О простоте некоторых полупростых алгебр Хопфа

Е. Г. ПУНИНСКИЙ
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: puninskiy@mail.ru

УДК 512.667.7

Ключевые слова: алгебры Хопфа.

Аннотация

В. А. Артамоновым были обнаружены две новые серии алгебр Хопфа. Эта статья даёт отрицательный ответ на вопрос Н. Андрушкиевича о простоте этих серий.

Abstract

E. G. Puninskiy, On the simplicity of some semisimple Hopf algebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 5, pp. 191—195.

Two new series of Hopf algebras were discovered by V. A. Artamonov. The following paper gives a negative answer to N. Andruskiewitsch's question about simplicity of these series.

1. Введение

В этой работе мы рассматриваем алгебру Хопфа H и её дуальную алгебру Хопфа H^*, описанные в [3].

Существует присоединённое действие H на себе:

$$(\operatorname{ad} x)h = \sum x_{(1)} h S\bigl(x_{(2)}\bigr).$$

Соответственно, существует и присоединённое действие H^* на себе:

$$(\operatorname{ad} x)h = \sum x_{(1)} * h * S\bigl(x_{(2)}\bigr).$$

Определение. Алгебра Хопфа называется *простой*, если она не содержит собственных подалгебр, инвариантных относительно действия ad.

Мы докажем, что ни алгебра H, ни алгебра H^* простой не является.

2. Дуальная алгебра H^*

Пусть H^* — дуальная алгебра, описанная в [3]. Известно, что у неё имеется прямое разложение

$$H^* = kG \oplus \mathrm{Mat}(n, k), \quad n \text{ — нечётное простое число или } 2.$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2008, том 14, № 5, с. 191—195.

Пространство $\mathrm{Mat}(n,k)$ снабжено билинейной формой

$$\langle A,B\rangle = \mathrm{tr}\bigl(A\cdot S(B)\bigr) = \mathrm{tr}(A\cdot U\,{}^tB\,U^{-1}).$$

Пусть множество $G=G(H^*)$ порождено двумя элементами a и b порядка n. Как показано в [3], существуют обратимые матрицы A_g и U, такие что

$$\begin{gathered}
g\rightharpoonup X = A_g X A_{g^{-1}}, \quad X\leftharpoondown g = U\,{}^tA_g\,U^{-1}XU\,{}^tA_{g^{-1}}\,U^{-1},\\
g=a^\nu b^\eta, \quad \text{где}\quad \nu,\eta = 0,\dots,n-1,\\
g*h=gh, \quad g*X = g\rightharpoonup X, \quad X*g = X\leftharpoondown g,\\
X*Y = \frac{1}{n}\sum_{g\in G}\langle Y\leftharpoondown g^{-1}, X\rangle g,\\
\Delta^*(g)=g\otimes g, \quad \Delta^*(E_{ij}) = \sum_{l=1}^n E_{il}\otimes E_{lj}
\end{gathered}$$

для всех $g\in G$, $X,Y\in\mathrm{Mat}(n,k)$, где или $U=E$, или

$$U=S=\begin{pmatrix} T & 0 & \dots & 0\\ 0 & T & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & T\end{pmatrix}, \quad T=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Мы будем рассматривать случай, когда n нечётное простое, и следовательно, как показано в [3], $U=E$.

Вычисления показывают, что в этом случае алгебра Хопфа H^* не является простой. Нам понадобятся некоторые формулы (см. [3]). Пусть

$$A_a = \begin{pmatrix} 0 & & 0 & 1\\ 1 & \ddots & & 0\\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0\end{pmatrix}$$

и

$$A_b = \zeta\begin{pmatrix} 1 & & & 0\\ & \omega & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \omega^{n-1}\end{pmatrix}, \quad \text{где } \zeta,\ \omega \text{ — корни из единицы степени } n.$$

Тогда для A_g и $A_{g^{-1}}$ имеем следующие формулы:

$$A_g = A_a^{\nu} A_b^{\eta} = \zeta^{\eta} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \omega^{\eta(n-\nu)} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 & \omega^{\eta(n-\nu+1)} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & 0 & & 0 & \omega^{\eta(n-1)} \\ 1 & & 0 & 0 & \dots\dots\dots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \\ 0 & & \omega^{\eta(n-\nu-1)} & 0 & \dots\dots\dots & & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{g^{-1}} = A_{b^{-1}}^{\eta} A_{a^{-1}}^{\nu} = \zeta^{-\eta} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 & \omega^{-\eta} & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & 0 & & 0 & \omega^{\eta(\nu-n+1)} \\ \omega^{\eta(\nu-n)} & & 0 & 0 & \dots\dots & & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & \\ 0 & & \omega^{\eta(1-n)} & 0 & \dots\dots & & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 2.1. *H^* не является простой, если n нечётное простое.*

Доказательство. Покажем, что kG не инвариантна относительно действия ad.

