, очевидно, $V = \mathrm{In}(A, S)$. Назовём T-пространство V *главным* относительно алгебры A, если $V = \mathrm{In}(A, S)$ для некоторого $S \subset A$.

Как нетрудно проверить, имеет место следующее утверждение.

Предложение 1.

1. *Для любого Т-пространства* V *имеет место включение* $V \subset \mathrm{In}\big(A, P(V,A)\big)$, *причём равенство имеет место тогда и только тогда, когда* V *— главное Т-пространство.*
2. *Для любого подпространства* S *алгебры* A $P(\mathrm{In}(A,S),A) \subset S$, *причём равенство имеет место тогда и только тогда, когда* S *вербальное.*
3. *Если* S *— вербальное подпространство алгебры* A, *то оно инвариантно относительно эндоморфизмов этой алгебры.*
4. *Пусть* $\{V_i\}$ *— семейство всех главных Т-пространств относительно алгебры,* $S_i = P(V_i, A)$ *— соответствующие вербальные подпространства алгебры* A. *Тогда отображение*
$$P\colon \{V_i\} \to \{S_i\}, \quad V_i \mapsto P(V_i, A),$$
задаёт взаимно-однозначное соответствие между множеством всех главных Т-пространств относительно A *и множеством всех вербальных подпространств алгебры* A, *причём отображение*
$$\mathrm{In}\colon \{S_i\} \to \{V_i\}, \quad S_i \mapsto \mathrm{In}(A, S_i),$$
является обратным к P, *т. е.* $\mathrm{In}\big(P(V_i)\big) = V_i$, $P\big(\mathrm{In}(S_i)\big) = S_i$.

4. Классификации

Θ-классификация. Объекты категории $\mathfrak{P}$ можно классифицировать по тождествам: $(S_1, A_1) \sim_\Theta (S_2, A_2)$ тогда и только тогда, когда $\Theta(S_1, A_1) = \Theta(S_2, A_2)$.

Если зафиксировать некоторую алгебру A, то с ней связаны ещё две классификации.

A-классификация. Скажем, что Т-пространства V_1 и V_2 *A-эквивалентны* (обозначение $V_1 \sim_A V_2$), если $P(V_1, A) = P(V_2, A)$.

Т-классификация. Скажем, что линейные подпространства S_1 и S_2 алгебры A *Т-эквивалентны* (обозначение $S_1 \sim_T S_2$), если $\mathrm{In}(A, S_1) = \mathrm{In}(A, S_2)$.

Нетрудно проверить, что имеет место следующее утверждение.

Предложение 2.

1. *Множество классов A-эквивалентности состоит из классов вида* $\mathrm{cl}_A V_i$, *где* V_i *— главное Т-пространство относительно алгебры* A, *причём в каждом классе имеется единственное главное Т-пространство.*
2. *Множество классов Т-эквивалентности состоит из классов вида* $\mathrm{cl}_T S_i$, *где* S_i *— вербальное подпространство алгебры* A, *причём в каждом классе имеется единственное вербальное подпространство.*
3. *Между классами* $\mathrm{cl}_A V_i$ *и* $\mathrm{cl}_T S_i$ *имеется естественное взаимно-однозначное соответствие.*

5. Примеры и приложения

Будем предполагать, что k — поле нулевой характеристики. Рассмотрим два примера, первый из которых тривиален, а второй достаточно интересен.

Пусть A — коммутативная алгебра с единицей. Так как в алгебре коммутативных многочленов нет нетривиальных унитарно замкнутых T-пространств, то в F имеется всего два главных T-пространства относительно A: T-идеал, порождённый коммутатором, и вся алгебра F. По этой же причине имеется всего два вербальных подпространства в A: нулевое и A.

Пусть теперь $A = k_n$ — алгебра $(n \times n)$-матриц над полем k, ke — подалгебра скалярных матриц (центр алгебры k_n), $\mathrm{sl}_n(k)$ — подпространство (подалгебра Ли) матриц, имеющих нулевой след. Обозначим через M_n T-идеал тождеств алгебры k_n, C_n — T-подалгебру центральных многочленов, L_n — T-подалгебру Ли, порождённую как T-пространство коммутатором $[x_1, x_2]$. Известно (см. [1, 10]), что $\mathrm{In}\big(k_n, \mathrm{sl}_n(k)\big) = \mathrm{L}_n$.

Положим

$$S_1 = 0, \quad S_2 = k_n, \quad S_3 = ke, \quad S_4 = \mathrm{sl}_n(k).$$

Соответствующие главные T-пространства имеют вид

$$V_1 = \mathrm{In}(k_n, 0) = \mathrm{M}_n, \quad V_2 = \mathrm{In}(k_n, k_n) = F,$$
$$V_3 = \mathrm{In}(k_n, ke) = \mathrm{C}_n, \quad V_4 = \mathrm{In}\big(k_n, \mathrm{sl}_n(k)\big) = \mathrm{L}_n.$$

Теорема 2. *Вербальные подпространства алгебры k_n исчерпываются списком S_1, S_2, S_3, S_4. Соответственно, имеется четыре класса T-эквивалентности. Главные относительно k_n T-пространства исчерпываются списком V_1, V_2, V_3, V_4. Соответственно, имеется четыре класса A-эквивалентности.*

