Гомотопические типы групповых решёток

И. П. КРАМАРЕВ
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: ivankramarev@gmail.com

Л. В. ЛОКУЦИЕВСКИЙ
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: lion.lok@gmail.com

УДК 512.542+512.662.8

Ключевые слова: решётка подгрупп, решётка смежных классов, конечная простая группа, группа гомологий, гомотопический тип.

Аннотация

В статье исследуются групповые решётки с использованием идей, предложенных К. С. Брауном и Д. Квилленом, о постановке в соответствие частично упорядоченному множеству некоторого топологического пространства. Установлен гомотопический тип решётки подгрупп группы $\mathrm{PSL}(2,7)$, а также получена связь между гомологиями различных групповых решёток и оценки на числа Бетти этих решёток при помощи метода спектральных последовательностей.

Abstract

I. P. Kramarev, L. V. Lokutsievskiy, Homotopy types of group lattices, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 5, pp. 103—123.

In this article, we study group lattices using the ideas by K. S. Brown and D. Quillen of associating a certain topological space to a partially ordered set. We determine the exact homotopy type for the subgroup lattice of $\mathrm{PSL}(2,7)$, find a connection between different group lattices, and obtain some estimates for the Betty numbers of these lattices using the spectral sequence method.

1. Введение

Пусть P — конечное частично упорядоченное множество. Ему можно каноническим образом поставить в соответствие некоторый симплициальный комплекс.

Определение 1.1. Обозначим через ΔP симплициальный комплекс с множеством вершин P, состоящий в точности из таких симплексов $h_1 h_2 \ldots h_k$, что для некоторой перестановки $\sigma \in \mathrm{S}_{k+1}$ в P выполнена цепочка неравенств

$$h_{\sigma(1)} < h_{\sigma(2)} < \ldots < h_{\sigma(k)}.$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2008, том 14, № 5, с. 103—123.

Пусть P и Q — частично упорядоченные множества. Отображение $f\colon P \to Q$ называется морфизмом частично упорядоченных множеств, если оно сохраняет нестрогий порядок, т. е. для любых $x, y \in P$, таких что $x \leqslant y$, выполнено $f(x) \leqslant f(y)$ в Q. Отображение f индуцирует симплициальное отображение Δf из ΔP в ΔQ по очевидному правилу. Таким образом, любое вложение частично упорядоченных множеств $P \subseteq Q$ индуцирует вложение их симплициальных комплексов $\Delta P \subseteq \Delta Q$.

Следуя Квиллену, мы будем использовать конструкцию $P \to \Delta P$ для применения топологических понятий к частично упорядоченным множествам. Например, P стягиваемо, если ΔP стягиваем, группы гомологий P — это группы гомологий ΔP.

Рассмотрим произвольную конечную группу G. Множество всех подгрупп G, упорядоченное по включению, образует решётку с правильной частью $\mathcal{L}G = \{H \mid 1 < H < G\}$. Множество смежных классов по всем подгруппам (включая $\varnothing$ и G), упорядоченное по включению, также образует решётку, $\mathcal{C}G = \{xH \mid H < G,\ x \in G\}$ — её правильная часть (см. [3]). Возникает естественный вопрос: какой гомотопический тип могут иметь пространства $\Delta\mathcal{L}G$ и $\Delta\mathcal{C}G$ для произвольной конечной группы G?

Браун, Кратцер и Тевеназ доказали, что если G разрешима, то каждое из частично упорядоченных множеств $\mathcal{L}G$ и $\mathcal{C}G$ гомотопически эквивалентно букету сфер одинаковой размерности (см. [3, 6]). Этот факт весьма интересен, поскольку гомотопический тип произвольного частично упорядоченного множества P, не привязанного ни к какой группе, может быть практически любым. А именно, для любого конечного симплициального комплекса X существует такое конечное частично упорядоченное множество P, что X и ΔP гомотопически эквивалентны (см. [7]).

Вопрос о гомотопическом типе $\mathcal{L}G$ и $\mathcal{C}G$ для произвольной конечной группы G до сих пор остаётся открытым. При этом наиболее трудным представляется случай простых групп. Формула гомотопического дополнения Бьёрнера—Уокера (см. [2]) и подобные ей результаты, которые позволили полностью установить гомотопический тип решёток для разрешимых групп, зависят от существования нормальной подгруппы, а потому неприменимы в этой ситуации.

Шарешьян, исследуя так называемое свойство «чешуйчатости» (shellability) решётки подгрупп конечной группы, установил для некоторых серий простых групп ($\mathrm{L}_2(p)$ для простого $p \equiv 3, 5 \pmod 8$, $\mathrm{L}_2(2^p)$, $\mathrm{L}_2(3^p)$ и $\mathrm{Sz}(2^p)$ для простых p), что гомотопический тип любой такой решётки $\mathcal{L}G$ — букет $|G|$ окружностей (см. [10]). Доказательство было основано на том, что, используя лемму о слоях Квиллена, каждую из этих решёток удаётся свести к некоторому одномерному связному симплициальному комплексу, а любой такой комплекс, естественно, гомотопически эквивалентен букету окружностей.

В связи с этим результатом интересен также следующий вопрос: существует ли минимальная простая группа, гомотопический тип решётки которой отличен от букета сфер одинаковой размерности? Нам удалось привести пример такой группы, установив точный тип решётки $\mathcal{L}\,\mathrm{PSL}(2,7)$: это букет 48 окружностей и 48 двумерных сфер.

Также в этой работе методом спектральных последовательностей получены оценки чисел Бетти общего характера для комплексов $\mathcal{L}\,G$ и $\mathcal{C}\,G$ для произвольной конечной группы G и более точные результаты для некоторых конкретных групп ($\mathcal{C}\,\mathrm{PSL}(2,7)$, $\mathcal{L}\,\mathrm{Sz}(2^{pq})$ и $\mathcal{L}\,\mathrm{Sz}(2^{p^k})$, где числа p и q простые).

2. Гомотопические методы

Для произвольного элемента $h \in P$ введём обозначения

$$P_{<h} = \{x \in P \colon x < h\}$$

(аналогично определяются $P_{\leqslant h}$, $P_{>h}$ и $P_{\geqslant h}$),

$$P_{\neq h} = \{x \in P \colon x \neq h\}$$

и $P_{\notin M} = P \setminus M$ для любого подмножества $M \subseteq P$.

Основными инструментами при работе с топологическими свойствами частично упорядоченных множеств являются лемма о слоях Квиллена и формула гомотопического дополнения Бьёрнера—Уокера.

Лемма 2.1 (лемма о слоях, Д. Квиллен [7]). *Пусть $f \colon P \to Q$ — морфизм конечных частично упорядоченных множеств и верхние слои $f^{-1}(Q_{\geqslant x})$ стягиваемы для всех $x \in Q$ (или нижние слои $f^{-1}(Q_{\leqslant x})$ стягиваемы для всех $x \in Q$). Тогда f индуцирует гомотопическую эквивалентность P и Q.*

Определение 2.1. Точной верхней гранью элементов x и y из P называется элемент $x \vee y = \inf\limits_{z}\{z \mid x, y \leqslant z\}$, если он существует. Аналогично определяется точная нижняя грань $x \wedge y$.

Частично упорядоченное множество P называется решёткой, если для любых двух его элементов x и y существуют точная верхняя и точная нижняя грани.

Решётка называется ограниченной, если в ней существуют наибольший элемент $\hat{1}$ и наименьший элемент $\hat{0}$. Очевидно, любая конечная решётка является ограниченной. Правильной частью ограниченной решётки L называется частично упорядоченное подмножество $\bar{L} = L \setminus \{\hat{0}, \hat{1}\}$.

Легко убедиться, что если в некотором частично упорядоченном множестве P есть элемент h_0, сравнимый со всеми элементами P (например, $\hat{0}$ или $\hat{1}$), то комплекс ΔP стягиваем, так как в этом случае ΔP есть конус с основанием $\Delta P_{\neq h_0}$: $\Delta P = C\Delta P_{\neq h_0}$. В частности, любая конечная решётка стягиваема. Поэтому, рассуждая о гомотопическом типе решётки L, мы всегда будем подразумевать её правильную часть.

Теорема 2.1 (формула гомотопического дополнения, А. Бьёрнер, Дж. У. Уокер [2]). *Пусть L — конечная решётка и $z \in L$. Пусть*

$$z^{\perp} = \{x \in L \mid x \wedge z = \hat{0},\ x \vee z = \hat{1}\}.$$

Тогда

1) *частично упорядоченное множество* $\bar{L} \setminus z^{\perp}$ *стягиваемо;*
2) *если* $z^{\perp}$ — *антицепь (т. е. никакие два элемента из* $z^{\perp}$ *не сравнимы), то*

$$\bar{L} \cong \bigvee_{y \in z^{\perp}} \Sigma(\bar{L}_{<y} * \bar{L}_{>y}),$$

где $X * Y$ *обозначает джойн топологических пространств, а* $\Sigma(X)$ — *надстройку над топологическим пространством* X.

Также хорошо известно следующее следствие леммы о слоях Квиллена (см. [10]).

