О решётках квазипорядков и топологий алгебр

А. В. КАРТАШОВА
Волгоградский государственный
педагогический университет
e-mail: kartashovaan@yandex.ru

УДК 512.57

Ключевые слова: решётка топологий алгебры, решётка квазипорядков алгебры.

Аннотация

В работе показано, что решётка $\widetilde{\mathrm{Qord}}\,\mathfrak{A}$, двойственная решётке квазипорядков произвольной алгебры $\mathfrak{A}$, изоморфна некоторой подрешётке решётки топологий этой алгебры. При этом если алгебра $\mathfrak{A}$ конечна, то $\widetilde{\mathrm{Qord}}\,\mathfrak{A} \cong \Im(\mathfrak{A})$. Найдено достаточное условие, при котором решётки $\widetilde{\mathrm{Con}}\,\mathfrak{A}$, $\widetilde{\mathrm{Qord}}\,\mathfrak{A}$ и $\Im(\mathfrak{A})$ попарно изоморфны. Эти результаты применены для исследования свойств решёток квазипорядков и топологий унарных алгебр.

Abstract

A. V. Kartashova, On quasiorder lattices and topology lattices of algebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 5, pp. 85—92.

In this paper, it is shown that the dual $\widetilde{\mathrm{Qord}}\,\mathfrak{A}$ of the quasiorder lattice of any algebra $\mathfrak{A}$ is isomorphic to a sublattice of the topology lattice $\Im(\mathfrak{A})$. Further, if $\mathfrak{A}$ is a finite algebra, then $\widetilde{\mathrm{Qord}}\,\mathfrak{A} \cong \Im(\mathfrak{A})$. We give a sufficient condition for the lattices $\widetilde{\mathrm{Con}}\,\mathfrak{A}$, $\widetilde{\mathrm{Qord}}\,\mathfrak{A}$, and $\Im(\mathfrak{A})$ to be pairwise isomorphic. These results are applied to investigate topology lattices and quasiorder lattices of unary algebras.

Введение

Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ — произвольная алгебра. Топология на носителе A, относительно которой непрерывна каждая операция из Ω, называется *топологией на алгебре* $\mathfrak{A}$.

Рефлексивное и транзитивное отношение на множестве A, стабильное относительно любой операции из Ω, называется *квазипорядком на алгебре* $\mathfrak{A}$ [5].

Известно, что конгруэнции, квазипорядки, а также топологии на алгебре $\mathfrak{A}$ образуют полные решётки относительно включения. Обозначим эти решётки через $\mathrm{Con}\,\mathfrak{A}$, $\mathrm{Qord}\,\mathfrak{A}$ и $\Im(\mathfrak{A})$ соответственно.

Заметим, что $\mathrm{Con}\,\mathfrak{A}$ — подрешётка решётки $\mathrm{Qord}\,\mathfrak{A}$ (см., например, [5]).

В [9] показано, что решётка $\widetilde{\mathrm{Con}}\,\mathfrak{A}$, двойственная к решётке конгруэнций произвольной алгебры $\mathfrak{A}$, изоморфна некоторой подрешётке решётки $\Im(\mathfrak{A})$ топологий этой алгебры.

Фундаментальная и прикладная математика, 2008, том 14, № 5, с. 85—92.

В данной заметке доказано (теорема 1), что решётка $\widetilde{\mathrm{Qord}}\,\mathfrak{A}$, двойственная к решётке квазипорядков алгебры $\mathfrak{A}$, также изоморфна некоторой подрешётке решётки $\Im(\mathfrak{A})$. При этом если алгебра $\mathfrak{A}$ конечна, то $\widetilde{\mathrm{Qord}}\,\mathfrak{A} \cong \Im(\mathfrak{A})$. Найдено достаточное условие (теорема 2), при котором все три решётки $\widetilde{\mathrm{Con}}\,\mathfrak{A}$, $\widetilde{\mathrm{Qord}}\,\mathfrak{A}$ и $\Im(\mathfrak{A})$ попарно изоморфны. Эти результаты применены для исследования свойств решёток топологий и квазипорядков унарных алгебр.

