Теоремы о выравнивании и мономиальности в относительно свободной алгебре Грассмана

Л. М. ЦЫБУЛЯ
Московский педагогический государственный университет
e-mail: liliya-kinder@mail.ru

УДК 512.552

Ключевые слова: Т-пространство, Т-идеал, относительно свободная алгебра Грассмана, n-слова.

Аннотация

В работе доказываются теоремы о выравнивании и мономиальности, играющие существенную роль при построении структурной теории Т-пространств в относительно свободной алгебре $k\langle 1, x_1, \ldots, x_i, \ldots\rangle/([[x_1, x_2], x_3])^T$ над бесконечным полем k характеристики $p > 2$. Также рассматриваются некоторые особенности случая $p = 2$.

Abstract

L. M. Tsybulya, Theorems on equalization and monomiality in a relatively free Grassmann algebra, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 5, pp. 197—218.

In this paper, we prove theorems on equalization and monomiality, which are essential for developing the structural theory of T-spaces in a relatively free algebra $k\langle 1, x_1, \ldots, x_i, \ldots\rangle/([[x_1, x_2], x_3])^T$ over an infinite field k of characteristic $p > 2$. Additionally, some specifics of the case $p = 2$ are considered.

Введение

Возникновение теории Т-пространств, сравнительно новой ветви комбинаторной алгебры и теории PI-колец, связано с решением близких к проблеме Шпехта [15] вопросов о конечной базируемости Т-идеалов. После доказательства конечной базируемости любых Т-пространств в нулевой характеристике (см. [2, 3, 11, 13]) и нахождения контрпримеров в характеристике $p > 0$ (см. [1,4,12—14]) возникает вопрос о построении структурной теории Т-пространств. Более содержательные результаты получаются, если рассмотреть Т-пространства, лежащие в относительно свободной алгебре Грассмана над полем положительной характеристики. Эта алгебра даёт все основные известные контрпримеры к проблеме Шпехта для $p > 0$. Хотя внешне эти конструкции достаточно различны, по существу дела все они основаны на понятии Т-пространства, впервые введённом А. В. Гришиным в [2].

Фундаментальная и прикладная математика, 2008, том 14, № 5, с. 197—218.

Дадим точные определения (см. [2, 3, 13]). Пусть $F = k\langle 1, x_1, \ldots, x_i, \ldots\rangle$ — свободная ассоциативная алгебра с единицей над бесконечным полем k характеристики $p > 0$, $T^{(3)}$ — Т-идеал (унитарно замкнутый), порождённый многочленом $[[x_1, x_2], x_3]$, $F^{(3)} = F/T^{(3)}$ — *относительно свободная алгебра Грассмана*. Название объясняется тем, что многообразие k-алгебр, заданное тождеством $[[x_1, x_2], x_3] = 0$, в случае $p \neq 2$ порождается алгеброй Грассмана (см. [10]), а в случае $p = 2$ — алгеброй Φ_2, являющейся аналогом алгебры Грассмана (см. [4,7,13]). Образы свободных переменных алгебры F в $F^{(3)}$ обозначаются теми же буквами. Кроме того, часть переменных иногда для удобства обозначается буквами y_i, z_i. На алгебре $F^{(3)}$ действует (справа) полугрупповая алгебра kT, где T — полугруппа всех эндоморфизмов алгебры F, превращая $F^{(3)}$ в kT-модуль. Действие элемента $\tau \in kT$ на многочлен $f \in F^{(3)}$ обозначается через f^τ. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \in F^{(3)}$ — произвольный многочлен и $u_1, \ldots, u_n \in F^{(3)}$ — произвольные одночлены. Будем говорить, что многочлен $f(u_1, \ldots, u_n)$ получен *мономиальной подстановкой* из многочлена $f(x_1, \ldots, x_n)$.

По определению (см. [2]) *Т-пространством* в $F^{(3)}$ называется любой kT-подмодуль. Вообще говоря, *Т-пространство* — это унитарный правый kT-модуль, и можно рассматривать фактор-пространства, прямые суммы и т. д. Через S^T обозначается Т-пространство, порождённое подмножеством S некоторого Т-пространства (см. [13]). В силу бесконечности поля k, если многочлен принадлежит Т-пространству, то и любая полиоднородная компонента данного многочлена принадлежит этому Т-пространству.