Лемма 2.2. *Пусть* L — *правильная часть некоторой конечной решётки* $\mathcal{L}$, M — *множество всех элементов* $x \in L$, *таких что* $x = \bigwedge\limits_{c \in C} c$, *где* C — *некоторое подмножество максимальных элементов* L. *Тогда* L *и* M *гомотопически эквивалентны.*

Эта лемма позволяет сильно уменьшить размеры исследуемой решётки. Например, для $\mathcal{L}\,\mathrm{A}_5$ после её применения остаётся одномерный комплекс, связный в силу связности исходного частично упорядоченного множества. Нетрудно посчитать, что его редуцированная эйлерова характеристика равна -60, поэтому $\mathcal{L}\,\mathrm{A}_5$ гомотопически эквивалентно букету 60 окружностей.

Для многих других минимальных простых групп ($\mathrm{L}_2(p)$ для простого $p \equiv 3, 5 \pmod 8$, $\mathrm{L}_2(2^p)$, $\mathrm{L}_2(3^p)$ и $\mathrm{Sz}(2^p)$ для простых p) имеет место похожая ситуация, однако для получения одномерного комплекса после применения леммы требуется удалить ещё несколько элементов по лемме Квиллена.

Следствие 2.1. *Пусть в обозначениях предыдущей леммы* R — *правильная часть некоторой подрешётки в* $\mathcal{L}$, *причём* $M \subseteq R \subseteq L$. *Тогда* L *и* R *гомотопически эквивалентны.*

Доказательство. Множества всевозможных непустых пересечений максимальных элементов L и R совпадают (с M). $\square$

К сожалению, многократное применение леммы 2.2 к одной и той же решётке бессмысленно, поскольку убрать новые элементы не получится. Мы задались вопросом: возможно ли избавиться от части максимальных элементов? Нам удалось показать, что в достаточно общей ситуации гомотопический тип частично упорядоченного множества P можно установить по его частично упорядоченным подмножествам.

Замечание 2.1. Пусть P — конечное частично упорядоченное подмножество, $m \in P$. Тогда

$$\Delta(P_{<m} \cup P_{>m}) = \Delta P_{<m} * \Delta P_{>m}.$$

Доказательство. Действительно, любой элемент $P_{>m}$ больше любого элемента $P_{<m}$, поэтому любая цепь в $P_{<m} \cup P_{>m}$ является объединением цепи из $P_{>m}$ и цепи из $P_{<m}$ (любая из цепей может быть пустой). Но такие цепи в точности соответствуют симплексам джойна $\Delta P_{<m}$ и $\Delta P_{>m}$. $\square$

Лемма 2.3. *Пусть P — конечное частично упорядоченное множество, $m \in P$. Пусть при этом симплициальный комплекс $\Delta(P_{<m} \cup P_{>m})$ стягиваем в точку по $\Delta P_{\neq m}$. Тогда*
$$\Delta P \cong \Delta P_{\neq m} \vee \Sigma(\Delta P_{<m} * \Delta P_{>m}).$$

Доказательство. Симплициальный комплекс $Q_m = \Delta(P_{<m} \cup P_{>m} \cup \{m\})$ представляет собой конус с вершиной m над основанием $\Delta P_{<m} * \Delta P_{>m}$. Комплекс ΔP является склейкой $\Delta P_{\neq m}$ и Q_m по $\Delta P_{<m} * \Delta P_{>m}$ (см. рис. 1). Гомотопия, стягивающая $\Delta P_{<m} * \Delta P_{>m}$ по $\Delta P_{\neq m}$ в некоторую точку x, превращает конус Q_m в надстройку $\Sigma(\Delta P_{<m} * \Delta P_{>m})$. Эта надстройка склеивается с $\Delta P_{\neq m}$ как раз в точке x. □

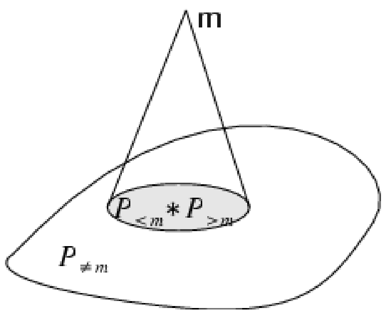

Рис. 1. Пространство ΔP

Замечание 2.2. Если комплекс $P_{\neq m}$ не является связным, то основание букета x должно лежать в той же компоненте связности, что и $\Delta P_{<m} * \Delta P_{>m}$ (так как $\Delta P_{<m} * \Delta P_{>m}$ стягиваем по $P_{\neq m}$, то он обязан целиком лежать в одной компоненте связности).

Теорема 2.2. *Пусть M — некоторая антицепь элементов из P. Пусть также комплекс $\bigcup\limits_{m \in M} \Delta P_{<m} * \Delta P_{>m}$ стягиваем по $\Delta P_{\notin M}$. Тогда*
$$\Delta P \cong \Delta P_{\notin M} \vee \bigvee_{m \in M} \Sigma(\Delta P_{<m} * \Delta P_{>m}). \tag{1}$$

Доказательство этой теоремы абсолютно аналогично доказательству предыдущей леммы, и мы не будем останавливаться на нём подробно. Стоит лишь отметить, что так как M — антицепь, то для любых $m_1, m_2 \in M$ конусы Q_{m_1} и Q_{m_2} могут пересекаться только по основаниям.

Следствие 2.2. *Если*
$$\dim \Delta P_{<m} * \Delta P_{>m} = \dim \Delta P_{<m} + \dim \Delta P_{>m} + 1 \leqslant k$$
для всех $m \in M$, а комплекс $\Delta P_{\notin M}$ k-связен (т. е. $\pi_0(\Delta P_{\notin M}) = \ldots = \pi_k(\Delta P_{\notin M}) = 0$), то выполняется соотношение (1).

Лемма 2.4. *Если M — множество некоторых (возможно, не всех) максимальных элементов из P и комплекс $\bigcup\limits_{m\in M} \Delta P_{<m}$ стягиваем по $\Delta P_{\notin M}$, то*

$$\Delta P \cong \Delta P_{\notin M} \vee \bigvee_{m\in M} \Sigma\Delta P_{<m}.$$

Доказательство. Любые два максимальных элемента в любом частично упорядоченном множестве P несравнимы. Следовательно, любое подмножество $M \subseteq P$, состоящее только из максимальных элементов, является антицепью. Значит, условия леммы в точности соответствуют теореме 2.2. Осталось только отметить, что для любого топологического пространства X имеем $X*\varnothing = X$. □

Заметим, что если P — это некоторая конечная решётка, а M — подмножество некоторых максимальных элементов правильной части P, то $P_{\notin M}$ по-прежнему является решёткой. Таким образом, лемма 2.4 даёт очень хорошие результаты в сочетании с леммой 2.2 за счёт их поочередного применения: сначала мы оставляем в решётке только пересечения максимальных элементов, потом убираем часть максимальных элементов, затем снова применяем лемму 2.2 и так далее. При этом в любой момент аналогичные операции мы можем проделывать и для минимальных элементов.

Комбинируя описанные выше гомотопические методы, мы сможем полностью установить гомотопический тип решётки $\mathcal{L}\,\mathrm{PSL}(2,7)$.

3. Букет сфер разной размерности

Существует гипотеза (см. [11]), что для любой конечной группы G комплексы $\Delta\mathcal{L}G$ и $\Delta\mathcal{C}G$ гомотопически эквивалентны букетам сфер возможно разных размерностей. При этом пока не существует доказательства даже отсутствия кручений в гомологиях ни в каких размерностях для произвольной конечной группы.

До сих пор изучались в основном минимальные простые группы, для которых частично упорядоченное множество $\mathcal{L}G$ представляло собой букет окружностей. Рассмотрим минимальную простую группу $\mathrm{PSL}(2,7)$ и покажем, что правильная часть решётки её подгрупп является букетом сфер двух разных размерностей.

Решётка подгрупп $\mathrm{PSL}(2,7)$ схематично изображена на рис. 2 (см. например, [4]). Каждой вершине соответствует класс сопряжённости, рядом с классом указано количество входящих в него подгрупп.

Если два различных класса сопряжённости соединены стрелкой, это означает, что группы верхнего класса обладают подгруппами в нижнем классе. Количество таких подгрупп указано маленькой цифрой рядом со стрелкой.

На рис. 2 изображён минимум стрелок: если $H_1 < H_2 < H_3$, то нет стрелки $H_3 \to H_1$, а есть только $H_3 \to H_2$ и $H_2 \to H_1$.

