Кольца на почти вполне разложимых абелевых группах

Е. И. КОМПАНЦЕВА
Московский педагогический государственный университет
e-mail: kompantseva@yandex.ru

УДК 512.541

Ключевые слова: абелева группа, почти вполне разложимая группа, кольцо на группе, радикал кольца, абсолютный радикал группы.

Аннотация

Абсолютным радикалом абелевой группы называется пересечение радикалов всех ассоциативных колец, аддитивная группа которых совпадает с данной группой. Проблема описания абсолютных радикалов абелевой группы сформулирована Л. Фуксом. В настоящей работе получено описание абсолютного радикала Джекобсона для групп из некоторого класса почти вполне разложимых абелевых групп. Также описаны полупростые группы в классе почти вполне разложимых абелевых групп.

Abstract

E. I. Kompantseva, Rings on almost completely decomposable Abelian groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 5, pp. 93—101.

The absolute radical of an Abelian group G is the intersection of radicals of all associative rings with additive group G. L. Fuchs formulated the problem on a description of absolute radicals of Abelian groups. For a group from some class of almost completely decomposable Abelian groups the absolute Jacobson radical is described. In the class of almost completely decomposable Abelian groups semisimple groups are described.

Одним из наиболее естественных направлений теории абелевых групп является изучение абелевой группы как аддитивной группы некоторого кольца, которое называется кольцом на данной группе. Зависимость между свойствами кольца и строением его аддитивной группы исследовалась в работах Т. Селе, У. Уиклесса, С. Винсонхалера, Р. Боумонта, Р. Пирса. Л. Фукс сформулировал проблему описания абсолютных радикалов абелевой группы G [4, проблема 94], где под абсолютным радикалом абелевой группы G понимается пересечение радикалов всех ассоциативных колец на G. В [2] поставлена задача описание полупростых абелевых групп, т. е. групп, на которых существуют хотя бы одно ассоциативное кольцо. Изучение абсолютных радикалов абелевой группы и полупростых абелевых групп может быть сведено к случаю редуцированных групп [1]. В настоящей работе получено описание абсолютного радикала

Фундаментальная и прикладная математика, 2008, том 14, № 5, с. 93—101.

Джекобсона для групп из некоторого класса редуцированных почти вполне разложимых абелевых групп, а также в классе почти вполне разложимых абелевых групп описаны полупростые группы.

Все группы, рассматриваемые в работе, абелевы, и слово «группа» всюду в дальнейшем означает «абелева группа». Умножением на группе G называется гомоморфизм $\mu\colon G\otimes G\to G$. Это умножение будем часто обозначать знаком $\times$, т. е. $\mu(g_1\otimes g_2)=g_1\times g_2$. Группа G с заданным на ней умножением $\times$ называется кольцом на группе G, которой обозначается $(G,\times)$. Радикал Джекобсона этого кольца, если оно ассоциативно, обозначается $R(G,\times)$, $R^*(G)$ — абсолютный радикал Джекобсона группы G.

Группа без кручения конечного ранга называется почти вполне разложимой, если она содержит вполне разложимую подгруппу конечного индекса. Почти вполне разложимые группы изучались в работах А. Мадера, Е. А. Благовещенской, П. А. Крылова, С. Ф. Кожухова. Любая почти вполне разложимая группа G содержит некоторую вполне характеристическую подгруппу A конечного индекса, которая является вполне разложимой и называется регулятором группы G. Фактор-группа G/A называется регуляторным фактором группы G, индекс подгруппы A в группе G называется регуляторным индексом.

Следуя [4], будем обозначать через $\mathrm{t}(g)$ и $\mathrm{t}(X)$ соответственно типы элемента g и однородной группы X, через (a,b) и $[a,b]$ соответственно — наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное целых чисел a и b (вместо чисел a и b возможны множества целых чисел). Для любой группы без кручения X через $\bar{X}$ будем обозначать делимую оболочку группы X, т. е. $\bar{X}=X\otimes\mathbf{Q}$, где $\mathbf{Q}$ — аддитивная группа рациональных чисел. Если X — вполне разложимая группа, то будем использовать следующие обозначения:

$\mathrm{T}(X)$ — множество критических типов группы X, которое определяется изоморфными разложениями $X=\bigoplus\limits_{\tau\in\mathrm{T}(X)}X_\tau$, где X_τ — τ-однородная компонента группы X;

$\mathrm{T}_\infty(X)=\{\tau\in\mathrm{T}(X)\mid\tau$ содержит конечное число нулей$\}$;

$\mathrm{T}_0(X)=\{\tau\in\mathrm{T}(X)\mid\tau$ содержит бесконечное число нулей$\}$;

$X_\infty=\bigoplus\limits_{\tau\in\mathrm{T}_\infty(X)}X_\tau$, $X_0=\bigoplus\limits_{\tau\in\mathrm{T}_0(X)}X_\tau$.

