О проективных и наследственных модулях над кольцами обобщённых матриц

П. А. КРЫЛОВ, Е. Ю. ЯРДЫКОВ
Томский государственный университет
e-mail: Yardikov@mail.ru

УДК 512.553

Ключевые слова: кольцо обобщённых матриц, проективный модуль.

Аннотация

Статья посвящена исследованию проективных модулей над кольцом обобщённых матриц.

Abstract

P. A. Krylov, E. Yu. Yardykov, Projective and hereditary modules over generalized matrix ring, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 5, pp. 125—138.

The work is devoted to the investigation of projective and hereditary modules over generalized matrix ring.

Проективные модули над кольцом обобщённых треугольных матриц охарактеризованы Хагани и Варадараджаном [10] (см. также [7]). Мы расширяем этот результат и описываем проективные модули над кольцами обобщённых (или формальных) матриц с нулевыми идеалами следа. Затем применяем это описание и характеризуем наследственные модули над такими кольцами, в частности выясняем строение наследственных колец обобщённых матриц с нулевыми идеалами следа. Для треугольных колец это сделано в [8].

С кольцами обобщённых матриц и их связями с контекстами Мориты можно познакомиться по [2, § 10; 4, гл. 12; 5, § 6.10; 14]. Модули над такими кольцами изучаются в [6,9,12,13] и других работах. Например, в [12] показано, как можно сконструировать любой инъективный модуль над кольцом обобщённых матриц из двух инъективных модулей над кольцами.

Все встречающиеся кольца считаем ассоциативными с единицей, модули — унитарными и, как правило, левыми.

1. Определения и предварительные факты

Пусть R и S — кольца, ${}_RM_S$ и ${}_SN_R$ — бимодули. Допустим, что существуют бимодульные гомоморфизмы $\varphi\colon M \otimes_S N \to R$ и $\psi\colon N \otimes_R M \to S$, удовлетворяющие условиям ассоциативности: $(mn)m' = m(nm')$ и $(nm)n' = n(mn')$ для всех

m, m' из M и n, n' из N. Здесь мы полагаем $mn = \varphi(m \otimes n)$ и $nm = \psi(n \otimes m)$. Кольцом обобщённых матриц называют множество матриц вида

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} \middle| \, r \in R, \ s \in S, \ m \in M, \ n \in N \right\}$$

с операциями, заданными как в обычном кольце матриц (см. [2,4,5,7,8,12,14]). Букву K мы фиксируем для обозначения введённого кольца

$$\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}.$$

Пусть существуют левые R-модуль X и S-модуль Y и гомоморфизмы R-модулей $f\colon M \otimes_S Y \to X$ и S-модулей $g\colon N \otimes_R X \to Y$, такие что выполнены равенства ассоциативности $m(nx) = (mn)x$, $n(my) = (nm)y$ для всех $m \in M$, $n \in N$, $x \in X$, $y \in Y$, где $nx = g(n \otimes x)$, $my = f(m \otimes y)$. Известно, что тогда группа столбцов $\left(\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right)$ образует левый K-модуль относительно естественного умножения матриц на столбцы. Верно и обратное. Именно, если A — левый K-модуль, то A изоморфен некоторому модулю столбцов.

Аналогичные рассмотрения верны для правых K модулей. Именно, любой правый K-модуль имеет вид модуля строк $\left(\begin{smallmatrix} X & Y \end{smallmatrix}\right)$, где X, Y — правые R-модуль и S-модуль соответственно. С ним ассоциируются модульные гомоморфизмы $Y \otimes_S N \to X$ и $X \otimes_R M \to Y$, удовлетворяющие соответствующим равенствам ассоциативности. Модульное умножение есть стандартное произведение строки и матрицы. Подробнее о связях между левыми и правыми модулями над кольцами обобщённых матриц говорится перед следствием 4.2.

Образы гомоморфизмов φ и ψ обозначим I и J соответственно. Таким образом, $I = MN$ и $J = NM$, где под MN (NM) понимаем множество всех конечных сумм элементов вида mn (соответственно nm). Идеалы I и J называют идеалами следа кольца K.

Гомоморфизмы f и g можно назвать гомоморфизмами модульного умножения. Пусть MY (NX) обозначает множество всех конечных сумм элементов вида my (соответственно nx). Ясно, что $MY = \mathrm{Im}(f)$ и $NX = \mathrm{Im}(g)$.

Обозначения, подобные $MN, MY, \ldots$, будем использовать и в случае, когда берутся подгруппы в $M, N, Y, \ldots$. Чтобы не повторяться, опишем следующую общую ситуацию. Пусть A — правый, B — левый модули над кольцом T, C — абелева группа и $h\colon A \otimes_T B \to C$ — гомоморфизм. Образ $h(a \otimes b)$, где $a \in A$, $b \in B$, обозначим ab. Для подмодулей A' в A и B' в B договоримся под $A'B'$ понимать множество всех конечных сумм элементов вида $a'b'$ ($a' \in A'$, $b' \in B'$). Конечно, $A'B'$ есть образ композиции индуцированного гомоморфизма $A' \otimes_T B' \to A \otimes_T B$ с h.