Важную роль в алгебре $F^{(3)}$ играет Т-пространство W_n, $n \in \mathbb{N}$, порождённое всеми одночленами, содержащими каждую переменную с кратностью n (так называемыми *n-словами*). Известно (см. [6]), что $W_n = F^{(3)}$ при $(n, p) = 1$ и $W_n = W_{p^l}$ при $n = p^l n_1$, где $(n_1, p) = 1$, $n_1, l \in \mathbb{N}$. Более того, для всех p и l, кроме $p = 2$, $l = 1$, $W_{p^l} = D_{p^l} \oplus CD_{p^l}$, где $D_{p^l} = \{x_1^{p^l}\}^T$ — нётеров kT-модуль, а CD_{p^l} — kT-модуль, порождённый всеми Т-пространствами

$$CD_{p^l}^{(m)} = \{x_1^{p^l-1} y_1^{p^l-1} [x_1, y_1] \cdots x_m^{p^l-1} y_m^{p^l-1} [x_m, y_m] z_1^{p^l}\}^T,$$

содержащий собственный подмодуль C_{p^l}, порождённый всеми Т-пространствами

$$C_{p^l}^{(m)} = \{x_1^{p^l-1} y_1^{p^l-1} [x_1, y_1] \cdots x_m^{p^l-1} y_m^{p^l-1} [x_m, y_m]\}^T,$$

$m \in \mathbb{N}$. Именно в Т-пространствах W_{p^l} были построены первые примеры неконечно базируемых Т-пространств в ненулевой характеристике (из которых потом конструируются бесконечно базируемые Т-идеалы). Кроме того, результаты, приведённые в статье, дают основание полагать, что многие структурные вопросы в алгебре $F^{(3)}$ сводятся к Т-подпространствами в W_{p^l}. Поэтому интересно более подробно рассмотреть связи не только между подпространствами в W_{p^l}, но и связь этих подпространств с достаточно произвольно взятыми подпространствами из алгебры $F^{(3)}$. Этим и другим вопросам, связанным с выяснением структуры $F^{(3)}$, и посвящена работа.

Работа состоит из четырёх разделов. Во всех разделах, кроме четвёртого, предполагается, что $p > 2$. Это связано с тем, что соотношения Фробениуса при $p = 2$ выполняются только начиная со степени 4. В первом разделе приводятся необходимые предварительные обозначения, отмечаются основные соотношения в $F^{(3)}$, используемые при вычислениях, а также устанавливаются связи между подпространствами в W_{p^l}. Они отражены в диаграмме, также приведённой в этом разделе.

Во втором разделе доказываются так называемые теоремы о выравнивании, которые позволяют говорить о том, что T-пространства в $F^{(3)}$ в значительной степени сводятся к T-пространству W_{p^l} и его подпространствам. Доказательство основано на методе спуска, использующем возможность перехода от многочлена с бо́льшими кратностями вхождения переменных к многочлену с меньшими кратностями вхождения этих же переменных путём kT-действий.

В третьем разделе доказывается так называемая теорема о мономиальности, говорящая о том, что произвольное действие алгебры kT на порождающие элементы T-пространств $C_{p^l}^{(m)}$ и $CD_{p^l}^{(m)}$ по модулю T-пространств $C_{p^{l-1}}^{(m)}$ и $C_{p^l}^{(m)}$ соответственно сводится к мономиальным подстановкам в эти элементы. С помощью этого результата удаётся описать линейную структуру T-пространства W_p.

Полученные теоремы о выравнивании и о мономиальности фактически позволили доказать один из основных, на наш взгляд, структурных результатов в алгебре $F^{(3)}$ о том, что фактор-T-пространства $CD_{p^l}/CD_{p^{l+1}}$ и $C_{p^{l+1}}/C_{p^l}$ являются бесконечными прямыми суммами простых kT-модулей $CD_{p^l}^{(m)}/CD_{p^{l+1}}^{(m)}$ и $C_{p^{l+1}}^{(m)}/C_{p^l}^{(m)}$ соответственно (см. [9]).

В разделе 4 рассматривается вопрос о возможности перенесения результатов на случай характеристики $p = 2$, а также специфика этого случая.

1. Основные обозначения и соотношения в алгебре $F^{(3)}$

Отметим основные соотношения, применяемые при вычислениях в алгебре $F^{(3)}$ (см. [13]).

I. Коммутаторные соотношения:

$$[x_1, x_2][x_1, x_3] = 0, \tag{1}$$

$$[x_1, x_2][x_3, x_4] = -[x_1, x_3][x_2, x_4], \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
&[x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r}, y] = \\
&\quad = n_1 x_1^{n_1-1}[x_1, y] x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r} + n_2 x_2^{n_2-1}[x_2, y] x_1^{n_1} x_3^{n_3} \cdots x_r^{n_r} + \ldots + \\
&\quad + n_r x_r^{n_r-1}[x_r, y] x_1^{n_1} \cdots x_{r-1}^{n_{r-1}}, \quad n_i \in \mathbb{N}, \quad i = \overline{1, r}, \quad r \in \mathbb{N}.
\end{aligned} \tag{3}$$

В частности, из (3) следует, что

$$[xy^n, y] = y^n[x, y], \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{4}$$

$$[x^n, y] = nx^{n-1}[x, y], \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Из последнего соотношения получаем, что p-я степень переменной коммутирует с любым элементом алгебры $F^{(3)}$, т. е.

$$[x^p, y] = 0. \tag{6}$$

II. Соотношения Фробениуса:

$$(x_1 + \ldots + x_r)^{p^l} = x_1^{p^l} + \ldots + x_r^{p^l}, \tag{7}$$

$$(x_1 \cdots x_r)^{p^l} = x_1^{p^l} \cdots x_r^{p^l}, \tag{8}$$

где $r, l \in \mathbb{N}$.

