О росте многообразий коммутативных линейных алгебр

С. С. МИЩЕНКО
Ульяновский государственный университет
e-mail: eagle@simix.ru

УДК 512.55

Ключевые слова: многообразия, тождества, рост.

Аннотация

В классе коммутативных алгебр над полем нулевой характеристики доказано существование многообразий экспоненциального роста с любой действительной экспонентой $\alpha > 1$ и промежуточного роста, когда последовательность коразмерностей ведёт себя как n^{n^β} для любого действительного $0 < \beta < 1$.

Abstract

S. S. Mishchenko, On growth of varieties of commutative linear algebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 5, pp. 165—170.

There exists a varieties of commutative linear algebras over a field of zero characteristic whose exponent is equal to α for any real $\alpha > 1$ and the intermediate growth is n^{n^β} for any real $0 < \beta < 1$.

Характеристика основного поля F предполагается нулевой. Векторное пространство A над полем F называется линейной алгеброй, если на A задана операция, для которой выполняется свойство линейности относительного каждого операнда. Пусть $a, b \in A$ — элементы алгебры. Будем обозначать результат применения операции к этим элементам, просто приписывая элементы друг к другу. Линейность по первому и второму аргументу соответственно имеет вид

$$(\alpha a + \beta b)c = \alpha ac + \beta bc, \quad \alpha, \beta \in F, \quad a, b \in A,$$
$$c(\alpha a + \beta b) = \alpha ca + \beta cb, \quad \alpha, \beta \in F, \quad a, b \in A.$$

Классическим примером линейной ассоциативной алгебры является алгебра квадратных матриц некоторого порядка. В этой статье ассоциативность не предполагается, поэтому при более чем двух сомножителях имеет значение расположение скобок. Договоримся опускать скобки в случае их так называемой левонормированной расстановки, т. е. будем писать просто $abcd$ для $\big((ab)c\big)d$.

Напомним, что многообразие линейных алгебр определяется как совокупность всех алгебр, в которых выполняется некоторый фиксированный набор

Фундаментальная и прикладная математика, 2008, том 14, № 5, с. 165—170.

тождественных соотношений. Обозначим пространство всех полилинейных элементов от образующих $x_1, \ldots, x_n$ относительно свободной алгебры многообразия $\mathbf{V}$ через $P_n(\mathbf{V})$. Пусть $c_n(\mathbf{V}) = \dim P_n(\mathbf{V})$, тогда число

$$\mathrm{EXP}(\mathbf{V}) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(\mathbf{V})},$$

если оно существует, называется экспонентой многообразия $\mathbf{V}$. Пусть $\mathbf{V}$ — многообразие, порождённое алгеброй A. В этом случае будем писать просто $c_n(A)$ вместо $c_n(\mathbf{V})$ и $\mathrm{EXP}(A)$ вместо $\mathrm{EXP}(\mathbf{V})$. Рост последовательности чисел $c_n(\mathbf{V})$ определяет рост многообразия $\mathbf{V}$. Многообразие имеет *полиномиальный* рост, когда существуют такие неотрицательные числа C, m, что для любого n выполняется неравенство $c_n(\mathbf{V}) < Cn^m$. Если существуют такие числа $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, $d_1 > 1$, $d_2 > 1$, что для всех чисел n выполняются неравенства $C_1 d_1^n < c_n(\mathbf{V}) < C_2 d_2^n$, говорят, что рост многообразия является *экспоненциальным*. В случае когда последовательность чисел $c_n(\mathbf{V})$ нельзя ограничить никаким полиномом, но можно ограничить любой экспонентой, т. е. для любого $d > 1$ существует такое число C, что для любого n выполняется неравенство $c_n(\mathbf{V}) < Cd^n$, говорят, что рост многообразия $\mathbf{V}$ является *промежуточным* между полиномиальным и экспоненциальным.

В случае когда последовательность коразмерностей является экспоненциально ограниченной, скажем, $c_n(A) \leqslant d^n$, ясно, что последовательность $\sqrt[n]{c_n(A)}$, $n = 1, 2, \ldots$, является ограниченной, и сложной открытой проблемой остаётся вопрос существования предела $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)}$. Верхний и нижний пределы могут быть различными.

