О хроматическом числе $\mathbb{R}^9$*

А. Б. КУПАВСКИЙ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: kupavskii@yandex.ru

А. М. РАЙГОРОДСКИЙ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: mraigor@yandex.ru

УДК 519.174.7

Ключевые слова: хроматическое число пространства, дистанционные графы.

Аннотация

В настоящей работе значительно усилена прежняя нижняя оценка хроматического числа девятимерного пространства.

Abstract

A. B. Kupavskii, A. M. Raigorodskii, On the chromatic number of $\mathbb{R}^9$, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 5, pp. 139—154.

In this work, the previous lower bound is considerably strengthened for the chromatic number of the nine-dimensional space.

1. Постановка задачи и формулировка результата

Настоящее исследование связано с классической проблемой Э. Нелсона, П. Эрдёша и Г. Хадвигера о хроматическом числе пространства (см. [5—8, 10, 16]).

Пусть n — натуральное число, $\mathbb{R}^n$ наделено евклидовой метрикой. Определим функции «правильной раскраски» пространства

$$F = F_m(x)\colon \mathbb{R}^n \xrightarrow{F} \{1, \ldots, m\}, \quad \bigl(F(x_0) = F(x)\bigr) \Longrightarrow |x - x_0| \neq 1,$$

и хроматическое число пространства

$$\chi(\mathbb{R}^n) = \min\{m \in \mathbb{N}\colon \exists\, F_m\}.$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 06-01-00383, гранта Президента РФ МД-5414.2008.1, гранта поддержки ведущих научных школ НШ-1312.2006.1, гранта фонда «Династия».

Заметим, что в определении функции раскраски не принципиально, какое именно расстояние между точками одного цвета запрещать.

Имеется ряд глубоких результатов касательно асимптотики $\chi(\mathbb{R}^n)$ при $n \to \infty$ (см. [5, 7]), большое число работ по хроматическому числу для раскрасок, каждый цвет которых имеет специальный вид (например, цвет является измеримым множеством или цвет является объединением многогранников (см. [8, 16])). Хроматическое число изучается для пространств с неевклидовой метрикой (см. [7]). Однако вычислить $\chi(\mathbb{R}^n)$ даже в случае $n = 2$ не удаётся. Наилучшие оценки — это $4 \leqslant \chi(\mathbb{R}^2) \leqslant 7$ (см. [6, 8]). С ростом размерности разрыв между верхними и нижними оценками растёт экспоненциально быстро (см. [5, 7]).

Совсем несложно понять, что $\chi(\mathbb{R}^1)$=2. Приведём таблицу нижних оценок величины $\chi(\mathbb{R}^n)$ при маленьких n:

dim	1	2	3	4	5	6
$\chi \geqslant$	2	4 [14]	6 [15]	7 [2, 11]	9 [11]	11 [12]
dim	7	8	9	10	11	12
$\chi \geqslant$	15 [5]	16 [16]	16 [16]	19 [13]	20 [5]	24 [13]

Заметим, что составить данную таблицу, несмотря на изобилие книг и обзоров, оказалось отнюдь не просто. Подобные таблицы есть и в [16], и в [10]. Однако они содержат неточности и даже грубые ошибки. Именно поэтому мы по каждой оценке, кроме тривиальной одномерной, даём ссылку на ту работу, в которой она получена. Исключение составляют ссылки на [16], где соответствующие неравенства аккуратно обоснованы, но не указано, кем это было сделано впервые.

Основной результат этой статьи состоит в улучшении нижней оценки для $\chi(\mathbb{R}^9)$ и, как следствие, для $\chi(\mathbb{R}^n)$, $n = 10, 11$.

Теорема 1. *Выполнена оценка* $\chi(\mathbb{R}^9) \geqslant 21$.

В следующих разделах мы докажем этот результат и перенесём его на бо́льшие размерности. Заметим, что появлению этого результата во многом поспособствовали компьютерные расчёты из [1].

2. Формулировка основной теоремы, доказательство теоремы 1 и оценка $\chi(\mathbb{R}^{10})$

Рассмотрим граф $G = (V, E)$, где

$$V = \{v = (v_1, \ldots, v_{10}),\ v_i \in \{0, 1\},\ v_1 + \ldots + v_{10} = 5\},$$
$$E = \{\{u, v\} \in V \times V,\ (u, v) = u_1 v_1 + \ldots + u_{10} v_{10} = 3\}.$$

Иными словами, элементы V — это векторы с координатами из $\{0, 1\}$, у которых пять единиц, и рёбрами соединены векторы со скалярным произведением 3 (далее, допуская вольность речи, мы часто будем называть вершины этого графа векторами). Как несложно понять, у этого графа будет $C_{10}^5 = 252$ вершин.

Напомним, что $\alpha(G)$ — это максимальная мощность подмножества множества V, в котором никакие две вершины не соединены ребром (любое такое подмножество называется *независимым*, а величина $\alpha(G)$ — *числом независимости*). Следующая теорема является в данной статье ключевой.

Теорема 2. *Для описанного выше графа* $\alpha(G) = 12$.

Эту теорему мы докажем в следующем разделе, а сейчас заметим, что в действительности теорема 1 сразу же следует из теоремы 2. Чтобы пояснить это, напомним несколько определений и фактов из теории геометрических графов.

Пусть $G = (V, E)$ — граф, вложенный в $\mathbb{R}^n$. Граф G называется *дистанционным*, если все его рёбра являются отрезками, соединяющими вершины, и имеют одинаковую длину. Понятно, что $\chi(\mathbb{R}^n) \geqslant \chi(G)$, где $\chi(G)$ — *хроматическое число* графа G, т. е. минимальное количество цветов, в которые можно так покрасить вершины G, чтобы любые две смежные вершины были разных цветов. В свою очередь, $\chi(G) \geqslant |V|/\alpha(G) = 252/12 = 21$. Однако изначально граф G был реализован как дистанционный граф в гиперплоскости $H = \{x_1 + \ldots + x_{10} = 5\} \subset \mathbb{R}^{10}$, $H \simeq \mathbb{R}^9$, и, следовательно, $\chi(\mathbb{R}^9) \geqslant \chi(G) \geqslant 21$. Теорема 1 доказана.