Будем без пояснений использовать в тексте «модульность» отображений φ, ψ, f и g, наши соглашения о записи образов элементов и подмножеств при действии этих отображений и четыре условия ассоциативности. Например, имеем равенства $IM = (MN)M = M(NM) = MJ$ и точно так же $JN = NI$. Если

$\left(\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right)$ — K-модуль, то $IX = (MN)X = M(NX) \subseteq MY$ и $JY \subseteq NX$. Далее, $N(IX) \subseteq N(MY) = (NM)Y = JY$ и $M(JY) \subseteq IX$.

Для удобства и сокращения записей матрицу $\left(\begin{smallmatrix} r & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, где $r \in R$, отождествляем с элементом r, матрицу $\left(\begin{smallmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, где $m \in M$, — с m и т. д. Такие же соглашения принимаем и для множеств матриц. Так, множество матриц $\left(\begin{smallmatrix} X & Y \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ записываем как (X, Y) или просто X при $Y = 0$. Поступаем аналогично, когда нули стоят в верхней строке. Подкольцо $\left(\begin{smallmatrix} R & 0 \\ 0 & S \end{smallmatrix}\right)$ естественно отождествляем с произведением $R \times S$ и т. д. Похожие договорённости действуют для K-модулей (левых и правых) и их элементов. В частности, $\left(\begin{smallmatrix} X \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ пишем как X, $\left(\begin{smallmatrix} x \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ и $(x, 0)$ — как x и т. д.

Уточним строение подмодулей и фактор-модулей K-модулей.

Пусть дан модуль $A = \left(\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right)$ над кольцом K. Тогда подмножество A' является подмодулем модуля A тогда и только тогда, когда существуют подмодуль X' R-модуля X, подмодуль Y' S-модуля Y, такие что $A' = \left(\begin{smallmatrix} X' \\ Y' \end{smallmatrix}\right)$, причём $MY' \subseteq X'$ и $NX' \subseteq Y'$.

Кроме того, пусть $A = \left(\begin{smallmatrix} X \\ Y \end{smallmatrix}\right)$ — левый K-модуль, $A' = \left(\begin{smallmatrix} X' \\ Y' \end{smallmatrix}\right)$ — его подмодуль. Тогда группа столбцов $\left(\begin{smallmatrix} X/X' \\ Y/Y' \end{smallmatrix}\right)$ и отображения

$$\bar{f}\colon M \otimes_S Y/Y' \to X/X', \quad \bar{g}\colon N \otimes_R X/X' \to Y/Y',$$

действующие по правилам

$$\bar{f}(m \otimes \bar{y}) = \bar{f}(m \otimes y + Y') = f(m \otimes y) + X'$$

для всех $m \in M$, $y \in Y$ и

$$\bar{g}(n \otimes \bar{x}) = \bar{g}(n \otimes x + X') = g(n \otimes x) + Y'$$

для всех $n \in N$, $x \in X$, задают левый K-модуль, изоморфный фактор-модулю модуля A по подмодулю A', т. е. $A/A' \cong \left(\begin{smallmatrix} X/X' \\ Y/Y' \end{smallmatrix}\right)$.

Кратко остановимся теперь на строении идеалов и фактор-колец кольца K. Обозначим через e идемпотент

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

кольца K,

$$1 - e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Используя соглашения о записях элементов и множеств, имеем равенство

$$K = \begin{pmatrix} eKe & eK(1-e) \\ (1-e)Ke & (1-e)K(1-e) \end{pmatrix}. \tag{$*$}$$

Заметим, что при таком подходе действие гомоморфизмов φ и ψ совпадает с умножением в кольце K. Если теперь L — какой-то идеал кольца K, то непосредственно проверяется, что

$$L = \begin{pmatrix} eLe & eL(1-e) \\ (1-e)Le & (1-e)L(1-e) \end{pmatrix},$$

где eLe и $(1-e)L(1-e)$ — идеалы колец R и S соответственно, $eL(1-e)$ и $(1-e)Le$ — подбимодули в M и N соответственно. Подгруппы, находящиеся в одной из четырёх позиций в L, совпадают с множествами соответствующих компонент всех элементов из L.

Рассмотрим группу $\bar{K}$ матриц

$$\begin{pmatrix} \dfrac{eKe}{eIe} & \dfrac{eK(1-e)}{eI(1-e)} \\ \dfrac{(1-e)Ke}{(1-e)Ie} & \dfrac{(1-e)K(1-e)}{(1-e)I(1-e)} \end{pmatrix}.$$

В действительности мы имеем кольцо обобщённых матриц. Умножение матриц из $\bar{K}$ индуцируется умножением матриц из K. Проверка показывает, что отображение

$$K/L \to \bar{K}, \quad \begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} + L \to \begin{pmatrix} \bar{r} & \bar{m} \\ \bar{n} & \bar{s} \end{pmatrix},$$

является кольцевым изоморфизмом (черта обозначает соответствующий смежный класс).

Выше говорилось о том, что любой K-модуль есть модуль столбцов. Действительно, если V — некоторый K-модуль, то V можно отождествить с $\left(\begin{smallmatrix} eV \\ (1-e)V \end{smallmatrix}\right)$. Если K записать как в $(*)$, то соответствующие гомоморфизмы модульного умножения — это просто модульное умножение K на V.