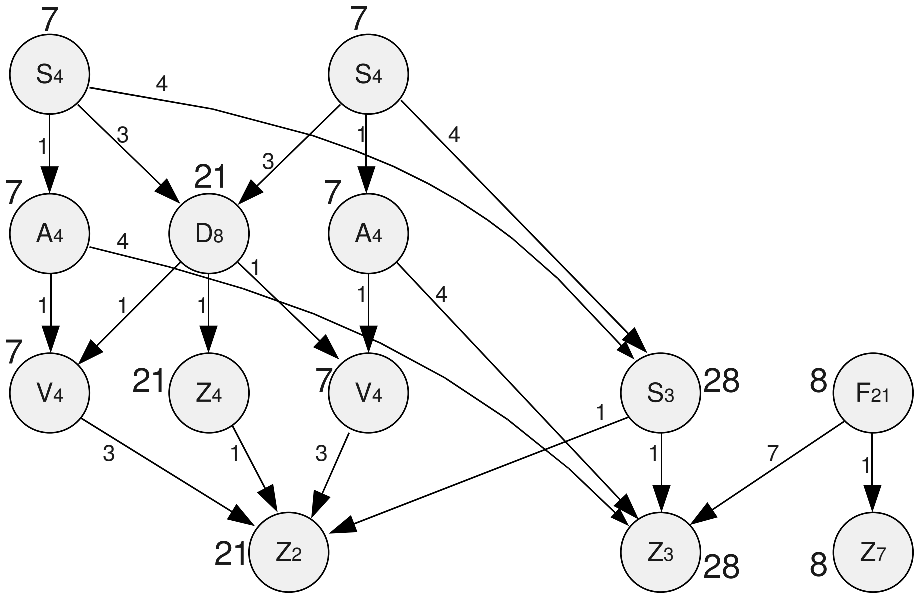

Рис. 2. Решётка подгрупп группы $\mathrm{PSL}(2,7)$

По лемме 2.2 можно рассматривать более простое частично упорядоченное множество Q, состоящее из всевозможных нетривиальных пересечений максимальных подгрупп (т. е. убрать все классы сопряжённости подгрупп A_4, $\mathbb{Z}_4$ и $\mathbb{Z}_7$).

Пусть $\mathcal{M}$ — множество всех подгрупп сопряжённого класса F_{21}. Все элементы $\mathcal{M}$ максимальны в Q, и комплекс $\Delta Q_{\notin\mathcal{M}}$ связен. Заметим, что для любого $m \in \mathcal{M}$ имеем $\Delta Q_{<m} \cong \bigvee^{6} \mathrm{S}_0$ (т. е. 7 точек) и согласно лемме 2.4 получаем

$$\Delta Q \cong \Delta Q_{\notin\mathcal{M}} \vee \bigvee^{8} \Sigma \bigvee^{6} \mathrm{S}_0 = \Delta Q_{\notin\mathcal{M}} \vee \bigvee^{48} \mathrm{S}^1.$$

Таким образом, мы выделили букет из 48 окружностей. Обозначим $Q_{\notin\mathcal{M}}$ через Q^{I}. Поскольку $\tilde{\chi}\big(\mathcal{L}\,\mathrm{PSL}(2,7)\big) = 0$ (см. [5]), получаем, что $\tilde{\chi}(Q^{\mathrm{I}}) = 48$ (мы отделили букет из 48 окружностей S^1). Покажем, что ΔQ^{I} гомотопически эквивалентен букету из 48 сфер.

Для каждой подгруппы S_4 рассмотрим $\Delta Q^{\mathrm{I}}_{<\mathrm{S}_4}$. Это одномерный связный комплекс, редуцированная эйлерова характеристика которого равна -8, так как в $\Delta Q'_{<\mathrm{S}_4}$ ровно 17 вершин и 24 отрезка. Значит, $\Delta Q^{\mathrm{I}}_{<\mathrm{S}_4} \cong \bigvee^{8} \mathrm{S}^1$. Удалим из Q^{I} 6 вершин правого сопряжённого класса S_4 и покажем, что оставшееся частично

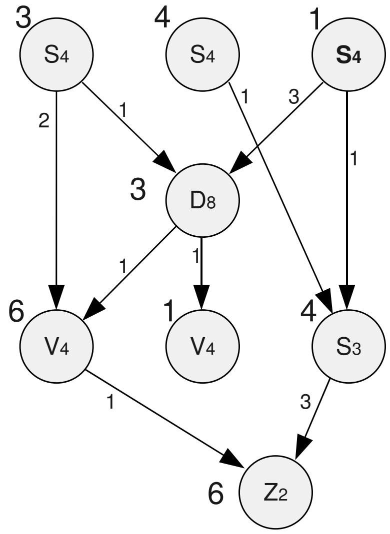

Рис. 3. Пересечение максимальных элементов в Q^{II}

упорядоченное множество Q^{II} будет стягиваемым. Это и будет означать по теореме 2.2, что

$$\Delta Q^{\mathrm{I}} \cong \Delta Q^{\mathrm{II}} \vee \bigvee^{6} \Sigma \bigvee^{8} \mathrm{S}_1 \cong \mathrm{pt} \vee \bigvee^{48} \mathrm{S}^2 \cong \bigvee^{48} \mathrm{S}^2.$$

Снова воспользуемся леммой 2.4 и рассмотрим вместо Q^{II} пересечения максимальных подгрупп (Q^{II} по-прежнему является решёткой; схематичное изображение на рис. 3). Воспользуемся изоморфизмом $\mathrm{PSL}_2(7) \cong \mathrm{GL}_3(2)$ и естественным действием этой группы на трёхмерном векторном пространстве над $\mathbb{Z}_2$.

Без ограничения общности можно считать, что оставшийся класс S_4 образуют стабилизаторы ненулевых векторов. Возьмём два ненулевых вектора $u \neq v$ и дополним их до базиса (u, v, w). В силу транзитивности действия группы на множестве базисов $\mathrm{St}(u, v)$ — это в точности подгруппа операторов, переводящих (u, v, w) в любой базис (u, v, w'), изоморфная V_4. Стабилизатор трёх и более векторов, очевидно, тривиален.

Обозначим оставшуюся подгруппу из другого класса S_4 через S. Пусть некоторая подгруппа H из Q^{II} не вложена в S, тогда это либо S_4 (стабилизатор вектора), либо V_4 (стабилизатор двух векторов). Без ограничения общности можно считать, что оставшаяся S_4 (как стабилизатор прямой) состоит из невырожденных матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}.$$

Легко указать среди таких матриц нетривиальный стабилизатор любых двух ненулевых векторов.

Фактически мы показали, что любая подгруппа из Q^{II} имеет нетривиальное пересечение с S. Следовательно, $S^{\perp}$ пусто, и по теореме о гомотопическом дополнении Q^{II} стягиваем.

Итак, нами доказана следующая теорема о гомотопическом типе решётки подгрупп $\mathrm{PSL}(2,7)$.

Теорема 3.1. *Симплициальный комплекс решётки подгрупп группы* $\mathrm{PSL}(2{,}7)$ *гомотопически эквивалентен букету из* 48 *окружностей и* 48 *сфер*:

$$\Delta\,\mathcal{L}\,\mathrm{PSL}(2,7) \cong \bigvee^{48} \mathrm{S}^1 \vee \bigvee^{48} \mathrm{S}^2.$$

4. Спектральная последовательность в частично упорядоченных множествах

Если рассмотреть группы вида $\mathrm{PSL}(2,7) \times \mathrm{PSL}(2,7) \times \ldots \times \mathrm{PSL}(2,7)$ или $\mathrm{PSL}(2,7) \times (\mathbb{Z}_2)^n$, становится очевидно, что решётка подгрупп конечной группы может быть букетом сфер совершенно разных размерностей, и для изучения гомотопического типа такой решётки её эйлеровой характеристики явно недостаточно.

Стандартным средством изучения гомологий топологических пространств является спектральная последовательность. Воспользуемся ею. Пусть P — произвольное частично упорядоченное множество, введём на P естественную фильтрацию:

$$P^0 = P^{\leqslant 0} = \{h \in P \mid h \text{ минимальный}\} \subseteq P,$$
$$P^{\leqslant 1} = \{h \in P \mid \text{для любого } x \text{ справедливо, что если } x < h, \text{ то } x \in P^0\} \subseteq P,$$
$$P^{\leqslant 2} = \{h \in P \mid \text{для любого } x \text{ справедливо, что если } x < h, \text{ то } x \in P^{\leqslant 1}\} \subseteq P,$$
$$\ldots,$$

т. е. $h \in P^{\leqslant k}$ тогда и только тогда, когда максимальная длина цепи вида $x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < h$, где $x_i \in P$, равняется k. Очевидно, что

$$P^0 \subseteq P^{\leqslant 1} \subseteq P^{\leqslant 2} \subseteq \ldots \subseteq P^{\leqslant n} = P.$$

Максимальная длина цепи в P есть n: $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, $\dim \Delta P = n$. Положим

$$P^k = P^{\leqslant k} \setminus P^{\leqslant k-1} \quad \text{для любого} \quad k \geqslant 1.$$

Мы будем называть каждое множество P^k уровнем или k-м уровнем. Заметим, что если $x < y$ и $y \in P^k$, то $k \neq 0$ и $x \in P^{\leqslant k-1}$. Докажем теперь ключевую лемму данного раздела.