Нетрудно заметить, что kG инвариантна относительно действия $\mathrm{ad}\, kG$. Теперь посмотрим, как элемент $E_{ij} \in \mathrm{Mat}(n,k)$ действует на $g \in G$. Имеем

$$(\mathrm{ad}\, E_{ij})g = \sum_{l=1}^{n} E_{il} * g * S(E_{lj}) = \sum_{l=1}^{n} E_{il} * A_g E_{jl} A_{g^{-1}} =$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} \sum_{g \in G} \langle {}^t A_{g^{-1}}\, A_g E_{jl} A_{g^{-1}}\, {}^t A_g, E_{il} \rangle g =$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} \sum_{g \in G} \langle E_{2\nu+j,\, 2\nu+l}, E_{il} \rangle g = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} \sum_{g \in G} \mathrm{tr}(E_{2\nu+j,\, 2\nu+l} E_{li}) g =$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{n} \sum\limits_{g \in G} g, & \text{если } 2\nu + l \equiv l \text{ и } 2\nu + j \equiv i, \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} =$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{n} \sum\limits_{\eta=0}^{n-1} b^{\eta}, & \text{если } \nu = 0 \text{ и } i = j, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Последнее равенство следует из того, что n нечётное и $\nu = 0, \dots, n-1$. Последний элемент принадлежит kG. □

Тот же результат можно получить, вообще не прибегая к вычислениям. В [2, § 3] показано, что алгебра Хопфа H^* является $\mathbb{Z}_2$-градуированной алгеброй:

$$H^* = H_0^* \oplus H_1^*, \quad H_0^* = kG, \quad H_1^* = \mathrm{Mat}(n,k).$$

Теорема 2.2. *H^* не является простой.*

Доказательство. Имеем

$$\Delta^*\big(\mathrm{Mat}(n,k)\big) \subseteq \mathrm{Mat}(n,k) \otimes \mathrm{Mat}(n,k),$$
$$\Delta^*(kG) \subseteq kG \otimes kG.$$

Следовательно, для $X \in \mathrm{Mat}(n,k)$ и $g, h \in G$ верно, что

$$(\mathrm{ad}\, X)g \subseteq \mathrm{Mat}(n,k) * kG * \mathrm{Mat}(n,k) \subseteq \mathrm{Mat}(n,k) * \mathrm{Mat}(n,k) \subseteq kG,$$
$$(\mathrm{ad}\, g)h \subseteq kG * kG * kG \subseteq kG.$$

Отсюда следует, что kG инвариантна. □

3. Алгебра H

Пусть H — алгебра Хопфа из [3]. Имеется её прямое разложение

$$H = \bigoplus_{g \in G} ke_g \oplus \mathrm{Mat}(n,k)E.$$

Как показано в [3], коумножение Δ имеет вид

$$\Delta(x) = \sum_{g \in G} [(g \rightharpoonup x) \otimes e_g + e_g \otimes (x \leftharpoonup g)] + \Delta'(x), \quad \Delta(e_t) = \sum_{g,h \in G,\ gh=t} e_g \otimes e_t + \Delta_t$$

для всех $x \in \mathrm{Mat}(n,k)$ и для всех $t \in G$. Здесь

$$\Delta'(x), \Delta_t \in \mathrm{Mat}(n,k) \otimes \mathrm{Mat}(n,k).$$

Значит, можно написать

$$\Delta'(x) = \sum{}' x_{(1)} \otimes S\big(x_{(2)}\big), \quad \Delta_t = \sum\nolimits_t x_{(1)} \otimes S\big(x_{(2)}\big).$$

В [1] показано, что $|G| = n^2$ тогда и только тогда, когда $\Delta'(x) = 0$.

Теорема 3.1. *H не является простой.*

Доказательство. Для всех $x, y \in \mathrm{Mat}(n,k)$ и $t \in G$ имеем

$$(\mathrm{ad}\, x)y = \sum_{g \in G} [(g \rightharpoonup x)yS(e_g) + e_g yS(x \leftharpoonup g)] + \sum{}' x_{(1)} y S\big(x_{(2)}\big).$$

Первое слагаемое исчезает (это следует из прямого разложения H), а второе слагаемое принадлежит $\mathrm{Mat}(n,k)$. Значит,

$$(\mathrm{ad}\, x)y \subseteq \mathrm{Mat}(n,k).$$

Аналогично для $y \in \mathrm{Mat}(n,k)$ и $t \in G$ имеем

$$(\operatorname{ad} e_t)y = \sum_{g,h\in G,\ gh=t} e_g y e_h + \sum\nolimits_t x_{(1)} y S\bigl(x_{(2)}\bigr).$$

Опять первое слагаемое исчезает, а второе принадлежит $\mathrm{Mat}(n,k)$. Тогда

$$(\operatorname{ad} e_t)y \subseteq \mathrm{Mat}(n,k).$$

Следовательно, $\mathrm{Mat}(n,k)$ инвариантна относительно действия ad. $\square$

Литература

[1] Артамонов В. А. О полупростых конечномерных алгебрах Хопфа // Мат. сб. — 2007. — Т. 198, № 9. — С. 3—28.

[2] Artamonov V. A., Chubarov I. A. Dual algebras of some semisimple finite-dimensional Hopf algebras // T. Brzeziński (ed.) et al. Modules and Comodules. Proc. Int. Conf. Porto, Portugal, September 6—8, 2006. Dedicated to Robert Wisbauer on the Occasion of His 65th Birthday. — Basel: Birkhäuser, 2008. — (Trends Math.). — P. 65—85.

[3] Artamonov V. A., Chubarov I. A. Properties of some semisimple Hopf algebras // Proc. Conf. on Algebras, Representations and Applications / V. Futorny, V. Kac, I. Kashuba, E. Zelmanov, eds. — Amer. Math. Soc. — (Contemp. Math.).