О проблеме Куроша в многообразиях алгебр*

Д. И. ПИОНТКОВСКИЙ
Государственный университет — Высшая школа экономики
e-mail: piont@mccme.ru

УДК 512.572+512.664.1

Ключевые слова: мультиоператорная алгебра, многообразие алгебр, проблема Куроша, проблема Бернсайда, теорема Голода—Шафаревича.

Аннотация

Рассматриваются две версии классической проблемы Куроша (о том, существует ли бесконечномерная конечно порождённая алгебраическая алгебра) для многообразий мультиоператорных линейных алгебр над полем. Показано, что в любой заданной сигнатуре существует такое многообразие алгебр, что его свободная алгебра содержит полилинейные элементы сколь угодно высокой степени, причём в клоне каждого такого элемента выполняется некоторое нетривиальное тождество. Если в сигнатуре бинарных операций не меньше двух, то можно добиться также, чтобы все эти клоны были конечномерными. Предлагаемый подход основан на том, что проблема переводится на язык операд и затем решается с помощью обычных гомологических конструкций, которые позволяют адаптировать решение оригинальной проблемы Куроша, принадлежащее Е. С. Голоду. Работа носит обзорный характер, поэтому некоторые доказательства опущены. При этом большое внимание уделяется общим связям между операдами, многообразиями и ассоциативными алгебрами.

Abstract

D. I. Piontkovski, On the Kurosh problem in varieties of algebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 5, pp. 171—184.

We consider a couple of versions of the classical Kurosh problem (whether there is an infinite-dimensional algebraic algebra?) for varieties of linear multioperator algebras over a field. We show that, given an arbitrary signature, there is a variety of algebras of this signature such that the free algebra of the variety contains polylinear elements of arbitrarily large degree, while the clone of every such element satisfies some nontrivial identity. If, in addition, the number of binary operations is at least 2, then each such clone may be assumed to be finite-dimensional. Our approach is the following: we translate the problem to the language of operads and then apply usual homological constructions in order to adopt Golod's solution of the original Kurosh problem. The paper is expository, so that some proofs are omitted. At the same time, the general relations of operads, algebras, and varieties are widely discussed.

*Работа выполнена при частичной поддержке фонда «Династия», программы поддержки ведущих научных школ (проект 1983.2008.1), гранта Президента Российской Федерации МД-2007.288.1 и РФФИ (проект 08-01-00297-а).

Фундаментальная и прикладная математика, 2008, том 14, № 5, с. 171—184.

1. Введение

1.1. Проблема Куроша и мультиоператорные алгебры

Рассуждая о будущем общей алгебры, А. Г. Курош предсказывал в 1970 г., что главные интересы будут передвигаться на нейтральную территорию между универсальной и общей алгебрами [3, с. 9]. В этой заметке делается попытка, в русле указанной тенденции, распространить некоторые классические алгебраические идеи времён Куроша на территорию, очень близкую к универсальной алгебре.

Отправной точкой для нас служит классический вопрос Куроша: возможна ли конечно порождённая бесконечномерная алгебраическая алгебра? Первый пример такой алгебры был построен Е. С. Голодом [1] в 1964 г., причём его конструкция дала целый список аналогичных примеров для различных алгебраических систем (таких как ассоциативные алгебры, алгебры Ли и p-группы). Здесь мы рассмотрим проблему Куроша в контексте линейной универсальной алгебры, причём вместо алгебр в формулировке проблемы будем рассматривать алгебраические системы. Для построения соответствующих примеров мы расширяем оригинальную технику Е. С. Голода, а также теорему Голода—Шафаревича [2].

Рассматриваются многообразия мультиоператорных линейных Ω-алгебр над полем k (в терминологии [3, § 13]). Каждый полилинейный элемент счётно порождённой свободной алгебры F многообразия может быть отождествлён с семейством полилинейных операторов (или операций), действующих на алгебре многообразия. Линейные комбинации конечных композиций полилинейного оператора с самим собой составляют линейное подпространство в F, называемое *клоном* этого оператора. Мы увидим далее, что понятие клона одной операции аналогично понятию однопорождённой подалгебры в ассоциативной алгебре. Следовательно, можно рассмотреть два естественных аналога проблемы Куроша. Сильный вариант (мы будем также называть его проблемой Бернсайда) следующий: существует ли многообразие W (данной конечной сигнатуры Ω), такое что в нём существуют ненулевые n-линейные операции для сколь угодно больших n, в то время как все однопорождённые клоны конечномерны? Более слабая версия проблемы (которая даёт наиболее точную аналогию с проблемой Куроша) такова: существует ли многообразие W, снова с бесконечномерным пространством мультилинейных операторов, такое что каждый такой оператор удовлетворяет нетривиальному «тождеству», т. е. некоторая нетривиальная линейная комбинация композиций этого оператора с самим собой нулевая?