Видно, что у нас есть некоторый запас прочности. Это позволит нам доказать следующий результат.

Теорема 3. *Выполнена оценка* $\chi(\mathbb{R}^{10}) \geqslant 23$.

Доказательство. Векторы из V лежат на гиперплоскости

$$H = \{x_1 + \ldots + x_{10} = 5\}$$

и на сфере

$$S = \{x_1^2 + \ldots + x_{10}^2 = 5\},$$

значит, и на 9-мерной сфере $S' = S \cap H$. Вычислим радиус r' этой сферы. Радиус r сферы S равен $\sqrt{5}$. Расстояние ρ от центра S до H достигается на точке $a = (1/2, \ldots, 1/2)$, поэтому $\rho = |a| = \sqrt{5/2}$. Получаем $r' = \sqrt{r^2 - \rho^2} = \sqrt{5/2}$. Таким образом, $r' < 2$, значит, в $\mathbb{R}^{10}$ есть две точки p_1, p_2, находящиеся на расстоянии 2 от каждой из точек S'. Повернём S' и точку p_2 относительно точки p_1 так, чтобы $|p_3 - p_2| = 2$, где p_3 — образ точки p_2 при повороте. При этом сфера S' перейдёт в S''.

Рассмотрим граф $G_1 = (V_1, E_1)$, вершинами которого являются вершины G, их образы при повороте и точки p_1, p_2, p_3, а рёбрами соединены вершины, лежащие на расстоянии 2 друг от друга. Покажем, что $\chi(G_1) \geqslant 23$. Обозначим образ графа G при повороте через G'. Допустим, что $\chi(G_1) \leqslant 22$. Занумеруем цвета раскраски числами $1, \ldots, 22$. Пусть p_1 покрашена в цвет 1. Тогда G и G' покрашены в цвета $2, \ldots, 22$, так как p_1 соединена со всеми вершинами из G

и G', причём все цвета присутствуют, поскольку $\chi(G) \geqslant 21$, $\chi(G') \geqslant 21$. Значит, p_2 и p_3 должны быть покрашены в цвет 1. Но p_2 и p_3 соединены ребром. Противоречие. Следовательно, $\chi(G_1) \geqslant 23$. При этом граф G_1 реализован в $\mathbb{R}^{10}$ как дистанционный, таким образом, $\chi(\mathbb{R}^{10}) \geqslant \chi(G_1) \geqslant 23$. □

Замечание. Конструкция, использованная нами при доказательстве теоремы, известна как «обобщённое мозеровское веретено» (см. [14]).

3. Доказательство теоремы 2

3.1. Оценка $\alpha(G) \geqslant 12$

Несложно показать, что $\alpha(G) \geqslant 12$. Приведём пример двенадцати векторов из V, попарные скалярные произведения которых не равны 3 (векторам отвечают строки таблицы):

$$\begin{array}{cccccccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \multicolumn{4}{|c|}{C_4^1} & 0 \\
\multicolumn{4}{|c|}{C_4^1} & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\,.
\end{array}$$

Здесь и далее под обозначением C_n^m в строке, соответствующей вектору из независимой системы, будем иметь в виду C_n^m векторов, которые можно получить, расставляя m единиц по n координатам, заключённым в прямоугольник.

3.2. Оценка $\alpha(G) \leqslant 12$: вспомогательная лемма

Доказательство оценки $\alpha(G) \leqslant 12$ будет основываться на следующей лемме.

Лемма 1. *В любой максимальной независимой системе W векторов из G обязательно найдутся два со скалярным произведением 1.*

Доказательство. Пусть $W = \{x_1, \ldots, x_s\}$, причём $(x, y) \neq 1$ для любых $x, y \in W$. Заметим, что $(x, y) \neq 3$ и что $(x, y) = 5$, если и только если $x = y$.

Для каждого вектора x из W рассмотрим полином $F_x \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[y]$, $F_x(y) = (x, y)$. Допустим, что для некоторых $c_1, \ldots, c_s \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ выполнено равенство

$$c_1 F_{x_1} + \ldots + c_s F_{x_s} = 0.$$

Это означает, что $c_1 F_{x_1}(y) + \ldots + c_s F_{x_s}(y) = 0$ для всех $y \in V$. Выбирая в качестве y последовательно $x_1, \ldots, x_s$, имеем $F_{x_i}(x_j) \equiv 0 \pmod 2$ при $i \neq j$, $F_{x_i}(x_i) \equiv 1 \pmod 2$, и значит, $c_i \equiv 0 \pmod 2$.

Таким образом, полиномы F_x, отвечающие векторам из W, независимы и мощность W оценивается сверху размерностью d пространства таких полиномов. Но так как полиномы линейные от 10 переменных, то $d \leqslant 11$. Лемма доказана. $\square$

Замечание. Подобные конструкции с полиномами использовались при доказательстве нижних оценок для $\chi(\mathbb{R}^n)$ при $n \to \infty$ (см. [5, 7]).

