

Факторизация $\{\tilde{0}, \tilde{1}\}$ -булевых матриц

Е. Е. МАРЕНИЧ

Мурманский государственный
педагогический университет
e-mail: marenich1@yandex.ru

УДК 512.64

Ключевые слова: булевы матрицы, простые булевы матрицы, элементарные матрицы.

Аннотация

В работе доказано, что каждая $\{\tilde{0}, \tilde{1}\}$ -булева матрица размера $n \times n$, $n \geq 3$, представима в виде произведения простых матриц и матриц перестановочно эквивалентных элементарным матрицам первого и второго типа, дан способ нахождения такого произведения. Рассмотрены применения полученных результатов.

Abstract

E. E. Marenich, Factorization properties of $(n \times n)$ Boolean matrices, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 5, pp. 155–164.

It is proved that every $(n \times n)$ Boolean matrix can be expressed as a product of primes and elementary matrices in the semigroup of Boolean matrices.

Введение

Простые $\{\tilde{0}, \tilde{1}\}$ -булевы матрицы изучались в работах [1–11]. В [4] доказано, что каждая $\{\tilde{0}, \tilde{1}\}$ -булева матрица размера $n \times n$, $n \geq 3$, имеющая мультипликативный ранг n , представима в виде произведения простых матриц и матриц перестановочно эквивалентных элементарным матрицам второго типа.

В настоящей работе рассмотрены факторизационные свойства $\{\tilde{0}, \tilde{1}\}$ -булевых матриц размера $n \times n$, $n \geq 3$.

Обозначения и терминология

В этом разделе собраны необходимые определения.

Пусть $(N, \leq)$ — частично упорядоченное множество. Обозначим через $\tilde{0}$ ($\tilde{1}$) наименьший (наибольший) элемент в $(N, \leq)$, если такой существует. Подмножество R частично упорядоченного множества является $\leq$ -антицепью, если $a \not\leq b$ and $b \not\leq a$ для различных элементов $a, b \in R$.

Фундаментальная и прикладная математика, 2008, том 14, № 5, с. 155–164.

© 2008 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

Пусть $P = \{\tilde{0}, \tilde{1}\}$ — двухэлементная булева решётка (булева алгебра порядка 2) с решёточными операциями $\vee$ и $\wedge$:

$$\tilde{1} \vee \tilde{1} = \tilde{1} \vee \tilde{0} = \tilde{0} \vee \tilde{1} = \tilde{1} \wedge \tilde{1} = \tilde{1}, \quad \tilde{0} \wedge \tilde{0} = \tilde{1} \wedge \tilde{0} = \tilde{0} \wedge \tilde{1} = \tilde{0},$$

и частичным порядком $\leq$: $\tilde{0} < \tilde{1}$.

Пусть $P^{m \times n}$ — множество всех $(m \times n)$ -матриц с элементами из множества P . Такие матрицы будем обозначать большими латинскими буквами: $A = \|a_{ij}\|_{m \times n}$, $B = \|b_{ij}\|_{m \times n}$, $C = \|c_{ij}\|_{m \times n}$, $X = \|x_{ij}\|_{m \times n}, \dots$

Для матрицы $A \in P^{n \times n}$ обозначим через $A_{(r)}$ и $A^{(r)}$ соответственно r -ю строку и r -й столбец A , $r = 1, 2, \dots, n$.

Произведение матриц $A = B \cdot C$ определено равенствами

$$a_{ij} = \bigvee_{r=1}^n (b_{ir} \wedge c_{rj})$$

для всех $i, j = 1, \dots, n$. Относительно умножения множество $P^{n \times n}$ образует мультипликативную матричную полугруппу.

Единичная $(n \times n)$ -матрица $E_{n \times n}$ определена равенствами

$$e_{ij} = \begin{cases} \tilde{1}, & i = j, \\ \tilde{0}, & i \neq j. \end{cases}$$

Матрица $B \in P^{n \times n}$ называется *обратной* к матрице $A \in P^{n \times n}$, если $A \cdot B = B \cdot A = E_{n \times n}$. Матрица, имеющая обратную матрицу, называется *обратимой*.