Можно рассматривать также относительные версии обеих проблем, т. е. эти же проблемы с дополнительным ограничением, что многообразие W выбирается среди подмногообразий данного многообразия $\mathcal{V}$. Здесь мы ограничиваемся рассмотрением только исходных абсолютных вариантов проблем; отметим лишь, что применённый здесь метод (основанный на теореме 4.1) позволяет строить примеры и в относительно случае.

1.2. Язык операд

В линейной универсальной алгебре (когда алгебры являются модулями над кольцом или полем, а операции — мультилинейными гомоморфизмами) получили широкое распространение два языка для формулировок и рассуждений, используемых с различными целями.

Первый из них — классический язык *многообразий* и *тождеств*, он популярен как в теории колец, так и в общей алгебре. Так, теория алгебр с полиномиальными тождествами обычно излагается на этом языке. Курош использовал в своих работах именно его.

Другой язык основан на понятии *операды*. Он используется в основном в алгебраической топологии и математической физике. Этот язык представляется наиболее адекватным для рассуждений о гомологических свойствах алгебраических систем, включая, например, операции Масси и теорему о формальности Концевича.

Мы предлагаем краткий словарь этих двух языков (см. раздел 2). В нём мы определяем операды и связанные с ними понятия через многообразия и многообразия, тождества и т. п. в терминах операд. Предполагается, таким образом, что читатель изначально знаком с по крайней мере одним из двух языков. Я надеюсь, что этот краткий словарь поможет универсальным алгебраистам обоих типов понимать друг друга или, по крайней мере, распознавать знакомые конструкции в иноязычном описании. Этот словарь затем используется для того, чтобы дать более естественные формулировки наших версий проблемы Куроша.

Для удобства читателя ниже приводится приблизительный и краткий «разговорник».

Разговорник

многообразие	—	операда
подмногообразие	—	фактор-операда
клон	—	подоперада
сигнатура	—	порождающее множество
тождество	—	соотношение
свободная алгебра	—	свободная алгебра
ряд коразмерностей	—	порождающая функция
T-пространство	—	правый идеал
T-идеал	—	идеал
шпехтово (многообразие)	—	нётерова (операда)

Теперь можно сформулировать обе версии проблемы Куроша следующим образом. Проблема Бернсайда (сильная проблема Куроша) для операд: существует ли такая бесконечная конечно порождённая операда P, что любая её однопорождённая подоперада конечна? Проблема Куроша (в слабой версии) для операд: существует ли такая бесконечная конечно порождённая операда P, что любая её однопорождённая подоперада несвободна? Относительные версии проблем звучат так: можно ли здесь выбрать операду P среди фактор-операд заданной операды $\mathcal{S}$?

В данной работе дан ответ на обе версии проблемы Куроша. Показано, что такие многообразия и операды действительно существуют (для проблемы Бернсайда — при некоторых ограничениях на сигнатуру). Относительная версия обеих проблем остаётся открытой.

Дадим теперь строгую «двуязычную» формулировку (некоторые дополнительные детали читатель найдёт в разделе 4).

Теорема 1.1 (следствия 4.3, 4.4).

1. *Пусть Ω — конечная сигнатура. Тогда существует такое многообразие алгебр сигнатуры Ω, что в нём возможны ненулевые мультилинейные операции сколь угодно высокого порядка, однако клон любой такой операции в свободной алгебре удовлетворяет какому-нибудь нетривиальному тождеству. Если при этом множество $\Omega(2)$ содержит хотя бы два элемента, то любой такой клон можно считать конечномерным.*
2. *Пусть $X = X(2), X(3), \ldots$ — $\mathbb{S}$-модуль, т. е. последовательность представлений симметрических групп $\mathrm{S}_2, \mathrm{S}_3, \ldots$. Тогда существует такая операда $\mathcal{P}$, порождённая $\mathbb{S}$-модулем X, что никакая её однопорождённая подоперада не является абсолютно свободной. Если $\dim X_2 \geqslant 3$, то можно дополнительно утверждать, что любая её однопорождённая подоперада конечна.*

1.3. План статьи

Эта статья носит обзорный характер. Многие доказательства опущены и будут опубликованы в [10].

В разделе 2 приводится упомянутый выше словарь. В разделе 3 обсуждается (известная) аналогия между операдами и градуированными ассоциативными алгебрами, ведущая к аналогии между универсальными алгебрами и теорией градуированных колец. Мы даём описание понятий идеала, модуля, порождающих применительно к теории операд.

Указанная аналогия позволяет также развить вариант классической гомологической алгебры, включающий свободные резольвенты и производные функторы, в категории модулей над данной операдой. Мы используем это обстоятельство, чтобы перенести теорему Голода—Шафаревича в теорию операд (см. раздел 4). Метод Голода даёт возможность построить бесконечную операду с конечными однопорождёнными подоперадами. Таким образом, мы получаем решение слабой и сильной проблем Куроша для многообразий (операд) алгебр с почти произвольной сигнатурой (см. следствия 4.3 и 4.4).