Предметом нашего исследования будут проективные и наследственные модули над кольцом обобщённых матриц K, для которого $I = 0 = J$, т. е. над кольцом с нулевыми идеалами следа. Такие кольца иногда называют «тривиальными». При этом не имеется в виду какая-то «простота» этих колец. Например, к тривиальным кольцам относятся кольца треугольных матриц

$$\begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} R & 0 \\ N & S \end{pmatrix}$$

(для их задания гомоморфизмы φ и ψ не нужны).

Для любого кольца K обобщённых матриц существует кольцевой гомоморфизм

$$R \times S \to K, \quad (r, s) \to \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}.$$

Следовательно, всякий K-модуль есть $(R \times S)$-модуль. Для тривиального кольца K «диагональное» отображение

$$K \to R \times S, \quad \begin{pmatrix} r & m \\ n & s \end{pmatrix} \to (r, s),$$

является гомоморфизмом с ядром

$$\begin{pmatrix} 0 & M \\ N & 0 \end{pmatrix}.$$

Значит, любой $(R \times S)$-модуль естественным способом можно считать K-модулем. Тривиальное кольцо K есть расщепляющееся расширение кольца $R \times S$ с помощью идеала
$$\begin{pmatrix} 0 & M \\ N & 0 \end{pmatrix}$$
в смысле наличия разложения абелевых групп:
$$K = (R \times S) \oplus \begin{pmatrix} 0 & M \\ N & 0 \end{pmatrix}.$$

В заключение раздела покажем, что если X — левый R-модуль, то стандартным способом можно определить левый K-модуль $\left(\begin{smallmatrix} X \\ N \otimes_R X \end{smallmatrix}\right)$. Понятно, что $\left(\begin{smallmatrix} X \\ N \otimes_R X \end{smallmatrix}\right)$ — абелева группа. Зададим соответствующие гомоморфизмы модульного умножения
$$f\colon M \otimes_S (N \otimes_R X) \to X, \quad g\colon N \otimes_R X \to N \otimes_R X.$$
Именно, f есть композиция естественного изоморфизма $M \otimes_S (N \otimes_R X) \cong$ $\cong (M \otimes_S N) \otimes_R X$ с $\varphi \otimes 1$ и с естественным изоморфизмом $R \otimes_R X \cong X$. Гомоморфизм g полагаем тождественным. Заметим, что необходимые равенства ассоциативности при таком задании гомоморфизмов выполняются. Итак, $\left(\begin{smallmatrix} X \\ N \otimes_R X \end{smallmatrix}\right)$ — левый K-модуль. Аналогично группа столбцов $\left(\begin{smallmatrix} M \otimes_S Y \\ Y \end{smallmatrix}\right)$ образует левый K-модуль.

2. Тензорное произведение и плоские модули

Получим некоторую информацию о строении тензорного произведения над кольцом обобщённых матриц K. Рассмотрим также ряд общих свойств плоских K-модулей.

Группу, порождённую некоторым множеством X, обозначаем $\langle x \rangle$ или $\langle x, y \rangle$, где подразумевается, что элементы x, y пробегают множество X. Особо отметим, что все изоморфизмы, встречающиеся ниже, являются каноническими.

Пусть $U = (A, B)$ и $V = \left(\begin{smallmatrix} C \\ D \end{smallmatrix}\right)$ — правый и левый K-модуль соответственно.

Предложение 2.1. *Имеем изоморфизм $U \otimes_K V \cong (A \otimes_R C \oplus B \otimes_S D)/H$, где подгруппа H порождается элементами $a \otimes md - am \otimes d$, $b \otimes nc - bn \otimes c$ для всех $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, $d \in D$, $m \in M$, $n \in N$.*

Доказательство. Группа $A \otimes_R C \oplus B \otimes_S D$ изоморфна группе $U \otimes_{R \times S} V$ при соответствии образующих элементов $a \otimes c + b \otimes d \to (a, b) \otimes \left(\begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix}\right)$. Обозначим $G_1 = U \otimes_{R \times S} V$ и $G_2 = U \otimes_K V$. Воспользуемся определением тензорного произведения как фактор-группы свободной группы (см. [1, § 10.1]). Пусть F — свободная абелева группа с базисом, состоящим из всех пар $\left((a, b), \left(\begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix}\right)\right)$, $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, $d \in D$. Тогда $G_1 = F/H_1$ и $G_2 = F/H_2$, где H_1 и H_2 — подгруппы, порождённые элементами известного вида. Разница между этими подгруппами следующая. Среди образующих элементов группы H_1 присутствуют все элементы вида $\big((a,b),(r,s)\left(\begin{smallmatrix} c\\ d\end{smallmatrix}\right)\big) - \big((ar,bs),\left(\begin{smallmatrix} c\\ d\end{smallmatrix}\right)\big)$, $r\in R$, $s\in S$, а среди образующих элементов группы H_2 — вида $\big((a,b),k\left(\begin{smallmatrix} c\\ d\end{smallmatrix}\right)\big) - \big((a,b)k,\left(\begin{smallmatrix} c\\ d\end{smallmatrix}\right)\big)$, $k=\left(\begin{smallmatrix} r & m\\ n & s\end{smallmatrix}\right)\in K$. Все другие образующие элементы этих групп одинаковые. Таким образом, $H_1\subseteq H_2$. Имеем соотношения $G_2=F/H_2\cong (F/H_1)/(H_2/H_1)=G_1/H$, где $H=H_2/H_1$. Группа H_2/H_1 порождается образами образующих элементов группы H_2, т. е. элементами вида $\big((a,b)\otimes\left(\begin{smallmatrix} md\\ nc\end{smallmatrix}\right)\big) - \big((bn,am)\otimes\left(\begin{smallmatrix} c\\ d\end{smallmatrix}\right)\big)$. С помощью изоморфизма, указанного выше, получаем $G_2\cong (A\otimes_R C\oplus B\otimes_S D)/H$, где

$$H=\langle a\otimes md+b\otimes nc-bn\otimes c-am\otimes d\rangle=\langle a\otimes md-am\otimes d, b\otimes nc-bn\otimes c\rangle$$