Пусть G — почти вполне разложимая группа, A — её регулятор, тогда $\mathrm{T}(G)=\mathrm{T}(A)$ — множество критических типов группы G. Если $\mathrm{T}(G)$ состоит из попарно несравнимых типов, то группы G и A называются блочно-жёсткими. Если к тому же все группы A_τ $(\tau\in\mathrm{T}(G))$ имеют ранг 1, то G и A называются жёсткими. Заметим, что для блочно-жёсткой почти вполне разложимой группы G все τ-однородные компоненты A_τ её регулятора сервантны в G. В случае когда $\mathrm{T}(A)$ состоит только из идемпотентных типов, G называется группой кольцевого типа.

Если $A=X\oplus Y$ — разложение группы A в прямую сумму подгрупп X и Y, то

$$\bar{G}=\bar{X}\oplus\bar{Y}=\bar{X}_\infty\oplus\bar{X}_0\oplus\bar{Y}=\bar{X}_\tau\oplus\left(\bigoplus_{\sigma\neq\tau}\bar{X}_\sigma\right)\oplus\bar{Y},$$

в этом случае π_τ^X, π_∞^X, π_0^X — проекции группы $\bar{G}$ на подгруппы $\bar{X}_\tau$, $\bar{X}_\infty$ и $\bar{X}_0$ соответственно.

Далее везде G — это редуцированная почти вполне разложимая блочно-жёсткая группа кольцевого типа с циклическим регуляторным фактором $G/A = \langle d + A\rangle$. В [3] показано, что существует разложение $G = G_1 \oplus C$, в котором G_1 — жёсткая группа с регулятором B и множеством критических типов $\mathrm{T}(G_1) \subset \mathrm{T}(G)$, C — вполне разложимая группа; это разложение называется главным.

В [3] следующим образом определены инварианты $m_\tau = m_\tau(G)$ $(\tau \in \mathrm{T}(G))$ почти изоморфизма группы G. Пусть n — регуляторный индекс группы G и $nd = \sum\limits_{\tau\in\mathrm{T}(G)} v_\tau$ $(v_\tau \in A_\tau)$. Тогда $m_\tau = \mathrm{o}(v_\tau + nA)$ — порядок элемента $v_\tau + nA$ в группе A/nA. При этом $m_\tau \neq 1$ тогда и только тогда, когда $\tau \in \mathrm{T}(G_1)$. Отметим, что числа m_τ не зависят от выбора элемента d и $p \nmid m_\tau$, если $\tau(p) = \infty$.

Для почти вполне разложимой блочно-жёсткой группы G с циклическим регуляторным фактором введём следующие обозначения:

$$\Lambda_\tau = \{p \mid p \nmid m_\tau\} \quad (\tau \in \mathrm{T}(B)),$$

$$\theta_\tau = \prod_{\tau(p)=0} p \quad (\tau \in \mathrm{T}_\infty(B)),$$

$$\theta = [\{\theta_\tau \mid \tau \in \mathrm{T}_\infty(B)\},\ \{m_\tau \mid \tau \in \mathrm{T}_0(B)\}].$$

Отметим, что $m_\tau = 1$ для $\tau \in \mathrm{T}(C) \setminus \mathrm{T}(B)$, поэтому $[m_\tau \mid \tau \in \mathrm{T}_0(B)] = [m_\tau \mid \tau \in \mathrm{T}_0(A)]$.

За всеми определениями и обозначениями, если не оговорено иное, мы отсылаем к [3, 4].

Теорема 1. *Пусть G — редуцированная почти вполне разложимая блочно-жёсткая группа кольцевого типа с регулятором A и циклическим регуляторным фактором $G/A = \langle d + A\rangle$. Тогда*

$$R^*(G) = \pi_\infty^B(\langle\theta d\rangle) + \bigoplus_{\tau\in\mathrm{T}(B)} \left(\bigcap_{p\in\Lambda_\tau} pB_\tau\right) \oplus \bigcap_p pC.$$

Замечания.