1. Свойства главных топологий на алгебрах

Топология на произвольном множестве A называется *главной*, если в ней открыто всякое пересечение открытых подмножеств. П. С. Александровым в [6] установлено взаимно-однозначное соответствие между квазипорядками и главными топологиями на множестве.

Пусть σ — некоторая главная топология на множестве A и $x \in A$. Тогда пересечение всех открытых в топологии σ множеств, содержащих элемент x, будем обозначать через M_x^σ.

Непосредственно из определений вытекает следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ — произвольная алгебра и σ — главная топология на множестве A. Тогда n-арная операция F непрерывна относительно топологии σ в том и только в том случае, если*

$$F(M_{a_1}^\sigma, M_{a_2}^\sigma, \ldots, M_{a_n}^\sigma) \subseteq M_{F(a_1, a_2, \ldots, a_n)}^\sigma$$

для любых элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$. □

Напомним, что если $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ — произвольная алгебра, F — операция арности n из Ω, $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} \in A$ и $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, то унарная операция $F^i_{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}} \colon A \to A$, заданная по правилу

$$F^i_{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}}(x) = F(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_{n-1}) \quad \text{для любого} \quad x \in A,$$

называется *элементарной трансляцией* алгебры $\mathfrak{A}$ [1].

Известно, что всякая эквивалентность θ на множестве A является конгруэнцией алгебры $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда θ стабильна относительно каждой элементарной трансляции этой алгебры (см., например, [1, предложение 6.1]).

Аналогичное утверждение имеет место и для главных топологий на алгебрах.

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ — произвольная алгебра и σ — главная топология на множестве A. Тогда σ является топологией на алгебре $\mathfrak{A}$ в том и только том случае, когда все элементарные трансляции этой алгебры непрерывны относительно σ.*

Доказательство. Непосредственно из определений вытекает, что каждая элементарная трансляция произвольной алгебры непрерывна относительно любой топологии на этой алгебре.

Предположим теперь, что каждая элементарная трансляция алгебры $\mathfrak{A}$ непрерывна относительно главной топологии σ, F — некоторая n-арная операция из Ω, элементы $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ и $b = F(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Покажем, что

$$F(M^\sigma_{a_1}, M^\sigma_{a_2}, \ldots, M^\sigma_{a_n}) \subseteq M^\sigma_b. \tag{1}$$

Действительно, пусть $x_1 \in M^\sigma_{a_1}$, $x_2 \in M^\sigma_{a_2}, \ldots,$ $x_n \in M^\sigma_{a_n}$. По лемме 1 справедливо включение

$$F^1_{a_2,\ldots,a_n}(M^\sigma_{a_1}) \subseteq M^\sigma_b,$$

поскольку $b = F(a_1, a_2, \ldots, a_n) = F^1_{a_2,\ldots,a_n}(a_1)$ и элементарная трансляция $F^1_{a_2,\ldots,a_n}$ непрерывна относительно σ. Это означает, что $F(x_1, a_2, \ldots, a_n) \in M^\sigma_b$, так как $x_1 \in M^\sigma_{a_1}$. Поэтому

$$M^\sigma_{F(x_1,a_2,\ldots,a_n)} \subseteq M^\sigma_b. \tag{2}$$

Применяя к равенству $F(x_1, a_2, \ldots, a_n) = F^2_{x_1,a_3,\ldots,a_n}(a_2)$ рассуждения, аналогичные приведённым выше, имеем

$$F(x_1, x_2, a_3, \ldots, a_n) \in M^\sigma_{F(x_1,a_2,a_3,\ldots,a_n)},$$

и значит, $M^\sigma_{F(x_1,x_2,a_3,\ldots,a_n)} \subseteq M^\sigma_b$ в силу (2).

Продолжая этот процесс, через n шагов получим

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in M^\sigma_b,$$

т. е. справедливо включение (1). Следовательно, $\sigma \in \Im(\mathfrak{A})$ согласно лемме 1. $\square$

В силу [10, теорема 2.5] главные топологии на всяком множестве A образуют подрешётку $\operatorname{Pr} T(A)$ решётки $T(A)$ всех топологий на этом множестве.