Матрица $J_{n \times n}$ порядка $n \times n$ называется *универсальной*, если все её элементы равны единице $\tilde{1}$. Нулевая матрица $0_{n \times n}$ — это матрица порядка $n \times n$, все элементы которой равны нулю $\tilde{0}$. Матрица $\overline{E_{n \times n}}$ — это матрица, у которой на главной диагонали расположены нули $\tilde{0}$, а на остальных местах единицы $\tilde{1}$.

Квадратная $\{\tilde{0}, \tilde{1}\}$ -булева матрица называется *подстановочной матрицей*, если каждый её столбец и каждая её строка содержит только одну единицу $\tilde{1}$. Обозначим Per_n множество всех подстановочных $(n \times n)$ -матриц. Подстановочные матрицы будем обозначать $M(\pi)$, $M(\sigma), \dots$. В полугруппе $P^{n \times n}$ обратимы только подстановочные матрицы. Матрицы $A, B \in P^{n \times n}$ называются *перестановочно эквивалентными*, если $B = M(\pi)AM(\sigma)$ для некоторых подстановочных матриц $M(\pi)$ и $M(\sigma)$.

Мультипликативным рангом матрицы $A \in P^{n \times n}$ называется наименьшее число $r = \text{rank}_m(A)$, такое что $A = BC$, где $B \in P^{n \times r}$ and $C \in P^{r \times n}$.

Обозначим через $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ диагональную матрицу, на главной диагонали которой расположены элементы $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Определим частичный порядок $\leq$ на множестве $P^{n \times n}$: $A \leq B$ тогда и только тогда, когда $a_{ij} \leq b_{ij}$ для всех i, j .

Если $A \leq B$, то $A \cdot C \leq B \cdot C$ и $C \cdot A \leq C \cdot B$ для всех $C \in P^{n \times n}$.

Элементарная матрица $\text{El}_n(k, \lambda)$ *первого типа* — это матрица, полученная из единичной матрицы $E = E_{n \times n}$ заменой столбца $E^{(k)}$ на столбец $\lambda E^{(k)}$.

Элементарная матрица $\text{El}_n(k, l, \lambda)$ *второго типа* — это матрица, полученная из единичной матрицы E заменой столбца $E^{(k)}$ на столбец $E^{(k)} + \lambda E^{(l)}$, где $k \neq l$.

Пусть U — конечное множество, то 2^U — семейство всех подмножеств множества U , $|U|$ — число элементов во множестве U . Обозначим через $\text{Bul}(U) = (2^U, \subseteq)$ булеву алгебру (решётку) всех подмножеств множества U . *Булеан* $\text{Bul}(n)$ — это решётка, изоморфная решётке подмножеств n -элементного множества.

Основные результаты

Матрицу называют *простой*, если она не является подстановочной матрицей и если из равенства $A = BC$ следует, что B или C — подстановочная матрица. Если необратимая матрица A не является простой, то A называется *факторизуемой*.

Непосредственно проверяется, что каждую необратимую (2×2) -матрицу можно разложить в произведение не более чем из двух матриц, перестановочно эквивалентных элементарным матрицам.

Лемма 1. Пусть $P = \{\tilde{0}, \tilde{1}\}$ — двухэлементная булева решётка, $A \in P^{3 \times 3}$. Если матрица A имеет нулевую строку, то A можно разложить в произведение не более чем пяти матриц, перестановочно эквивалентных элементарным матрицам.

Доказательство. Пусть $E = E_{3 \times 3}$ — единичная матрица. Переставив строки матрицы A так, чтобы нулевая строка стала последней, получим матрицу B , $B_{(3)} = 0_{1 \times 3}$, $A = M(\pi) \cdot B$ для некоторой подстановочной матрицы $M(\pi)$. Заменяя в матрице B строку $B_{(3)}$ на строку $E_{(3)}$, получим матрицу C . Имеем $B = \text{El}_3(3, \tilde{0}) \cdot C$. Матрицу C можно записать в виде

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{1} \end{pmatrix} = \text{El}_3(3, 1, c_{13}) \text{El}_3(3, 2, c_{23}) \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \tilde{0} \\ c_{21} & c_{22} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{1} \end{pmatrix}.$$

Матрицу

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \tilde{0} \\ c_{21} & c_{22} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{1} \end{pmatrix}$$

можно разложить в произведение, состоящее не более чем из двух матриц, перестановочно эквивалентных элементарным матрицам. Значит, матрица

$$A = M(\pi) \text{El}_3(3, \tilde{0}) \text{El}_3(3, 1, c_{13}) \text{El}_3(3, 2, c_{23}) \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \tilde{0} \\ c_{21} & c_{22} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{1} \end{pmatrix}$$