1. Если $\lambda_\tau = \varnothing$, то $\bigcap\limits_{p\in\Lambda_\tau} pB_\tau = B_\tau$.
2. Нетрудно убедиться, что множество в правой части не зависит от выбора элемента d.

Доказательство. Без потери общности можно считать, что $d \in G_1$. В [6] показано, что существуют такие элементы $e_\tau \in B_\tau$, что $nd = \sum\limits_{\tau\in\mathrm{T}(B)} n_\tau s_\tau e_\tau$, где n — регуляторный индекс группы G, $n_\tau = \frac{n}{m_\tau} \in \mathbb{N}$ и $s_\tau \in \mathbb{Z}$ удовлетворяют следующим условиям:

1) $n = [m_\tau \mid \tau \in \mathrm{T}(B)]$;

2) $(s_\tau, m_\tau) = 1$ для всех $\tau \in \mathrm{T}(B)$;

3) $(p, s_\tau) = 1$ и $(p, m_\tau) = 1$, если $\tau(p) = \infty$.

При этом нетрудно убедиться, что e_τ могут быть выбраны таким образом, что характеристика $\chi(e_\tau)$ состоит только из нулей и символов ∞. Группу B можно записать в виде
$$B = \bigoplus_{\tau \in \mathrm{T}(B)} R_\tau e_\tau,$$
где R_τ — подкольцо с единицей кольца рациональных чисел, тип R_τ равен τ. Заметим сразу, что
$$\pi_\infty^B(x\theta d) = x\theta d - \sum_{\tau \in \mathrm{T}_0(B)} \frac{x\theta n_\tau s_\tau}{n} e_\tau$$
при любом $x \in \mathbb{Z}$, значит, $\pi_\infty^B(\langle \theta d \rangle) \subset G_1$, так как $m_\tau \mid \theta$ при всех $\tau \in \mathrm{T}_0(B)$.

Обозначим
$$L = \bigoplus_{\tau \in \mathrm{T}(B)} \Bigl(\bigcap_{p \in \Lambda_\tau} pB_\tau \Bigr) \oplus \bigcap_p pC$$
и покажем, что $\pi_\infty^B(\langle \theta d \rangle) + L \subset R^*(G)$.

Пусть $(G, \times)$ — произвольное кольцо на G, и пусть $\tau \in \mathrm{T}(B)$, $a \in A_\tau$. Тогда $nd \times a \in nG \cap A_\tau = nA_\tau$, так как A_τ сервантна в G [6]. С другой стороны,
$$nd \times a = \sum_{\delta \in \mathrm{T}(B)} n_\delta s_\delta e_\delta \times a = n_\tau s_\tau (e_\tau \times a).$$
Следовательно, $n_\tau s_\tau (e_\tau \times a) \in nA_\tau$, откуда $m_\tau \mid s_\tau (e_\tau \times a)$. Вследствие взаимной простоты чисел s_τ и m_τ получаем, что $e_\tau \times a \in m_\tau A_\tau$. Так как $e_\tau \times A = e_\tau \times A_\tau$, то
$$B_\tau \times A \subset m_\tau A \quad (\tau \in \mathrm{T}(B)). \tag{1}$$
Аналогично получаем, что
$$A \times B_\tau \subset m_\tau A \quad (\tau \in \mathrm{T}(B)). \tag{1$'$}$$
Кроме того,
$$\pi_\tau^C(nd \times nd) = n_\tau^2 s_\tau^2 \pi_\tau^C(e_\tau \times e_\tau) \in n^2 G \cap C_\tau = n^2 C_\tau,$$
поэтому
$$\pi_\tau^C(e_\tau \times e_\tau) \in m_\tau^2 C_\tau \quad (\tau \in \mathrm{T}(B)). \tag{2}$$