Также нам понадобится следующая лемма (см. [13]).

Лемма 1.1. *Для любого $m \in \mathbb{N}$ в алгебре $F^{(3)}$ $[x_1, y_1][x_2, y_2] \cdots [x_m, y_m] \neq 0$.*

С помощью коммутаторных соотношений нетрудно проверить, что любой одночлен $u \in F^{(3)}$ можно представить с точностью до переобозначения переменных в виде линейной комбинации многочленов вида

$$h_{a,b} = x_1^{a_1-1} y_1^{a_1'-1}[x_1, y_1] \cdots x_m^{a_m-1} y_m^{a_m'-1}[x_m, y_m] z_1^{b_1} \cdots z_s^{b_s}, \tag{9}$$

где $a = (a_1, a_1', \ldots, a_m, a_m')$ — набор произвольных натуральных чисел, а $b = (b_1, \ldots, b_s)$ — набор произвольных целых неотрицательных чисел, переменные y_i, z_j отличны от переменных $x_1, \ldots, x_m$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $s \in \mathbb{N}$. Если $b_j = 0$ для любого $j = \overline{1, s}$, то для многочлена (9) используется обозначение c_a, если $m = 0$, то используется обозначение d_b. Таким образом, $h_{a,b} = c_a d_b$. При $m = 0$ и $b_j = 0$ для любого $j = \overline{1, s}$ будем считать, что $h_{a,b} = 1$. *Кратностью* многочлена $h_{a,b}$ назовём число входящих в него коммутаторов.

Введём систему обозначений. Положим для любых $r, t \in \mathbb{N}$

$$c_{(r,t)}(x, y) = x^{r-1} y^{t-1}[x, y]. \tag{10}$$

Таким образом,

$$c_a = c_{(a_1, a_1')}(x_1, y_1) \cdots c_{(a_m, a_m')}(x_m, y_m). \tag{11}$$

Многочлен $c_{(a_i, a_i')}(x_i, y_i)$ будем называть *i-м блоком* многочлена c_a, $i = \overline{1, m}$.

При $m \neq 0$ через C_a и $CD_{a,b}$ обозначим T-подпространства в алгебре $F^{(3)}$, порождённые многочленами c_a и $h_{a,b}$ соответственно; через D_b обозначается T-подпространство, порождённое одночленом d_b. Многочлен $h_{a,b}$ будем называть *p-многочленом*, если кратности вхождения всех его переменных делятся на p, и *1-многочленом*, если кратность вхождения хотя бы одной из его переменных не делится на p. Будем говорить, что переменная в многочлене $h_{a,b}$ имеет *уровень l* или просто *переменная уровня l*, если кратность её вхождения в $h_{a,b}$ равна $p^l q$ для некоторого $q \in \mathbb{N}$, не делящегося на p ($l = 0$ означает, что переменная входит с кратностью, не делящейся на p). Если $a_1 = \ldots = a_m = a'_1 = \ldots = a'_m = b_1 = p^l$, $b_2 = \ldots = b_s = 0$, то для многочлена (9) используется обозначение $g_{m,l} = c_{m,l} z_1^{p^l}$, где $c_{m,l} = x_1^{p^l-1} y_1^{p^l-1} [x_1, y_1] \cdots x_m^{p^l-1} y_m^{p^l-1} [x_m, y_m]$ — *коммутаторный многочлен кратности m уровня l*, $m \in \mathbb{N}$, $l \geqslant 0$. Как уже отмечалось выше, для $l \in \mathbb{N}$ $W_{p^l} = D_{p^l} \oplus CD_{p^l}$, где $D_{p^l} = \{x_1^{p^l}\}^T$, а CD_{p^l} — это T-пространство, порождённое всеми многочленами $g_{m,l}$. Пусть также C_{p^l} — T-пространство, порождённое всеми многочленами $c_{m,l}$. Отметим, что все рассматриваемые бесконечные системы порождающих неприводимы (см. [6, 8, 13]). Введённые таким образом T-пространства C_{p^l} и CD_{p^l} раскладываются в сумму T-пространств $C_{p^l}^{(m)}$ и $CD_{p^l}^{(m)}$, которые порождены многочленами $c_{m,l}$ и $g_{m,l}$ соответственно (циклические kT-модули). Назовём T-пространства $C_{p^l}^{(m)}$ и $CD_{p^l}^{(m)}$ *элементарными составляющими* T-пространств C_{p^l} и CD_{p^l} соответственно. T-пространство $C_{p^l}^{(m)}$ также будем называть T-пространством *кратности m уровня l*.