Лемма 4.1. *Для произвольного элемента* $h \in P^{k+1}$, $k \geqslant 0$, *рассмотрим* $X_h = \Delta(P^{\leqslant k} \cup \{h\})$. *Тогда фактор-пространство* $X_h/\Delta P^{\leqslant k}$ *совпадает с надстройкой над* $\Delta P_{<h}$:

$$X_h/\Delta P^{\leqslant k} = \Sigma\Delta P_{<h}.$$

Доказательство. Рассмотрим топологическое пространство $\Delta P_{\leqslant h}$. Оно является конусом над множеством $\Delta P_{<h} \neq \varnothing$. При этом, поскольку $P_{<h} \subseteq P^{\leqslant k}$, основание этого конуса $\Delta P_{<h}$ лежит в $\Delta P^{\leqslant k}$.

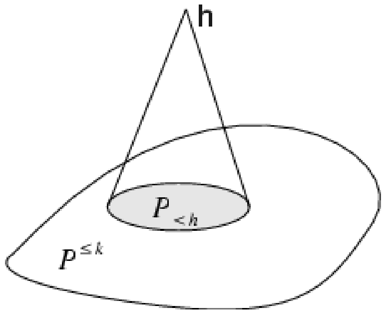

Рис. 4. Пространство X_h

Пространство X_h представляет собой объединение пространств $\Delta P^{\leqslant k}$ и $\Delta P_{\leqslant h}$, пересекающихся по основанию конуса $\Delta P_{<h}$ (рис. 4):

$$X_h = \Delta P^{\leqslant k} \cup \Delta P_{\leqslant h}, \quad \Delta P^{\leqslant k} \cap \Delta P_{\leqslant h} = \Delta P_{<h}.$$

Значит,

$$X_h/\Delta P^{\leqslant k} = \Delta P_{\leqslant h}/\Delta P_{<h} = \Sigma P_{<h}. \qquad \square$$

Данная лемма позволяет выявить сильнейшую взаимосвязь пространства ΔP со всеми его подпространствами $\Delta P_{<h}$. Для получения дальнейших конкретных результатов докажем теорему, обобщающую лемму 4.1.

Теорема 4.1. *Фактор-пространство* $\Delta P^{\leqslant k+1}/\Delta P^{\leqslant k}$ *есть букет надстроек над* $\Delta P_{<h}$ *по всем* $h \in P^{k+1}$:

$$\Delta P^{\leqslant k+1}/\Delta P^{\leqslant k} = \bigvee_{h \in P_{k+1}} \Sigma\Delta P_{<h}.$$

Доказательство. Имеем $P^{\leqslant k+1} = P^{k+1} \cup P^{\leqslant k}$. Более того, если x и y из $P^{\leqslant k+1}$ и $x < y$, то $x \in P^{\leqslant k}$ и либо $y \in P^{k+1}$, либо $y \in P^{\leqslant k}$. Следовательно, пространство $\Delta P^{\leqslant k+1}$ является объединением пространства $\Delta P^{\leqslant k}$ и конусов $\Delta P_{\leqslant h}$ по всем $h \in P^{k+1}$ (рис. 5). Пусть $h_1 \neq h_2$ и $h_1, h_2 \in P^{k+1}$, тогда пересечение частично упорядоченных множеств $P_{\leqslant h_1} \cap P_{\leqslant h_2}$ совпадает с $P_{<h_1} \cap P_{<h_2} \subseteq P^{\leqslant k}$. Значит, конусы $\Delta P_{\leqslant h_1}$ и $\Delta P_{\leqslant h_2}$ могут пересекаться только основаниями, а их

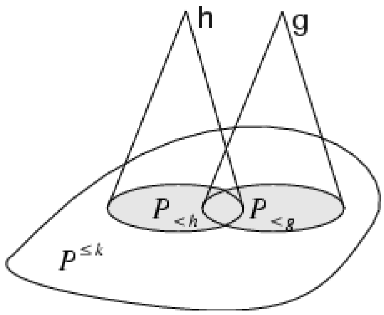

Рис. 5. Пространство $P^{\leqslant k+1}$

основания лежат в пространстве $\Delta P^{\leqslant k}$. Поэтому

$$\Delta P^{\leqslant k+1}/\Delta P^{\leqslant k} = \left(\bigcup_{h\in P^{k+1}} X_h \right) / \, \Delta P^{\leqslant k} = \bigvee_{h\in P^{k+1}} (X_h/\Delta P^{\leqslant k}).$$

Последнее же по лемме 4.1 и является букетом надстроек над $\Delta P_{<h}$ по всем $h \in P_{k+1}$. □

Отметим, что для любых топологических пространств X и Y редуцированные гомологии удовлетворяют соотношениям $\tilde{H}_m(\Sigma X) = \tilde{H}_{m-1}(X)$ и $\tilde{H}_m(X \vee Y) = \tilde{H}_m(X) \oplus \tilde{H}_m(Y)$ (см. [1]).

Построенная фильтрация P индуцирует естественную фильтрация на ΔP:

$$\Delta P^0 \subseteq \Delta P^{\leqslant 1} \subseteq \Delta P^{\leqslant 2} \subseteq \ldots \subseteq \Delta P^{\leqslant n} = \Delta P.$$

Поскольку теперь нам известно, как устроены пространства $\Delta P^{\leqslant k+1}/\Delta P^{\leqslant k}$, несложно выписать спектральную последовательность для построенной фильтрации. Для начала выпишем E^1 (здесь и далее мы считаем $\tilde{H}_m(X) = 0$ для всех $m < 0$ и $X \neq \varnothing$):

$$E^1_{0,0} = H_0(\Delta P^0) = \mathbb{Z}^{|P_0|}, \quad E^1_{0,l} = 0 \ \text{ для всех } \ l \neq 1,$$
$$E^1_{k,l} = \tilde{H}_{k+l}(\Delta P^{\leqslant k}/\Delta P^{\leqslant k-1}) = \bigoplus_{h\in P^k} \tilde{H}_{k+l-1}(\Delta P_{<h}) \ \text{ для всех } \ l, k \geqslant 1.$$

Теперь скажем несколько слов о том, как устроены $d^r_{k,l}$ (стрелки): они идут из $E^r_{k,l}$ в $E^r_{k-r,l+r-1}$. Соответственно, $E^{r+1}_{k,l}$ есть фактор ядра $d^r_{k,l}$ из $E^r_{k,l}$ по образу $d^r_{k+r,l-r+1}$ в $E^r_{k,l}$ (в спектральной последовательности образ всегда содержится в ядре):

$$E^{r+1}_{k,l} = \operatorname{Ker} d^r_{k,l}/\operatorname{Im} d^r_{k+r,l-r+1}.$$

Из индуктивного построения E^{r+1} следует, что

1) если $E^1_{k,l} = 0$ для некоторых k и l, то для всех $r \geqslant 1$ имеем $E^r_{k,l} = 0$;

2) для любых k, l и $r \geqslant 0$ имеем $\dim E^{r+1}_{k,l} \leqslant \dim E^r_{k,l} \leqslant \ldots \leqslant \dim E^1_{k,l}$ (под $\dim$ здесь и далее мы понимаем размерность свободной части абелевой группы);
3) так как все стрелки $d^r_{k,l}$, начинающиеся на диагонали $k+l=m$, независимо от m идут только в клетки на диагонали $k+l=m-1$ и, наоборот, стрелки, заканчивающиеся на диагонали $k+l=m$, независимо от r должны были начаться из клетки на диагонали $k+l=m+1$, то имеет место неравенство

$$\sum_{k+l=m} \dim E^r_{k,l} \geqslant \sum_{k+l=m} \dim E^1_{k,m} - \sum_{k+l=m+1} \dim E^1_{k,m} - \sum_{k+l=m-1} \dim E^1_{k,m}.$$

Из соображений размерности стабилизация спектральной последовательности в нашем случае наступает на шаге $n+1$: $E^{n+1} = E^{n+2} = \ldots = E^{\infty}$. По E^{∞} можно определить гомологии $\Delta P^{\leqslant n} = \Delta P$ с помощью диагонали $k+l = m$ (m фиксировано): обозначим все стоящие на этой диагонали ненулевые группы, начиная с самой верхней, через $G_1, G_2, \ldots, G_s$. Тогда G_1 — подгруппа в $H_m(\Delta P)$, G_2 — подгруппа в $H_m(\Delta P)/G_1$, G_3 — подгруппа в $(H_m(\Delta P)/G_1)/G_2$ и т. д. Последняя же G_s совпадает с соответствующей фактор-группой (см. [1]).

Воспользовавшись тем, что на всех диагоналях $k+l=m$ в E^1 стоят суммы групп вида $\tilde{H}_m(\Delta P_{<h})$ (за исключением, конечно, нулевого столбца $E^1_{0,l}$ — в нём все клетки, кроме $E^1_{0,0}$, нули), мы автоматически получаем следующие теоремы (здесь и далее мы считаем, что $\tilde{H}_{-1}(\varnothing) = \mathbb{Z}$ и $\tilde{H}_m(\varnothing) = 0$ для любого $m \neq -1$).