есть произведение не более чем пяти матриц, перестановочно эквивалентных элементарным матрицам. $\square$

Пример 1. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} \tilde{0} & \tilde{1} & \tilde{1} \\ \tilde{1} & \tilde{0} & \tilde{1} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} \end{pmatrix}$$

раскладывается в произведение трёх матриц, перестановочно эквивалентных элементарным матрицам:

$$A = \begin{pmatrix} \tilde{1} & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{1} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{1} & \tilde{0} & \tilde{1} \\ \tilde{0} & \tilde{1} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{0} & \tilde{1} & \tilde{0} \\ \tilde{1} & \tilde{0} & \tilde{1} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{1} \end{pmatrix}.$$

Лемма 2. Пусть $P = \{\tilde{0}, \tilde{1}\}$ — двухэлементная булева решётка, необратимая матрица $A \in P^{3 \times 3}$. Если матрица A не имеет нулевых строк, то справедливо одно из следующих утверждений.

1. Матрицу A можно разложить в произведение не более чем восьми матриц, перестановочно эквивалентных элементарным матрицам.
2. Матрицу A можно разложить в произведение, состоящее из одной простой матрицы и не более чем трёх матриц, перестановочно эквивалентных элементарным матрицам второго типа.

Доказательство. Пусть $E = E_{3 \times 3}$ — единичная матрица. Матрицу A можно разложить в произведение $A = FG$, в котором матрицы $F, G \in P^{3 \times 3}$ обладают следующими свойствами:

- 1) матрица F есть произведение не более трёх матриц, перестановочно эквивалентных элементарным матрицам второго типа $El_3(k, l, \tilde{1})$, где $k, l = 1, 2, 3, k \neq l$;
- 2) ненулевые строки матрицы G образуют $\leq$ -антицепь.

Рассмотрим два случая.

Случай 1: матрица G имеет нулевую строку. Тогда матрицу G можно разложить в произведение не более чем из пяти матриц, перестановочно эквивалентных элементарным матрицам. Поэтому матрицу A можно разложить в произведение не более чем восьми матриц, перестановочно эквивалентных элементарным матрицам. Значит, справедливо утверждение 1.

Случай 2: матрица G не имеет нулевых строк. Строки матрицы G образуют $\leq$ -антицепь. В булеане $\text{Bul}(3)$ существует только две $\leq$ -антицепи, содержащие по три элемента, эти две $\leq$ -антицепи являются средними уровнями булеана $\text{Bul}(3)$. Поэтому G — простая матрица или G — обратимая матрица. Если G — простая матрица, то матрицу A можно разложить в произведение, состоящее из одной простой матрицы и не более чем трёх элементарных матриц второго типа. Если G — обратимая матрица, то матрицу A можно разложить в произведение не более чем трёх матриц, перестановочно эквивалентных элементарным матрицам второго типа.

Значит, справедливо одно из утверждений 1, 2. $\square$

Из лемм 1 и 2 получаем следующую теорему.

Теорема 1. Пусть $P = \{\tilde{0}, \tilde{1}\}$ — двухэлементная булева решётка, $A \in P^{3 \times 3}$ — необратимая матрица. Справедливо одно из следующих утверждений.

1. Матрицу A можно разложить в произведение не более чем восьми матриц, перестановочно эквивалентных элементарным матрицам.
2. Матрицу A можно разложить в произведение, состоящее из одной простой матрицы и не более чем трёх элементарных матриц второго типа.

Пример 2. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} \tilde{0} & \tilde{1} & \tilde{1} \\ \tilde{1} & \tilde{1} & \tilde{1} \\ \tilde{1} & \tilde{1} & \tilde{0} \end{pmatrix}.$$

Матрицу A можно разложить в произведение трёх матриц, перестановочно эквивалентных элементарным матрицам:

$$A = \begin{pmatrix} \tilde{1} & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{1} & \tilde{1} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{1} & \tilde{1} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{1} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{0} & \tilde{1} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{1} \\ \tilde{1} & \tilde{1} & \tilde{0} \end{pmatrix}.$$

Матрицу A можно разложить в произведение простой матрицы и элементарной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \tilde{0} & \tilde{1} & \tilde{1} \\ \tilde{1} & \tilde{0} & \tilde{1} \\ \tilde{1} & \tilde{1} & \tilde{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{1} & \tilde{1} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{1} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{1} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь мультипликативную структуру $\{\tilde{0}, \tilde{1}\}$ -булевых матриц размера $n \times n$, $n \geq 4$.