Доказательство. Согласно предложениям 1 и 2 достаточно описать все вербальные подпространства алгебры k_n. Но, как известно, нетривиальных инвариантных подпространств в алгебре k_n всего два: ke и $\mathrm{sl}_n(k)$, причём k_n — их прямая сумма. Нетрудно убедиться, что все четыре подпространства S_i реализуются как вербальные (то, что S_3 вербальное, следует из [7]). Отсюда получаем утверждение теоремы. □

Замечание 1. При $n = 2$ имеем $V_1 = \big([[x_1, x_2]^2, x_3], \mathrm{st}_4\big)^T$ (см. [6]); $V_3 = V_1 + \{[x_1, x_2]^2\}^T$ (см. [11]). Здесь st_4 — стандартный многочлен 4-й степени, $(S)^T$, $\{S\}^T$ — T-идеал и T-пространство, порождённые множеством S.

Замечание 2. Теорему 2 можно обобщить на полупростые конечномерные алгебры.

Замечание 3. Если у алгебры имеется нетривиальный радикал, то вербальных подпространств может оказаться гораздо больше.

Отметим теперь некоторые связи теоремы 2 с элементарной алгеброй матриц. Известно, что любая матрица с нулевым следом может быть представлена в виде коммутатора. Можно ли представить матрицу с ненулевым следом в виде суммы квадратов, кубов и т. д. коммутаторов?

Рассмотрим сначала случай $n = 2$. Тогда, как нетрудно убедиться, значение функции $[x_1, x_2]^m$ попадает либо в ke (если m чётно), либо в $\mathrm{sl}_2(k)$ (если m нечётно). Таким образом, матрица с ненулевым следом, не лежащая в центре, не может быть представлена в виде суммы m-х степеней коммутаторов.

При $n > 2$ ситуация совсем другая. Пусть $m \geqslant 2$. Рассмотрим диагональную $(n \times n)$-матрицу

$$a = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

из $\mathrm{sl}_n(k)$. Как уже отмечалось, матрица a, имеющая нулевой след, может быть представлена в виде $[b, c]$. С другой стороны, при $m \geqslant 2$ матрица a^m не лежит ни в ke, ни в $\mathrm{sl}_n(k)$. Следовательно, вербальное подпространство, индуцированное многочленом $[x_1, x_2]^m$, совпадает со всей алгеброй k_n. Таким образом, для любых $n \geqslant 3$ и $m \geqslant 2$ любая матрица из алгебры k_n представима в виде линейной комбинации m-х степеней коммутаторов (если k алгебраически замкнуто, то в виде суммы m-х степеней). Естественно возникает вопрос о минимальном количестве слагаемых (оценка сверху очевидна).

В связи с рассмотренным примером представляет интерес следующий вопрос. Пусть f — некоторый многочлен алгебры F. Рассмотрим множество его значений $f(k_n)$ (на нём естественным образом действует группа автоморфизмов алгебры k_n) и его замыкание по Зарискому $\overline{f(k_n)}$ в аффинном пространстве k_n. Что представляет собой получившееся аффинное многообразие?

В заключение отметим, что изложенные в разделах 1—5 понятия и факты в той или иной степени имеют аналоги в альтернативных, йордановых, лиевских алгебрах, в группах и т. д.

Литература

[1] Аладова Е. В., Гришин А. В., Киреева Е. А. Т-пространства. История вопроса, приложения и последние результаты // Чебышёвский сб. — 2004. — Т. 5, вып. 4 (12). — С. 39—57.

[2] Гришин А. В. О конечной базируемости систем обобщённых многочленов // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1990. — Т. 54, № 5. — С. 899—927.

[3] Гришин А. В. О конечной базируемости абстрактных Т-пространств // Фундамент. и прикл. мат. — 1995. — Т. 1, вып. 3. — С. 669—700.

[4] Гришин А. В. Примеры не конечной базируемости Т-пространств и Т-идеалов в характеристике 2 // Фундамент. и прикл. мат. — 1999. — Т. 5, вып. 1. — С. 101—118.

[5] Кемер А. Р. Конечная базируемость тождеств ассоциативных алгебр // Алгебра и логика. — 1987. — Т. 26. — С. 597—641.

[6] Размыслов Ю. П. О конечной базируемости тождеств матричной алгебры второго порядка над полем характеристики нуль // Алгебра и логика. — 1973. — Т. 12, № 1. — С. 83—113.

[7] Размыслов Ю. П. Об одной проблеме Капланского // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1973. — Т. 37, № 3. — С. 483—501.

[8] Щиголев В. В. Примеры бесконечно базируемых Т-пространств // Мат. сб. — 2000. — Т. 191. — С. 143—160.

[9] Щиголев В. В. Конечная базируемость Т-пространств над полями нулевой характеристики // Изв. РАН. Сер. мат. — 2001. — Т. 65, № 5. — С. 191—224.

[10] Grishin A. V., Shchigolev V. V. On T-spaces and their applications // J. Math. Sci. — 2006. — Vol. 134, no. 1. — P. 1799—1878.

[11] Okhitin S. V. Central polynomials of an algebra of second-order matrices // Moscow Univ. Math. Bull. — 1988. — Vol. 43, no. 4. — P. 49—51.