Теорема 4.2. *При любом $m \geqslant 0$ верна следующая оценка на числа Бетти частично упорядоченного множества P (размерности свободных частей групп гомологий):*

$$\dim H_m(\Delta P) \leqslant \sum_{h\in P} \dim \tilde{H}_{m-1}(\Delta P_{<h}).$$

Доказательство. Зафиксируем $m \geqslant 1$. Согласно описанным выше свойствам спектральной последовательности получаем, что

1) размерность $\dim H_m(\Delta P)$ есть сумма размерностей $\dim E^{\infty}_{k,l}$ всех $E^{\infty}_{k,l}$ на диагонали $k+l=m$;
2) при увеличении r размерность $E^r_{k,l}$ не может возрасти.

Автоматически получаем, что

$$\dim H_m(\Delta P) \leqslant \sum_{k+l=m} \dim E^1_{k,l} = \sum_{h\in P} \tilde{H}_{m-1}(\Delta P_{<h}).$$

Если же $m=0$, то на диагонали $k+l=0$ может стоять только один ненулевой элемент: $E^r_{0,0} \subseteq E^1_{0,0} = \mathbb{Z}^{|P_0|}$, и

$$|P_0| = \sum_{h\in P^0} \tilde{H}_{-1}(\Delta P_{<h}) = \sum_{h\in P} \tilde{H}_{-1}(\Delta P_{<h}). \qquad \square$$

Построенную спектральную последовательность также можно использовать для доказательства отсутствия кручений.

Теорема 4.3. *Если для некоторого фиксированного* $m \geqslant 0$ *и для любого* $h \in P$ *имеем* $\tilde{H}_m(\Delta P_{<h}) = 0$, *то* $H_{m+1}(\Delta P) = 0$. *Если при этом для всех* $h \in P$ *гомологии* $\tilde{H}_{m-1}(\Delta P_{<h})$ *не содержат кручений, то* $H_m(\Delta P)$ *тоже не содержат кручений.*

Доказательство. Если для некоторого $m \geqslant 0$ для всех $h \in P$ имеем $\tilde{H}_m(\Delta P_{<h}) = 0$, то в спектральной последовательности на диагонали $k + l = m + 1$ при любом $r \geqslant 1$ стоят только 0, и следовательно, $H_{m+1}(\Delta P) = 0$.

Более того, так как на диагонали $k + l = m + 1$ при любом $r \geqslant 1$ в спектральной последовательности стоят только 0, то при любом $r \geqslant 1$ образ стрелки $d^r_{k,l}$ при $k + l = m + 1$ тоже есть 0. Значит, при индуктивном построении $E^r_{k,l}$ при $k + l = m$ факторизация будет только по 0. Это и означает, что при $m \neq 0$ каждая из групп $E^\infty_{k,l}$ на диагонали $k + l = m$ есть подгруппа группы $E^1_{k,l}$.

При отсутствии кручений в $E^1_{k,l} = \bigoplus\limits_{h \in P^k} \tilde{H}_{m-1}(\Delta P_{<h})$ мы получаем отсутствие кручений в $E^r_{k,l} \subseteq E^1_{k,l}$ и, следовательно, в $H_m(\Delta P)$. □

При доказательстве отсутствия кручений в старших ненулевых гомологиях решёток подгрупп или смежных классов конечной группы G теорема 4.3 является очень удобной: достаточно показать, что никакая подгруппа данной группы G не имеет кручений в старших ненулевых гомологиях и что старшие ненулевые гомологии группы G имеют размерность не меньше чем на единицу больше, чем у любой её подгруппы.

Следствие 4.1. *Если существует такое* m_0, *что для всех* $m \geqslant m_0$ *и всех* $h \in P$ *гомологии* $\tilde{H}_m(P_{<h})$ *равны* 0, *то для всех* $m \geqslant m_0 + 1$ *гомологии* $H_m(\Delta P)$ *тоже обращаются в* 0:

$$\exists\, m_0 \geqslant 0 \colon \forall\, m \geqslant m_0\ \forall\, h \in P\ (\tilde{H}_m(\Delta P_{<h}) = 0) \implies \forall\, m \geqslant m_0 + 1\ (H_m(\Delta P) = 0).$$

Теорема 4.4. *Верна следующая оценка снизу на числа Бетти частично упорядоченного множества* P: *если* $m \geqslant 1$, *то*

$$\dim H_{m+1}(\Delta P) \geqslant \sum_{h \in P} \big(\dim \tilde{H}_m(\Delta P_{<h}) - \dim \tilde{H}_{m-1}(\Delta P_{<h}) - \dim \tilde{H}_{m+1}(\Delta P_{<h})\big),$$

если $m = 0$, *то*

$$\dim H_1(\Delta P) \geqslant \sum_{h \in P} (\dim \tilde{H}_0(\Delta P_{<h}) - \dim \tilde{H}_1(\Delta P_{<h}) - |P_0|),$$

и, естественно,

$$\dim H_0(\Delta P) \geqslant |P_0| - \sum_{h \in P} \dim \tilde{H}_0(\Delta P_{<h}).$$

Доказательство. Написанные оценки получаются из того факта, что суммарная размерность $E^\infty_{k,l}$ на диагонали $k + l = m$ по сравнению с суммарной размерностью $E^1_{k,l}$ на той же диагонали не может уменьшиться больше чем на суммарную размерность $E^1_{k,l}$ на двух соседних диагоналях $k + l = m + 1$ и $k + l = m - 1$. □

В данной оценке, к сожалению, правая часть достаточно часто становится отрицательной.

Если же нам из каких-либо сторонних соображений известны какие-нибудь гомологии ΔP, например, если ΔP связен и $H_0(\Delta P) = \mathbb{Z}$, то продемонстрированная техника позволяет написать более серьёзные оценки на числа Бетти.

Естественно, использование предложенной техники осмысленно в том случае, когда эйлерова характеристика не несёт полной информации о гомотопическом типе ΔP, т. е. в том случае, когда ΔP не является букетом сфер одной размерности.

Отметим также, что для применения теорем 4.2—4.4 необходимо знать только гомологии комплексов $P_{<h}$ и не нужно знать их связь друг с другом. Таким образом, для решёток подгрупп или смежных классов некоторой конечной группы G достаточно знать только типы её подгрупп и их количество, но не потребуется использовать точное устройство самой решётки.

5. Понижающие частично упорядоченные множества

Определение 5.1. Рассмотрим некоторое топологическое пространство X. Назовём его гомологический размерностью максимальную размерность его ненулевых редуцированных гомологий:

$$\operatorname{Hdim} X = \max\{m \colon \tilde{H}_m(X) \neq 0\}.$$

Если же все редуцированные гомологии X равны 0 или $X = \varnothing$, будем считать, что $\operatorname{Hdim} X = -1$.

Например, если X — букет сфер возможно разных размерностей, то $\operatorname{Hdim} X$ есть максимальная размерность сфер в этом букете.

По теореме о клеточных гомологиях (см. [1]) гомологическая размерность любого симплициального комплекса не превосходит его обычной размерности:

$$\operatorname{Hdim} \Delta \leqslant \dim \Delta.$$

Следствие 4.1 в новых обозначениях может быть записано следующим образом:

$$\operatorname{Hdim} P \leqslant 1 + \max_{h \in P} \operatorname{Hdim} P_{<h}. \tag{2}$$

Теперь индуктивно введём понятия понижающего частично упорядоченного множества и понижающего уровня. Начнём с самого низа: пустое множество $\varnothing$ не является понижающим. Пусть P — некоторое частично упорядоченное множество и для всех $h \in P$ мы определили, являются частично упорядоченные множества $P_{<h}$ понижающими или нет. Определим теперь, является P понижающим или нет.

Как и в предыдущем разделе, разобьём его на уровни $P^0, P^1, \ldots, P^n$. Мы будем говорить, что некоторый уровень P^k является понижающим, если для любого $h \in P^k$ частично упорядоченное множество $P_{<h}$ является понижающим. Обозначим через $s(P)$ количество понижающих уровней в P.

Итак, мы будем говорить, что частично упорядоченное множество P является понижающим, если

$$\operatorname{Hdim} P \leqslant \dim P - s(P) - 1.$$

Сначала мы определим понятие «понижающее» для одномерных частично упорядоченных множеств, потом для двумерных и т. д. Например, любое стягиваемое частично упорядоченное множество (в том числе точка) является понижающим, а любое нульмерное частично упорядоченное множество, за исключением точки, не является.

Лемма 5.1. *Пусть* $\dim \Delta P = n \geqslant 0$ *и уровень* P^n *является понижающим. Тогда* $\operatorname{Hdim} \Delta P \leqslant n - 1$.

Доказательство. Пусть $h \in P^n$. Тогда $\dim \Delta P_{<h} = n - 1$. Так как частично упорядоченное множество $P_{<h}$ понижающее, то его гомологическая размерность не может быть максимальной. Следовательно, $\operatorname{Hdim} \Delta P_{<h} \leqslant n - 2$.

Пусть теперь $h \notin P^n$. Тогда $\operatorname{Hdim} \Delta P_{<h} \leqslant \dim \Delta P_{<h} \leqslant n-2$. По формуле (2) получаем, что $\operatorname{Hdim} \Delta P \leqslant n - 1$. □

Лемма 5.2. *Пусть* $\dim \Delta P = n \geqslant 0$. *Пусть для некоторого* $k \geqslant 0$ *уровень* P^k *является понижающим. Тогда* $\operatorname{Hdim} \Delta P \leqslant n - 1$.