3.3. Доказательство оценки $\alpha(G) \leqslant 12$

Рассмотрим произвольную независимую систему $W \subset V$. Мы стремимся показать, что $|W| \leqslant 12$. Ввиду леммы 1 без ограничения общности можно считать, что два вектора в W уже есть. Опять-таки не ограничивая общности, перенумеруем координаты так, как показано в таблице (1):

$$
\begin{array}{|cccccccccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \multicolumn{4}{|c|}{C_4^1} & 0 & 1.1 \\
\multicolumn{4}{|c|}{C_4^1} & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1.2 \\
\multicolumn{4}{|c|}{C_4^2} & 0 & \multicolumn{4}{|c|}{C_4^2} & 1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3.1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3.2 \\
\multicolumn{4}{|c|}{C_4^1} & 1 & \multicolumn{4}{|c|}{C_4^3} & 0 & 4.1 \\
\multicolumn{4}{|c|}{C_4^3} & 1 & \multicolumn{4}{|c|}{C_4^1} & 0 & 4.2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \multicolumn{4}{|c|}{C_4^3} & 1 & 5.1 \\
\multicolumn{4}{|c|}{C_4^3} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5.2
\end{array} . \tag{1}
$$

Здесь над чертой расположены те самые два вектора со скалярным произведением 1, а под чертой выписаны те векторы, которые ещё могли бы оказаться в W (т. е. те векторы, которые с первыми двумя в скалярном произведении не дают тройку). При этом «нижние» векторы заранее разбиты на «однородные» группы, которые мы обозначили 1.1, 1.2, 2, 3.1,... и однородность которых станет ясна чуть позже. Вкратце, смысл в том, что если мы допустим наличие одного из векторов данной группы в W, то возникнет (конечно) ряд ограничений на появление каких-либо других векторов в нашей независимой системе, но эти ограничения не зависят, по сути, от того, какой именно вектор из фиксированной группы мы предполагаем принадлежащим W.

Далее мы изучим некоторое количество отдельных случаев. Случай определяется тем, векторы какой группы мы предполагаем наличествующими в W. Например, в случае 3.2 мы изучим ситуацию, когда, помимо двух изначальных векторов, система W содержит вектор из группы 3.2 (впрочем, вектор в этой группе всего один).

Случай 3.2

Итак, здесь мы считаем, что в W есть вектор из группы 3.2. Тогда, очевидно, в W нет векторов из группы 2 и нет векторов из группы 4.2. Возникает таблица (2), построенная по тому же принципу, что и таблица (1). Теперь над чертой выписаны уже три вектора, каковые мы предполагаем лежащими в W. Под чертой по-прежнему перечислены все группы, представители которых всё ещё могут находиться в W:

$$
\begin{array}{|cccccccccc|l}
1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&\\
0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&\\
1&1&1&1&0&0&0&0&0&1&\\
\hline
1&1&1&1&0&\multicolumn{4}{|c|}{C_4^1}&0&1.1\\
\multicolumn{4}{|c|}{C_4^1}&0&1&1&1&1&0&1.2\\
0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&3.1\\
\multicolumn{4}{|c|}{C_4^1}&1&\multicolumn{4}{|c|}{C_4^3}&0&4.1\\
0&0&0&0&1&\multicolumn{4}{|c|}{C_4^3}&1&5.1\\
\multicolumn{4}{|c|}{C_4^3}&1&0&0&0&0&1&5.2
\end{array}\;. \tag{2}
$$

Будем писать $|4.1|$, $|5.1 \cup 1.2|$ и т. д., имея в виду количество векторов из указанных групп, которые могут попасть в W. Иными словами, $|4.1| = |W \cap 4.1|$ и т. д.

Заметим, что

$$|5.1 \cup 1.2| \leqslant 4, \quad |5.2 \cup 1.1| \leqslant 4.$$

Возможны два варианта: в W нет векторов из 4.1; в W такие векторы есть. В рамках первого варианта

$$|W| \leqslant 3 + |5.1 \cup 1.2| + |5.2 \cup 1.1| + |3.1| \leqslant 3 + 4 + 4 + 1 = 12.$$

В рамках второго варианта сразу пропадает 3.1. Кроме того, у всех векторов из 1.2 единица среди первых четырёх координат поневоле оказывается на том же месте, что и единица у вектора из 4.1. Аналогично у всех векторов из 5.1 три единицы, бывшие на «неопределённых местах», фиксируются на тех же позициях, что и три единицы у вектора из 4.1. В результате имеем

$$|4.1| \leqslant 4, \quad |1.2 \cup 5.1| \leqslant 1, \quad |1.1 \cup 5.2| \leqslant 4$$

и

$$|W| \leqslant 3 + |4.1| + |1.2 \cup 5.1| + |1.1 \cup 5.2| \leqslant 3 + 4 + 1 + 4 = 12.$$

Так или иначе получаем $|W| \leqslant 12$, стало быть, в дальнейшем мы вольны предполагать, что в W нет векторов из 3.2. Совершенно аналогично избавляемся от группы 3.1.

Случай 1.1

В этом случае сразу пропадает группа 5.2. От групп 3.1 и 3.2 мы уже избавились. Кроме того, в группах 2 и 4.2 происходит фиксация некоторых координат составляющих их элементов. Поэтому таблица приобретает вид

$$
\begin{array}{|cccccccccc|c}
1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&\\
0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&\\
1&1&1&1&0&1&0&0&0&0&\\
\hline
1&1&1&1&0&0&\multicolumn{3}{|c|}{C_3^1}&0&1.1\\
\hline
\multicolumn{4}{|c|}{C_4^1}&0&1&1&1&1&0&1.2\\
\hline
\multicolumn{4}{|c|}{C_4^2}&0&0&\multicolumn{3}{|c|}{C_3^2}&1&2\\
\hline
\multicolumn{4}{|c|}{C_4^1}&1&\multicolumn{4}{|c|}{C_4^3}&0&4.1\\
\hline
\multicolumn{4}{|c|}{C_4^3}&1&1&0&0&0&0&4.2\\
\hline
0&0&0&0&1&\multicolumn{4}{|c|}{C_4^3}&1&5.1
\end{array}\;. \tag{3}
$$

Разобьём дальнейшие рассуждения на подслучаи.