Лемма 3. Пусть $P = \{\tilde{0}, \tilde{1}\}$ — двухэлементная булева решётка, $n \geq 4$, каждая $\{\tilde{0}, \tilde{1}\}$ -булева $((n-1) \times (n-1))$ -матрица раскладывается в произведение, состоящее из простых матриц и матриц, перестановочно эквивалентных элементарным матрицам. Тогда каждая $(n \times n)$ -матрица $A \in P^{n \times n}$, имеющая нулевую строку, раскладывается в произведение, состоящее из простых матриц и матриц, перестановочно эквивалентных элементарным матрицам (в произведениях могут отсутствовать как простые матрицы, так и матрицы, перестановочно эквивалентные элементарным матрицам).

Доказательство. Пусть $E = E_{n \times n}$ — единичная матрица. Переставив строки матрицы A так, чтобы нулевая строка стала последней, получим матрицу B , $B_{(n)} = 0_{n \times 1}$, $A = M(\pi) \cdot B$ для некоторой подстановочной матрицы $M(\pi)$. Заменяя в матрице B строку $B_{(n)}$ на строку $E_{(n)}$, получим матрицу C . Имеем $B = \text{El}_n(n, \tilde{0}) \cdot C$. Матрицу C можно записать в блочном виде:

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ 0_{1 \times (n-1)} & E_{1 \times 1} \end{pmatrix}.$$

Справедливо равенство

$$C = \text{El}_n(n, 1, c_{1n}) \dots \text{El}_n(n, n-1, c_{(n-1)n}) \begin{pmatrix} C_{11} & 0_{(n-1) \times 1} \\ 0_{1 \times (n-1)} & E_{1 \times 1} \end{pmatrix}.$$

По условию леммы матрицу

$$\begin{pmatrix} C_{11} & 0_{(n-1) \times 1} \\ 0_{1 \times (n-1)} & E_{1 \times 1} \end{pmatrix}$$

можно разложить в произведение простых матриц и матриц, перестановочно эквивалентных элементарным матрицам. Значит, матрицу

$$A = M(\pi) \text{El}_n(n, \tilde{0}) \text{El}_n(n, 1, c_{1n}) \dots \text{El}_n(n, n-1, c_{(n-1)n}) \begin{pmatrix} C_{11} & 0_{(n-1) \times 1} \\ 0_{1 \times (n-1)} & E_{1 \times 1} \end{pmatrix}$$

можно разложить в произведение простых матриц и матриц, перестановочно эквивалентных элементарным матрицам. $\square$

Семейство всех элементов ранга 1 (т. е. одноэлементных подмножеств) булеана $\text{Bul}(n)$ образует $\leq$ -антицепь, эту $\leq$ -антицепь назовём *тривиальной*.

Лемма 4. Пусть $P = \{\tilde{0}, \tilde{1}\}$ — двухэлементная булева решётка, $n \geq 3$. Для каждой необратимой матрицы $A \in P^{n \times n}$ справедливо одно из следующих утверждений.

1. Матрицу A можно разложить в произведение, состоящее из простых матриц и матриц, перестановочно эквивалентных элементарным матрицам (в произведениях могут отсутствовать как простые матрицы, так и матрицы, перестановочно эквивалентные элементарным матрицам).
2. Матрицу A можно представить в виде произведения $A = F_1 D_1 A_1$ таких матриц $A_1, D_1, F_1 \in P^{n \times n}$, что
 - матрица F_1 есть произведение некоторых элементарных матриц вида $\text{El}_n(k, l, \tilde{1})$, где $k, l = 1, \dots, n$, $k \neq l$;
 - D_1 — простая матрица;
 - матрица A_1 необратима;
 - ненулевые строки матрицы $D_1 A_1$ образуют нетривиальную $\leq$ -антицепь.

Доказательство. Доказательство теоремы проводится индукцией по числу n . Для числа $n = 3$ справедливо утверждение 1. Предположим, что лемма доказана для всех чисел, меньших числа n , где $n \geq 4$. Докажем лемму для числа n .