Доказательство. Если $k = n$, то утверждение совпадает с леммой 5.1. Пусть $k < n$. Опять же согласно лемме 5.1 для любого $h \in P^{k+1}$ в частично упорядоченном множестве $P_{<h}$ верхний уровень является понижающим. Значит, $\operatorname{Hdim} \Delta P_{<h} \leqslant \dim \Delta P_{<h} - 1 = k - 1$.

Далее действуем по индукции: если для некоторого $l \geqslant k + 1$ и для всех $h \in P^{\leqslant l}$ гомологическая размерность $\operatorname{Hdim} \Delta P_{<h}$ не превосходит $l - 2$, то для всех h из уровня $l + 1$ верно аналогичное соотношение:

$$\forall\, h \in P^{l+1}\ \bigl(\operatorname{Hdim} P_{<h} \leqslant 1 + \max_{h \in P^{\leqslant l}} \operatorname{Hdim} P_{<h} \leqslant l - 1\bigr).$$

Таким образом, при переходе от уровня к следующему гомологическая размерность $\operatorname{Hdim} \Delta P_{<h}$ не может возрасти более чем на 1. Поднимаясь так по одному уровню, мы дойдём до самого P. □

Теорема 5.1. *Если в частично упорядоченном множестве* P *ровно* $s(P)$ *понижающих уровней, то* $\operatorname{Hdim} \Delta P \leqslant n - s(P)$. *При этом* P *является понижающим тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Hdim} \Delta P \leqslant n - s(P) - 1$.

Доказательство. При переходе от уровня P^k к следующему гомологическая размерность частично упорядоченных множеств $P_{<h}$ не возрастает, если уровень P^{k+1} является понижающим, и, возможно, возрастает на 1, если уровень P^{k+1} не является понижающим. Так как понижающих уровней ровно $s(P)$, то

$$\max_{h \in P} \operatorname{Hdim} P_{<h} \leqslant n - s(P) - 1. \qquad \square$$

Как мы увидим, данная теорема имеет очень хорошее приложение в случае групповых решёток.

Итак, наличие понижающих частично упорядоченных подмножеств $P_{<h}$ позволяет ограничить гомологическую размерность ΔP. Естественно, хочется иметь какой-нибудь аппарат, позволяющий определить, является частично упорядоченное множество понижающим или нет. Рассмотрим в частично упорядоченном множестве P фиксированный уровень P^k. Пусть снова $s_k(P)$ — это количество понижающих уровней в P с номерами, меньшими k.

Теорема 5.2. *Пусть существует некоторый непонижающий уровень P^k, такой что для всякого $h \in P^k$ выполняется одно из двух условий:*

1) *частично упорядоченное множество $P_{<h}$ является понижающим;*
2) *в частично упорядоченном множестве $P_{<h}$ понижающих уровней не меньше чем $s_k(P)+1$.*

Тогда частично упорядоченное множество P является понижающим.

Доказательство. Так как для каждого $h \in P^k$ в комплексе $P_{<h}$ не меньше $s_k(P)$ понижающих уровней и $\dim P_{<h} = k-1$, то по теореме 5.1 размерность $\operatorname{Hdim} P_{<h}$ не превосходит $\dim P_{<h} - s_k(P) = k - s_k(P) - 1$. Если $P_{<h}$ понижающее, то $\operatorname{Hdim} P_{<h} \leqslant k - s_k(P) - 2$. Если же $P_{<h}$ непонижающее, то по условию в нём понижающих уровней не меньше чем $s_k(P)+1$, и следовательно, мы опять получаем, что $\operatorname{Hdim} P_{<h} \leqslant k - s_k(P) - 2$.

Итак, $\operatorname{Hdim} P_{<h} \leqslant k - s_k(P) - 2$ для всех $h \in P^k$. При этом уровень P^k не является понижающим. Значит, при переходе от уровня P^{k-1} к P^k не произошло возрастания размерности и, следовательно, $\operatorname{Hdim} P \leqslant n - s(P) - 1$. $\square$

6. Случай групповых решёток

Пусть G — произвольная конечная группа. Мы будем использовать следующие обозначения: $\mathcal{L}\,G = \{H \mid 1 < H < G\}$ — правильная часть решётки подгрупп (по вложению), $\mathcal{C}\,G = \{xH \mid H < G,\ x \in G\}$ — правильная часть решётки смежных классов по всем подгруппам (по вложению), $\mathcal{S}\,G = \mathcal{C}\,G \setminus \{g \in G\}$.

Заметим, что для $H \leqslant G$ выполнено $\mathcal{C}\,G_{<H} = \mathcal{C}\,H$. Этот факт очень удобен при конкретных вычислениях, так как в $\mathcal{C}\,G$ очень много одинаковых слоёв $\mathcal{C}\,G_{<gH}$: если g_1H_1 и g_2H_2 — смежные классы по изоморфным подгруппам H_1 и H_2, то $\mathcal{C}\,G_{<g_1H_1} \cong \mathcal{C}\,G_{<g_2H_2}$. Аналогичная ситуация наблюдается для $\mathcal{L}\,G$ и $\mathcal{S}\,G$.

Переформулируем доказанные нами на основе метода спектральных последовательностей теоремы на язык групповых решёток.

Теорема 6.1. *Числа Бетти $\mathcal{L}\,G$, $\mathcal{C}\,G$ и $\mathcal{S}\,G$ для всех $m \geqslant 0$ оцениваются сверху через числа Бетти всех собственных нетривиальных подгрупп следующим образом:*

$$\dim H_m(\mathcal{L}\,G) \leqslant \sum_{1<H<G} \dim \tilde{H}_{m-1}(\mathcal{L}\,H),$$
$$\dim H_m(\mathcal{C}\,G) \leqslant \sum_{1\leqslant H<G} |G:H| \dim \tilde{H}_{m-1}(\mathcal{C}\,H),$$
$$\dim H_m(\mathcal{S}\,G) \leqslant \sum_{1<H<G} |G:H| \dim \tilde{H}_{m-1}(\mathcal{S}\,H).$$

Доказательство. Случай решётки подгрупп $\mathcal{L}\,G$ является переформулировкой теоремы 4.2. Для случая же решёток $\mathcal{C}\,G$ и $\mathcal{S}\,G$ необходимо ещё добавить, что решётки $\mathcal{C}\,G_{<H}$ и $\mathcal{C}\,G_{<gH}$ изоморфны для любой подгруппы H и любого её смежного класса gH, а количество смежных классов по подгруппе H равно её индексу $|G:H|$. □

Теорема 6.2. *Пусть $\mathcal{P}G$ — это одно из частично упорядоченных множеств $\mathcal{L}\,G$, $\mathcal{C}\,G$ и $\mathcal{S}\,G$. Если для некоторого $m \geqslant 0$ и для всех подгрупп $1 < H < G$ имеем $\tilde{H}_m(\Delta\mathcal{P}H) = 0$, то $H_{m+1}(\Delta\mathcal{P}G) = 0$. Если при этом для всех $1 < H < G$ гомологии $\tilde{H}_{m-1}(\Delta\mathcal{P}H)$ не содержат кручений, то $H_m(\Delta\mathcal{P}G)$ тоже не содержат кручений.*

Доказательство. Эта теорема является прямой переформулировкой теоремы 4.3. □

Следствие 6.1. *Пусть $\mathcal{P}G$ — это одно из частично упорядоченных множеств $\mathcal{L}\,G$, $\mathcal{C}\,G$ и $\mathcal{S}\,G$. Если максимальная размерность старших ненулевых гомологий комплексов $\Delta\mathcal{P}H$ по всем собственным подгруппам $1 < H < G$ равна m_0 (если таких H нет, т. е. $G \cong \mathbb{Z}_p$, то полагаем $m_0 = -1$), то размерность старших ненулевых гомологий комплекса $\Delta\mathcal{P}G$ не превосходит $m_0 + 1$:*

$$\operatorname{Hdim}\mathcal{L}\,G \leqslant 1 + \max_{1<H<G} \operatorname{Hdim}\mathcal{L}\,H,$$
$$\operatorname{Hdim}\mathcal{C}\,G \leqslant 1 + \max_{1<H<G} \operatorname{Hdim}\mathcal{C}\,H,$$
$$\operatorname{Hdim}\mathcal{S}\,G \leqslant 1 + \max_{1<H<G} \operatorname{Hdim}\mathcal{S}\,H.$$

Следствие 6.2. *Если для любой собственной подгруппы $1 < H < G$ старшие ненулевые гомологии комплексов $H_{m_0}(\Delta\mathcal{P}H)$ не содержат кручений и при этом частично упорядоченное множество $\mathcal{P}G$ не является понижающим (т. е. размерность старших ненулевых гомологий комплекса $\Delta\mathcal{P}G$ в точности равна $m_0 + 1$), то старшие гомологии комплекса $\Delta\mathcal{P}G$ не содержат кручений.*