Через $\operatorname{Pr}\Im(\mathfrak{A})$ обозначается множество всех главных топологий на алгебре $\mathfrak{A}$.

Лемма 3. *Главные топологии на произвольной алгебре $\mathfrak{A}$ образуют подрешётку решётки $\Im(\mathfrak{A})$ всех топологий этой алгебры.*

Доказательство. Пусть $\sigma_1, \sigma_2 \in \operatorname{Pr}\Im(\mathfrak{A})$. Тогда точная верхняя грань $\sigma_1 \vee_{\Im(\mathfrak{A})} \sigma_2$ топологий σ_1 и σ_2 в решётке $\Im(\mathfrak{A})$ совпадает с точной верхней гранью $\sigma_1 \vee_{T(A)} \sigma_2$ этих топологий в решётке $T(A)$ по [4, теорема 1]. Согласно [10, теорема 2.5] топология $\sigma_1 \vee_{T(A)} \sigma_2$ является главной. Поэтому $\sigma_1 \vee_{\Im(\mathfrak{A})} \sigma_2 \in \operatorname{Pr}\Im(\mathfrak{A})$.

Снова применяя теорему 2.5 из [10], получаем, что $\sigma_1 \cap \sigma_2 \in \operatorname{Pr} T(A)$. Убедимся, что $\sigma_1 \cap \sigma_2 \in \Im(\mathfrak{A})$. В силу леммы 1 для этого достаточно проверить, что для любых элементов $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} \in A$ и числа $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ элементарная трансляция $F^i_{a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}}$ непрерывна относительно топологии $\sigma_1 \cap \sigma_2$. Действительно, если $U \in \sigma_1 \cap \sigma_2$, то множество $(F^i_{a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}})^{-1}(U)$ является открытым множеством в топологии $\sigma_1 \cap \sigma_2$, поскольку унарная операция $F^i_{a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}}$ непрерывна относительно каждой из топологий σ_1 и σ_2. Следовательно, $\sigma_1 \wedge \sigma_2 = \sigma_1 \cap \sigma_2 \in \operatorname{Pr}\Im(\mathfrak{A})$. $\square$

2. Основные результаты

Известно, что решётка квазипорядков $\operatorname{Qord} A$ на множестве A антиизоморфна решётке $\operatorname{Pr} T(A)$ главных топологий на этом множестве (см., например, [10, теорема 2.6]).

Аналогичное утверждение имеет место и для алгебр.

Теорема 1. *Решётка* $\widetilde{\operatorname{Qord}}\,\mathfrak{A}$, *двойственная к решётке квазипорядков произвольной алгебры* $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$, *изоморфна решётке* $\operatorname{Pr} \Im(\mathfrak{A})$.

Доказательство. Пусть $q \in \widetilde{\operatorname{Qord}}\,\mathfrak{A}$ и

$$\psi(q) = \{S \subseteq A \mid (y \in S \ \&\ x\ q\ y) \Longrightarrow x \in S \text{ для всех } x, y \in A\}. \tag{3}$$

При доказательстве теоремы 2.6 из [10] было показано, что совокупность подмножеств $\psi(q)$ является главной топологией на множестве A.

Проверим, что $\psi(q)$ — топология на алгебре $\mathfrak{A}$. Для этого зафиксируем произвольные элементы $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1} \in A$, число $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и множество $U \in \psi(q)$. Теперь убедимся, что $(F^i_{a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}})^{-1}(U) \in \psi(q)$.

Действительно, если $y \in (F^i_{a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}})^{-1}(U)$ и $x\ q\ y$, то

$$F^i_{a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}}(x)\ q\ F^i_{a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}}(y),$$

так как отношение q стабильно относительно унарной операции $F^i_{a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}}$. Следовательно, $F^i_{a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}}(x) \in U$ ввиду (3), тогда $x \in (F^i_{a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}})^{-1}(U)$. Отсюда, снова применяя (3), получаем, что $(F^i_{a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}})^{-1}(U) \in \psi(q)$. Поэтому

$$\psi(q) \in \Im(\mathfrak{A}) \tag{4}$$

в силу леммы 2.

