Группа автоморфизмов кольца $\mathbb{Z}\mathrm{A}_4$*

А. М. ПОПОВА
*Новосибирский государственный
технический университет*
e-mail: algebra@nstu.ru

УДК 512.56

Ключевые слова: группа, групповое кольцо, автоморфизм, линейное представление.

Аннотация

Выясняется строение группы автоморфизмов целочисленного группового кольца группы A_4 на языке полупрямых произведений. Доказывается справедливость гипотезы Цассенхауза о строении автоморфизмов целочисленных групповых колец конечных групп для группы $\operatorname{Aut}\mathbb{Z}\mathrm{A}_4$.

Abstract

A. M. Popova, Automorphisms group of ring $\mathbb{Z}\mathrm{A}_4$, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 5, pp. 185—189.

The structure of group of automorphisms of integer group ring of group A_4 is studied in terms of semidirect product. We show that Zassenhaus conjecture on structure of automorphisms of integer group rings of finite groups for the group $\operatorname{Aut}\mathbb{Z}\mathrm{A}_4$ holds.

Мы продолжаем начатое в [4, 6, 10] изучение строения групп автоморфизмов целочисленных групповых колец. Используются методы, основанные на теории представлений, применение которых позволило описать группы единиц таких колец, а именно группы $\mathrm{U}(\mathbb{Z}\mathrm{S}_3)$, $\mathrm{U}(\mathbb{Z}\mathrm{A}_4)$, $\mathrm{U}(\mathbb{Z}\mathrm{D}_{12})$, $\mathrm{U}(\mathbb{Z}\mathrm{S}_4)$, $\mathrm{U}\big(\mathbb{Z}\mathrm{SL}_2(3)\big)$, $\mathrm{U}(\mathbb{Z}\mathrm{A}_5)$, $\mathrm{U}(\mathbb{Z}\mathrm{S}_5)$, $\mathrm{U}(\mathbb{Z}\mathrm{A}_6)$ (см. [1, 2, 5, 7—9]).

Известно, что группа A_4 имеет три одномерных представления и одно трёхмерное. Аналогично [9] рассматриваем представление $D(\mathrm{A}_4)$. Легко доказать, что $\mathbb{Z}\mathrm{A}_4 \cong \mathbb{Z}[D(\mathrm{A}_4)]$, поэтому дальнейшие рассуждения проводятся для $\mathbb{Z}[D(\mathrm{A}_4)]$, т. е. целочисленной линейной оболочки матричной группы $D(\mathrm{A}_4)$. Условимся записывать матрицы из $\mathbb{Z}[D(\mathrm{A}_4)]$ в виде $\operatorname{diag}(a_1, a_2, a_3, a_4)$, где a_i — матрицы соответствующей размерности, а 1 на i-м месте означает единичную матрицу. Рассмотрим идеал

$$I = \{\operatorname{diag}(0, 0, 0, a_4)\} \subset \mathbb{Z}[D(\mathrm{A}_4)].$$

Очевидно, I является характеристическим, поэтому ограничение любого автоморфизма кольца $\mathbb{Z}[D(\mathrm{A}_4)]$ на I служит автоморфизмом идеала I. В дальнейшем,

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 06-01-00159-а.

говоря об элементах I, позволим себе вместо $\operatorname{diag}(0,0,0,a_4)$ писать просто a_4, имея в виду матрицы кольца $\mathrm{M}_3(\mathbb{Z})$.

Заметим, что так как расклеивающее число для трёхмерной клетки представления $D(\mathrm{A}_4)$ равно 4 (см. [1, 9]), то в I лежат матрицы вида $4e_{ij}$, $i,j=1,2,3$. Поэтому для любого $\varphi \in \operatorname{Aut} I$ имеем $\varphi(4e_{ij}) = h_{ij} \in I$. Продолжим φ до автоморфизма $\tilde{\varphi} \in \operatorname{Aut} \mathbb{Q}_3$, полагая $\tilde{\varphi}(e_{ij}) = \frac{1}{4}h_{ij}$. Так как по известной теореме Нётер—Сколема [3] все автоморфизмы алгебры $\mathbb{Q}_3$ внутренние, то $\tilde{\varphi}$ является сопряжением некоторой матрицей из $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q})$. На самом деле можно ограничиться матрицами из $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$.