Рассмотрим подробнее решётку смежных классов группы $\mathrm{PSL}(2,7)$. Размерность комплекса $\Delta\,\mathcal{C}\,\mathrm{PSL}(2,7)$ равна 4 (самая длинная цепь — $\mathrm{S}_4 > \mathrm{A}_4 > \mathrm{V}_4 > \mathbb{Z}_2 > 1$). Однако решётки смежных классов каждой её подгруппы ($\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_7$, V_4, D_8, A_4, F_{21}, S_3 и S_4) имеют ненулевые редуцированные гомологии либо в размерности 0 ($\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_7$), либо в размерности 1 (V_4, A_4, D_8, F_{21} и S_3), либо в размерности 2 (S_4). Так как все подгруппы $\mathrm{PSL}(2,7)$ разрешимы, то их гомологии не имеют кручений (см. [6]). Применяя теорему 6.2 и следствие 6.2, получаем, что

$$\tilde{H}_4\big(\Delta\,\mathcal{C}\,\mathrm{PSL}(2,7)\big) = 0,$$
$$\tilde{H}_3\big(\Delta\,\mathcal{C}\,\mathrm{PSL}(2,7)\big) \text{ не имеет кручений.}$$

Очевидно, что $\Delta\,\mathcal{C}\,\mathrm{PSL}(2,7)$ связен. Более того, удаётся доказать (см. [8]), что $\mathcal{C}\,\mathrm{PSL}(2,7)$ односвязен. Отсюда по теоремам 6.1 и 4.4 сразу получаем оценки на гомологии $\mathcal{C}\,\mathrm{PSL}(2,7)$:

$$\begin{aligned}
&\tilde{H}_0\big(\mathcal{C}\,\mathrm{PSL}(2,7)\big) = 0,\\
&\tilde{H}_1\big(\mathcal{C}\,\mathrm{PSL}(2,7)\big) = 0,\\
\chi\big(\mathcal{C}\,\mathrm{PSL}(2,7)\big) \leqslant\ &\tilde{H}_2\big(\mathcal{C}\,\mathrm{PSL}(2,7)\big) \leqslant 14616,\\
&\tilde{H}_3\big(\mathcal{C}\,\mathrm{PSL}(2,7)\big) \leqslant 11760,\\
&\tilde{H}_4\big(\mathcal{C}\,\mathrm{PSL}(2,7)\big) = 0.
\end{aligned}$$

Построим теперь для произвольной группы G связь гомологий частично упорядоченных множеств $\mathcal{L}\,G$, $\mathcal{C}\,G$ и $\mathcal{S}\,G$. Рассмотрим обратную фильтрацию $\mathcal{C}\,G$ (начиная со смежных классов по максимальным подгруппам и заканчивая одноэлементными классами). Пусть $\dim\Delta\,\mathcal{C}\,G = n+1$, тогда $\mathcal{C}\,G^{n+1} = G$, так как для любого $g_0 \in G$ решётка всех смежных классов, содержащих g_0, изоморфна $\mathcal{L}\,G$, и следовательно, $\dim\Delta\,\mathcal{L}\,G = n$.

Теорема 6.3. *Рассмотрим частично упорядоченное множество* $\mathcal{S}G = \mathcal{C}\,G \setminus \mathcal{C}\,G^{n+1} \subseteq \mathcal{C}\,G$. *Если для некоторого* m *имеем* $\tilde{H}_m(\Delta\mathcal{S}G) = 0$, *то гомологии* $\tilde{H}_m(\Delta\,\mathcal{C}\,G)$ *вкладываются в гомологии* $\tilde{H}_{m-1}(\Delta\,\mathcal{L}\,G)^{|G|}$ *и существует сюръекция* $\tilde{H}_{m+1}(\Delta\,\mathcal{C}\,G) \to \tilde{H}_m(\Delta\,\mathcal{L}\,G)^{|G|}$.

Доказательство. Данную теорему проще всего доказывать с помощью точной последовательности пары (см. [1]). Рассмотрим топологическую пару $(\Delta\,\mathcal{C}\,G, \Delta\mathcal{S}G)$. Тогда по теореме 4.1 получаем, что

$$\Delta\,\mathcal{C}\,G/\Delta\mathcal{S}G = \Delta\,\mathcal{C}\,G^{\leqslant n+1}/\Delta\,\mathcal{C}\,G^{\leqslant n} = \bigvee_{g\in G} \Sigma\,\mathcal{C}\,G_{>\{g\}} = \bigvee_{g\in G} \Sigma\,\mathcal{L}\,G = \bigvee^{|G|} \Sigma\,\mathcal{L}\,G.$$

Выпишем теперь точную последовательность пары $(\Delta\,\mathcal{C}\,G, \Delta\mathcal{S}G)$:

$$\begin{aligned}
\ldots \to \tilde{H}_{m+1}(\mathcal{C}\,G) \to \tilde{H}_{m+1}\Bigg(\bigvee^{|G|}\Sigma\,\mathcal{L}\,G\Bigg) \to \tilde{H}_m(\mathcal{S}G) \to&\\
\to \tilde{H}_m(\mathcal{C}\,G) \to \tilde{H}_m\Bigg(\bigvee^{|G|}\Sigma\,\mathcal{L}\,G\Bigg) &\to \ldots.
\end{aligned}$$

Если $\tilde{H}_m(\mathcal{S}G) = 0$, то мы получаем инъекцию $\tilde{H}_m(\Delta\,\mathcal{C}\,G) \to \tilde{H}_{m-1}(\Delta\,\mathcal{L}\,G)^{|G|}$ и сюръекцию $\tilde{H}_{m+1}(\Delta\,\mathcal{C}\,G) \to \tilde{H}_m(\Delta\,\mathcal{L}\,G)^{|G|}$. $\square$

Следствие 6.3. *Пусть* $\dim\Delta\,\mathcal{L}\,G = n \geqslant 0$. *Тогда* $\dim\Delta\,\mathcal{C}\,G = n+1$ *и* $H_{n+1}(\Delta\,\mathcal{C}\,G)$ *вкладываются в* $\tilde{H}_n(\Delta\,\mathcal{L}\,G)^{|G|}$. *В частности, если гомологии*

$\tilde{H}_n(\Delta\,\mathcal{L}\,G)$ равны 0 или не содержат кручений, то соответственно гомологии $H_{n+1}(\Delta\,\mathcal{C}\,G)$ равны 0 или не содержат кручений.

Доказательство. Так как $\dim \mathcal{S}G = n$, то достаточно применить теорему 6.3 для случая $m = n+1$. □

Следствие 6.4. *Верна следующая оценка на старшие числа Бетти:*

$$\dim \tilde{H}_{n+1}(\Delta\,\mathcal{C}\,G) \leqslant |G| \dim \tilde{H}_n(\Delta\,\mathcal{L}\,G).$$

Теперь перенесём понятия понижающих частично упорядоченных множеств на случай групповых решёток. Важно отметить, что если верна гипотеза о том, что $\mathcal{L}\,G$, $\mathcal{C}\,G$ и $\mathcal{S}\,G$ — букеты сфер возможно разных размерностей (см. [11]), то гомологическая размерность совпадает с максимальной размерностью сфер в букете.

Скажем несколько слов о том, как устроены уровни групповых решёток. Для любого $k \geqslant 0$ в частично упорядоченных множествах $\mathcal{L}\,G$, $\mathcal{C}\,G$ и $\mathcal{S}\,G$ на уровнях $\mathcal{L}\,G^k$, $\mathcal{S}\,G^k$ и $\mathcal{C}\,G^{k+1}$ стоят одинаковые подгруппы. Уровень в любом частично упорядоченном множестве $\mathcal{P}G$ является понижающим, если соответствующие частично упорядоченные множества всех подгрупп $\mathcal{P}H$ на этом уровне являются понижающими.

Теорема 6.4. *Пусть $\mathcal{P}G$ — это одно из частично упорядоченных множеств $\mathcal{L}\,G$, $\mathcal{C}\,G$ и $\mathcal{S}\,G$ и $\dim \Delta\mathcal{P}G = n$. Если в $\mathcal{P}G$ ровно $s(\mathcal{P}G)$ понижающих уровней, то $\operatorname{Hdim} \Delta\mathcal{P}G \leqslant n - s(\mathcal{P}G)$. При этом $\mathcal{P}G$ является понижающим тогда и только тогда, когда $\operatorname{Hdim} \Delta\,\mathcal{L}\,G \leqslant n - s(\mathcal{P}G) - 1$.*

Доказательство. Эта теорема является прямой переформулировкой теоремы 5.1. □

Следствие 6.2 может быть переформулировано следующим образом.

Следствие 6.5. *Если частично упорядоченные множества $\mathcal{P}H$ всех собственных подгрупп H конечной группы G не содержат кручений в старших гомологиях и частично упорядоченное множество $\mathcal{P}G$ не является понижающим, то старшие гомологии $\mathcal{P}G$ не содержат кручений.*

Оказывается, что частично упорядоченные множества $\mathcal{L}\,G$ и $\mathcal{C}\,G$ связаны в смысле их «понижающих» свойств.