Докажем, что отображение $\psi\colon \widetilde{\operatorname{Qord}}\,\mathfrak{A} \to \operatorname{Pr} \Im(\mathfrak{A})$ является изоморфизмом решёток.

Непосредственная проверка показывает, что

$$q_1 \leqslant q_2 \iff \psi(q_1) \subseteq \psi(q_2) \tag{5}$$

для любых двух квазипорядков q_1 и q_2 на множестве A.

Осталось убедиться, что отображение ψ сюръективно. Как было показано в [10], для любой главной топологии σ на множестве A бинарное отношение

$$\eta(\sigma) = \{(x, y) \mid y \in M^\sigma_x\} \tag{6}$$

является квазипорядком на этом множестве, причём

$$\sigma = \psi\big(\eta(\sigma)\big). \tag{7}$$

Проверим, что если $\sigma \in \operatorname{Pr} \Im(\mathfrak{A})$, то $\eta(\sigma) \in \widetilde{\operatorname{Qord}}\,\mathfrak{A}$. Пусть F — произвольная n-арная операция из Ω, $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n) \in \eta(\sigma)$. Тогда $y_1 \in M^\sigma_{x_1}$, $y_2 \in M^\sigma_{x_2}, \ldots,\ y_n \in M^\sigma_{x_n}$ ввиду (6).

С другой стороны, $F(M^{\sigma}_{x_1}, M^{\sigma}_{x_2}, \ldots, M^{\sigma}_{x_n}) \subseteq M^{\sigma}_{F(x_1,x_2,\ldots,x_n)}$ ввиду леммы 1. Следовательно, $F(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in M^{\sigma}_{F(x_1,x_2,\ldots,x_n)}$. Поэтому

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\ \eta(\sigma)\ F(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

в силу равенства (6). Это означает, что отношение $\eta(\sigma)$ стабильно относительно операции F, откуда следует, что $\eta(\sigma) \in \widetilde{\mathrm{Qord}}\,\mathfrak{A}$. Следовательно, отображение $\psi\colon \widetilde{\mathrm{Qord}}\,\mathfrak{A} \to \mathrm{Pr}\,\Im(\mathfrak{A})$ является изоморфизмом решёток. $\square$

Отметим, что теорема 1 является обобщением теоремы 2.6 из [10], поскольку для любой унарной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega\rangle$, в которой $f(a) = a$ при всех $f \in \Omega$ и $a \in A$, очевидным образом справедливы равенства $\mathrm{Qord}\,\mathfrak{A} = \mathrm{Qord}\,A$ и $\mathrm{Pr}\,\Im(\mathfrak{A}) = \mathrm{Pr}\,T(A)$.

Из теоремы 1 и леммы 3 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. *Решётка $\widetilde{\mathrm{Qord}}\,\mathfrak{A}$, двойственная к решётке квазипорядков произвольной алгебры $\mathfrak{A}$, изоморфна некоторой подрешётке решётки $\Im(\mathfrak{A})$.* $\square$

Очевидно, что если алгебра конечна, то каждая топология на этой алгебре является главной. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Следствие 2. *Если алгебра $\mathfrak{A}$ конечна, то $\widetilde{\mathrm{Qord}}\,\mathfrak{A} \cong \Im(\mathfrak{A})$.* $\square$

Заметим, что условие конечности алгебры в этом утверждении существенно. Действительно, рассмотрим произвольную бесконечную унарную алгебру $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega\rangle$, в которой $f(a) = a$ для всех $f \in \Omega$ и $a \in A$. Тогда решётка $\Im(\mathfrak{A})$ совпадает с решёткой $T(A)$ всех топологий на множестве A, откуда получаем, что $|\Im(\mathfrak{A})| = |T(A)| = 2^{2^{|A|}}$ (см., например, [10, с. 385]). Следовательно,

$$|\Im(\mathfrak{A})| = 2^{2^{|A|}} > 2^{|A|} \geqslant |\,\mathrm{Qord}\,\mathfrak{A}|.$$

Поэтому в этом случае решётки $\widetilde{\mathrm{Qord}}\,\mathfrak{A}$ и $\Im(\mathfrak{A})$ не изоморфны.

Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega\rangle$ — произвольная алгебра. Приведём достаточное условие, при котором все три решётки $\widetilde{\mathrm{Con}}\,\mathfrak{A}$, $\widetilde{\mathrm{Qord}}\,\mathfrak{A}$, $\Im(\mathfrak{A})$ попарно изоморфны.

Напомним, что топологическое пространство $\langle A, \sigma\rangle$ называется *однородным*, если для любых двух элементов $x, y \in A$ найдётся гомеоморфизм $\varphi\colon A \to A$, для которого $\varphi(x) = y$.

Например, если алгебра $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega\rangle$ является группой, кольцом или модулем над кольцом и σ — произвольная топология на алгебре $\mathfrak{A}$, то топологическое пространство $\langle A, \delta\rangle$ однородно [7].

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega\rangle$ — конечная алгебра и для любой топологии σ на алгебре $\mathfrak{A}$ топологическое пространство $\langle A, \sigma\rangle$ однородно. Тогда решётки $\widetilde{\mathrm{Con}}\,\mathfrak{A}$, $\widetilde{\mathrm{Qord}}\,\mathfrak{A}$ и $\Im(\mathfrak{A})$ попарно изоморфны.*

Доказательство. Проверим, что для любой топологии $\sigma \in \Im(\mathfrak{A})$ квазипорядок $\eta(\sigma)$, определённый равенством (6), является конгруэнцией алгебры $\mathfrak{A}$.

Для этого убедимся, что отношение $\eta(\sigma)$ симметрично, т. е.

$$y \in M_x^\sigma \implies x \in M_y^\sigma$$

для любых элементов $x, y \in A$.

Действительно, пусть $y \in M_x^\sigma$. По условию найдётся такой гомеоморфизм $\varphi\colon A \to A$, что $\varphi(x) = y$. Поскольку отображение φ непрерывно, то $\varphi(M_x^\sigma) \subseteq \subseteq M_{\varphi(x)}^\sigma = M_y^\sigma$ по лемме 1. Это означает, что $|M_x^\sigma| \leqslant |M_y^\sigma|$, так как φ — биекция.

С другой стороны, $M_y^\sigma \subseteq M_x^\sigma$, поскольку $y \in M_x^\sigma$. Следовательно, конечные множества M_y^σ и M_x^σ совпадают, откуда следует, что $x \in M_y^\sigma$. Поэтому

$$\eta(\sigma) \in \operatorname{Con}\mathfrak{A}. \tag{8}$$

Далее отметим, что в силу (4) для любого элемента $\theta \in \widetilde{\operatorname{Con}}\,\mathfrak{A}$ совокупность $\psi(\theta)$ подмножеств множества A, определённая в (3), является топологией на алгебре $\mathfrak{A}$.

Покажем, что отображение $\theta \mapsto \psi(\theta)$ является изоморфизмом решёток $\widetilde{\operatorname{Con}}\,\mathfrak{A}$ и $\Im(\mathfrak{A})$. В силу (5) для этого достаточно убедиться, что это отображение сюръективно.

Пусть $\sigma \in \Im(\mathfrak{A})$. Тогда согласно (8) $\eta(\sigma) \in \operatorname{Con}\mathfrak{A}$. Кроме того, $\sigma = \psi\big(\eta(\sigma)\big)$ ввиду (7). Следовательно, $\widetilde{\operatorname{Con}}\,\mathfrak{A} \cong \Im(\mathfrak{A})$. Отсюда, используя следствие 2, получаем, что решётки $\widetilde{\operatorname{Con}}\,\mathfrak{A}$, $\widetilde{\operatorname{Qord}}\,\mathfrak{A}$ и $\Im(\mathfrak{A})$ попарно изоморфны. $\square$

3. Некоторые свойства решёток квазипорядков и топологий унарных алгебр

Унарная алгебра $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega\rangle$ называется *коммутативной*, если для любых двух операций $f, g \in \Omega$ и элемента $x \in A$ справедливо равенство

$$f\big(g(x)\big) = g\big(f(x)\big).$$

Алгебра $\mathfrak{A}$ *сильно связна*, если она порождается любым своим элементом.