Лемма 1. *Пусть $s \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$, $|s| \neq 0$, $0 \neq m \in \mathbb{N}$. Если $[(me_{ij})^s \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z})]$ для любых $i,j=1,\ldots,n$, то $|s| = \pm 1$.*

Доказательство сводится к прямым вычислениям.

Таким образом, мы можем считать, что $\varphi(x) = x^s$, где $s \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$.

Если аддитивный базис кольца $\mathbb{Z}[D(\mathrm{A}_4)]$ привести к нижнетреугольному виду так, как это сделано в [1], то легко выписать аддитивный базис идеала I, который состоит из следующих матриц:

$$b_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$b_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad b_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$b_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Теперь понятно, что

$$\operatorname{Aut} I \cong H = \Big\{ y \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}) \;\Big|\; b_i^y = \sum_{j=1}^{9} \alpha_j b_j,\ \alpha_j \in \mathbb{Z} \Big\}.$$

Заметим, что y можно искать по модулю 4. Это следует из того, что $\mathrm{M}_3(4\mathbb{Z}) \subset I$. Поэтому равенство

$$b_i^y = \sum_{j=1}^{9} \alpha_j b_j$$

эквивалентно сравнению

$$b_i y \equiv \sum_{j=1}^{9} \alpha_j y b_j \pmod 4.$$

Обозначим через φ_m гомоморфизм Минковского

$$\varphi_m\big(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})\big) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_m).$$

Тогда $\operatorname{Ker}\varphi_4 \lhd H$ и можно изучать фактор-группу $H/\operatorname{Ker}\varphi_4$. Для нахождения порождающих этой фактор-группы мы нашли по модулю 4 все матрицы из $\mathrm{M}_3(\mathbb{Z})$ с определителем ± 1, удовлетворяющие системе сравнений

$$\begin{cases} b_1 y \equiv \displaystyle\sum_{i=1}^{6} \alpha_{1i} y b_i, & \\ \quad \dots & \alpha_{ij} \in \{0,1\}. \\ b_6 y \equiv \displaystyle\sum_{i=1}^{6} \alpha_{6i} y b_i, & \end{cases}$$

Порождающими оказались матрицы

$$s_1' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad s_2' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_3' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$t' = t_{12}(2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Лемма 2. $\operatorname{Aut} I \cong \Big(\big(\langle s_3' \rangle \leftthreetimes \mathrm{гр}(s_1', s_2') \big) \leftthreetimes \operatorname{Ker}\varphi_2 \Big) \cdot \operatorname{Ker}\varphi_4$.

Заметим, что $|H/\operatorname{Ker}\varphi_4| = 2^{10} \cdot 3$, $\mathrm{гр}(s_1', s_2') \cong \mathrm{S}_4$. Далее нужно из группы $\operatorname{Aut} I$ выбрать те автоморфизмы, которые продолжаются до автоморфизмов всего кольца $\mathbb{Z}[D(\mathrm{A}_4)]$. Для этого рассмотрим оставшиеся три матрицы аддитивного базиса этого кольца. Одна из них единичная, а две другие имеют вид