Матрицу A можно представить в виде произведения $A = F_1 G_1$, в котором матрица F_1 — произведение некоторых элементарных матриц вида $\text{El}_n(k, l, \tilde{1})$, где $k, l = 1, \dots, n$, $k \neq l$; ненулевые строки матрицы G_1 образуют $\leq$ -антицепь.

Если G_1 — обратимая матрица, то справедливо утверждение 1.

Если матрица G_1 имеет нулевую строку, то снова получаем утверждение 1.

Пусть G_1 — необратимая матрица, G_1 не имеет нулевых строк. Так как строки матрицы G_1 образуют $\leq$ -антицепь, то матрица G_1 имеет левый простой делитель D_1 . Имеем $G_1 = D_1 A_1$ для некоторой матрицы $A_1 \in P^{n \times n}$. Поэтому $A = F_1 D_1 A_1$, строки матрицы $D_1 A_1$ образуют $\leq$ -антицепь.

Если A_1 — необратимая матрица, то справедливо утверждение 2.

Если A_1 — обратимая матрица, то справедливо утверждение 1. $\square$

Пусть матрица A записана в виде произведения $A = P_1 P_2 \dots P_k$, состоящего из простых матриц и матриц, перестановочно эквивалентных элементарным матрицам (в произведениях могут отсутствовать как простые матрицы, так и матрицы, перестановочно эквивалентные элементарным матрицам). Это произведение будем называть *стандартной факторизацией матрицы A* .

Обозначим через $\text{ach}(\text{Bul}(n), k)$ семейство всех $\leq$ -антицепей мощности k в булеане $\text{Bul}(U)$, $|U| = n$.

Следующая теорема — основной результат о мультипликативной структуре $\{\tilde{0}, \tilde{1}\}$ -булевых матриц размера $n \times n$ — даёт способ разложения булевых матриц в произведение простых матриц и матриц, перестановочно эквивалентных элементарным матрицам. Этот способ требует знания всех простых матриц данного размера.

Теорема 2. Пусть $P = \{\tilde{0}, \tilde{1}\}$ — двухэлементная булева решётка, $n \geq 3$. Каждая необратимая матрица $A \in P^{n \times n}$ имеет стандартную факторизацию, содержащую не более $k = |\text{ach}(\text{Bul}(n), n)| - 1$ простых множителей.

Доказательство. Заметим, что k — число всех нетривиальных $\leq$ -антицепей в булеане $\text{Bul}(n)$.

По лемме 4 или для матрицы A справедлива теорема, или на первом шаге матрицу A можно представить в виде произведения матриц $A = F_1 D_1 A_1$, свойства которых указаны в лемме 4.

Пусть матрица A представлена в виде произведения $A = F_1 D_1 A_1$. Применим к матрице A_1 лемму 4. Тогда на втором шаге или будет получено доказательство теоремы, или будет найдено разложение $A_1 = F_2 D_2 A_2$, в котором

- матрица F_2 — произведение элементарных матриц вида $\text{El}_n(k, l, \tilde{1})$, $k, l = 1, \dots, n$, $k \neq l$;
- D_2 — простая матрица;
- матрица A_2 необратима;
- строки матрицы $D_2 A_2$ образуют $\leq$ -антицепь.

Применим к матрице A_2 те рассуждения, которые применялись к матрицам A и A_1 . Тогда на третьем шаге или будет доказана теорема, или будет получено разложение матрицы A_2 .

Предположим, что за k шагов описанный выше процесс не приводит к доказательству теоремы. Тогда этот процесс определит последовательности матриц

$$F_1, F_2, \dots, F_{k+1}, D_1, D_2, \dots, D_{k+1}, A_1, A_2, \dots, A_{k+1} \in P^{n \times n},$$

таких что

- матрицы $F_1, F_2, \dots, F_{k+1}$ — произведения элементарных матриц второго вида $\text{El}_n(k, l, \tilde{1})$, где $k, l = 1, \dots, n, k \neq l$;
- матрицы $A_1, A_2, \dots, A_{k+1}$ — простые матрицы;
- необратимые матрицы $A_1, A_2, \dots, A_{k+1}$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$A_{r-1} = F_r D_r A_r, \quad r = 1, 2, \dots, k+1,$$

где $A_0 = A$;

- строки матриц $D_r A_r$ образуют нетривиальные $\leq$ -антицепи.