Рассмотрим несколько примеров. В случае многообразия всех ассоциативных алгебр размерность пространства полилинейных элементов будет равна $n!$, а элементы $x_{p(1)}x_{p(2)} \cdots x_{p(n)}$, где $p \in \mathrm{S}_n$ — перестановка из симметрической группы S_n, будут образовывать базис. При отсутствии ассоциативности различные расстановки скобок приводят к различным элементам. Известно, что число различных расстановок скобок в произведении n сомножителей равно $\frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$ (так называемые числа Каталана). Таким образом, для многообразия всех линейных алгебр размерность пространства полилинейных элементов будет равна

$$c_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} n! = \binom{2n-2}{n-1}(n-1)!.$$

Изучение поведения последовательностей коразмерностей началось с ассоциативного случая. Так, в [9] было отмечено, что если алгебра A удовлетворяет хотя бы одному нетривиальному тождеству, т. е. является так называемой PI-алгеброй, то $c_n(A)$ — экспоненциально ограниченная последовательность, в то время как для алгебры без тождеств $c_n(A) = n!$. Заметим, что даже в случае алгебр Ли последовательность $c_n(A)$ не обязательно является экспоненциально ограниченной. Так, в [1] впервые было доказано, что существуют многообразия алгебр Ли сверхэкспоненциального роста, а в [4] введена целая шкала сверхэкспоненциального роста многообразий полинильпотентных алгебр Ли.

В 1980-х годах Амицур выдвинул гипотезу, что для любой ассоциативной алгебры с тождеством экспонента является неотрицательным целым числом. Эта гипотеза была подтверждена в [7, 8]. В [2] доказано аналогичное утверждение для конечномерных алгебр Ли.

В этих же классических случаях ассоциативных алгебр или алгебр Ли было показано отсутствие многообразий промежуточного роста. Например, для алгебр Ли этот результат доказан в [3].

В случае произвольных линейных алгебр ситуация оказалась более разнообразной. В последние годы вышла серия работ, в которых были построены обширные серии линейных алгебр, для которых поведение последовательности чисел $c_n(A)$, $n = 1, 2, \ldots$, сильно отличалось от классических случаев. В [6] для любого действительного числа $\alpha > 1$ была построена такая алгебра A_α, что $\mathrm{EXP}(A_\alpha) = \alpha$. В [5] построена серия многообразий промежуточного роста. Более точно, для любого действительного числа β, $0 < \beta < 1$, построена такая алгебра B_β, что $\lim\limits_{n\to\infty} \log_n \log_n c_n\bigl(A(w)\bigr) = \beta$, т. е. последовательность $c_n(A)$, $n = 1, 2, \ldots$, ведёт себя как n^{n^β}, $n = 1, 2, \ldots$.

Целью данной работы является построение коммутативных алгебр с аналогичными свойствами их роста тождеств.

Анализируя построенные в [5, 6] линейные алгебры, можно заметить, что при их построении используется следующая конструкция, связанная с бесконечным двоичным словом. Пусть $w = w_1 w_2 \ldots$ — бесконечное ассоциативное слово в алфавите $\{0, 1\}$. Определим линейную алгебру $A(w)$, которая имеет базис $a, b, z_1, z_2, \ldots$ и таблицу умножения $z_i a = (1 - w_i) z_{i+1}$, $z_i b = w_i z_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots$, остальные произведения равны 0.

Аналогичным образом построим коммутативную алгебру $\tilde{A}(w)$ с базисом $\tilde{a}, \tilde{b}, z_1, z_2, \ldots$ и таблицей умножения $z_i \tilde{a} = \tilde{a} z_i = (1 - w_i) z_{i+1}$, $z_i \tilde{b} = \tilde{b} z_i = w_i z_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots$, остальные произведения равны 0.

Обозначим $Z = \mathrm{Span}\langle z_1, z_2, \ldots\rangle$. Из определения алгебр получаем, что Z является идеалом с нулевым умножением коразмерности два.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. *Для любого n выполняются неравенства*

$$\frac{1}{n}\, c_n\bigl(A(w)\bigr) \leqslant c_n\bigl(\tilde{A}(w)\bigr) \leqslant \frac{n(n-1)}{2}\, c_n\bigl(A(w)\bigr).$$

Доказательство. Отметим сначала, что в алгебре $A(w)$ выполняется тождество левой нильпотентности степени три, т. е. тождество вида $x(yz) \equiv 0$. Таким образом, все элементы пространства полилинейных элементов $P_n\bigl(A(w)\bigr)$ от образующих $x_1, x_2, \ldots, x_n$ относительно свободной алгебры многообразия, порождённого алгеброй $A(w)$, являются левонормированными словами.