Подслучай 1. В рамках этого подслучая предположим, что в W есть ещё один вектор из группы 1.1 (например, вектор $(1,1,1,1,0,0,1,0,0,0)$), и допустим, что других векторов из 1.1, а также векторов из 1.2 в W нет. Тогда группа 4.2 вовсе исчезает, а группа 2 претерпевает дополнительное ограничение и в результате принимает следующий вид:

$$
\boxed{C_4^2}\;\; 0\;\; 0\;\; 0\;\; 1\;\; 1\;\; 1 \;\Big|\; 2\;.
$$

Таблица сокращается:

$$
\begin{array}{|cccccccccc|c}
1&1&1&1&1&0&0&0&0&0&\\
0&0&0&0&1&1&1&1&1&0&\\
1&1&1&1&0&1&0&0&0&0&\\
1&1&1&1&0&0&1&0&0&0&\\
\hline
\multicolumn{4}{|c|}{C_4^2}&0&0&0&1&1&1&2\\
\hline
\multicolumn{4}{|c|}{C_4^1}&1&\multicolumn{4}{|c|}{C_4^3}&0&4.1\\
\hline
0&0&0&0&1&\multicolumn{4}{|c|}{C_4^3}&1&5.1
\end{array}\;. \tag{4}
$$

Нетрудно убедиться теперь, что $|2| \leqslant 3$, $|4.1 \cup 5.1| \leqslant 5$. Имеем в итоге

$$
|W| \leqslant 4 + |2| + |4.1 \cup 5.1| \leqslant 4 + 3 + 5 = 12,
$$

и тут всё в порядке.

Подслучай 2. Здесь будем считать, что в W есть целых три вектора из группы 1.1 (а возможно, и все четыре таких вектора). Тогда, как и в подслучае 1, исчезает группа 4.2. Более того, нет в W и векторов из группы 2. Возникает следующая таблица:

$$
\left|\begin{array}{cccccccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\multicolumn{4}{|c|}{C_4^1} & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
\multicolumn{4}{|c|}{C_4^1} & 1 & \multicolumn{4}{|c|}{C_4^3} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \multicolumn{4}{|c|}{C_4^3} & 1
\end{array}\right|
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \\ \\
1.1 \\
1.2 \\
4.1 \\
5.1
\end{array}
\quad . \tag{5}
$$

Возможны два варианта. В первом варианте в W присутствуют векторы из группы 1.2. Тогда в W нет векторов из группы 5.1. Далее, $|1.2 \cup 4.1| \leqslant 5$, и в итоге

$$|W| \leqslant 5 + |1.1| + |1.2 \cup 4.1| \leqslant 5 + 1 + 5 = 11 < 12.$$

Во втором варианте векторов из группы 1.2 в W нет. На сей раз пользуемся неравенством $|4.1 \cup 5.1| \leqslant 5$ и получаем

$$|W| \leqslant 5 + |1.1| + |4.1 \cup 5.1| \leqslant 5 + 1 + 5 = 11 < 12.$$

Разбор подслучая 2 завершён.

Подслучай 3. Как и в подслучае 1, предположим, что в W ровно два вектора из группы 1.1 (иначе этот подслучай сведётся к предыдущему). Но теперь допустим ещё, что в W есть векторы из группы 1.2.

Как обычно, исчезает группа 4.2. Нет также группы 5.1. Остаются группы 1.2, 2 и 4.1. Снова имеем два варианта: нет (новых) векторов из группы 1.2; такие векторы есть. В первом варианте

$$|W| \leqslant 5 + |2 \cup 4.1| \leqslant 5 + |2| + |4.1| \leqslant 5 + 3 + 4 = 12.$$

Во втором варианте из группы 1.2 взяты два вектора (или более), так что группа 4.1 пропадает. Остаётся оценка

$$|W| \leqslant 5 + |1.2| + |2| \leqslant 5 + 3 + 3 = 11 < 12.$$

Разбор подслучая 3 завершён.

Замечание. Рассмотрев три подслучая, мы показали, что если в рамках текущего случая в W есть хотя бы один вектор из группы 1.1 сверх того, который мы фиксировали с самого начала, то $|W| \leqslant 12$. Иными словами, если в W выполнено $|1.1| \geqslant 2$, то $|W| \leqslant 12$. Полностью аналогично доказательство того, что если в W выполнено $|1.2| \geqslant 2$, то $|W| \leqslant 12$ (группы 1.1 и 1.2 в естественном смысле симметричны друг другу). Таким образом, оставаясь в рамках случая 1.1, мы можем отныне считать, что фиксированный нами вектор из группы 1.1 — это единственный представитель данной группы в W и что в W не более одного вектора из группы 1.2.

Подслучай 4. Пусть в W ровно один вектор из группы 1.1 и ровно один вектор из группы 1.2. Тогда группа 5.1 пропадает и остаются группы 2, 4.1, 4.2. При этом таблица (3) переходит в таблицу (6):

$$
\begin{array}{|cccccccccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \\
\hline
\multicolumn{3}{|c|}{C_3^2} & 0 & 0 & \multicolumn{1}{c|}{0} & \multicolumn{3}{c|}{C_3^2} & 1 & \multicolumn{1}{|c}{2} \\
0 & 0 & 0 & 1 & \multicolumn{1}{c|}{1} & \multicolumn{4}{c|}{C_4^3} & 0 & \multicolumn{1}{|c}{4.1} \\
\multicolumn{4}{|c|}{C_4^3} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \multicolumn{1}{|c}{4.2}
\end{array}
. \tag{6}
$$

Теперь нетрудно убедиться, что $|2| \leqslant 3$ и $|4.1 \cup 4.2| \leqslant 5$. Значит,

$$|W| \leqslant 4 + |2| + |4.1 \cup 4.2| \leqslant 4 + 3 + 5 = 12.$$

Подслучай 5. В W ровно один вектор из группы 1.1 и нет векторов из группы 1.2. Здесь мы допустим, что в W нет векторов из группы 5.1. Тогда остаются группы 2, 4.1, 4.2, и нетрудно видеть, что в этом подслучае $|W| \leqslant 12$. Остаётся разобрать ситуацию, когда в W векторы из группы 5.1 присутствуют. Если и в ней все будет в порядке, изучение случая 1.1 окажется завершено и от групп 1.1 и 1.2 мы избавимся. Разобьём последнюю ситуацию на четыре подслучая.