Лемма 6.1. *Пусть ни $\mathcal{L}\,G$, ни $\mathcal{C}\,G$ не содержат ни одного понижающего уровня. Тогда если $\mathcal{L}\,G$ понижающее, то и $\mathcal{C}\,G$ понижающее.*

Доказательство. Лемма очевидным образом вытекает из следствия 6.3. □

7. Группы Сузуки

Рассмотрим группу $G = \mathrm{Sz}(2^{p^k})$, где число p простое, а $k \geqslant 2$ (для $k = 1$ гомотопический тип решётки $\mathcal{L}\,G$ полностью установлен — см. [10]). Все её подгруппы делятся на разрешимые и $\mathrm{Sz}(2^{p^l})$, где $l < k$. Очевидно, что количество сопряжённых подгрупп к данной подгруппе $H = \mathrm{Sz}\bigl(2^{p^l}\bigr)$ в группе G совпадает с её индексом $|G : H|$, так как H совпадает со своим стабилизатором в G. При этом подгруппы $\mathrm{Sz}\bigl(2^{p^l}\bigr)$ образуют ровно один класс сопряжённости в G для каждого $l < k$ (см. [12]). Таким образом

$$\bigl|\mathrm{Sz}\bigl(2^{p^k}\bigr) : \mathrm{Sz}\bigl(2^{p^l}\bigr)\bigr| = \bigl|\mathrm{Sz}\bigl(2^{p^k}\bigr) : \mathrm{Sz}\bigl(2^{p^{l+1}}\bigr)\bigr|\,\bigl|\mathrm{Sz}\bigl(2^{p^{l+1}}\bigr) : \mathrm{Sz}\bigl(2^{p^l}\bigr)\bigr|, \quad \text{где} \quad l < k.$$

Значит, каждая подгруппа $\mathrm{Sz}\bigl(2^{p^l}\bigr)$ содержится ровно в одной подгруппе $\mathrm{Sz}\bigl(2^{p^{l+1}}\bigr)$, и следовательно, по лемме о слоях Квиллена (или, скажем, по лемме о правильной части решётки) мы можем выкинуть из решётки $\mathcal{L}\,G$ все подгруппы вида $\mathrm{Sz}\bigl(2^{p^l}\bigr)$, где $l < k-1$. Пусть R — это подрешётка всех разрешимых подгрупп G, а S — это все подгруппы G вида $G' = \mathrm{Sz}\bigl(2^{p^{k-1}}\bigr)$. Тогда

$$\Delta\,\mathcal{L}\,G \cong \Delta(S \cup R).$$

Более того, любая подгруппа из S является максимальной как в $\mathcal{L}\,G$, так и в $S \cup R \subseteq \mathcal{L}\,G$. Тогда по лемме 4.1

$$\Delta\,\mathcal{L}\,G/\Delta R \cong \Delta(S \cup R)/\Delta R \cong \bigvee^{|G:G'|} \Sigma\Delta\bigl((S \cup R)_{<G'}\bigr).$$

Шарешьян доказал (см. [10]), что ΔR гомотопически эквивалентна букету окружностей: $\Delta R \cong \bigvee\limits_{\tilde{\chi}(G)} \mathrm{S}^1$. Теперь мы полностью подготовились для применения спектральной последовательности. Построим фильтрацию комплекса $\Delta(S \cup R)$: $\Delta R \subseteq \Delta(S \cup R) \cong \mathcal{L}\,G$. В получившейся спектральной последовательности в E^1 будут только две ненулевые клетки (за исключением, конечно, $E^1_{0,0} = \mathbb{Z}$):

$$E^1_{0,1} = \mathbb{Z}^{|G|}, \quad E^1_{1,1} = \bigl(\mathbb{Z}^{|G'|}\bigr)^{|G:G'|} = \mathbb{Z}^{|G|}.$$

Таким образом, мы автоматически получаем следующие выводы:

1) если $k \geqslant 2$, то $\mathrm{Hdim}\,\mathcal{L}\,\mathrm{Sz}\bigl(2^{p^k}\bigr) \leqslant 2$, и если $k = 1$, то, естественно, $\mathrm{Hdim}\,\mathcal{L}\,\mathrm{Sz}(2^p) = 1$;
2) редуцированные гомологии $\mathcal{L}\,\mathrm{Sz}\bigl(2^{p^k}\bigr)$ при $k \geqslant 2$ устроены следующим образом:
$$\tilde{H}_2\Bigl(\mathcal{L}\,\mathrm{Sz}\bigl(2^{p^k}\bigr)\Bigr) = \mathbb{Z}^s, \quad \tilde{H}_1\Bigl(\mathcal{L}\,\mathrm{Sz}\bigl(2^{p^k}\bigr)\Bigr) = \mathbb{Z}^s \oplus T,$$
где $0 \leqslant s \leqslant |G|$, а T — это некоторая конечная коммутативная группа (кручения).

Рассмотрим теперь $G = \mathrm{Sz}(2^{pq})$, где числа p и q простые. Пусть $R \subseteq \mathcal{L}\,G$ снова обозначает множество всех собственных разрешимых подгрупп G, а S состоит из всех простых подгрупп G, т. е. из сопряжённого класса $G_p = \mathrm{Sz}(2^p)$ и сопряжённого класса $G_q = \mathrm{Sz}(2^q)$. Тогда, естественно, $\mathcal{L}\,G = R \cup S$, и по лемме 4.1

$$\Delta\,\mathcal{L}\,G/\Delta R = \Delta(S \cup R)/\Delta R \cong \bigvee^{|G:G_p|} \Sigma\Delta\,\mathcal{L}\,G_p \vee \bigvee^{|G:G_q|} \Sigma\Delta\,\mathcal{L}\,G_q.$$

Значит, в спектральной последовательности, построенной по такой же фильтрации $\Delta R \subseteq \Delta G$, будут только две ненулевые клетки (за исключением неинтересной $E^1_{0,0} = \mathbb{Z}$):

$$E^1_{0,1} = \mathbb{Z}^{|G|}, \quad E^1_{1,1} = \mathbb{Z}^{2|G|}.$$

Это означает, что редуцированные гомологии $\mathcal{L}\,\mathrm{Sz}(2^{pq})$, где числа p и q простые, устроены следующим образом:

$$\tilde{H}_2\Big(\mathcal{L}\,\mathrm{Sz}\big(2^{p^k}\big)\Big) = \mathbb{Z}^{|G|+s}, \quad \tilde{H}_1\Big(\mathcal{L}\,\mathrm{Sz}\big(2^{p^k}\big)\Big) = \mathbb{Z}^s \oplus T,$$

где $0 \leqslant s \leqslant |G|$, а T — это кручения.

Для произвольной группы Сузуки оценки, полученной аналогичным образом из спектральной последовательности, оказываются несколько хуже:

$$\dim \tilde{H}_1\big(\mathcal{L}\,\mathrm{Sz}(2^r)\big) \leqslant |G|,$$
$$\dim \tilde{H}_{k+1}\big(\mathcal{L}\,\mathrm{Sz}(2^r)\big) \leqslant \sum_{r'|r} \dim \tilde{H}_k\big(\mathcal{L}\,\mathrm{Sz}(2^{r'})\big) \quad \text{для всех} \quad k \geqslant 1.$$

Литература

[1] Фоменко А. Т., Фукс Д. Б. Курс гомотопической топологии. — М.: Наука, 1989.

[2] Björner A., Walker J. W. A homotopy complementation formula for partially ordered sets // European J. Combin. — 1983. — Vol. 4. — P. 11—19.

[3] Brown K. S. The coset poset and probabilistic zeta function of a finite group // J. Algebra. — 2000. — Vol. 225, no. 2. — P. 989—1012.

[4] Dickson L. E. Linear Groups with an Exposition of the Galois Theory. — New York: Dover, 1984.

[5] Hall P. The Eulerian functions of a group // Quart. J. Math. — 1936. — Vol. 7. — P. 134—151.

[6] Kratzer C., Thevenaz J. Type d'homotopie des treillis et treillis des sous-groupes d'un groupe fini // Comment. Math. Helv. — 1985. — Vol. 60. — P. 85—106.

[7] Quillen D. Homotopy properties of the poset of nontrivial p-subgroups of a group // Adv. Math. — 1978. — Vol. 28, no. 2. — P. 101—128.

[8] Ramras D. A. Connectivity of the coset poset and the subgroup poset of a group // J. Group Theory. — 2005. — Vol. 8. — P. 719—746.

[9] Shareshian J. Combinatorial properties of subgroup lattices of finite groups: Ph. D. Thesis. — Rutgers University, 1996.

[10] Shareshian J. On the shellability of the order complex of the subgroup lattice of a finite group // Trans. Amer. Math. Soc. — 2001. — Vol. 353, no. 7. — P. 2689—2703.

[11] Shareshian J. Topology of order complexes of intervals in subgroup lattices // J. Algebra. — 2003. — Vol. 268. — P. 677—686.

[12] Suzuki M. On a class of doubly transitive groups // Ann. Math. — 1962. — Vol. 75. — P. 105—145.