Определим последовательность матриц

$$C_1, C_2, \dots, C_r = D_r A_r, \quad r = 1, 2, \dots, k+1.$$

Строки матриц C_r образуют $\leq$ -антицепи для всех $r = 1, 2, \dots, k+1$. Матрицы $C_1, C_2, \dots, C_{k+1}$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$C_r = D_r F_{r+1} C_{r+1}, \quad r = 1, 2, \dots, k-1. \quad (1)$$

Так как строки матриц $C_1, C_2, \dots, C_{k+1}$ образуют нетривиальные $\leq$ -антицепи, то найдутся две матрицы C_p, C_q , где $k \geq q > p \geq 1$ такие, что $C_q = M(\pi)C_p$ для некоторой подстановочной матрицы $M(\pi)$. Из рекуррентного соотношения (1) находим, что

$$C_p = (D_p F_{p+1})(D_{p+1} F_{p+2}) \dots (D_{q-1} F_q) C_q.$$

Из этого равенства следует, что матрица

$$Q = (D_p F_{p+1})(D_{p+1} F_{p+2}) \dots (D_{q-1} F_q) M(\pi)$$

является решением матричного уравнения

$$C_p = Y C_p \quad (2)$$

относительно матрицы $Y \in P^{n \times n}$. Уравнение (2) имеет наибольшее решение M . Так как единичная матрица $E = E_{n \times n}$ — решение матричного уравнения (2), то $E \leq M$.

Рассмотрим два случая.

Случай 1: $E < M$. Тогда решением уравнения (2) является некоторая элементарная матрица $\text{El}_n(k, l, \tilde{1})$, где $1 \leq k, l \leq n, k \neq l$. Из равенства $C_p = \text{El}_n(k, l, \tilde{1}) C_p$ следует, что строки матрицы C_p не образуют $\leq$ -антицепи — противоречие.

Случай 2: $E = M$. Имеем $Q \leq E$, $Q = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Если некоторое λ_i есть $\tilde{0}$, то из равенства $C_p = Q C_p$ следует, что матрица C_p имеет нулевую строку — противоречие. Пусть $\lambda_i = \tilde{1}$ для всех $i = 1, 2, \dots$. Имеем

$$Q = (D_p F_{p+1})(D_{p+1} F_{p+2}) \dots (D_{q-1} F_q) M(\pi) = E_{n \times n}.$$

Получили, что простая матрица D_p обратима — противоречие.

Все рассмотренные случаи приводят к противоречию. Поэтому не более чем k шагов описанного выше процесса приводят к доказательству теоремы. $\square$

Пример 3. Применив метод, изложенный в теореме 2, к нахождению стандартной факторизации матрицы $\overline{E_{4 \times 4}}$, получим стандартную факторизацию, состоящую из одной элементарной матрицы и двух простых матриц:

$$\overline{E_{4 \times 4}} = \begin{pmatrix} \tilde{0} & \tilde{1} & \tilde{1} & \tilde{0} \\ \tilde{1} & \tilde{0} & \tilde{1} & \tilde{0} \\ \tilde{1} & \tilde{1} & \tilde{0} & \tilde{0} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{1} \end{pmatrix} \text{El}_4(3, 4, \tilde{1}) \begin{pmatrix} \tilde{1} & \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{1} \\ \tilde{0} & \tilde{1} & \tilde{0} & \tilde{1} \\ \tilde{0} & \tilde{0} & \tilde{1} & \tilde{0} \\ \tilde{1} & \tilde{1} & \tilde{0} & \tilde{0} \end{pmatrix}.$$

Стандартные факторизации матрицы определяются не единственным способом. Например, матрица $J_{n \times n}$ имеет стандартную факторизацию, состоящую только из простых матриц, и стандартную факторизацию, состоящую только из элементарных матриц второго типа.

Для $(n \times n)$ -матриц, мультипликативный ранг которых равен числу n , теорема 1 принимает следующий вид.

Следствие 1 [4]. Пусть $P = \{\tilde{0}, \tilde{1}\}$ — двухэлементная булева решётка, $A \in P^{n \times n}$, $n \geq 3$. Если $\text{rank}_m(A) = n$, то любая стандартная факторизация матрицы A содержит только простые матрицы и матрицы, перестановочно эквивалентные элементарным матрицам второго типа.