(подгруппу H не переобозначаем). Предложение доказано. □

Применим изоморфизм из предложения 2.1 к плоскому K-модулю и некоторым правым идеалам кольца K. В частности, к идеалам, получаемым из идеалов следа I и J кольца K. Напоминаем о соглашении, принятом в разделе 1, о записи подмножеств модулей над кольцом матриц.

Предложение 2.2. *Для плоского K-модуля $\left(\begin{smallmatrix} P\\ Q\end{smallmatrix}\right)$ справедливы следующие утверждения.*

1. *Если X — S-подмодуль в M, то $(XN\otimes_R P\oplus X\otimes_S Q)/H\cong XQ$, где $H=\langle xn\otimes mq-xnm\otimes q,\, x'\otimes np-x'n\otimes p\rangle$.*
2. *Если L — правый идеал кольца S, то $(LN\otimes_R P\oplus L\otimes_S Q)/G\cong LQ$, где $G=\langle ln\otimes mq-lnm\otimes q,\, l'\otimes np-l'n\otimes p\rangle$.*

Похожие изоморфизмы имеют место для любого R-подмодуля в N и любого правого идеала кольца R.

Доказательство. 1. Возьмём правый идеал (XN,X) кольца K. Можно записать изоморфизм и равенства абелевых групп

$$(XN,X)\otimes_K\begin{pmatrix} P\\ Q\end{pmatrix}\cong (XN,X)\cdot\begin{pmatrix} P\\ Q\end{pmatrix}=XNP+XQ=XQ.$$

С другой стороны, согласно предложению 2.1 получаем

$$(XN,X)\otimes_K\begin{pmatrix} P\\ Q\end{pmatrix}\cong (XN\otimes_R P\oplus X\otimes_S Q)/H,$$

что доказывает утверждение 1.

2. Рассмотрим правый идеал (LN,L) кольца K. Аналогично утверждению 1 имеем

$$(LN\otimes_R P\oplus L\otimes_S Q)/G\cong (LN,L)\otimes_K\begin{pmatrix} P\\ Q\end{pmatrix}\cong LQ.$$

Предложение доказано. □

Следствие 2.3. *В условиях предложения 2.2 имеем следующее:*

1) *если $I=0$, то $X\otimes_S Q/NP\cong XQ$; если $N=0$, то $X\otimes_S Q\cong XQ$;*
2) *если же $N=0$, то $L\otimes_S Q\cong LQ$ для всякого правого идеала L кольца S, что равносильно плоскостности S-модуля Q.*

Доказательство. Поясним первый изоморфизм в 1). Если $I = 0$, то $XN = 0$, и $(X \otimes_S Q)/H \cong XQ$, где $H = \langle x \otimes np \rangle$. Подгруппа H есть образ группы $X \otimes_S NP$ в $X \otimes_S Q$. Поэтому $(X \otimes_S Q)/H \cong X \otimes_S Q/NP$.

Положим в первых пунктах предложения 2.2 и следствия 2.3 $X = M$, а в аналоге для правого идеала L кольца R второго пункта предложения 2.2 $L = I$. □

Следствие 2.4. *Пусть* $\binom{P}{Q}$ *— плоский* K*-модуль. Тогда*

1) $(I \otimes_R P \oplus M \otimes_S Q)/H \cong MQ$; *если* $I = 0$, *то* $M \otimes_S Q/NP \cong MQ$; *если* $N = 0$, *то* $M \otimes_S Q \cong MQ$;
2) $(I \otimes_R P \oplus IM \otimes_S Q)/G \cong IP$, *где* G *— соответствующая подгруппа из предложения* 2.1.

Проведём некоторые общие рассмотрения относительно K-модуля $\binom{P}{Q}$, что позволит уточнить следствие 2.4.

Обозначим через L идеал
$$\begin{pmatrix} I & IM \\ JN & J \end{pmatrix}$$
кольца K и положим $\bar{K} = K/L$. Фактор-кольцо $\bar{K}$ отождествляется с кольцом обобщённых матриц
$$\begin{pmatrix} R/I & M/IM \\ N/JN & S/J \end{pmatrix},$$
которое обозначим как
$$\begin{pmatrix} \bar{R} & \bar{M} \\ \bar{N} & \bar{S} \end{pmatrix}$$
(см. раздел 1). Заметим, что $\bar{M}\bar{N} = 0 = \bar{N}\bar{M}$. Рассмотрим подмодули $\binom{IP}{JQ}$ и $\binom{MQ}{NP}$ модуля $\binom{P}{Q}$, первый содержится во втором. Значит, существуют фактор-модули $\binom{P}{Q} / \binom{IP}{JQ}$ и $\binom{P}{Q} / \binom{MQ}{NP}$, которые можно отождествить с модулями $\begin{pmatrix} P/IP \\ Q/JQ \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} P/MQ \\ Q/NP \end{pmatrix}$ соответственно (см. раздел 1). Поскольку $L\binom{P}{Q} = \binom{IP}{JQ}$, то $\begin{pmatrix} P/IP \\ Q/JQ \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} P/MQ \\ Q/NP \end{pmatrix}$ являются $\bar{K}$-модулями.