1.4. Договорённости

Рассматриваются многообразия мультиоператорных линейных алгебр над полем k. Во избежание излишних технических деталей мы предполагаем, что сигнатура Ω многообразия всегда локально конечна и не содержит констант и унарных операций, т. е. $\Omega = \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \ldots$, где подмножества Ω_n n-арных операций (т. е. n-линейных операторов) конечны. Для упрощения обозначений мы предполагаем, что тождественный оператор (не входящий в Ω) также всегда действует на алгебрах многообразия. В разделе 2 предполагается, если не оговорено противное, что основное поле k имеет нулевую характеристику.

1.5. Благодарность

Я благодарен Алексею Канелю-Белову и Льюису Роуэну за обсуждения определений алгебр и операд, а также Антону Хорошкину за полезные замечания.

Моя особая благодарность Евгению Соломоновичу Голоду, который много лет назад познакомил меня с миром алгебраических операций.

Я признателен Университету имени Бар-Илана, где была частично написана эта работа, за гостеприимство и дружественную атмосферу. Я признателен также Институту Гелбарта и отделению математики Университета имени Бар-Илана за материальную поддержку моего визита.

2. Операды и многообразия: словарь

2.1. Определение операды

Пусть W — многообразие k-линейных алгебр (без констант, с тождественной операцией и без дополнительных унарных операций) некоторой сигнатуры Ω. Рассмотрим свободную алгебру $F^W(X)$, порождённую счётным множеством переменных $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Пусть $\mathcal{P}(n) \subset F$ — подпространство, состоящее из всевозможных полилинейных однородных обобщённых многочленов от переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Определение 2.1. Пусть W — произвольное многообразие. Последовательность $\mathcal{P}_W = \mathcal{P} := \{\mathcal{P}(1), \mathcal{P}(2), \ldots\}$ векторных подпространств алгебры $F^W(X)$ называется *операдой* (точнее, симметричной связной k-линейной операдой с единицей). Сигнатура Ω называется *порождающим множеством* операды $\mathcal{P}_W$.

Можно отождествить n-ю компоненту $\mathcal{P}(n)$ с множеством всевозможных производных n-линейных операций на алгебрах из W; в частности, $\mathcal{P}(n)$ наделено естественной структурой k-представления симметрической группы S_n. Последовательность $Q = \{Q(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ представлений $Q(n)$ симметрических групп S_n называется $\mathbb{S}$-модулем, так что любая операда обладает структурой $\mathbb{S}$-модуля. Кроме того, композиции операций (т. е. подстановка вместо x_i результата выполнения другой полилинейной операции с последующей перенумерацией переменных) задаёт естественные эквивариантные отображения S_*-модулей $\circ_i\colon \mathcal{P}(n) \otimes \mathcal{P}(m) \to \mathcal{P}(n+m-1)$. Отметим, что аксиоматизация этих операций даёт абстрактное определение операды (см. обсуждение различных определений в [9]).

Морфизмом операд $f\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ называется последовательность отображений $f(n)\colon \mathcal{P}(n) \to \mathcal{P}'(n)$ S_n-модулей, согласованных с композицией. Например, включение $W \subset W'$ многообразий одной и той же сигнатуры задаёт сюръективный морфизм операд $\mathcal{P}_W \to \mathcal{P}_{W'}$.

2.2. Определение многообразия

Пусть $\mathcal{P}$ — операда (у которой компонента $\mathcal{P}(0)$ нулевая, а компонента $\mathcal{P}(1)$ одномерна и порождена единичным элементом) с некоторым дискретным порождающим множеством Ω. Напомним, что *алгеброй* над $\mathcal{P}$ (или $\mathcal{P}$-алгеброй) называется (неградуированный) правый $\mathcal{P}$-модуль, т. е. векторное пространство V с $\mathcal{P}$-действием $\mathcal{P}(n)\colon V^{\otimes n} \to V$, согласованным с композициями операций и со структурой $k[\mathrm{S}_*]$-модулей на $\mathcal{P}$. Класс (или аддитивная категория) всевозможных алгебр над $\mathcal{P}$ обозначается как $\mathcal{P}$-Alg.

Определение 2.2. Пусть $\mathcal{P}$ — операда с порождающим множеством Ω. Тогда категория $\mathcal{P}$-Alg называется *многообразием* алгебр сигнатуры Ω.

Начиная с этого момента зафиксируем многообразие W и соответствующую операду $\mathcal{P}$, так что $W = W_{\mathcal{P}}$ и $\mathcal{P} = \mathcal{P}_W$. Зафиксируем также порождающее множество (или сигнатуру) Ω. Импликации $(W = W_{\mathcal{P}}) \iff (\mathcal{P} = \mathcal{P}_W)$ обсуждаются ниже в предложении 2.4.