Покажем теперь, что $\pi_\infty^B(\langle \theta d \rangle) + L$ — правый идеал кольца $(G, \times)$. Пусть $d \times d = \eta d + a$, где $\eta \in \mathbb{Z}$, $a \in A$, и пусть $x \in \mathbb{Z}$. Тогда
$$\pi_\infty(x\theta d) \times d = \sum_{\tau \in \mathrm{T}_\infty(B)} \pi_\tau^A(x\theta d \times d) = \sum_{\tau \in \mathrm{T}_\infty(B)} \pi_\tau^A(x\eta\theta d + x\theta a) =$$
$$= \sum_{\tau \in \mathrm{T}_\infty(B)} \pi_\tau^B(x\eta\theta d) + \sum_{\tau \in \mathrm{T}_\infty(B)} \theta\bigl(\pi_\tau^A(xa)\bigr) = \pi_\infty^B(x\eta\theta d) + \sum_{\tau \in \mathrm{T}_\infty(B)} \theta\bigl(\pi_\tau^A(xa)\bigr),$$

откуда получаем, что

$$\pi_\infty^B(x\theta d)\times d\in\pi_\infty^B(\langle\theta d\rangle)+\bigoplus_{\tau\in\mathrm{T}_\infty(B)}\Bigl(\bigcap_p pA_\tau\Bigr),\tag{3}$$

так как $\theta_\tau\mid\theta$ при всех $\tau\in\mathrm{T}_\infty(B)$.

Пусть теперь $a\in A$. Тогда

$$\pi_\infty^B(x\theta d)\times a=\sum_{\tau\in\mathrm{T}_\infty(B)}\pi_\tau^A(x\theta d\times a)=\sum_{\tau\in\mathrm{T}_\infty(B)}\theta\pi_\tau^A(xd\times a)\in\sum_{\tau\in\mathrm{T}_\infty(B)}\Bigl(\bigcap_p pA_\tau\Bigr),$$

так как $d\times a\in A$. Отсюда получаем, что

$$\pi_\infty^B(\langle\theta d\rangle)\times A\subset\sum_{\tau\in\mathrm{T}_\infty(B)}\Bigl(\bigcap_p pA_\tau\Bigr)\subset L.\tag{4}$$

Пусть, наконец, $a\in L$. Тогда a можно представить в виде

$$a=\sum_{\tau\in\mathrm{T}_\infty(B)}b_\tau e_\tau+c,$$

где $b_\tau\in\bigcap\limits_{p\in\Lambda_\tau}pR_\tau$, $c\in\bigcap\limits_p pC$. В силу (1) и (2) элемент $e_\tau\times e_\tau$ ($\tau\in\mathrm{T}_\infty(B)$) можно записать в виде

$$e_\tau\times e_\tau=m_\tau x_\tau e_\tau+m_\tau^2c_\tau,$$

где $x_\tau\in R_\tau$, $c_\tau\in C_\tau$. Тогда

$$\begin{aligned}a\times nd&=\sum_{\tau\in\mathrm{T}_\infty(B)}b_\tau n_\tau s_\tau(e_\tau\times e_\tau)+c\times nd=\\&=\sum_{\tau\in\mathrm{T}_\infty(B)}b_\tau n_\tau s_\tau(m_\tau x_\tau e_\tau+m_\tau^2c_\tau)+c\times nd=\\&=n\sum_{\tau\in\mathrm{T}_\infty(B)}(b_\tau s_\tau x_\tau)e_\tau+n\sum_{\tau\in\mathrm{T}_\infty(B)}(b_\tau s_\tau m_\tau)c_\tau+c\times nd,\end{aligned}$$

откуда следует, что

$$a\times d=\sum_{\tau\in\mathrm{T}_\infty(B)}(b_\tau s_\tau x_\tau)e_\tau+\sum_{\tau\in\mathrm{T}_\infty(B)}(s_\tau b_\tau m_\tau)c_\tau+c\times d.$$

Так как $b_\tau\in\bigcap\limits_{p\in\Lambda_\tau}pR_\tau$, то $b_\tau m_\tau\in\bigcap\limits_p pR_\tau$. Кроме того, нетрудно убедиться, что $c\times d\in\bigcap\limits_p pC$ для $c\in\bigcap\limits_p pC$. Следовательно, $a\times d\in L$, и значит,

$$L\times d\subset L.\tag{5}$$

Из (1) и (1′) следует, что L — идеал кольца $(A,\times)$ (отметим, кстати, что L является также идеалом кольца $(G,\times)$ в силу (5)), при этом

$$L\times A\subset\bigcap_p pA,\quad A\times L\subset\bigcap_p pA.\tag{6}$$

Значит, согласно (3)—(6) получаем, что $\pi_\infty(\langle\theta d\rangle) + L$ — правый идеал кольца $(G, \times)$. Покажем, что этот идеал квазирегулярен.