Подслучай 6. Вектор из группы 5.1, находящийся в W, имеет вид

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1\ ,$$

и других векторов из группы 5.1 в W нет. Тогда сразу исчезает группа 2 (ср. таблица (3)). Остаются только группы 4.1 и 4.2, три вектора над чертой в таблице (3) и один вектор из группы 5.1. Ясно, однако, что $|4.1| \leqslant 4$ и $|4.2| \leqslant 4$. В результате

$$|W| \leqslant 3 + |4.1| + |4.2| + 1 \leqslant 3 + 4 + 4 + 1 = 12.$$

Подслучай 7. Здесь предполагаем, что вектор из группы 5.1 по-прежнему имеет вид

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1\ ,$$

но в W есть ещё хотя бы один вектор из группы 5.1. Например, это может быть вектор

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1\ .$$

Сразу пропадает система 4.1, и ясно, что если бы мы рассмотрели другой вектор, то получилось бы то же самое. Замечая, что и в этом подслучае векторы из группы 2 в W отсутствуют, имеем неравенство

$$|W| \leqslant 3 + |4.2| + |5.1| \leqslant 3 + 4 + 4 = 11 < 12.$$

Подслучай 8. Пусть теперь вектора

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1$$

в W нет. Предположим, однако, что все другие три вектора из группы 5.1 находятся в W. Тогда эти три вектора вновь не позволяют элементам систем 2 и 4.1 попасть в W. В итоге

$$|W| \leqslant 3 + |4.2| + 3 \leqslant 3 + 4 + 3 = 10 < 12.$$

Подслучай 9. Допустим, наконец, что в $W \cap 5.1$ есть один или два вектора и эти векторы попадают в число рассмотренных нами в предыдущем подслучае. Тогда ни группа 2, ни группа 4.1, вообще говоря, не устраняются. Что касается группы 4.1, то, считая без ограничения общности, что

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad \in W \cap 5.1,$$

имеем

$$\begin{array}{|c|cccccc|l}
\hline
C_4^1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 4.1 \\
\hline
C_4^3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4.2 \\
\hline
\end{array}\ .$$

Из таблицы видно, что сейчас $|4.1 \cup 4.2| \leqslant 4$. Кроме того, конечно, $|5.1| \leqslant 2$, так что

$$|W| \leqslant 3 + |4.1 \cup 4.2| + |5.1| + |2| \leqslant 3 + 4 + 2 + |2| = 9 + |2|,$$

и всё будет в порядке, если мы докажем, что $|2| \leqslant 3$.

Зафиксируем один вектор из группы 2 и рассмотрим векторы из группы 2, которые вместе с ним могли бы находиться в W:

$$\begin{array}{|cccccccccc|l}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \\
\hline
\multicolumn{2}{|c|}{C_2^1} & \multicolumn{2}{c|}{C_2^1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2.1 \\
\hline
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \multicolumn{2}{|c|}{C_2^1} & 1 & 2.2 \\
\cline{8-9}
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \multicolumn{2}{|c|}{C_2^1} & 1 & 2.3 \\
\cline{8-9}
\end{array}\ .$$

Нетрудно убедиться, что $|2.1| \leqslant 2$, $|2.2 \cup 2.3| \leqslant 2$ и что наличие вектора из группы 2.1 исключает возможность появления в W векторов из групп 2.2 и 2.3. Таким образом, действительно, $|2| \leqslant 3$, и рассмотрение последнего подслучая (а вместе с ним и случая 1.1) завершено.

Случай 5.2

Итак, мы освободились от групп 3.1, 3.2, 1.1, 1.2. Остались группы 2, 4.1, 4.2, 5.1, 5.2, причём один вектор из группы 5.2 мы предполагаем лежащим в W. Возникает новая таблица (7). В ней над чертой, как обычно, расположены два начальных вектора и один вектор из группы 5.2. Под чертой указаны группы в том виде, какой они приобретают за счёт «верхних» трёх векторов:

$$\left|\begin{array}{cccccccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & \multicolumn{3}{c}{\boxed{C_3^1}} & 0 & \multicolumn{4}{c}{\boxed{C_4^2}} & 1 \\
\multicolumn{4}{c}{\boxed{C_4^1}} & 1 & \multicolumn{4}{c}{\boxed{C_4^3}} & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \multicolumn{4}{c}{\boxed{C_4^1}} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \multicolumn{4}{c}{\boxed{C_4^3}} & 1 \\
1 & \multicolumn{3}{c}{\boxed{C_3^2}} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right|
\begin{array}{l}
\\ \\ \\
2 \\ 4.1 \\ 4.2 \\ 5.1 \\ 5.2
\end{array} . \tag{7}$$

Снова будем рассматривать отдельные подслучаи.

Подслучай 1. Допустим, что в W нет больше векторов из группы 5.2, а также вовсе нет векторов из группы 5.1. Тогда остаются лишь группы 2, 4.1, 4.2. Прежде всего ясно, что, как и в подслучае 9 случая 1.1, выполнена оценка $|2| \leqslant 3$. Кроме того, понятно и то, что $|4.1| \leqslant 4$. Возможны два варианта. В первом варианте $|4.2| \leqslant 2$. Значит,

$$|W| \leqslant 3 + |2| + |4.1| + |4.2| \leqslant 3 + 3 + 4 + 2 = 12.$$

Во втором варианте $|4.2| > 2$ (но, разумеется, $|4.2| \leqslant 4$). Тогда группа 4.1 принимает вид

$$1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad \boxed{C_4^3} \quad 0 \ .$$

Если из такой 4.1 хотя бы три вектора попадают в W, то векторов из группы 2 в W уже нет. Стало быть, в любом случае $|2 \cup 4.1| \leqslant 5$. Таким образом,

$$|W| \leqslant 3 + |4.2| + |2 \cup 4.1| \leqslant 3 + 4 + 5 = 12.$$

Подслучай 2. Допустим, что в W есть ещё хотя бы один вектор из группы 5.2. На группу 5.1 мы здесь ограничений не накладываем. Тогда над чертой четыре вектора. Под чертой пропадает группа 4.2, но остаются 2, 4.1, 5.1, 5.2. Правда, в группе 5.2 уже не больше двух элементов (два других над чертой). Нетрудно видеть, что теперь $|2 \cup 5.2| \leqslant 3$ (любой из оставшихся двух векторов системы 5.2 запрещает всю систему 2 целиком) и $|4.1 \cup 5.1| \leqslant 5$ (любые два вектора из группы 5.1 запрещают всю систему 4.1 целиком). Значит,

$$|W| \leqslant 4 + |4.1 \cup 5.1| + |2 \cup 5.2| \leqslant 4 + 5 + 3 = 12.$$

Тут всё в порядке, и мы завершим разбор текущего случая, как только рассмотрим ситуацию, когда в W есть ровно один вектор из группы 5.2 и есть хотя бы один вектор из группы 5.1.