Рассмотрим $P_n\bigl(\tilde{A}(w)\bigr)$ — пространство полилинейных элементов от образующих $x_1, x_2, \ldots, x_n$ относительно свободной алгебры многообразия, порождённого алгеброй $\tilde{A}(w)$. Заметим, что произведения элементов алгебры $\tilde{A}(w)$ образуют идеал с нулевым умножением алгебры $\tilde{A}(w)$. Таким образом, все мономы (слова от образующих), в которых есть как минимум два подслова степени два, являются тождествами алгебры $\tilde{A}(w)$. Учитывая тождество коммутативности, которое также выполняется в алгебре $\tilde{A}(w)$, получаем, что любой ненулевой моном пространства $P_n\big(\tilde{A}(w)\big)$ равен левонормированному моному.

Таким образом, можно предполагать, что все элементы пространств $P_n\big(A(w)\big)$, $P_n\big(\tilde{A}(w)\big)$ являются линейными комбинациями левонормированных мономов, в которых мы договорились опускать скобки.

Для всех s, t, $s = 1, 2, \ldots, n$, $t = 1, 2, \ldots, n$, рассмотрим следующие подпространства пространства $P_n\big(A(w)\big)$:

$$Q_{n,s}\big(A(w)\big) = \operatorname{Span}\langle x_s x_{i_1} \cdots x_{i_{n-1}}\rangle,$$
$$R_{n,s,t}\big(A(w)\big) = \operatorname{Span}\langle x_s x_t x_{i_1} \cdots x_{i_{n-2}}\rangle.$$

Аналогичным образом в пространстве $P_n\big(\tilde{A}(w)\big)$ определим подпространства $Q_{n,s}\big(\tilde{A}(w)\big)$ и $R_{n,s,t}\big(\tilde{A}(w)\big)$.

Понятно, что для различных s подпространства $Q_{n,s}\big(A(w)\big)$ имеют одинаковую размерность. Пусть $\dim Q_{n,s}\big(A(w)\big) = q$. Тогда размерность пространства $P_n\big(A(w)\big)$ удовлетворяет неравенству

$$c_n\big(A(w)\big) \leqslant n \cdot \dim Q_{n,s}\big(A(w)\big) = nq.$$

Никакая нетривиальная линейная комбинация базисных элементов пространства $Q_{n,s}\big(A(w)\big)$ не является тождеством алгебры $A(w)$, т. е. существует такая подстановка элементов алгебры вместе образующих, что значение линейной комбинации равно отличному от нуля элементу алгебры. Из определения таблиц умножения алгебр $A(w)$, $\tilde{A}(w)$ получаем, что результат аналогичной подстановки вместо образующих элементов алгебры $\tilde{A}(w)$ также не равен нулю. Таким образом, $c_n\big(\tilde{A}(w)\big) \geqslant q$, что завершает доказательство первой части сформулированного в теореме двойного неравенства, т. е.

$$c_n\big(\tilde{A}(w)\big) \geqslant q \geqslant \frac{1}{n}\, c_n\big(A(w)\big).$$

Понятно, что для различных s, t подпространства $R_{n,s,t}\big(\tilde{A}(w)\big)$ имеют одинаковую размерность, а пространства $R_{n,s,t}\big(\tilde{A}(w)\big)$ и $R_{n,t,s}\big(\tilde{A}(w)\big)$ в силу коммутативности просто совпадают. Пусть $\dim R_{n,s,t}\big(\tilde{A}(w)\big) = r$. Тогда для размерности пространства $P_n\big(\tilde{A}(w)\big)$ выполняется неравенство

$$c_n\big(\tilde{A}(w)\big) \leqslant \frac{n(n-1)}{2} \dim R_{n,s,t}\big(\tilde{A}(w)\big) = \frac{n(n-1)}{2}\, r.$$