Заметим сначала, что если некоторая степень элемента g в кольце $(G, \times)$ является квазиобратимым элементом, то и сам элемент g квазиобратим. Действительно, мы имеем, что элемент $g^k = g \circ (-g - \ldots - g^{k-1})$ квазиобратим для некоторого $k \in \mathbb{N}$ (здесь $\circ$ — операция круговой композиции в кольце $(G, \times)$). Так как операция $\circ$ ассоциативна [5], то и g квазиобратим в $(G, \times)$.

Из [1, лемма 1] следует, что $\bigcap\limits_p pA$ — квазирегулярный идеал кольца $(A, \times)$. Поэтому по (6) и сделанному выше замечанию L — квазирегулярный идеал в $(A, \times)$.

Покажем, что если $p \mid n$, то $p \mid \theta$. Пусть $p \mid n$, тогда, так как $n = [m_\tau \mid \tau \in \mathrm{T}(A)]$, найдётся $\tau \in \mathrm{T}(A)$, для которого $p \mid m_\tau$. Если $\tau \in \mathrm{T}_0(A)$, то $p \mid \theta$. Если $\tau \in \mathrm{T}_\infty(A)$, то $\tau(p) = 0$, так как в противном случае $(m_\tau, p) = 1$. Значит, $p \mid \theta_\tau$, поэтому $p \mid \theta$.

Пусть $g = \pi_\infty^B(x\theta d)$, где $x \in \mathbb{Z}$. Тогда существует такое число $l \in \mathbb{N}$, что $\theta^l = n\theta y$ для некоторого $y \in \mathbb{N}$. Индукцией по k можно показать, что при всех $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$g^{k-1} \times ng = \sum_{\tau \in \mathrm{T}_\infty(B)} (x^k \theta^k n_\tau s_\tau^k)\eta_\tau^{(k)},$$

где $\eta_\tau^{(k)} \in A_\tau$. Следовательно,

$$g^{l-1} \times ng = \sum_{\tau \in \mathrm{T}_\infty(B)} (x^l n\theta y n_\tau s_\tau^l)\eta_\tau^{(l)},$$

откуда получаем, что

$$g^l = \sum_{\tau \in \mathrm{T}_\infty(B)} \theta(x^l y n_\tau s_\tau^l)\eta_\tau^{(l)} \in \bigoplus_{\tau \in \mathrm{T}_\infty(B)} \theta A_\tau.$$

Значит,

$$g^l \in \bigcap_p pA \subset L. \tag{7}$$

Пусть теперь $g_1 = g + a$, где $g = \pi_\infty^B(x\theta d)$, $a \in L$. В силу (6) и (7) $g_1^l \in L$, следовательно, g_1 — квазиобратимый элемент кольца $(G, \times)$. Значит, $\pi_\infty^B(\langle\theta d\rangle) + L$ является квазирегулярным идеалом этого кольца.

Таким образом,

$$\pi_\infty(\langle\theta d\rangle) + L \subset R^*(G). \tag{8}$$

Докажем обратное включение. Пусть $g \in R^*(G)$. Так как s_τ и m_τ взаимно просты при всех $\tau \in \mathrm{T}_\infty(B)$, то $s_\tau u_\tau + m_\tau v_\tau = 1$ для некоторых целых u_τ и v_τ. Определим умножение $\times_d$ на B, положив

$$e_\tau \times_d e_\sigma = \begin{cases} (m_\tau u_\tau)e_\tau, & \text{если } \ \tau = \sigma, \\ 0, & \text{если } \ \tau \neq \sigma \end{cases} \qquad (\tau, \sigma \in \mathrm{T}(B)).$$

Тогда это умножение можно продолжить до умножения на G_1, заметив, что

$$nd \times_d nd = \sum_{\tau\in\mathrm{T}(B)} (n_\tau^2 s_\tau^2 m_\tau u_\tau)e_\tau = n \sum_{\tau\in\mathrm{T}(B)} n_\tau s_\tau(1-m_\tau v_\tau)e_\tau =$$
$$= n \sum_{\tau\in\mathrm{T}(B)} n_\tau s_\tau e_\tau - n^2 \sum_{\tau\in\mathrm{T}(B)} (s_\tau v_\tau)e_\tau = n^2(d+b),$$