2.3. (Ко)размерности

По определению n-я коразмерность многообразия W совпадает с размерностью соответствующей компоненты операды: $\mathrm{c}_n(W) = \dim_k \mathcal{P}_W(n)$. *Рядом коразмерностей* многообразия W или *производящей функцией* операды $\mathcal{P}$ называется формальный степенной ряд

$$\mathcal{P}(z) := \sum_{n\geqslant 1} \frac{\mathrm{c}_n(W)}{n!} z^n = \sum_{n\geqslant 1} \frac{\dim_k \mathcal{P}_W(n)}{n!} z^n.$$

Аналогичная производящая функция

$$Q(z) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{\dim_k Q(n)}{n!} z^n$$

определяется для каждого $\mathbb{S}$-модуля Q, для которого $\dim_k Q(n) < \infty$ для всех $n \geqslant 1$. Более общие варианты этой производящей функции (использующие, в частности, характеры представлений $\mathcal{P}(n)$ групп S_n) читатель найдёт в известной работе [7].

Если множество Ω конечно, то ряд $\mathcal{P}(z)$ определяет аналитическую функцию в некоторой окрестности нуля. Например, операда $\mathcal{A}ss$ ассоциативных алгебр имеет производящую функцию $\mathcal{A}ss(z) = \frac{z}{1-z}$. Для любой собственной фактор-операды $\mathcal{P}$ операды $\mathcal{A}ss$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \dim \mathcal{P}(n)}{n} = \ln c(\mathcal{P}),$$

где $c(\mathcal{P}) \in \mathbb{Z}$ (результат Джамбруно и Зайцева, см. [6] и указанную там литературу); в частности, в этом случае функция $\mathcal{P}(z)$ аналитична на всей комплексной плоскости.

2.4. Свободное многообразие

Напомним, что последовательность $M = \{M(1), M(2), \ldots\}$, в которой каждый элемент $M(i)$ является $k[\mathrm{S}_i]$-модулем, называется $\mathbb{S}$-модулем. Для данной последовательности дискретных множеств $\Omega = \{\Omega(1), \Omega(2), \ldots\}$ естественным образом определяется свободный $\mathbb{S}$-модуль $\mathbb{S}\Omega = \{k[\mathrm{S}_1]\Omega(1), k[\mathrm{S}_2]\Omega(2), \ldots\}$. В частности, каждая операда является $\mathbb{S}$-модулем, а любое подмножество $\mathbb{S}$-модуля порождает $\mathbb{S}$-подмодуль. Если Ω — минимальное порождающее множество операды $\mathcal{P}$, то $\mathbb{S}$-подмодуль $\mathbb{S}\Omega$ называется порождающим пространством операды $\mathcal{P}$.

Определение 2.3 (свободного многообразия). Многообразие W сигнатуры Ω называется свободным, если порождающее множество Ω минимальным образом порождает свободный $\mathbb{S}$-подмодуль в $\mathcal{P} = \mathcal{P}_W$, а сама операда $\mathcal{P}$ является свободной операдой, порождённой $\mathbb{S}$-подмодулем $\mathbb{S}\Omega$.

Свободная алгебра свободного многообразия называется абсолютно свободной алгеброй (данного многообразия).

Операду свободного многообразия назовём *абсолютно свободной*.

2.5. Свободная операда

Пусть $\mathcal{P}$ — операда, порождённая подмножеством Ω. Она называется свободной (с порождающим множеством Ω), если T-идеал T тождеств многообразия $W = W_{\mathcal{P}}$ состоит из линейных комбинаций порождающих, т. е. из элементов $\mathbb{S}$-подмодуля X в $\mathcal{P}$, порождённого множеством Ω. Поскольку свободная операда $\mathcal{P}$ однозначно (с точностью до изоморфизма) определяется $\mathbb{S}$-подмодулем X, она обозначается $\Gamma(X)$ (обозначение из [9]).

Например, любая абсолютно свободная операда свободна (так как она не имеет соотношений). С другой стороны, операда $\mathcal{G}en\mathcal{C}om$ общих (неассоциативных) коммутативных алгебр является свободной с умножением μ в качестве порождающего ($\Omega = \{\mu\}$), но не абсолютно свободной из-за тождества $[x_1, x_2] := \mu(x_1, x_2) - \mu \circ \tau(x_1, x_2) \in X$, где τ — порождающий элемент группы S_2.

2.6. Соотношения в операдах

Для любых двух $\mathbb{S}$-подмодулей A и B операды $\mathcal{P}$ можно определить новый $\mathbb{S}$-подмодуль $A \circ B \subset \mathcal{P}$, порождённый всевозможными композициями $a(b_1, \ldots, b_n)$, где $a \in A \cap \mathcal{P}(n)$ и $b_i \in B$. Произвольный $\mathbb{S}$-подмодуль $I \subset \mathcal{P}$ называется левым (правым или двусторонним) *идеалом*, если $I = \mathcal{P} \circ I$ (соответственно $I = I \circ \mathcal{P}$ или $I = \mathcal{P} \circ I \circ \mathcal{P}$). Порождающие множества идеалов определяются очевидным образом.

Можно показать, что двусторонние идеалы — это в точности ядра морфизмов операд. Если операда $\mathcal{P}$ представлена как фактор-операда («образ сюръективного морфизма из») свободной операды $\mathcal{P}'$ по двустороннему идеалу I, то элементы идеала I называются *соотношениями* операды $\mathcal{P}$. Если задано порождающее множество Ω операды $\mathcal{P}'$, то все соотношения можно рассматривать как тождества многообразия $W_{\mathcal{P}'}$ сигнатуры Ω.