Подслучай 3. Возможны три варианта: в W один вектор из группы 5.1; в W два вектора из группы 5.1; в W больше двух (но, конечно, не больше четырёх) векторов из группы 5.1.

В рамках первого варианта замечаем, что без ограничения общности системы 4.1 и 4.2 имеют вид

$$
\begin{array}{|cccccccccc|c}
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & \text{(вектор из 5.1)} \\
\hline
\multicolumn{4}{|c|}{C_4^1} & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4.1 \\
\cline{1-4}
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \multicolumn{4}{|c|}{C_4^1} & 0 & 4.2 \\
\cline{6-9}
\end{array}
.
$$

Ясно, что $|4.1 \cup 4.2| \leqslant 5$, и мы получаем неравенство

$$|W| \leqslant 4 + |4.1 \cup 4.2| + |2| \leqslant 4 + 5 + 3 = 12.$$

В рамках второго варианта над чертой уже пять векторов. Однако под чертой пропадает группа 4.1, стало быть,

$$|W| \leqslant 5 + |2| + |4.2| \leqslant 5 + 3 + 4 = 12.$$

Наконец, в рамках третьего варианта над чертой не более семи векторов, а под чертой остаются лишь векторы из группы 4.2. Имеем

$$|W| \leqslant 7 + |4.2| \leqslant 11 < 12.$$

Исследование подслучая, а вместе с ним и случая 5.2 завершено. Отныне мы можем считать, что в W есть только векторы из систем 2, 4.1 и 4.2.

Сейчас мы покажем, что последний содержательный случай, который следует рассмотреть для доказательства нашей теоремы, — это случай 4.2. Для этого мы убедимся в том, что в текущей ситуации $|2| \leqslant 6$.

Как обычно, зафиксируем вектор из группы 2 и рассмотрим все оставшиеся векторы из группы 2, которые вместе с ним ещё могли бы оказаться в W:

$$
\begin{array}{|cccccccccc|c}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \\
\hline
\multicolumn{2}{|c|}{C_2^1} & \multicolumn{2}{c|}{C_2^1} & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2.1 \\
\cline{1-4}
\multicolumn{2}{|c|}{C_2^1} & \multicolumn{2}{c|}{C_2^1} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2.2 \\
\cline{1-4}\cline{6-9}
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \multicolumn{2}{|c|}{C_2^1} & \multicolumn{2}{c|}{C_2^1} & 1 & 2.3 \\
\cline{6-9}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \multicolumn{2}{|c|}{C_2^1} & \multicolumn{2}{c|}{C_2^1} & 1 & 2.4 \\
\cline{6-9}
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2.5 \\
\end{array}
.
$$

Заметим, что $|2.1 \cup 2.2| \leqslant 4$ и $|2.3 \cup 2.4| \leqslant 4$. Более того, любой вектор из групп 2.1 или 2.2 даёт тройку в скалярном произведении с любым вектором из групп 2.3 и 2.4. Это значит, что $|2.1 \cup 2.2 \cup 2.3 \cup 2.4| \leqslant 4$. Следовательно,

$$|2| \leqslant 1 + |2.1 \cup 2.2 \cup 2.3 \cup 2.4| + |2.5| \leqslant 1 + 4 + 1 = 6.$$

В итоге, если мы допустим, что в W нет векторов ни из группы 4.1, ни из группы 4.2, мы получим оценку

$$|W| \leqslant 2 + |2| \leqslant 2 + 6 = 8 < 12.$$

Стало быть, мы действительно можем считать отныне, что в W есть хотя бы один вектор из группы 4.2. (Мы выбрали группу 4.2, а не 4.1 из чисто произвольных соображений: эти системы в известном смысле симметричны друг другу и мы не ограничиваем общность, если одну из них «предпочитаем» другой.)

Случай 4.2

Итак, над чертой в таблице (8) три вектора, а под чертой то, что остаётся от групп 2, 4.1 и 4.2. Для удобства мы дробим группу 2 на подгруппы 2.1 и 2.2, группу 4.1 — на подгруппы 4.11 и 4.12, группу 4.2 — на подгруппы 4.21 и 4.22:

$$\left|\begin{array}{cccccccccc}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & \multicolumn{3}{c}{\boxed{C_3^1}} & 0 & \multicolumn{4}{c}{\boxed{C_4^2}} & 1 \\
0 & \multicolumn{3}{c}{\boxed{C_3^2}} & 0 & 0 & \multicolumn{3}{c}{\boxed{C_3^2}} & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \multicolumn{4}{c}{\boxed{C_4^3}} & 0 \\
0 & \multicolumn{3}{c}{\boxed{C_3^1}} & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \multicolumn{3}{c}{\boxed{C_3^1}} & 0 \\
1 & \multicolumn{3}{c}{\boxed{C_3^2}} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right|
\begin{array}{c}
\\ \\ \\
2.1 \\ 2.2 \\ 4.11 \\ 4.12 \\ 4.21 \\ 4.22
\end{array}. \tag{8}$$

Рассматриваем подслучаи.