Возьмём теперь идеал
$$L_1 = \begin{pmatrix} I & M \\ N & J \end{pmatrix}$$
кольца K. Можно записать
$$K/L_1 \cong \begin{pmatrix} R/I & 0 \\ 0 & S/J \end{pmatrix} = R/I \times S/J.$$
Из $L_1\binom{P}{Q} = \binom{MQ}{NP}$, как и выше, выводим, что $\begin{pmatrix} P/MQ \\ Q/NP \end{pmatrix}$ есть $(\bar{R} \times \bar{S})$-модуль. Это можно также получить, рассмотрев канонический гомоморфизм
$$\begin{pmatrix} \bar{R} & \bar{M} \\ \bar{N} & \bar{S} \end{pmatrix} \to \bar{R} \times \bar{S},$$
отображающий матрицу в её главную диагональ.

Следствие 2.5. *Если* $\binom{P}{Q}$ *— плоский* K*-модуль, то справедливы следующие утверждения*:

1) $\binom{P/IP}{Q/JQ}$ *— плоский* $\bar{K}$*-модуль и*

$$M/IM \otimes_S Q/NP \cong MQ/IP, \quad N/JN \otimes_R P/MQ \cong NP/JQ;$$

2) P/MP *и* Q/NP *— плоские* $\bar{R}$*-модуль и* $\bar{S}$*-модуль соответственно*;
3) *при* $I = 0 = J$ *имеем, что* P/MQ *— плоский* R*-модуль,* Q/NP *— плоский* S*-модуль, а при* $N = 0$ *имеем, что* Q *— плоский* S*-модуль.*

Доказательство. 1. С учётом равенства $\binom{P/IP}{Q/JQ} = \binom{P}{Q}/L\binom{P}{Q}$ факт плоскостности хорошо известен (можно, например, применить критерий Чейза [4, предложение 11.33]. Применяя к $\bar{K}$-модулю $\binom{P/IP}{Q/JQ}$ пункт 1) следствия 2.4 и принимая во внимание, что $\bar{M}\bar{N} = 0$, получаем изоморфизм $\bar{M} \otimes_{\bar{S}} \bar{Q}/\bar{N}\bar{P} \cong \bar{M}\bar{Q}$. Вычисления показывают, что в другой записи он имеет вид $M/IM \otimes_S Q/NP \cong$ $\cong MQ/IP$. Второй изоморфизм получается аналогично.

2. Так как $\binom{P}{Q}$ — плоский K-модуль, то, как в пункте 1, $\binom{P/MQ}{Q/NP}$ — плоский $(\bar{R} \times \bar{S})$-модуль. Поэтому P/MQ — плоский $\bar{R}$-модуль и Q/NP — плоский $\bar{S}$-модуль.

3. Утверждение 3) прямо получается из 2). □

3. Проективные K-модули

Сформулируем один результат общего характера. K-модули из следующей теоремы определены в разделе 1.

Теорема 3.1. *Если* X *и* Y *— проективный* R*-модуль и* S*-модуль соответственно, то* $\binom{X}{N \otimes_R X}$ *и* $\binom{M \otimes_S Y}{Y}$ *— проективные* K*-модули. Верно и обратное.*

Доказательство. Рассуждения проведём для R-модуля X.

Необходимость. Пусть модуль ${}_RX$ проективен. Тогда $X \oplus X_1 \cong \bigoplus_t R$ для некоторого кардинального числа t. Обозначим этот изоморфизм через α. Рассмотрим естественные изоморфизмы

$$(N \otimes_R X) \oplus (N \otimes_R X_1) \cong N \otimes_R (X \oplus X_1) \cong N \otimes_R \left(\bigoplus_t R\right) \cong \bigoplus_t (N \otimes_R R) \cong \bigoplus_t N.$$

Обозначим композицию этих изоморфизмов через β. Установим теперь изоморфизм

$$\begin{pmatrix} X \\ N \otimes_R X \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} X_1 \\ N \otimes_R X_1 \end{pmatrix} \cong \bigoplus_t \begin{pmatrix} R \\ N \end{pmatrix}.$$

Здесь $\left(\begin{smallmatrix} R \\ N \end{smallmatrix}\right)$ — проективный модуль, как прямое слагаемое свободного. Заметим, что

$$\begin{pmatrix} X \\ N \otimes_R X \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} X_1 \\ N \otimes_R X_1 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} X \oplus X_1 \\ (N \otimes_R X) \oplus (N \otimes_R X_1) \end{pmatrix}_{f,g},$$

где гомоморфизмы f и g модульного умножения являются суммами (f_1, f_2) и (g_1, g_2) соответствующих гомоморфизмов модульного умножения. Осталось заметить, что

$$\begin{pmatrix} X \oplus X_1 \\ (N \otimes_R X) \oplus (N \otimes_R X_1) \end{pmatrix} \cong \bigoplus_t \begin{pmatrix} R \\ N \end{pmatrix}$$

при отображении (α, β).