Доказательство. В теореме 2 доказано, что матрицу A можно разложить в произведение простых матриц и матриц, перестановочно эквивалентных элементарным матрицам. Так как $\text{rank}_m(A) = n$, то мультипликативный ранг всех множителей равен n . Поэтому в произведении отсутствуют матрицы, перестановочно эквивалентные элементарным матрицам первого типа (матрицам $\text{El}_n(k, \tilde{0})$). $\square$

Следствие 2. Пусть $P = \{\tilde{0}, \tilde{1}\}$ — двухэлементная булева решётка, $n \geq 3$. Если $\text{rank}_m(A) = n$ и необратимая матрица $A \in P^{n \times n}$ перестановочно эквивалентна верхней треугольной матрице, на главной диагонали которой расположены единицы $\tilde{1}$, то любая стандартная факторизация матрицы A состоит из матриц, перестановочно эквивалентных элементарным матрицам второго типа.

Доказательство. Так как матрица A содержит единственную подстановочную матрицу, то и каждая матрица в стандартной факторизации должна содержать единственную подстановочную матрицу. Отсюда получаем нужное утверждение. $\square$

Матрица $A \in P^{n \times n}$ называется *регулярной*, если существует матрица $B \in P^{n \times n}$, такая что $ABA = A$.

Следствие 3 [4]. Пусть $P = \{\tilde{0}, \tilde{1}\}$ — двухэлементная булева решётка, $A \in P^{n \times n}$ — необратимая матрица, $\text{rank}_m(A) = n$, $n \geq 3$. Справедливы следующие утверждения.

1. Если A — идемпотент, то любая стандартная факторизация матрицы A состоит из матриц, перестановочно эквивалентных элементарным матрицам второго типа.

2. Если A — регулярная матрица, то любая стандартная факторизация матрицы A состоит из матриц, перестановочно эквивалентных элементарным матрицам второго типа.

Доказательство. 1. Идемпотент A перестановочно эквивалентен верхней треугольной матрице, на главной диагонали которой расположены единицы $\tilde{1}$.

2. Регулярная матрица A перестановочно эквивалентна верхней треугольной матрице, на главной диагонали которой расположены единицы $\tilde{1}$. $\square$

Работа выполнена в соответствии с тематическим планом Российского федерального агентства по образованию, тема № 1.03.07.

Литература

- [1] Borosh J., Hartfiel D. J., Maxson C. J. Answer to questions posed by Richman and Schneider // Linear and Multilinear Algebra. — 1976. — Vol. 3. — P. 255—258.
- [2] De Caen D., Gregory D. A. Primes in the semigroup of Boolean matrices // Linear Algebra Appl. — 1981. — Vol. 37. — P. 119—134.
- [3] De Caen D., Gregory D. A., Pullman N. J. The Boolean rank of zero-one matrices // Combinatorics and Computing. Proc. 3rd Caribb. Conf. on Combinatorics, Graph Theory, and Computing, Cave Hill, Barbados, 1981. — 1981. — P. 169—173.
- [4] Cho H. H. Prime Boolean matrices and factorizations // Linear Algebra Appl. — 1993. — Vol. 190. — P. 87—98.
- [5] Cho H. H. Permanents of prime Boolean matrices // Bull. Korean Math. Soc. — 1998. — Vol. 35, no. 3. — P. 605—613.
- [6] Devadze H. M. Generating sets of semigroups of all binary relations in a finite set // Dokl. Akad. Nauk BSSR. — 1968. — Vol. 12. — P. 765—768.
- [7] Gregory D. A., Pullman N. J. Prime Boolean matrices, a graph theoretic approach // Ars Combinatoria. — 1981. — Vol. 12. — P. 81—110.
- [8] Gregory D. A., Pullman N. J. Semiring rank: Boolean rank and nonnegative rank factorization // J. Combin. Inform. System Sci. — 1983. — Vol. 8, no. 3. — P. 223—233.
- [9] Kim K. H. Boolean Matrix Theory and Its Applications. — New York: Marcel Dekker, 1982.
- [10] Richman D. J., Schneider H. Primes in the semigroup of nonnegative matrices // Linear and Multilinear Algebra. — 1974. — Vol. 2. — P. 135—140.
- [11] Tchunte M. On the Decomposition of Boolean Matrices. — Grenoble: Univ. of Grenoble, 1980.