Отметим, что коммутаторный многочлен $c_{m,0}$ кратности m уровня 0 равен произведению m коммутаторов $[x_1, y_1] \cdots [x_m, y_m]$ и T-пространство $C_{p^0}^{(m)}$, им порождённое, обозначается естественным образом через $C_1^{(m)}$ (T-пространство *кратности m уровня* 0). Коммутаторному многочлену $c_{m,0}$ соответствует многочлен $g_{m,0} = [x_1, y_1] \cdots [x_m, y_m] z_1$, который порождает T-пространство $CD_{p^0}^{(m)}$. Нетрудно убедиться, что $CD_{p^0}^{(m)}$ является T-идеалом в $F^{(3)}$, порождённым тем же произведением, что и $C_1^{(m)}$. Этот T-идеал будем обозначать через $C^{(m)} = ([x_1, y_1] \cdots [x_m, y_m])^T$. Положим $C_1^{(1)} = C_1$ и $C^{(1)} = C$. Очевидно, что $C_1^{(m)} \subset C_1$, $C^{(m)} \subset C$ для любого $m \in \mathbb{N}$. T-пространства $C_1^{(m)}$ и $C^{(m)}$ также будем называть *элементарными составляющими* C_1 и C соответственно.

Ниже рассматриваются соотношения, связывающие введённые T-подпространства алгебры $F^{(3)}$.

Имеет место следующая достаточно очевидная лемма.

Лемма 1.2.
$$C_1 = C_1^{(1)} \supsetneqq C_1^{(2)} \supsetneqq \ldots \supsetneqq C_1^{(m)} \supsetneqq \ldots. \tag{12}$$

Докажем следующее техническое утверждение.

Лемма 1.3.

1. *Ни для каких $n \in \mathbb{N}$ и $l \geqslant 0$ $\binom{p^l n - 1}{p^l - 1}$ не делится на p.*
2. *Если $(n, p) = 1$, то ни для какого $l \geqslant 0$ $\binom{p^l n}{p^l}$ не делится на p.*

Доказательство. 1. Для $l = 0$ получаем $\binom{p^l n - 1}{p^l - 1} = 1$, откуда следует первое утверждение леммы. Для $l > 0$
$$\binom{p^l n - 1}{p^l - 1} = \frac{p^l n - 1}{p^l - 1} \cdot \frac{p^l n - 2}{p^l - 2} \cdot \ldots \cdot \frac{p^l n - 1 - (p^l - 2)}{p^l - 1 - (p^l - 2)}.$$

Это число содержит как дроби, числитель и знаменатель которых не делятся ни на какую степень числа p, так и дроби с противоположным свойством. Рассмотрим последние. Легко убедиться, что такие дроби имеют вид $\frac{p^l n - p^s n_1}{p^l - p^s n_1}$, где $p^l > p^s n_1$, $(n_1, p) = 1$, т. е. содержат в числителе и знаменателе одну и ту же степень числа p, равную p^s, $s \in \mathbb{N}$. Сокращая на p^s, получаем, что числитель и знаменатель этих дробей не делятся на p. Отсюда следует, что $\binom{p^l n - 1}{p^l - 1}$ не делится на p.

2. Для $l = 0$ имеем $\binom{p^l n}{p^l} = n$, отсюда, поскольку $(n, p) = 1$, следует второе утверждение данной леммы. Для $l > 0$

$$\binom{p^l n}{p^l} = \frac{p^l n}{p^l} \cdot \frac{p^l n - 1}{p^l - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{p^l n - (p^l - 1)}{p^l - (p^l - 1)}.$$

Аналогично предыдущему среди дробей в правой части этого равенства рассмотрим дроби, числитель и знаменатель которых делятся на некоторую степень числа p. Такие дроби, очевидно, имеют вид $\frac{p^l n - p^s n_1}{p^l - p^s n_1}$, где $p^l > p^s n_1$, $(n_1, p) = 1$, $s \in \mathbb{N}$, и, сокращая на p^s, получаем, что числитель и знаменатель этих дробей не делятся на p. Отсюда и из $(n, p) = 1$ следует, что $\binom{p^l n}{p^l}$ не делится на p, и лемма доказана. $\square$

Рассмотрим многочлен

$$c_{(p^l n_1, p^l n_1')}(x_1, y_1) = x_1^{p^l n_1 - 1} y_1^{p^l n_1' - 1} [x_1, y_1],$$

где $n_1, n_1' \in \mathbb{N}$, $l \geqslant 0$ (см. обозначение (10)). Имеет место следующая лемма.

Лемма 1.4.

1. *Для любых* $n_1, n_1' \in \mathbb{N}$ *и* $l \geqslant 0$ $c_{1,l} \in \{c_{(p^l n_1, p^l n_1')}(x_1, y_1)\}^T$.
2. *Пусть* $(n, p) = 1$ *и* $l \geqslant 0$. *Тогда* $x^{p^l} \in \{x^{p^l n}\}^T$.