Подслучай 1. Предполагаем, что в W векторов из 4.21 и 4.22 нет. Тогда замечаем, что $|2.2 \cup 4.12| \leqslant 4$. В самом деле, очевидно, что $|2.2| \leqslant 3$. Кроме того, наличие в W двух или более векторов из 4.12 исключает возможность попадания векторов из 2.2 в ту же независимую систему. Далее, $|2.1 \cup 4.11| \leqslant 5$. Действительно, $|2.1| \leqslant 3$ по тем же причинам, по которым аналогичное неравенство было выполнено в случае 5.2; кроме того, появление в W трёх векторов из 4.11 запрещает возникновение там же векторов из 2.1. В итоге

$$|W| \leqslant 3 + |2.1 \cup 4.11| + |2.2 \cup 4.12| \leqslant 3 + 5 + 4 = 12.$$

Подслучай 2. В W ровно один вектор из 4.22. Тогда векторов из 4.21 автоматически нет. Более того, система 4.11 вырождается:

$$\left|\begin{array}{cccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right| \, 4.11 \; .$$

С учётом неравенств, полученных нами в рамках подслучая 1, имеем $|2.2 \cup 4.12| \leqslant 4$, $|2.1 \cup 4.11| \leqslant 4$, стало быть,

$$|W| \leqslant 3 + |2.2 \cup 4.12| + |2.1 \cup 4.11| + 1 \leqslant 3 + 4 + 4 + 1 = 12.$$

Подслучай 3. В W ровно два вектора из 4.22. Как и в предыдущем подслучае, нет векторов из 4.21, система 4.11 вырождается, но, кроме того, система 2.1 преобразуется в

$$\left|\begin{array}{cccccc} 1 & \boxed{C_3^1} & 0 & 0 & \boxed{C_3^2} & 1 \end{array}\right| \, 2.1 \; .$$

Векторы из нынешней системы 2.1 «противоречат» единственному вектору из нынешней системы 4.11. Таким образом, ясно, что теперь $|2.1 \cup 4.11| \leqslant 3$. В результате

$$|W| \leqslant 3 + |2.1 \cup 4.11| + |2.2 \cup 4.12| + 2 \leqslant 3 + 3 + 4 + 2 = 12.$$

Подслучай 4. В W присутствуют все три вектора из 4.22. Возможны два варианта. В первом варианте W содержит единственный вектор из 4.11. Тогда пропадает группа 2.1 и мы имеем

$$|W| \leqslant 3 + |2.2 \cup 4.12| + 1 + 3 \leqslant 3 + 4 + 1 + 3 = 11 < 12.$$

Во втором варианте $|4.11| = 0$. Тогда

$$|W| \leqslant 3 + |2.1 \cup 2.2 \cup 4.12| + 3 = 6 + |2.1 \cup 2.2 \cup 4.12|,$$

и всё будет в порядке, если мы покажем, что $|2.1 \cup 2.2 \cup 4.12| \leqslant 6$.

Изучим отдельно потенциальные ситуации: нет векторов из 4.12; есть один вектор из 4.12; есть хотя бы два вектора из 4.12. В первой ситуации

$$|2.1 \cup 2.2 \cup 4.12| \leqslant |2.1| + |2.2| \leqslant 3 + 3 = 6.$$

Во второй ситуации получаем таблицу

$$\begin{array}{|cccccccccc|l}
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \text{(вектор из 4.12)} \\
\hline
1 & 0 & \multicolumn{2}{|c|}{C_2^1} & 0 & 0 & \multicolumn{3}{|c|}{C_3^2} & 1 & 2.1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \multicolumn{3}{|c|}{C_3^2} & 1 & 2.2
\end{array}.$$

Нетрудно убедиться, что теперь $|2.1 \cup 2.2| \leqslant 3$, а значит,

$$|2.1 \cup 2.2 \cup 4.12| \leqslant |2.1 \cup 2.2| + |4.12| \leqslant 4 + 1 = 5 < 6.$$

Наконец, в третьей ситуации пропадает группа 2.2. В то же время $|2.1 \cup 4.12| \leqslant 6$, и следовательно,

$$|2.1 \cup 2.2 \cup 4.12| \leqslant |2.1 \cup 4.12| \leqslant 6.$$

Все ситуации разобраны, и рассмотрение подслучая 4 завершено.

Подслучай 5. В W ровно один вектор из группы 4.21. Тогда нет группы 4.22. Кроме того, нет 4.12 и справедливы обычные оценки $|2.1 \cup 4.11| \leqslant 5$, $|2.2| \leqslant 3$. Имеем

$$|W| \leqslant 3 + |2.2| + |2.1 \cup 4.11| + 1 \leqslant 3 + 3 + 5 + 1 = 12.$$

Подслучай 6. В W не менее двух (но, конечно, не более трёх) векторов из группы 4.21. Тогда по-прежнему нет группы 4.22 и нет группы 4.12. Более того, отпадает и система 2.2. Получаем

$$|W| \leqslant 3 + |2.1 \cup 4.11| + 3 \leqslant 3 + 5 + 3 = 11 < 12.$$

Подслучаями 1—6 полностью покрывается случай 4.2, который тем самым разобран. Доказательство теоремы закончено.

4. О верхней оценке хроматического числа графа G

В предыдущих разделах мы обосновали неравенство $\chi(G) \geqslant 21$, в результате чего нам удалось прибавить пятёрку к прежней оценке величины $\chi(\mathbb{R}^9)$. Возникает естественный вопрос: все ли ресурсы графа G мы исчерпали? Может быть, на самом деле хроматическое число этого графа гораздо больше, просто мы не умеем правильно его оценить? В этом разделе мы поговорим о верхних оценках для $\chi(G)$.

Теорема 4. *Имеет место неравенство* $\chi(G) \leqslant 63$.

Сразу заметим, что зазор между оценками 21 и 63 огромен. Тем не менее 63 — это лучшее, что нам удалось строго обосновать. Это свидетельствует о том, что, по-видимому, результат теоремы 1 ещё подлежит уточнению.

Доказательство. Множество V всех $(0,1)$-векторов, каждый из которых имеет пять единичных и пять нулевых координат, нам необходимо разбить на 63 независимых подмножества-цвета. Удобно дать следующую интерпретацию задаче.