Например, операда $\mathcal{C}om$ коммутативных ассоциативных алгебр, рассматриваемая как фактор-операда описанной выше свободной операды $\mathcal{G}en\mathcal{C}om$, удовлетворяет соотношению ассоциативности $\mathrm{Ass}(x_1, x_2, x_3) := (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3 - x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3)$ (где $a \cdot b := \mu(a, b)$), а также всем остальным соотношениям, принадлежащим двустороннему идеалу I в $\mathcal{G}en\mathcal{C}om$, порождённому данным соотношением $\mathrm{Ass}(x_1, x_2, x_3)$.

2.7. Тождества в многообразиях

Пусть F — свободная алгебра над операдой $\mathcal{P}$. Тогда каждый элемент алгебры F можно рассматривать как операцию на остальных алгебрах многообразия, в которую элементы алгебр подставляются вместо порождающих F. Поэтому для любых $p, q \in F$ можно определить композицию $p \circ_i q \in F$ (в частности, она равна p, если p не зависит от переменной x_i). В отличие от операд, здесь при подстановке не происходит перенумерации переменных, так что, например, $p(x_1, x_2) \circ_1 x_2 = p(x_2, x_2)$ и т. п. Тогда для любого подмножества $C \subset F$ можно определить композиции двух типов как подмножества $F \circ C = \{f \circ_i c\}$ и $C \circ F = \{c \circ_i f\}$ (где f, c, i пробегают соответственно F, C и $\mathbb{Z}_{\geqslant 1}$). Линейное подпространство $C \subset F$ называется идеалом (T-идеалом, подалгеброй), если оно замкнуто относительно композиций первого типа (соответственно второго или обоих типов). Например, для T-идеала имеем $C = F \circ C = C \circ F$.

Пусть W' — свободное многообразие сигнатуры Ω, а $\mathcal{P}' = \mathcal{P}_{W'}$ — соответствующая операда. Тогда идеал I соотношений операды $\mathcal{P}$ в $\mathcal{P}'$ порождает некоторый T-идеал T в абсолютно свободной алгебре $F = F^{W'}(X)$ со счётным порождающим множеством X. Элементы идеала T называются *тождествами* многообразия W.

Первая часть следующего утверждение получается с помощью стандартного процесса линеаризации.

Предложение 2.4. *Пусть F — счётно порождённая свободная алгебра многообразия W над полем нулевой характеристики k. Тогда любое T-пространство* *или T-идеал Y в F порождается своим подмножеством $Y \cap \mathcal{P}_W$ полилинейных элементов, причём это подмножество является идеалом (соответственно правым или двусторонним) в операде $\mathcal{P}_W$.*

В частности, отсюда следует, что T-идеал T тождеств произвольного многообразия W порождается идеалом соотношений операды $\mathcal{P} := \mathcal{P}_W$, откуда $W = W_{\mathcal{P}}$.

Доказательство этого предложения (состоящее, главным образом, в описании алгоритма линеаризации тождеств) практически одинаково для всех типов алгебр; типичный случай многообразий ассоциативных PI-алгебр описан в [8] и [6]. Например, линеаризация тождества x_1^2 в свободной алгебре многообразия $W_{\mathcal{G}en\mathcal{C}om}$ даёт тождество x_1x_2 (поскольку $x_1x_2 = \frac{1}{2}((x_1+x_2)^2 - x_1^2 - x_2^2)$), т. е. тождество x_1^2 определяет многообразие алгебр с нулевым умножением — категорию векторных пространств.

Отметим, что линеаризация существенно основана на предположении $\operatorname{char} k = 0$. Если характеристика поля положительна, то выполняется лишь импликация $(W = W_{\mathcal{P}}) \Longrightarrow (\mathcal{P} = \mathcal{P}_W)$, но не обратная к ней.

3. Операды и градуированные алгебры: аналогия

Гомологическая теория операд подобна гомологической теории ассоциативных алгебр. Имеется ряд гомологических конструкций, которые успешно перенесены с колец на операды: (ко)бар-конструкция, минимальные модели, (ДГ) резольвенты (ДГ) модулей, козюлева двойственность и т. д. [5, 7, 9]. Здесь мы переносим на операды одну из частей классической гомологической алгебры, а именно теорию функторов кручения. Мы стандартным способом строим свободные резольвенты модулей над операдами и с их помощью определяем и вычисляем производные функторы операдного аналога тензорного произведения. Затем это будет использовано в доказательстве нашего варианта теоремы Голода—Шафаревича.