Предложение. *Решётка конгруэнций произвольной конечной коммутативной сильно связной унарной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega\rangle$ антиизоморфна её решётке топологий.*

Доказательство. Покажем, что алгебра $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условиям теоремы 2. Пусть $\sigma \in \Im(\mathfrak{A})$ и $x, y \in A$. Покажем, что найдётся гомеоморфизм φ, для которого $\varphi(x) = y$. Действительно, поскольку алгебра $\mathfrak{A}$ сильно связна,

$$y = f_1 f_2 \cdots f_n(x), \quad x = f_1' f_2' \cdots f_k'(y), \tag{9}$$

где n, k — целые положительные числа и $f_1, f_2, \ldots, f_n, f_1', f_2', \ldots, f_k' \in \Omega$.

Так как $\sigma \in \Im(\mathfrak{A})$, то каждое из отображений $f_1, f_2, \ldots, f_n, f_1', f_2', \ldots f_k'$ непрерывно относительно топологии σ. Следовательно, их композиции $\varphi = = f_1 f_2 \cdots f_n$ и $\varphi' = f_1' f_2' \cdots f_k'$ также непрерывны (см., например, [7]).

С другой стороны, в силу (9) получаем, что $\varphi\varphi'(x) = \varphi'\varphi(x) = 1_A(x)$, где $1_A\colon A \to A$ — тождественное отображение. Кроме того, x — порождающий элемент, а отображения $\varphi\varphi'$ и $\varphi\varphi'$ — эндоморфизмы алгебры $\mathfrak{A}$. Это означает, что $\varphi\varphi' = \varphi'\varphi = 1_A$ [3, с. 145]. Поэтому отображение φ биективно и $\varphi^{-1} = \varphi'$. Следовательно, φ — гомеоморфизм. Отсюда следует, что $\widetilde{\mathrm{Con}}\,\mathfrak{A} \cong \Im(\mathfrak{A})$ по теореме 2. $\square$

Пусть $\mathfrak{B}$ — подалгебра произвольной унарной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega\rangle$ и $q \in \mathrm{Qord}\,\mathfrak{B}$. Определим бинарное отношение $R(q)$ на множестве A по правилу

$$x\ R(q)\ y \iff (x\ R\ y) \vee (x = y).$$

Через ∇_B обозначается универсальное отношение алгебры $\mathfrak{B}$.

Лемма 4. *Если $\mathfrak{B}$ — подалгебра унарной алгебры $\mathfrak{A}$, то отображение $q \mapsto R(q)$ является изоморфизмом решётки $\mathrm{Qord}\,\mathfrak{B}$ и главного идеала решётки $\mathrm{Qord}\,\mathfrak{A}$, порождённого элементом $R(\nabla_B)$.*

Доказательство аналогично доказательству соответствующего утверждения для решёток конгруэнций (см., например, [8, теорема 4.1]). $\square$

Однопорождённый унар (т. е. алгебра с одной унарной операцией) с порождающим элементом a и определяющим соотношением $f^t(a) = f^{t+h}(a)$, где $t \geqslant 0$, $h > 0$, обозначается через C_h^t.

Из следствия 2 и леммы 4 непосредственно вытекают критерии модулярности и дистрибутивности решётки квазипорядков унара, анонсированные в [2].