Пусть $\mathcal{R}_n = \{1, \ldots, n\}$. Всякому вектору $\mathbf{x}$ из V поставим в соответствие множество $M_{\mathbf{x}} \subset \mathcal{R}_n$ $(n = 10)$ номеров его ненулевых координат. Обозначим через $\mathcal{M}$ совокупность всех полученных множеств. Очевидно, $|\mathcal{M}| = 252$, так что, введя для краткости обозначение $s = 252$, можем написать $\mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_s\}$. При этом $|M_i| = 5$, $i = 1, \ldots, s$. В новых терминах наша цель — показать, что

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{M}_t,$$

где $t \leqslant 63$, и $|M_i \cap M_j| \neq 3$, каковы бы ни были M_i и M_j из одного и того же $\mathcal{M}_l$ с любым наперёд заданным l.

Обозначим через $\mathcal{F}$ совокупность всех неупорядоченных пар (F_1, F_2), в которых $F_1, F_2 \subset \mathcal{R}_{10}$, $|F_1| = |F_2| = 6$, $|F_1 \cap F_2| = 2$. Ясно, что $\mathcal{F} = \{(F_1^1, F_2^1), \ldots, (F_1^N, F_2^N)\}$, где $N = C_{10}^6 C_6^2/2 = 1575$. Скажем, что множество $M \in \mathcal{M}$ *покрывается* парой $(F_1, F_2) \in \mathcal{F}$, если оно содержится в одном из элементов пары. Смысл в том, что если два множества из $\mathcal{M}$ покрыты одной и той же парой из $\mathcal{F}$, то мощность их пересечения какая угодно, только не 3. В то же время каждое множество из $\mathcal{M}$ покрывается некоторой парой из $\mathcal{F}$, и потому в дальнейшем мы будем искать систему пар $\left(F_1^{i_1}, F_2^{i_1}\right), \ldots, \left(F_1^{i_t}, F_2^{i_t}\right)$, $t \leqslant 63$, которыми в совокупности покрываются все множества из $\mathcal{M}$.

Поиск такой совокупности — стандартная задача о покрытии (см. [3, 4, 9]). Идея очень простая. Пусть K — это количество пар из $\mathcal{F}$, которыми покрывается произвольное множество из $\mathcal{M}$. Ясно, что $K = C_5^1 C_6^2 = 75$. Тогда по принципу Дирихле найдётся пара из $\mathcal{F}$, которая покрывает не менее $\left\lceil \frac{sK}{N} \right\rceil = 12$ множеств из $\mathcal{M}$. Разумеется, такова любая пара, но для нас сейчас важна идея рассмотрения верхней целой части от указанной дроби.

Итак, одна пара найдена и она покрывает двенадцать множеств. Удалим эти двенадцать множеств из $\mathcal{M}$. У нас остаётся двести сорок множеств и

$N - 1 = 1574$ пар, которыми мы вольны распоряжаться для покрытия. Снова существует пара, покрывающая не менее $\left\lceil \frac{240K}{N-1} \right\rceil = 12$ множеств. Берём её. Так действуем до тех пор, пока не исчерпаем совокупность $\mathcal{M}$. Простой подсчёт показывает, что произойдёт это на 63-м шаге. Теорема доказана. $\square$

Был также реализован стандартный «жадный» алгоритм раскраски вершин графа G на компьютере. Вычисления показали, что $\chi(G) \leqslant 30$.

Литература

[1] Гутерман А. Э., Любимов В. К., Райгородский А. М., Усачёв С. А. О числах независимости графов расстояний с вершинами в $\{-1, 0, 1\}^n$: оценки, гипотезы и приложения к задачам Нелсона—Эрдёша—Хадвигера и Борсука // Мат. заметки. — 2009.

[2] Иванов Л. Л. Оценка хроматического числа пространства $\mathbb{R}^4$ // Успехи мат. наук. — 2006. — Т. 61, № 5. — С. 371—372.

[3] Кузюрин Н. Н. Асимптотическое исследование задачи о покрытии // Проблемы кибернетики. — 1980. — № 37. — С. 19—56.

[4] Райгородский А. М. Системы общих представителей // Фундамент. и прикл. мат. — 1999. — Т. 5, вып. 3. — С. 851—860.

[5] Райгородский А. М. Проблема Борсука и хроматические числа метрических пространств // Успехи мат. наук. — 2001. — Т. 56, № 1. — С. 107—146.

[6] Райгородский А. М. Хроматические числа. — М.: МЦНМО, 2003.

[7] Райгородский А. М. Линейно-алгебраический метод в комбинаторике. — М.: МЦНМО, 2007.

[8] Сойфер А. Хроматическое число плоскости: его прошлое, настоящее и будущее // Мат. просвещение. — 2004. — Вып. 8.

[9] Тараканов В. Е. Комбинаторные задачи и $(0, 1)$-матрицы. — М.: Наука, 1985.

[10] Brass P., Moser W., Pach J. Research Problems in Discrete Geometry. — Berlin: Springer, 2005.

[11] Cantwell K. Finite Euclidean Ramsey theory // J. Combin. Theory Ser. A. — 1996. — Vol. 73, no. 2. — P. 273—285.

[12] Cibulka J. On the chromatic number of real and rational spaces // Geombinatorics. — 2008. — Vol. 18, no. 2. — P. 53—66.

[13] Larman D. G., Rogers C. A. The realization of distances within sets in Euclidean space // Mathematika. — 1972. — Vol. 19. — P. 1—24.

[14] Moser L., Moser W. Solution to problem 10 // Can. Math. Bull. — 1961. — Vol. 4. — P. 187—189.

[15] Nechushtan O. On the space chromatic number // Discrete Math. — 2002. — Vol. 256. — P. 499—507.

[16] Székely L. A. Erdős on unit distances and the Szemerédi—Trotter theorems // Paul Erdős and His Mathematics II. Based on Conference, Budapest, Hungary, July 4—11, 1999 / G. Halász, ed. — Berlin: Springer, 2002. — (Bolyai Soc. Math. Stud.; Vol. 11). — P. 649—666.