Заметим, что над каждой операдой $\mathcal{P}$ можно определить правые и левые градуированные модули: это $\mathbb{S}$-модуль V со структурой $\mathcal{P}$-алгебры (левый модуль) или с композициями $V(n) \circ_i \mathcal{P}(m) \to V(n+m-1)$ (правый модуль), причём в обоих случаях отображения должны быть согласованы со структурами операды и $\mathbb{S}$-модуля. Функтор композиции $- \circ_{\mathcal{P}} L$ (где L — градуированный $\mathcal{P}$-модуль) из категории $\mathrm{Mod}\text{-}\mathcal{P}$ градуированных правых $\mathcal{P}$-модулей в категорию $k\text{-}\mathrm{Mod}$ градуированных векторных пространств над k аналогичен тензорному произведению модулей над градуированной алгеброй. У него существуют левые производные функторы $\mathrm{Tor}_i^{\mathcal{P}}(R, L)$, аналогичные обычным функторам Tor модулей над градуированными алгебрами. Эти операдные функторы кручения также могут быть вычислены с помощью свободных резольвент (или, в ДГ случае, с помощью кофибрантных резольвент) первого аргумента [5].

Формальное описание этих идей содержится в следующей стандартной последовательности утверждений.

Предложение 3.1. *Пусть $\mathcal{P}$ — операда. Тогда категория* $\mathrm{Mod}\text{-}\mathcal{P}$ *всех градуированных правых $\mathcal{P}$-модулей абелева (и потому является абелевой подкатегорией в категории всех $\mathbb{S}$-модулей).*

Пусть V — произвольный $\mathbb{S}$-модуль. Правый $\mathcal{P}$-модуль $V \circ \mathcal{P}$ называется *свободным* (а V называется его минимальным порождающим $\mathbb{S}$-модулем). Как $\mathbb{S}$-модуль он является композицией двух других, поэтому его производящая функция есть $(V \circ \mathcal{P})(z) = V\big(\mathcal{P}(z)\big)$. Например, сама операда $\mathcal{P}$ есть свободный правый $\mathcal{P}$-модуль, порождённый тривиальным $\mathbb{S}$-модулем $k\,\mathrm{id}$.

Предположим, что M — градуированный правый $\mathcal{P}$-модуль, минимально порождённый $\mathbb{S}$-модулем V', изоморфным $\mathbb{S}$-модулю V. Тогда существует (единственное с точностью до изоморфизма $V \to V'$) сюръективное отображение $\mathcal{P}$-модулей $p\colon V \circ \mathcal{P} \to M$, изоморфно отображающее V в V'. Ядро $\ker p$ содержится в «неприводимом подмодуле» $V \circ_{\mathcal{P}} \mathcal{P}_+ \subset V \circ \mathcal{P}$, где $\mathcal{P}_+ = \mathcal{P}(2) \oplus \mathcal{P}(3) \oplus \ldots$ — максимальный идеал операды $\mathcal{P}$. Повторяя эту конструкцию, получаем последовательность правых градуированных $\mathcal{P}$-модулей

$$\ldots F_2 \xrightarrow{d_2} F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{d_0} M \to 0,$$

где все модули F_i свободны (поэтому мы будем называть последовательность $\mathbf{F}\colon \ldots F_2 \to F_1 \to F_0$ *свободной резольвентой* модуля M). Кроме того, имеем $\mathrm{im}\, d_i \subset F_{i-1} \circ \mathcal{P}_+$ для всех $i \geqslant 0$. Резольвенту с таким дополнительным свойством назовём *минимальной*.

Вторая часть следующего стандартного предложения может быть доказана тем же способом, что и для связных градуированных ассоциативных алгебр (когда все проективные модули свободны), а третья следует из второй.

Предложение 3.2.

1. *Любой правый градуированный $\mathcal{P}$-модуль M допускает минимальную свободную резольвенту* $\mathbf{F}$.
2. *Если $\mathbf{F}'$ — другая свободная резольвента модуля M, то комплекс $\mathcal{P}$-модулей $\mathbf{F}$ выделяется прямым слагаемым в комплексе $\mathbf{F}'$.*
3. *Минимальная резольвента $\mathbf{F}$ единственная с точностью до изоморфизма комплексов правых $\mathcal{P}$-модулей.*

Пусть R и L — правый и левый градуированные $\mathcal{P}$-модули. Тогда можно определить их композицию — k-модуль $R \circ_{\mathcal{P}} L$. Он представляет собой фактор-k-модуль модуля $R \circ L$ по соотношениям, индуцированным действием $\mathcal{P}$.

Предложение 3.3. *Пусть L — левый градуированный $\mathcal{P}$-модуль.*

1. *Функтор $C_L\colon X \mapsto X \circ_{\mathcal{P}} L$ точен справа на* $\mathrm{Mod}\text{-}\mathcal{P}$.
2. *Существуют производные функторы $L_* C_L(M)$, значения $\mathrm{Tor}_i^{\mathcal{P}}(M, L) := L_i C_L(M)$ которых могут быть вычислены для каждого $i > 0$ как i-й $\mathbb{S}$-модуль гомологий комплекса*

$$\mathbf{F} \circ_{\mathcal{P}} L\colon \ \ldots F_2 \circ_{\mathcal{P}} L \to F_1 \circ_{\mathcal{P}} L \to F_0 \circ_{\mathcal{P}} L.$$