где $b = -\sum\limits_{\tau\in\mathrm{T}(B)} (s_\tau v_\tau)e_\tau \in B$, и положив $d \times_d d = d + b$. Доопределив $\times_d$ на C как нулевое умножение, получим кольцо $(G, \times_d)$. Умножение $\times_d$ на G продолжается единственным образом до умножения на делимой оболочке $\bar{G}$ группы G [4]. Нетрудно проверить, что кольцо $(\bar{G}, \times_d)$ ассоциативно и коммутативно, следовательно, таким же является кольцо $(G, \times_d)$. Фактор-кольцо $(G/A, \times_d)$ по идеалу A изоморфно кольцу вычетов по модулю n, значит, $R(G/A, \times_d) = \bigcap\limits_p p(G/A)$. Элемент g лежит в радикале $(G, \times_d)$. Следовательно, $g + A \in R(G/A, \times_d) = \bigcap\limits_p p(G/A)$ [5]. Поэтому g можно представить в виде $g = ud + a$, где $a = \sum\limits_{\tau\in\mathrm{T}(A)} a_\tau \in A$, u — целое число, делящееся на θ_τ для всех $\tau \in \mathrm{T}_\infty(B)$.

Рассмотрим теперь умножение $\times_A$ на A, положив

$$e_\tau \times_A e_\sigma = \begin{cases} m_\tau^2 e_\tau, & \text{если } \tau = \sigma, \\ 0, & \text{если } \tau \neq \sigma \end{cases}$$

для $\tau, \sigma \in \mathrm{T}(B)$ и определив кольцо $(C, \times_A)$ как прямую сумму подколец с единицей кольца рациональных чисел.

Очевидно, $A = \Big(\bigoplus\limits_{\tau\in\mathrm{T}(B)} B_\tau\Big) \oplus C$ — разложение кольца $(A, \times_A)$ в прямую сумму идеалов. По [2, лемма 3.1] имеем $R(B_\tau, \times_A) = \bigcap\limits_{p\in\Lambda_\tau} pB_\tau$ при всех $\tau \in \mathrm{T}(B)$, а $R(C, \times_A) = \bigcap\limits_p pC$. Следовательно,

$$R(A, \times_A) = \Big(\bigoplus_{\tau\in\mathrm{T}(B)} R(B_\tau, \times_A)\Big) \oplus R(C, \times_A) = L.$$

Нетрудно видеть, что умножение $\times_A$ продолжается до умножения на G, при котором $G \times_A G \subset A$. Значит,

$$ng = nud + na \in R^*(G) \cap A \subset R(G, \times_A) \cap A = R(A, \times_A) = L.$$

Отсюда получаем, что $\pi_\tau^A(ng) = \pi_\tau^B(ng) = 0$ при всех $\tau \in \mathrm{T}_0(A)$. Так как $\pi_\tau^B(ng) = (un_\tau s_\tau)e_\tau + n\pi_\tau^B(a)$, то $us_\tau + m_\tau b_\tau = 0$, где $\pi_\tau^B(a) = b_\tau e_\tau$, $b_\tau \in R_\tau$. Числа m_τ взаимно просты с s_τ и всеми простыми p, для которых $\tau(p) = \infty$, следовательно, $m_\tau \mid u$ при всех $\tau \in \mathrm{T}_0(A)$ (напомним, что $m_\tau = 1$ для $\tau \in \mathrm{T}(C) \setminus \mathrm{T}(B)$). Таким образом, $u = \theta x$ при некотором $x \in \mathbb{Z}$.

Так как $\pi_0^A(ng) = 0$, то

$$g = \pi_\infty^A(g) = \pi_\infty^A(x\theta d + a) = \pi_\infty^B(x\theta d) + \pi_\infty^A(a).$$

Элементы g и (в силу (8)) $\pi_\infty^B(x\theta d)$ принадлежат $R^*(G)$, значит, и $\pi_\infty^A(a) \in \in R^*(G) \cap A \subset L$. Следовательно, $g \in \pi_\infty^B(\langle\theta d\rangle) + L$, откуда $R^*(G) \subset \pi_\infty^B(\langle\theta d\rangle + L)$. □

Следствие. Пусть G — редуцированная почти вполне разложимая блочно-жёсткая группа кольцевого типа с циклическим регуляторным фактором. Пусть в $\mathrm{T}(B)$ нет типа с бесконечным числом нулей. Тогда

$$R^*(G) = \bigcap_p pG + \bigoplus_{\tau \in \mathrm{T}(B)} \Bigl(\bigcap_{p \in \Lambda_\tau} B_\tau \Bigr).$$

Доказательство. Если $\mathrm{T}_0(B) = \varnothing$, то $\mathrm{T}(B) = \mathrm{T}_\infty(B)$ и $\pi_\infty^B(\langle\theta d\rangle) = \langle\theta d\rangle$.