Доказательство. 1. В самом деле, применим подстановку $x \mapsto x + 1$ к каждой из входящих в многочлен $c_{(p^l n_1, p^l n_1')}(x_1, y_1)$ переменных и выделим полиоднородный многочлен степени p^l по всем переменным. Всюду ниже выражение «выделим из данного многочлена полиоднородный многочлен» означает, что из любого многочлена с помощью подстановок и k-линейных действий (из-за бесконечности поля k) можно получить любую его полиоднородную составляющую. Таким образом, получим многочлен, равный $\alpha c_{1,l}$, где $\alpha = \binom{p^l n_1 - 1}{p^l - 1} \binom{p^l n_1' - 1}{p^l - 1}$. Из первого утверждения леммы 1.3 следует, что α не делится на p. Отсюда получаем первое утверждение данной леммы.

2. Как и выше, применяем подстановку $x \mapsto x + 1$ к одночлену $x^{p^l n}$ и выделяем полиоднородный многочлен степени p^l по переменной x. Получим одночлен $\binom{p^l n}{p^l} x^{p^l}$. Согласно второму утверждению леммы 1.3 $\binom{p^l n}{p^l}$ не делится на p. Отсюда $x^{p^l} \in \{x^{p^l n}\}^T$. Лемма доказана. $\square$

Свойства, доказанные в лемме 1.4, в дальнейшем будут часто использоваться. Метод доказательства, использующий эти свойства, для удобства назовём «*методом спуска*». Такое название естественно, так как в результате применения этого метода из многочлена с определёнными кратностями вхождения его переменных получается многочлен с уменьшившимися кратностями вхождения этих переменных.

Следующая теорема говорит о взаимосвязи элементарных составляющих.

Теорема 1.1.

1. *Пусть $l, r \in \mathbb{N}$ и $r > l$. Тогда $C_{p^l}^{(m)} \subsetneqq C_{p^r}^{(m)}$ и $CD_{p^r}^{(m)} \subsetneqq CD_{p^l}^{(m)}$ для любого $m \in \mathbb{N}$.*
2. *Пусть $l, r \in \mathbb{N}$. Тогда $C_1^{(m)} \subsetneqq C_{p^l}^{(m)} \subsetneqq CD_{p^r}^{(m)} \subsetneqq C^{(m)}$, причём $C^{(m+1)} \subsetneqq C^{(m)}$ для любого $m \in \mathbb{N}$.*

Доказательство включений, указанных в этой теореме, почти дословно повторяет доказательства аналогичных утверждений из [8] (см. теоремы 3 и 4). Отметим только, что основным инструментом доказательства является метод спуска. Строгость всех включений элементарных составляющих следует из теоремы о независимости элементарных составляющих (см. [9]).

Таким образом, связь между введёнными выше T-пространствами C_{p^l} и CD_{p^l}, а также их элементарными составляющими $C_{p^l}^{(m)}$ и $CD_{p^l}^{(m)}$ согласно теореме 1.1 и лемме 1.2 выражается следующей диаграммой строгих включений (см. также [6, 8, 9]):

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
C & = & C^{(1)} & \supset & C^{(2)} & \supset & \ldots & \supset & C^{(m-1)} & \supset & C^{(m)} & \supset & \ldots \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \cup & & \\
CD_p & = & CD_p^{(1)} & + & CD_p^{(2)} & + & \ldots & + & CD_p^{(m-1)} & + & CD_p^{(m)} & + & \ldots \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \cup & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \cup & & \\
CD_{p^l} & = & CD_{p^l}^{(1)} & + & CD_{p^l}^{(2)} & + & \ldots & + & CD_{p^l}^{(m-1)} & + & CD_{p^l}^{(m)} & + & \ldots \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \cup & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \cup & & \\
C_{p^l} & = & C_{p^l}^{(1)} & + & C_{p^l}^{(2)} & + & \ldots & + & C_{p^l}^{(m-1)} & + & C_{p^l}^{(m)} & + & \ldots \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \cup & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \cup & & \\
C_p & = & C_p^{(1)} & + & C_p^{(2)} & + & \ldots & + & C_p^{(m-1)} & + & C_p^{(m)} & + & \ldots \\
\cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \cup & & \\
C_1 & = & C_1^{(1)} & \supset & C_1^{(2)} & \supset & \ldots & \supset & C_1^{(m-1)} & \supset & C_1^{(m)} & \supset & \ldots
\end{array}
$$

2. Теоремы о выравнивании

Две следующие теоремы показывают, что при определённых условиях Т-пространства C_a и $CD_{a,b}$, порождённые многочленами c_a и $h_{a,b}$ с «невыровненными» кратностями вхождения переменных, совпадают с $C_{p^l}^{(m)}$ или $CD_{p^l}^{(m)}$. Это даёт основание полагать, что Т-пространства в $F^{(3)}$ в значительной степени сводятся к Т-пространствам W_{p^l} и их подпространствам из приведённой в предыдущем разделе диаграммы.

Теорема 2.1 (первая о выравнивании).