Достаточность. Покажем, что существует такой гомоморфизм $\psi_1 \colon X \to A$, такой что следующая диаграмма с точной нижней строкой является коммутативной:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, equal] \arrow[d, "\psi_1"'] & X \arrow[d, "\varphi_1"] & \\ A \arrow[r, "\pi_1"'] & B \arrow[r] & 0\,. \end{tikzcd}$$

Для этого рассмотрим следующую диаграмму и покажем, что она коммутативна при некотором K-гомоморфизме (ψ_1, ψ_2):

$$\begin{tikzcd} \begin{pmatrix} X \\ N \otimes_R X \end{pmatrix} \arrow[r, equal] \arrow[d, "(\psi_1,\psi_2)"'] & \begin{pmatrix} X \\ N \otimes_R X \end{pmatrix} \arrow[d, "(\varphi_1,\varphi_2)"] & \\ \begin{pmatrix} A \\ N \otimes_R A \end{pmatrix} \arrow[r, "(\pi_1,\pi_2)"'] & \begin{pmatrix} B \\ N \otimes_R B \end{pmatrix} \arrow[r] & 0\,, \end{tikzcd}$$

где S-гомоморфизмы $\varphi_2 \colon N \otimes_R X \to N \otimes_R B$ и $\pi_2 \colon N \otimes_R A \to N \otimes_R B$ есть $1 \otimes \varphi_1$ и $1 \otimes \pi_1$. При таком задании имеем K-гомоморфизмы (φ_1, φ_2) и $\pi = (\pi_1, \pi_2)$. Отметим, что π является эпиморфизмом, в силу того что π_1 и π_2 — эпиморфизмы. Так как $\left(\begin{smallmatrix} X \\ N \otimes_R X \end{smallmatrix}\right)$ — проективный K-модуль, то данная диаграмма является коммутативной при надлежащем выборе K-гомоморфизма (ψ_1, ψ_2). Таким образом, показано существование гомоморфизма $\psi_1 \colon X \to A$, для которого $\varphi_1 = \pi_1 \circ \psi_1$, что означает проективность R-модуля X. Теорема доказана. □

Замечание. Необходимость условия теоремы можно также доказать, используя только определение проективного модуля, а также с помощью леммы о дуальном базисе.

Все обозначения и соглашения, принятые перед следствием 2.5, сохраняются.

Следствие 3.2. *Пусть* $\left(\begin{smallmatrix} P \\ Q \end{smallmatrix}\right)$ — *проективный K-модуль. Тогда*

1) $\left(\begin{smallmatrix} P/IP \\ Q/JQ \end{smallmatrix}\right)$ — *проективный K/L-модуль;*
2) P/MQ — *проективный R/I-модуль и* Q/NP — *проективный S/J-модуль.*

Доказательство. Если V — проективный модуль над кольцом T и A — идеал в T, то V/AV — проективный T/A-модуль. Следствие доказано. □

Теорема 3.3. *Пусть K — такое кольцо обобщённых матриц, что $I = 0 = J$. Записанные ниже утверждения о K-модуле $\binom{P}{Q}$ эквивалентны:*

1) *$\binom{P}{Q}$ — проективный модуль;*
2) *P/MQ и Q/NP — проективные модули, $M \otimes_S Q/NP \cong MQ$ и $N \otimes_R P/MQ \cong NP$;*
3) *существуют проективные R-модуль X и S-модуль Y, такие что*
$$\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ NP \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} MQ \\ Y \end{pmatrix}$$
и $M \otimes_S Y \cong MQ$, $N \otimes_R X \cong NP$ канонически;
4) *существуют проективные R-модуль X и S-модуль Y, для которых*
$$\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} X \\ N \otimes_R X \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} M \otimes_S Y \\ Y \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Факт проективности содержится в следствии 3.2, наличия изоморфизмов — в следствии 2.5.

Проверим справедливость импликации 2) $\Longrightarrow$ 3). Прежде уточним следующее. Имеется индуцированный гомоморфизм $M \otimes_S Y \to M \otimes_S Q$ (поскольку $Y \subseteq Q$). Его композиция с гомоморфизмом модульного умножения $M \otimes_S Q \to MQ$ даёт гомоморфизм $M \bigotimes_S Y \to MQ$. В 3) подразумевается, что это изоморфизм. Можно записать $P = X \oplus MQ$ и $Q = NP \oplus Y$, где $X \cong P/MQ$, $Y \cong Q/NP$. Заметив, что $\binom{X}{NP}$ и $\binom{MQ}{Y}$ — K-модули, имеем равенства
$$\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \oplus MQ \\ NP \oplus Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ NP \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} MQ \\ Y \end{pmatrix}.$$

Импликация 3) $\Longrightarrow$ 4) очевидна, а 4) $\Longrightarrow$ 1) следует из теоремы 3.1. Теорема доказана. □

Для кольца треугольных матриц получаем следующий результат (эквивалентность условий 1) и 2) доказана в [10, теорема 3.1]).