Никакая нетривиальная линейная комбинация базисных элементов пространства $R_{n,s,t}\big(\tilde{A}(w)\big)$ не является тождеством алгебры $\tilde{A}(w)$, т. е. существует такая подстановка базисных элементов алгебры вместе образующих, что значение линейной комбинации равно отличному от нуля элементу алгебры. Понятно, что некоторый элемент $z_i \in Z$ подставлен вместо x_s или x_t, остальными подставленными базисными векторами алгебры $\tilde{A}(w)$ являются только векторы $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$. Поскольку пространства $R_{n,s,t}\bigl(\tilde{A}(w)\bigr)$ и $R_{n,t,s}\bigl(\tilde{A}(w)\bigr)$ совпадают, без ограничения общности можно предполагать, что базисный вектор z_i подставлен вместо образующей x_s. Из определения таблиц умножения алгебр $A(w)$ и $\tilde{A}(w)$ получаем, что результат аналогичной подстановки вместо образующих элементов алгебры $A(w)$ также не равен нулю. Таким образом, $c_n\bigl(A(w)\bigr) \geqslant r$, что завершает доказательство второй части сформулированного в теореме двойного неравенства, т. е.

$$c_n\bigl(\tilde{A}(w)\bigr) \leqslant \frac{n(n-1)}{2}\, r \leqslant \frac{n(n-1)}{2}\, c_n\bigl(A(w)\bigr).$$

Теорема доказана. □

Из доказанной теоремы получаем также, что

$$\frac{2}{n(n-1)}\, c_n\bigl(\tilde{A}(w)\bigr) \leqslant c_n\bigl(A(w)\bigr) \leqslant n\, c_n\bigl(\tilde{A}(w)\bigr).$$

Используя основной результат статьи [6], получаем следующее утверждение.

Следствие 1. *Для любого действительного числа α, $\alpha > 1$, существует такое двоичное слово w_α, что $\mathrm{EXP}\bigl(\tilde{A}(w_\alpha)\bigr) = \alpha$.*

Доказательство. Полученные в теореме неравенства, связывающие последовательности $c_n\bigl(A(w)\bigr)$, $c_n\bigl(\tilde{A}(w)\bigr)$, позволяют стандартными рассуждениями доказать в случае существования совпадение экспонент:

$$\mathrm{EXP}\bigl(A(w)\bigr) = \mathrm{EXP}\bigl(\tilde{A}(w)\bigr).$$

Следствие доказано. □

Аналогично, используя основной результат статьи [5] о существовании многообразий промежуточного роста, получаем следующий результат.

Следствие 2. *Для любого действительного числа β, $0 < \beta < 1$, существует такое двоичное слово w_β, что*

$$\lim_{n\to\infty} \log_n \log_n c_n\bigl(\tilde{A}(w_\beta)\bigr) = \beta,$$

т. е. последовательность $c_n\bigl(\tilde{A}(w_\beta)\bigr)$ ведёт себя как n^{n^β}, $n = 1, 2, \ldots$.

Таким образом, получаем, что в классе коммутативных алгебр существуют многообразия с полученными в [5, 6] свойствами роста.

Работа частично поддержана грантом РФФИ 07-01-00080.

Литература

[1] Воличенко И. Б. Многообразие алгебр Ли с тождеством $\bigl[[X_1, X_2, X_3], [X_4, X_5, X_6]\bigr] = 0$ над полем характеристики нуль // Сиб. мат. журн. — 1984. — Т. 25, № 3. — С. 40—54.

[2] Зайцев М. В. Целочисленность экспонент роста тождеств конечномерных алгебр Ли // Изв. РАН. Сер. мат. — 2002. — Т. 66, № 3. — С. 23—48.

[3] Мищенко С. П. О многообразиях алгебр Ли промежуточного роста // Весцi АН БССР. — 1987. — Т. 126, № 2. — С. 42—45.

[4] Петроградский В. М. Рост полинильпотентных многообразий алгебр Ли и быстро растущие функции // Мат. сб. — 1997. — Т. 188, № 6. — С. 119—138.

[5] Giambruno A., Mishchenko S., Zaicev M. Algebras with intermediate growth of the codimensions // Adv. Appl. Math. — 2006. — Vol. 37, no. 3. — P. 360—377.

[6] Giambruno A., Mishchenko S., Zaicev M. Codimensions of algebras and growth functions // Adv. Math. — 2008. — Vol. 217. — P. 1027—1052.

[7] Giambruno A., Zaicev M. On codimension growth of finitely generated associative algebras // Adv. Math. — 1998. — Vol. 140. — P. 145—155.

[8] Giambruno A., Zaicev M. Exponential codimension growth of P.I. algebras: An exact estimate // Adv. Math. — 1999. — Vol. 142. — P. 221—243.

[9] Regev A. Existence of identities in $A \otimes B$ // Israel J. Math. — 1972. — Vol. 11. — P. 131—152.