1. *Пусть в многочлене c_a одна из его переменных имеет уровень l, а остальные переменные имеют уровень, больший либо равный l. Тогда для любых $m \in \mathbb{N}$ и $l \geqslant 0$*
$$C_a = C_{p^l}^{(m)}.$$
2. *Пусть в многочлене $h_{a,b}$ одна из его переменных x_i, y_i, $i = \overline{1,m}$, имеет уровень l, а остальные переменные имеют уровень, больший либо равный l, причём переменные z_j имеют уровень, больший l, для любого $j = \overline{1,s}$. Тогда для любых $m, s \in \mathbb{N}$ и $l \geqslant 0$*
$$CD_{a,b} = C_{p^l}^{(m)}.$$

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что переменная x_1 имеет уровень l, т. е. кратность её вхождения равна $p^l n_1$, где n_1 не делится на p.

1. Так как все переменные в многочлене c_a по условию имеют уровень, больший либо равный l, то этот многочлен можно записать в виде
$$c_a = x_1^{p^l n_1 - 1} y_1^{p^l n'_1 - 1}[x_1, y_1] \cdots x_m^{p^l n_m - 1} y_m^{p^l n'_m - 1}[x_m, y_m],$$
где $n_i, n'_i \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1,m}$, $(n_1, p) = 1$. Применяя метод спуска (см. первое утверждение леммы 1.4) к каждому блоку многочлена c_a, получим, что для любого $m \in \mathbb{N}$ выполнено включение $\{c_{m,l}\}^T \subset \{c_a\}^T$.

Теперь докажем, что для любого $m \in \mathbb{N}$
$$\{c_a\}^T \subset \{c_{m,l}\}^T. \tag{13}$$
Для доказательства (13) при $m = 1$ покажем, что многочлен
$$c_a = x_1^{p^l n_1 - 1} y_1^{p^l n'_1 - 1}[x_1, y_1]$$
получается с помощью некоторых подстановок из многочлена
$$c_{1,l} = x_1^{p^l - 1} y_1^{p^l - 1}[x_1, y_1].$$
Действительно, сначала повысим степень переменной y_1. Для этого в многочлене $c_{1,l}$ осуществим подстановку $x_1 \mapsto x_1 y_1^{n'_1 - 1}$. После этой подстановки, пользуясь соотношениями (1) и (4), получим многочлен
$$x_1^{p^l - 1} y_1^{p^l n'_1 - n'_1 - p^l + 1 + p^l - 1 + n'_1 - 1}[x_1, y_1],$$

который после упрощения станет равным

$$x_1^{p^l-1}y_1^{p^l n_1'-1}[x_1,y_1].$$

Остаётся повысить степень переменной x_1. Для этого к полученному многочлену применим подстановку $x_1\mapsto x_1^{n_1}$ и воспользуемся соотношениями (1) и (5). В результате получим

$$(x_1^{n_1})^{p^l-1}y_1^{p^l n_1'-1}[x_1^{n_1},y_1]=n_1x_1^{p^l n_1-n_1+n_1-1}y_1^{p^l n_1'-1}[x_1,y_1].$$

Правая часть равенства есть многочлен n_1c_a, где $(n_1,p)=1$. Таким образом, $c_a\in\{c_{1,l}\}^T$.

Теперь покажем, что при $m=2$ включение (13) также имеет место. Для этого опишем способ получения многочлена

$$c_a=x_1^{p^l n_1-1}y_1^{p^l n_1'-1}[x_1,y_1]x_2^{p^l n_2-1}y_2^{p^l n_2'-1}[x_2,y_2]$$

с помощью некоторых подстановок из многочлена

$$c_{2,l}=x_1^{p^l-1}y_1^{p^l-1}[x_1,y_1]x_2^{p^l-1}y_2^{p^l-1}[x_2,y_2].$$

Если действовать по отдельности на каждый блок коммутаторного многочлена $c_{2,l}$ подстановками, аналогичными приведённым выше для доказательства (13) при $m=1$, то, в частности, в многочлен $c_{2,l}$ осуществляются подстановки $x_1\mapsto x_1^{n_1}$ и $x_2\mapsto x_2^{n_2}$. Первая подстановка не превратит $c_{2,l}$ в 0, так как по условию x_1 в многочлене c_a имеет уровень l, т. е. $(n_1,p)=1$. Вторая подстановка может обратить $c_{2,l}$ в 0, поскольку в общем случае переменная x_2 в многочлене c_a может иметь уровень, больший l, т. е. n_2 делится на p. Поэтому предложим другой способ получения многочлена c_a из $c_{2,l}$ с помощью некоторых подстановок, который позволит избежать обращения многочлена $c_{2,l}$ в 0.