Следствие 3.4. *Пусть дан K-модуль $\binom{P}{Q}$, где*
$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}.$$
Следующие утверждения эквивалентны:

1) *$\binom{P}{Q}$ — проективный модуль;*
2) *P/MQ — проективный R-модуль, Q — проективный S-модуль, и $M \otimes_S Q \cong MQ$;*
3) *Q — проективный S-модуль, и существует такой проективный R-модуль X, что $\binom{P}{Q} = X \oplus \begin{pmatrix} MQ \\ Q \end{pmatrix}$ и $M \otimes_S Q \cong MQ$;*

4) *Q — проективный S-модуль, и существует проективный R-модуль X со свойством* $\binom{P}{Q} \cong X \oplus \binom{M\otimes_S Q}{Q}$.

4. Наследственные K-модули

Некоторый модуль называется наследственным, если все его подмодули проективны.

Теорема 4.1. *Пусть K — такое кольцо обобщённых матриц, что $I = 0 = J$. K-модуль $\binom{P}{Q}$ является наследственным в точности тогда, когда P и Q — наследственные модули, для любого подмодуля B в Q модуль P/MB проективен и $M \otimes_S B \cong MB$, для любого подмодуля A в P модуль Q/NA проективен и $N \otimes_R A \cong NA$.*

Доказательство. Предположим, что $\binom{P}{Q}$ — наследственный модуль. Для любого подмодуля B в Q K-модуль $\binom{MB}{B}$ проективен, как подмодуль в $\binom{P}{Q}$. Из теоремы 3.3 получаем, что

$$\begin{pmatrix} MB \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ NMB \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} MB \\ Y' \end{pmatrix}$$

для некоторого проективного модуля Y'. Но $NMB = IB = 0$ и $B = Y'$. Поэтому B — проективный, а Q — наследственный модули. В силу той же теоремы $M \otimes_S B \cong MB$. Возьмём теперь подмодуль $\binom{P}{B+NP}$ модуля $\binom{P}{Q}$. Опять из теоремы 3.3 следует, что P/MB — проективный модуль.

Аналогичные рассуждения верны и для модуля P.

Считаем теперь, что условия теоремы выполняются, и пусть $\binom{A}{B}$ — некоторый подмодуль в $\binom{P}{Q}$. Имеем соотношения $P = X \oplus MB$, $M \otimes_S B \cong MB$ и $Q = Y \oplus NA$, $N \otimes_R A \cong NA$, где X, Y — какие-то проективные модули. Включения $MB \subseteq A$, $NA \subseteq B$ гарантируют наличие разложений $A = (A \cap X) \oplus MB$, $B = (B \cap Y) \oplus NA$ и

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cap X \\ NA \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} MB \\ B \cap Y \end{pmatrix}.$$

Убедимся, что последнее разложение удовлетворяет условиям пункта 3) теоремы 3.3. В самом деле, $A \cap X$ и $B \cap Y$ — проективные модули. Имеем $M \otimes_S B \cong MB$ и $M \otimes_S B \cong M \otimes_S (B \cap Y) \oplus M \otimes_S NA$. Но $M \otimes_S NA \cong MNA = 0$. Таким образом, $M \otimes_S (B \cap Y) \cong MB$. Аналогично $N \otimes_R (A \cap X) \cong NA$. По теореме 3.3 $\binom{A}{B}$ — проективный K-модуль. Значит, $\binom{P}{Q}$ наследственный. Теорема доказана. □

Утверждения, аналогичные теоремам 3.3 и 4.1, имеют место для правых K-модулей. Их можно и формально вывести из указанных теорем путём перехода к модулям над противоположным кольцом. Напомним, что если V — правый T-модуль, то формула $tv = vt$ ($t \in T$, $v \in V$) задаёт на V структуру левого модуля над противоположным кольцом T^0 и наоборот. Всякому утверждению о левых T^0-модулях соответствует некоторое утверждение о правых T-модулях, и наоборот. Прямо проверяется, что противоположное к K кольцо K^0 изоморфно кольцу обобщённых матриц

$$\begin{pmatrix} R^0 & N \\ M & S^0 \end{pmatrix},$$

где N рассматривается как R^0-S^0-бимодуль, а M — как S^0-R^0-бимодуль. Попутно заметим, что

$$\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} S & N \\ M & R \end{pmatrix}.$$

Следствие 4.2. *Кольцо K с $I = 0 = J$ наследственно слева в точности тогда, когда кольца R и S наследственны слева, M — наследственный R-модуль и плоский S-модуль, M/ML — проективный R-модуль для любого левого идеала L кольца S, N — наследственный S-модуль и плоский R-модуль, N/NL — проективный S-модуль для любого левого идеала L кольца R и $M \otimes_S N = 0 = N \otimes_R M$.*

Доказательство. Во-первых, левая наследственность кольца K равносильна наследственности левых K-модулей $\left(\begin{smallmatrix} R \\ N \end{smallmatrix}\right)$ и $\left(\begin{smallmatrix} M \\ S \end{smallmatrix}\right)$.

Пусть $\left(\begin{smallmatrix} R \\ N \end{smallmatrix}\right)$ — наследственный K-модуль. Теорема 4.1 влечёт левую наследственность кольца R и S-модуля N. Для любого левого идеала L кольца R имеем ещё, что N/NL — проективный S-модуль и $N \otimes_R L \cong NL$ канонически. А это и есть плоскостность R-модуля N. Наконец, $M \otimes_S N \cong MN = 0$. Оставшиеся утверждения получаются похожим образом с использованием модуля $\left(\begin{smallmatrix} M \\ S \end{smallmatrix}\right)$.