Пусть p — простое число, рассмотрим два случая.

1. Найдётся такой $\tau \in \mathrm{T}(B)$, что $\tau(P) = 0$. Тогда $p \mid \theta_\tau$ и, значит, $p \mid \theta$. Следовательно, $\theta d \in pG$.

2. Для всех $\tau \in \mathrm{T}(B)$ выполнено $\tau(P) = \infty$. Тогда $(n, p) = 1$ и, значит, $nu + pv = 1$ для некоторых $u, v \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $d = (nu)d + (pv)d \in pG$.

Таким образом, $\langle\theta d\rangle \subset \bigcap\limits_p pG$ и, значит,

$$R^*(G) \subset \bigcap_p pG + \bigoplus_{p \in \mathrm{T}(B)} \Bigl(\bigcap_{p \in \Lambda_\tau} pB_\tau \Bigr).$$

Обратное включение очевидно. □

В [2] сформулирована проблема описания полупростых групп. Группа называется полупростой, если на ней существует хотя бы одно полупростое ассоциативное кольцо. Доказано, что группа без кручения конечного ранга полупроста тогда и только тогда, когда её редуцированная часть полупроста [1]. Докажем критерий полупростоты редуцированной почти вполне разложимой группы.

Теорема 2. *Редуцированная почти вполне разложимая группа полупроста тогда и только тогда, когда все подгруппы ранга* 1 *её регулятора имеют идемпотентный тип с бесконечным числом нулей.*

Доказательство. Если $(G, \times)$ — полупростое кольцо на G, то $(A, \times)$ — полупростой идеал этого кольца. Следовательно, A содержит только подгруппы идемпотентного типа с бесконечным числом нулей [1].

Пусть теперь группа A имеет вид $A = \bigoplus\limits_{i \in I} R_i e_i$, где R_i — кольцо без кручения ранга 1, имеющее идемпотентный тип с бесконечным числом нулей.

Определим умножение $\times$ на A, положив

$$e_i \times e_j = \begin{cases} m_i^2 e_i, & \text{если} \quad i = j, \\ 0, & \text{если} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Кольцо $(A, \times)$ полупросто, так как является прямой суммой идеалов $R_i e_i$ $(i \in I)$, каждый из которых полупрост [2]. При этом

$$nd \times nd = \sum_{i \in I} (n_i^2 s_i^2 m_i^2) e_i = n^2 \sum_{i \in I} s_i^2 e_i.$$

Поэтому умножение $\times$ на A можно продолжить до умножения на G, положив $d \times d = \sum\limits_{i \in I} s_i^2 e$. Тогда

$$nR(G, \times) \subset R(G, \times) \cap A = R(A, \times) = 0.$$

Следовательно, $R(G, \times) = 0$, т. е. группа G полупроста. □

Литература

[1] Компанцева Е. И. Полупростые кольца на вполне разложимых абелевых группах // Фундамент. и прикл. мат. — 2007. — Т. 13, № 3. — С. 69—80.

[2] Beaumont R. A., Lawver D. A. Strongly semisimple Abelian groups // Pacific J. Math. — 1974. — Vol. 53, no. 2. — P. 327—336.

[3] Blagoveshchenskaya E., Mader A. Decomposition of almost completely decomposable Abelian groups // Abelian Group Theory and Related Topics. Conf. August 1—7, 1993, Oberwolfach, Germany / R. Göbel, ed. — Providence: Amer. Math. Soc., 1994. — (Contemp. Math.; Vol. 171). — P. 21—36.

[4] Fuchs L. Infinite Abelian Groups. Vols. 1, 2. — New York: Academic Press, 1970; 1973.

[5] Jacobson N. Structure of Rings. — Providence: Amer. Math. Soc., 1956.

[6] Mader A. Almost Completely Decomposable Abelian Groups. — Amsterdam: Gordon and Breach, 1999. — (Algebra, Logic, and Applications; Vol. 13).