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} & & & & \\ & & -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} & & & \\ & & & -1 & 1 & 0 \\ & & & 0 & -1 & 1 \\ & & & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & -i\sqrt{3} & & & & \\ & & i\sqrt{3} & & & \\ & & & 0 & -1 & 1 \\ & & & 1 & 0 & -1 \\ & & & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $s_1 = \operatorname{diag}(1,1,1,s_1')$, $s_2 = \operatorname{diag}(1,1,1,s_2')$, $s_3 = \operatorname{diag}(1,1,1,s_3')$, $t = \operatorname{diag}(1,1,1,t')$. Так как $\mathbb{Z}[D(\mathrm{A}_4)] = \{e, a_1, a_2\}_{\mathbb{Z}} \oplus I$, то для того, чтобы сопряжения матрицами s_1, s_2, s_3, t служили автоморфизмами кольца $\mathbb{Z}[D(\mathrm{A}_4)]$, достаточно, чтобы матрицы $a_i^{s_j}$, a_i^t, $i = 1,2$, $j = 1,2,3$, лежали в этом кольце. Прямые вычисления показали, что a_1^t, a_2^t лежат в кольце, в то время как $a_1^{s_i}$ и

$a_2^{s_i}$, $i = 1, 2, 3$, попадают в кольцо только при комплексном сопряжении. Таким образом, группу $\operatorname{Aut}\mathbb{Z}[D)\mathrm{A}_4)]$ порождают следующие автоморфизмы:

$$\hat{s}_1(x) = \overline{x^{s_1}}, \quad \hat{s}_2(x) = \overline{x^{s_2}}, \quad \hat{s}_3(x) = \overline{x^{s_3}}, \quad \hat{t}(x) = x^t.$$

Для более детального описания заметим, что

$$\text{гр}(s_1', s_2', s_3') = \text{гр}(s', s_3) \leftthreetimes \mathrm{A}_4,$$

где

$$s' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 1. $\operatorname{Aut}\mathbb{Z}\mathrm{A}_4 \cong (B \leftthreetimes \mathrm{A}_4) \leftthreetimes K_2$, *где* $B \cong C_2 \times C_2$, $K_2 \cong \operatorname{Ker}\varphi_2 \subset \mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$.

Так как центр группы $\operatorname{Aut}\mathbb{Z}\mathrm{A}_4$ тривиален, группа его внутренних автоморфизмов совпадает с группой нормализованных единиц, описание которой дано в [8]. Это позволяет описать группу внешних автоморфизмов этого кольца.

Теорема 2. $\operatorname{Out}\mathbb{Z}\mathrm{A}_4 = \operatorname{Aut}\mathbb{Z}\mathrm{A}_4 / \operatorname{Int}\mathbb{Z}\mathrm{A}_4 \cong A \leftthreetimes B$, *где* $A \cong B \cong C_2 \times C_2$.

В заключение заметим, что для кольца $\mathbb{Z}\mathrm{A}_4$ справедлива следующая гипотеза Цассенхауза.

Пусть $\theta \in \operatorname{Aut}\mathbb{Z}G$ — нормализованный автоморфизм. Тогда существует единица $\alpha \in \mathbb{Q}G$ и автоморфизм $\sigma \in \operatorname{Aut}G$, такие что $\theta(g) = \alpha^{-1}\sigma(g)\alpha$ для всех $g \in G$. (Aut)

Напомним, что автоморфизм называется нормализованным, если элементы группы G он оставляет в нормализованной группе единиц кольца $\mathbb{Z}G$.

Для доказательства гипотезы Цассенхауза нужно указать такие автоморфизмы группы A_4, с помощью которых представляются порождающие группы $\operatorname{Aut}\mathbb{Z}\mathrm{A}_4$. Как известно, группа A_4 может порождаться двумя элементами $a = (12)(34)$ и $b = (123)$, при этом определяющие отношения имеют вид $b^3 = a^2 = (ba)^3 = 1$. Используя $D(\mathrm{A}_4)$, имеем

$$D(a) = \begin{pmatrix} 1 &&&&& \\ & 1 &&&& \\ && 1 &&& \\ &&& 1 & 0 & 0 \\ &&& 0 & -1 & 0 \\ &&& 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D(b) = \begin{pmatrix} 1 &&&&& \\ & z &&&& \\ && \bar{z} &&& \\ &&& 0 & 1 & 0 \\ &&& 0 & 0 & 1 \\ &&& 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ — первообразный корень третьей степени из единицы. Обозначим автоморфизмы из $\operatorname{Aut}\mathrm{A}_4$ $\sigma(a) = a$, $\sigma(b) = b^2$, $\varepsilon(a) = a$, $\varepsilon(b) = b$. Понятно, что $D\bigl(\sigma(g)\bigr) = \sigma\bigl(D(g)\bigr)$ для любого $g \in G$. Тогда непосредственными вычислениями проверяются равенства