Предположим, что условия следствия выполнены. Наследственность K-модуля $\left(\begin{smallmatrix} R \\ N \end{smallmatrix}\right)$ вытекает из теоремы 4.1. Сделаем ряд уточнений. Для S-подмодуля B в N имеем $M \otimes_S B \subseteq M \otimes_S N = 0$ на основании плоскостности S-модуля M. Поскольку $MB = 0$, это даёт $M \otimes_S B \cong MB$. Если L — левый идеал кольца R, то $N \otimes_R L \cong NL$ с учётом плоскостности R-модуля N.

Аналогично устанавливается наследственность модуля $\left(\begin{smallmatrix} M \\ S \end{smallmatrix}\right)$. Следствие доказано. □

Запишем несколько следствий для кольца треугольных матриц.

Следствие 4.3 [8]. *Кольцо*

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$$

наследственно слева тогда и только тогда, когда R и S — наследственные слева кольца, M — наследственный R-модуль и плоский S-модуль и для любого левого идеала L кольца S M/ML — проективный R-модуль.

Это следствие можно применить к проблеме наследственности колец эндоморфизмов некоторых абелевых групп (см. [3, 11]).

Следствие 4.4. *Если R и S — артиновы полупримитивные кольца, то*
$$\begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix} -$$
наследственное слева и справа кольцо для всякого R-S-бимодуля M.

Следствие 4.5. *Кольцо верхних треугольных матриц*
$$\begin{pmatrix} R & R \\ 0 & R \end{pmatrix}$$
наследственно слева (или справа) в точности тогда, когда R — артиново полупримитивное кольцо.

Доказательство. Если
$$\begin{pmatrix} R & R \\ 0 & R \end{pmatrix}$$
наследственно слева (справа), то согласно следствию 4.3 для любого левого идеала L кольца R имеем $R = A \oplus L$, где A — некоторый левый (правый) идеал. Это эквивалентно артиновости и полупримитивности кольца R. Следствие доказано. □

Из записанных следствий вытекает известный факт о левой и правой наследственности кольца
$$\begin{pmatrix} D & D \\ 0 & D \end{pmatrix}$$
для произвольного тела D. Следующий результат можно считать его обобщением.

Следствие 4.6. *Пусть D и F — тела,*
$$K = \begin{pmatrix} D & V \\ W & F \end{pmatrix} -$$
кольцо обобщённых матриц, где V и W — соответствующие бимодули. Кольцо K наследственно слева (или справа) в точности тогда, когда $D \cong F$, V и W — одномерные D-пространства и F-пространства, причём либо K не является тривиальным кольцом, либо K — кольцо треугольных матриц.

Доказательство. Пусть K наследственно слева или справа. Имеем $I = 0$ или $I = D$ и то же для J. В действительности либо $I = D$ и $J = F$, либо $I = 0 = J$. В первом случае получаем, что V и W — одномерные D-пространства и F-пространства и $D \cong \operatorname{End}_F V \cong F$ (см. [4, предложение 12.7]). При $I = 0 = J$, с учётом равенства $V \otimes_F W = 0$, из следствия 4.2 выводим, что $W = 0$ или $V = 0$.

Обратно, кольцо обобщённых матриц
$$\begin{pmatrix} D & D \\ D & D \end{pmatrix},$$

не являющееся тривиальным, изоморфно «обычному» кольцу (2×2)-матриц над D. Для кольца треугольных матриц всё выводится из следствия 4.4. $\square$

Литература

[1] Каш Ф. Модули и кольца. — М.: Мир, 1981.

[2] Кашу А. И. Радикалы и кручения в модулях. — Кишинёв: Штиинца, 1983.

[3] Крылов П. А. Наследственные кольца эндоморфизмов смешанных абелевых групп // Сиб. мат. журн. — 2002. — Т. 43, № 1. — С. 108—119.

[4] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 1. — М.: Мир, 1977.

[5] Харченко В. К. Некоммутативная теория Галуа. — Новосибирск: Научная книга, 1996.

[6] Ярдыков Е. Ю. Простые модули над кольцами обобщённых матриц // Фундамент. и прикл. мат. — 2007. — Т. 13, вып. 3. — С. 245—247.

[7] Auslander M., Reiten I., Smal■ S. O. Representation Theory of Artin Algebras. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.

[8] Goodearl K. R. Ring Theory. — New York: Marcel Dekker, 1976.

[9] Haghany A., Varadarajan K. Study of formal triangular matrix rings // Commun. Algebra. — 1999. — Vol. 27. — P. 5507—5525.

[10] Haghany A., Varadarajan K. Study of modules over formal triangular matrix rings // J. Pure Appl. Algebra. — 2000. — Vol. 147. — P. 41—58.

[11] Krylov P. A., Mikhalev A. V., Tuganbaev A. A. Endomorphism Rings of Abelian Groups. — Dordrecht: Kluwer Academic, 2003.

[12] Müller M. Rings of quotient of generalized matrix rings // Commun. Algebra. — 1987. — Vol. 15. — P. 1991—2015.

[13] Nicholson W. K., Watters J. F. Classess of simple modules and triangular rings // Commun. Algebra. — 1992. — Vol. 20. — P. 141—153.

[14] Rowen L. Ring Theory. Vol. 1. — New York: Academic Press, 1988.