Шаг 1. Повышение степеней переменных y_1, y_2. Для этого в многочлен $c_{2,l}$ осуществим подстановки $x_1\mapsto x_1y_1^{n_1'-1}$, $x_2\mapsto x_2y_2^{n_2'-1}$. После этих подстановок, пользуясь соотношениями (1) и (4), получим многочлен

$$x_1^{p^l-1}y_1^{p^l n_1'-n_1'-p^l+1+p^l-1+n_1'-1}[x_1,y_1]x_2^{p^l-1}y_2^{p^l n_2'-n_2'-p^l+1+p^l-1+n_2'-1}[x_2,y_2],$$

который после упрощения станет равным

$$x_1^{p^l-1}y_1^{p^l n_1'-1}[x_1,y_1]x_2^{p^l-1}y_2^{p^l n_2'-1}[x_2,y_2].$$

Шаг 2. Повышение степени переменной x_2. Из соотношения (2) следует, что полученный многочлен равен

$$-x_1^{p^l-1}x_2^{p^l-1}[x_1,x_2]y_1^{p^l n_1'-1}y_2^{p^l n_2'-1}[y_1,y_2].$$

В этом многочлене сделаем замену $x_1\mapsto x_1x_2^{n_2-1}$ и воспользуемся соотношениями (1) и (4). После всех преобразований получится многочлен

$$-x_1^{p^l-1}x_2^{p^l n_2-1}[x_1,x_2]y_1^{p^l n_1'-1}y_2^{p^l n_2'-1}[y_1,y_2].$$

Снова применим к этому многочлену соотношение (2), в итоге получим многочлен $c_{(p^l,p^ln'_1)}(x_1,y_1)c_{(p^ln_2,p^ln'_2)}(x_2,y_2)$ (см. обозначение (10)).

Шаг 3. Повышение степени переменной x_1. Осуществим в многочлене $c_{(p^l,p^ln'_1)}(x_1,y_1)c_{(p^ln_2,p^ln'_2)}(x_2,y_2)$ ту же подстановку, которая применялась для повышения степени переменной x_1 в многочлене $x_1^{p^l-1}y_1^{p^ln'_1-1}[x_1,y_1]$. В результате получится многочлен n_1c_a, где $(n_1,p)=1$. Отсюда следует, что $c_a\in\{c_{2,l}\}^T$.

Отметим, что повышение степени переменной x_1 выполняется в последнюю очередь, а шаги 1 и 2 можно выполнять в любом порядке. Это связано с тем, что повышение степеней остальных переменных (см. шаги 1 и 2) осуществляется с помощью переменной x_1. При этом нет необходимости повышать сначала степени переменных y_1 и y_2, а затем переменной x_2. Например, можно было бы повысить степени переменных x_2 и y_1, используя подстановки, аналогичные указанным в шаге 1, а затем повысить степень оставшейся переменной y_2, пользуясь способом, описанным в шаге 2. Для доказательства того, что $c_a\in\{c_{m,l}\}^T$ при фиксированном $m\geqslant 2$, нам достаточно описанных выше шагов.

Итак, чтобы получить нужные степени переменных y_i, применим указанные в шаге 1 подстановки ко всем переменным x_i, $i=\overline{1,m}$, многочлена $c_{m,l}$. Таким образом мы получим многочлен

$$c_{(p^l,p^ln'_1)}(x_1,y_1)c_{(p^l,p^ln'_2)}(x_2,y_2)\cdots c_{(p^l,p^ln'_m)}(x_m,y_m).$$

Чтобы в последнем многочлене повысить степени переменных x_i, $i=\overline{2,m}$, нужно последовательно повышать их для каждого его i-го блока $c_{(p^l,p^ln'_i)}(x_i,y_i)$, $i=\overline{2,m}$, используя 1-й блок $c_{(p^l,p^ln'_1)}(x_1,y_1)$, как это было описано в шаге 2. В итоге мы получим многочлен

$$c_{(p^l,p^ln'_1)}(x_1,y_1)c_{(p^ln_2,p^ln'_2)}(x_2,y_2)\cdots c_{(p^ln_m,p^ln'_m)}(x_m,y_m).$$

К этому многочлену применим шаг 3, чтобы повысить степень переменной x_1. В результате получим многочлен n_1c_a, где $(n_1,p)=1$, значит, $c_a\in\{c_{m,l}\}^T$. Таким образом, включение (13) выполняется для любого $m\in\mathbb{N}$. Из доказанных включений следует равенство $C_a=C_{p^l}^{(m)}$.

Может случиться так, что среди переменных x_i, y_i, $i=\overline{1,m}$, имеется несколько переменных уровня l. На подстановках, указанных в шагах 1 и 2, это никак не отражается, и утверждение остаётся справедливым.