$$\hat{s}_1\big(D(a)\big) = s_1^{-1}\varepsilon\big(D(a)\big)s_1, \qquad \hat{s}_1\big(D(b)\big) = \alpha^{-1}\Big(\sigma\big(D(b)\big)\Big)\alpha,$$
$$\hat{s}_2\big(D(a)\big) = s_2^{-1}\varepsilon\big(D(a)\big)s_2, \qquad \hat{s}_2\big(D(b)\big) = \alpha^{-1}\Big(\sigma\big(D(b)\big)\Big)\alpha,$$
$$\hat{s}_3\big(D(a)\big) = s_3^{-1}\varepsilon\big(D(a)\big)s_3, \qquad \hat{s}_3\big(D(b)\big) = \alpha^{-1}\Big(\sigma\big(D(b)\big)\Big)\alpha,$$
$$\hat{t}\big(D(a)\big) = t^{-1}\varepsilon\big(D(a)\big)t, \qquad \hat{t}\big(D(b)\big) = \alpha^{-1}\Big(\varepsilon\big(D(b)\big)\Big)\alpha,$$

где $\alpha = s \cdot s_1$, $s = \mathrm{diag}(1,1,1,s')$. Остаётся заметить, что $s_1, s_2, s_3, s \in \mathbb{Q}D(\mathrm{A}_4)$. Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 3. *В кольце $\mathbb{Z}\mathrm{A}_4$ выполняется гипотеза Цассенхауза* (Aut).

Литература

[1] Грачёв Е. В., Попова А. М. Единицы целочисленного группового кольца группы A_5 // Вестн. Красноярск. гос. ун-та. Физико-математические науки. — 2006. — Вып. 4. — С. 54—59.

[2] Грачёв Е. В., Попова А. М. Мультипликативная группа кольца $\mathbb{Z}\mathrm{A}_6$ // Междунар. конф. «Алгебра и её приложения». Тезисы докладов. — Красноярск, 2007. — С. 38—39.

[3] Пирс Р. Ассоциативные алгебры. — М., 1986.

[4] Попова А. М. Группа автоморфизмов кольца $\mathbb{Z}D_{12}$ // Журн. Сибирского федер. ун-та. Математика и физика. — 2008. — Т. 1, № 3. — С. 323—328.

[5] Попова А. М., Грачёв Е. В. Группа единиц целочисленного группового кольца группы S_5 // Абелевы группы. Материалы Всероссийск. симпозиума. — Бийск, 2006.

[6] Попова А. М., Грачёв Е. В. Группа автоморфизмов кольца $\mathbb{Z}S_4$ // Материалы Междунар. науч. конф. «Современные проблемы математики, информатики и управления». Алматы, 2008. — С. 469—470.

[7] Попова А. М., Журков С. В. Группа единиц целочисленного группового кольца группы $\mathrm{SL}_2(3)$ // Algebra and Model Theory. — 2005. — Vol. 5. — P. 170—181.

[8] Попова А. М., Журков С. В. Обратимые элементы целочисленных групповых колец // Междунар. алгебр. конф. Тезисы докладов. — Екатеринбург, 2005. — С. 69—70.

[9] Попова А. М., Порошенко Е. Н. Группы единиц целочисленных групповых колец конечных групп // Algebra and Model Theory. — 2003. — Vol. 4. — P. 99—106.

[10] Popova A. M. Group of automorphisms of the ring $\mathbb{Z}S_3$ // Algebra and Model Theory. — 2007. — Vol. 6. — P. 84—91.