Отметим, что указанные производные функторы введены в [5, пункт 2.2.4] в более общем контексте ДГ операд. Вторая часть последнего предложения следует из [5, предложение 2.2.5]. Например, минимальный $\mathbb{S}$-подмодуль, порождающий модуль F_i из минимальной свободной резольвенты, может быть вычислен как

$$F_i/F_i \circ \mathcal{P}_+ = \mathrm{Tor}_i^{\mathcal{P}}(M, \mathcal{P}/\mathcal{P}_+).$$

4. Признак бесконечномерности операд и проблема Куроша

В этом разделе дана операдная версия знаменитой теоремы Голода—Шафаревича, содержащей признак бесконечномерности ассоциативной алгебры. Хотя оригинальное доказательство Голода и Шафаревича [2] можно почти полностью перевести на язык операд (если заменить комплекс Шафаревича на первый шаг конструкции минимальной модели операды $\mathcal{P}$, см. [9]), мы адаптируем другой подход (описанный Уфнаровским [4]), основанный на прямом вычислении начальных членов минимальной свободной резольвенты тривиального модуля.

Теорема 4.1. *Пусть $\mathcal{P}$ — операда, минимально порождённая $\mathbb{S}$-модулем $X \subset \mathcal{P}$ с минимальным $\mathbb{S}$-модулем соотношений $R \subset \Gamma(X)$. Мы предполагаем здесь, что оба эти $\mathbb{S}$-модуля локально конечны, т. е. все их градуировочные компоненты конечномерны. Предположим, что формальный степенной ряд*

$$\left(1 - \frac{X(z)}{z} + \frac{R(z)}{z}\right)^{-1}$$

имеет неотрицательные коэффициенты. Тогда операда $\mathcal{P}$ бесконечна.

Набросок доказательства. Рассмотрим тривиальный бимодуль $I = \mathcal{P}/\mathcal{P}_+$ (где, как и выше, $\mathcal{P}_+ = \mathcal{P}(2) \oplus \mathcal{P}(3) \oplus \ldots$ — максимальный идеал операды $\mathcal{P}$). Вычисляя порождающие начальных членов его минимальной свободной резольвенты, имеем $\mathrm{Tor}_0^{\mathcal{P}}(I, I) \cong I$, $\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{P}}(I, I) \cong X$ и $\mathrm{Tor}_2^{\mathcal{P}}(I, I) \cong R$. Это означает, что начало резольвенты выглядит следующим образом:

$$0 \to \Omega^3 \to R \circ \mathcal{P} \xrightarrow{d_2} X \circ \mathcal{P} \to \mathcal{P} \to I \to 0, \tag{1}$$

где Ω^3 — ядро отображения d_2.

Взяв эйлерову характеристику точной последовательности (1) и выразив из неё $\Omega^3(z)$, получаем равенство формальных степенных рядов

$$\Omega^3(z) = (R \circ \mathcal{P})(z) - (X \circ \mathcal{P})(z) + \mathcal{P}(z) - I(z).$$

Поскольку формальный степенной ряд $\Omega^3(z)$ имеет неотрицательные коэффициенты, получаем покоэффициентное неравенство

$$R\big(\mathcal{P}(z)\big) - X\big(\mathcal{P}(z)\big) + \mathcal{P}(z) - z \geqslant 0.$$

Манипуляции с формальными степенными рядами (с использованием, в частности, формул Лагранжа для обращения степенного ряда) завершают доказательство. □

Для операд, порождённых бинарными операциями, указанное условие можно упростить.

Следствие 4.2. *Пусть $\mathcal{P}$ — операда, X и R те же, что и выше. Предположим, что $\mathcal{P}$ порождается бинарными операциями (т. е. $X = X(2)$). Предположим также, что функция*

$$\phi(z) = 1 - \frac{X(z)}{z} + \frac{R(z)}{z}$$

аналитическая в некоторой окрестности нуля (это всегда так, если X конечно порождён) и имеет положительный действительный корень z_0 в этой окрестности, причём $\phi(z_0)' \neq 0$. Тогда операда $\mathcal{P}$ бесконечна.

Следствие 4.3 (проблема Куроша для мультиоператорных алгебр). *Предположим, что основное поле k не более чем счётно. Пусть Ω — произвольная непустая конечная сигнатура. Тогда существует такое многообразие W алгебр сигнатуры Ω, что клон любой полилинейной операции в свободной алгебре этого многообразия удовлетворяет какому-нибудь нетривиальному тождеству, в то время как в свободной алгебре $F^W(x_1, x_2, \ldots)$ существуют ненулевые полилинейные элементы сколь угодно высокой степени.*

Набросок доказательства. Достаточно доказать, что подоперада, порождённая одной произвольной полилинейной операцией в $\mathcal{P}_W$, не является абсолютно свободной.