Следствие 3. *Решётка $\mathrm{Qord}\,\mathfrak{A}$ квазипорядков унара $\mathfrak{A} = \langle A, f\rangle$ модулярна тогда и только тогда, когда либо $\mathfrak{A} \cong C_h^t$, где $0 \leqslant t \leqslant 1$, $h > 0$, либо $|A| = 2$.*

Доказательство. Пусть $|A| = 2$ или $\mathfrak{A} \cong C_h^t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $h > 0$. Тогда в силу следствия 2 решётка $\mathrm{Qord}\,\mathfrak{A}$ квазипорядков унара $\mathfrak{A}$ антиизоморфна решётке $\Im(\mathfrak{A})$, которая модулярна согласно [9, теорема 7].

Предположим теперь, что $|A| \neq 2$ и унар $\mathfrak{A}$ не изоморфен унару вида C_h^t, где $0 \leqslant t \leqslant 1$, $h > 0$. Тогда согласно [9, лемма 11] найдётся такой подунар $\mathfrak{B}$ унара $\mathfrak{A}$ и конгруэнция $\theta \in \mathrm{Con}\,\mathfrak{B}$, что фактор-унар $\mathfrak{B}/\theta$ конечен и решётка $\Im(\mathfrak{B}/\theta)$ немодулярна. Снова используя следствие 2, получаем, что решётка $\mathrm{Qord}\,\mathfrak{B}/\theta$ квазипорядков унара $\mathfrak{B}/\theta$ также немодулярна.

С другой стороны, в силу [5, утверждение 1] и леммы 4 решётка $\mathrm{Qord}\,\mathfrak{B}/\theta$ изоморфна некоторому интервалу решётки $\mathrm{Qord}\,\mathfrak{A}$. Поэтому решётка $\mathrm{Qord}\,\mathfrak{A}$ не является модулярной. $\square$

Из следствий 2 и 3 в силу [9, следствие теоремы 7] вытекает следующее утверждение.

Следствие 4. *Решётка квазипорядков унара $\mathfrak{A}$ является цепью тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A} \cong C_{p^n}^0$, где p — простое число и $n \geqslant 0$.* $\square$

Используя [9, теорема 7], получаем следующее утверждение.

Следствие 5. *Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольный унар. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

1) *решётка* $\operatorname{Qord}\mathfrak{A}$ *модулярна*;
2) *решётка* $\operatorname{Qord}\mathfrak{A}$ *дистрибутивна*;
3) *решётка* $\Im(\mathfrak{A})$ *модулярна*;
4) *решётка* $\Im(\mathfrak{A})$ *дистрибутивна.* $\square$

Литература

[1] Кон П. Универсальная алгебра. — М.: Мир, 1968.

[2] Кузин В. А. О решётках квазипорядков унаров // Междунар. конф. «Алгебра и её приложения». Тезисы докладов. — Красноярск: Сибирский федеральный ун-т, Изд. центр Ин-та вычисл. моделирования СО РАН, 2007. — С. 81—82.

[3] Мальцев А. И. Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970.

[4] Орлов С. Д. О решётке допустимых топологий // Упорядоченные множества и решётки: Межвуз. науч. сб. Вып. 2. — Саратов, 1974. — С. 68—71.

[5] Пинус А. Г., Хайда И. О квазипорядках на универсальных алгебрах // Алгебра и логика. — 1993. — Т. 32, № 3. — С. 308—325.

[6] Alexandroff P. S. Diskrete Räume // Mat. Sb. — 1937. — Vol. 2. — P. 501—518.

[7] Arnautov V. I., Glavatsky S. T., Mikhalev A. V. Introduction to the Theory of Topological Rings and Modules. — New York: Marcel Dekker, 1996.

[8] Bogdanović S., Ćirić M., Petrović T., Imreh B., Steinby M. Traps, cores, extensions and subdirect decompositions of unary algebras // Fund. Inform. — 1999. — Vol. 38. — P. 31—40.

[9] Kartashova A. V. On lattices of topologies of unary algebras // J. Math. Sci. — 2003. — Vol. 114, no. 2. — P. 1086—1118.

[10] Steiner A. K. The lattice of topologies: Structure and complementation // Trans. Amer. Math. Soc. — 1966. — Vol. 122. — P. 379—398.