Пронумеруем все элементы степени не ниже 2 абсолютно свободной операды $\mathcal{F}$, порождённой Ω. Если подоперада P в $\mathcal{F}$, порождённая такой операцией p_i (где $i \in \mathbb{Z}_+$), не является абсолютно свободной (например, если $\mathbb{S}$-модуль X, порождённый элементом p_i в $\mathcal{F}$, не является свободным), то и её образ в $\mathcal{P}_W$ не является абсолютно свободным.

Предположим теперь, что операда P абсолютно свободна. Обозначим через R_i сумму всевозможных полилинейных композиций из $N = N_i$ её копий, где числа N_i выбираются таким образом, чтобы степени t_i элементов R_i возрастали: $t_1 < t_2 < \ldots$. Тогда каждый элемент R_i инвариантен относительно действия соответствующей симметрической группы S_{t_i}. Следовательно, производящая функция $\mathbb{S}$-модуля R, порождённого всеми введёнными элементами R_i, есть

$$R(z) \leqslant \sum_{n \geqslant 1} \frac{z^{t_n}}{t_n!} \leqslant \sum_{n \geqslant t_1} \frac{z^n}{n!}$$

(покоэффициентное неравенство следует из неравенств $\dim R(n) \leqslant 1$ для всех $n \geqslant 1$). Если выбрать числа t_i достаточно большими ($0 \ll t_1 \ll t_2 \ll \ldots$), то с помощью теоремы 4.1 из этой оценки можно вывести, что порождающая функция операды $\mathcal{P}$, порождённой Ω и с минимальным $\mathbb{S}$-модулем соотношений R, бесконечна. □

Следующее утверждение даёт усиленную версию проблемы Куроша, т. е. проблему Бернсайда.

Следствие 4.4 (проблема Бернсайда для мультиоператорных алгебр). *Предположим, что основное поле k не более чем счётно. Пусть $X = X(2) \cup \cup X(3) \cup \ldots$ — $\mathbb{S}$-модуль, причём $\dim X(2) \geqslant 3$. Тогда существует бесконечная операда $\mathcal{P}$, порождённая $\mathbb{S}$-модулем X, такая что каждый элемент $x \in \mathcal{P}$ сильно нильпотентен, т. е. порождённая им подоперада конечна.*

Замечание 4.5. На языке многообразий последнее следствие можно сформулировать следующим образом: для любой сигнатуры, насчитывающей по крайней мере две бинарные операции, существует такое многообразие, что любая операция на алгебрах этого многообразия нильпотентна, т. е. для любой операции (полиоднородного элемента свободной алгебры) существует такое число N, что любая композиция N таких операций нулевая при любой подстановке переменных.

Идея доказательства. Для любой полилинейной операции p (скажем, n-арной, где $n \geqslant 2$) и достаточно большого натурального d определим подходящее множество соотношений $S(p, d)$ как множество всевозможных композиций данной операции p с собой, имеющих следующее свойство: в каждой из d копий операции p в композиции по крайней мере $n - 1$ из входов в p заняты переменными. Другими словами, каждый элемент в $S(p, d)$ представляет собой «ветку» длины d, узлы которой маркированы операцией p. Теперь выбираем d достаточно большим для каждого p и используем теорему 4.1 подобно тому, как мы использовали её в доказательстве следствия 4.3. □

Литература

[1] Голод Е. С. О ниль-алгебрах и финитно-аппроксимируемых p-группах // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1964. — Т. 28, № 2. — С. 273—276.

[2] Голод Е. С., Шафаревич И. Р. О башне полей классов // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1964. — Т. 28, № 2. — С. 261—272.

[3] Курош А. Г. Общая алгебра. Лекции 1969—1970 учебного года. — М.: Наука, 1974.

[4] Уфнаровский В. А. Комбинаторные и асимптотические методы в алгебре // Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. и её прил. Т. 57. — М.: ВИНИТИ, 1990. — С. 5—177.

[5] Fresse B. Koszul duality of operads and homology of partition posets // Homotopy Theory: Relations with Algebraic Geometry, Group Cohomology, and Algebraic K-Theory. Papers from the Int. Conf. on Algebraic Topology, Northwestern Univ., Evanston, IL, USA, March 24—28, 2002 / P. Goerss, ed. — Providence: Amer. Math. Soc., 2004. — (Contemp. Math.; Vol. 346). — P. 115—215.

[6] Giambruno A., Zaicev M. Polynomial Identities and Asymptotic Methods. — Providence: Amer. Math. Soc., 2005. — (Math. Surveys Monographs; Vol. 122).

[7] Ginzburg V., Kapranov M. Koszul duality for operads // Duke Math. J. — 1994. — Vol. 76, no. 1. — P. 203—272; 1995. — Vol. 80, no. 1. — P. 293.

[8] Kanel-Belov A., Rowen L. H. Computational Aspects of Polynomial Identities. — Wellesley: Peters, 2005. — (Research Notes Math.; Vol. 9).

[9] Markl M., Shnider S., Stasheff J. Operads in Algebra, Topology and Physics. — Providence: Amer. Math. Soc., 2002. — (Math. Surveys Monographs; Vol. 96).

[10] Piontkovski D. Burnside problem for varieties of algebras and operads. — To appear.