2. Рассмотрим T-пространство $CD_{a,b}=\{h_{a,b}\}^T=\{c_ad_b\}^T$. Подставляя 1 вместо всех переменных одночлена d_b, получим, что $c_a\in\{c_ad_b\}^T$. Согласно только что доказанному $\{c_{m,l}\}^T=\{c_a\}^T$, значит, $\{c_{m,l}\}^T\subset\{c_ad_b\}^T$. Обратное включение также выполняется. В самом деле, по условию все переменные z_j имеют уровень, больший l, поэтому $d_b=z_1^{p^lq_1}\cdots z_s^{p^lq_s}$, где q_j делится на p для любого $j=\overline{1,s}$. Осуществим в $c_{m,l}$ подстановку $x_1\mapsto x_1z_1^{q_1}\cdots z_s^{q_s}$. Получим многочлен

$$(x_1z_1^{q_1}\cdots z_s^{q_s})^{p^l-1}y_1^{p^l-1}[x_1z_1^{q_1}\cdots z_s^{q_s},y_1]\cdots x_m^{p^l-1}y_m^{p^l-1}[x_m,y_m].$$

Учитывая, что q_j делится на p, применим соотношение (6) к этому многочлену. В результате всех преобразований придём к многочлену $c_{m,l}z_1^{p^l q_1}\cdots z_s^{p^l q_s}$, равному $c_{m,l}d_b$. Таким образом, $c_{m,l}d_b \in \{c_{m,l}\}^T$. Согласно доказанному утверждению 1 $c_a \in \{c_{m,l}\}^T$. Тогда $c_a d_b \in \{c_{m,l}d_b\}^T$. Значит, $c_a d_b \in \{c_{m,l}\}^T$. Следовательно, $\{c_a d_b\}^T \subset \{c_{m,l}\}^T$.

Теорема 2.1 доказана. □

Теорема 2.2 (вторая о выравнивании). *Пусть в многочлене $h_{a,b}$ одна из его переменных z_j, $j=\overline{1,s}$, имеет уровень l, остальные переменные имеют уровень, больший либо равный l. Тогда для любых $m,s\in\mathbb{N}$ и $l\geqslant 0$*

$$CD_{a,b} = CD^{(m)}_{p^l}.$$

Доказательство. Как и в предыдущей теореме, без ограничения общности можно считать, что в многочлене $h_{a,b}=c_a d_b$ переменная z_1 имеет уровень l. Из условия следует, что числа в наборах a и b можно представить в следующем виде: $a_i = p^l n_i$, $a'_i = p^l n'_i$, $b_j = p^l q_j$, n_i, n'_i, q_j — произвольные натуральные числа, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,s}$, причём $(q_1,p)=1$. Применим к многочлену $c_a d_b \in CD_{a,b}$ подстановки $z_j \mapsto 1$, $j=\overline{2,s}$. С помощью метода спуска нетрудно показать, что $CD^{(m)}_{p^l}\subset CD_{a,b}$. Для доказательства обратного включения осуществим в $g_{m,l}$ подстановку

$$z_1 \mapsto x_1^{n_1-1}y_1^{n'_1-1}\cdots x_m^{n_m-1}y_m^{n'_m-1}z_1^{q_1}z_2^{q_2}\cdots z_s^{q_s}.$$

Воспользовавшись соотношениями (1) и (8), в результате из многочлена $g_{m,l}$ получим многочлен

$$x_1^{p^l-1+p^l n_1-p^l}y_1^{p^l-1+p^l n'_1-p^l}[x_1,y_1]\cdots x_m^{p^l-1+p^l n_m-p^l}y_m^{p^l-1+p^l n'_m-p^l}[x_m,y_m]\times$$
$$\times z_1^{p^l q_1}z_2^{p^l q_2}\cdots z_s^{p^l q_s}.$$

Этот многочлен после упрощения станет равным $c_a d_b$. Значит, выполняется обратное включение $CD_{a,b}\subset CD^{(m)}_{p^l}$. Теорема 2.2 доказана. □

Замечание 2.1. В утверждении 2 первой теоремы о выравнивании существенно, что все переменные z_j, $j=\overline{1,s}$, имеют уровень, больший l. Иначе из второй теоремы о выравнивании следовало бы равенство $C^{(m)}_{p^l} = CD^{(m)}_{p^l}$, что невозможно в силу утверждения 2 теоремы 1.1.

Рассмотрим многочлены c_α, $h_{\alpha,\beta}$, где $\alpha = (\alpha_1,\alpha'_1,\ldots,\alpha_m,\alpha'_m)$, $\beta = (\beta_1,\ldots,\beta_s)$ — наборы натуральных чисел, $m,s\in\mathbb{N}$ (см. обозначение (9)). Через $\lambda(h_{\alpha,\beta})$ обозначим наименьший уровень среди всех уровней, которые имеют переменные x и y многочлена $h_{\alpha,\beta}$, а через $\mu(h_{\alpha,\beta})$ — наименьший уровень среди всех уровней, которые имеют переменные z многочлена $h_{\alpha,\beta}$. Тогда $\mu(c_\alpha)=0$. Следующая теорема показывает, что λ и μ являются определяющими характеристиками T-пространств C_α и $CD_{\alpha,\beta}$, порождённых соответственно многочленами c_α и $h_{\alpha,\beta}$.

Теорема 2.3.

1. *Если* $\lambda(c_\alpha) = \lambda(c_\gamma)$, *то* $\{c_\alpha\}^T = \{c_\gamma\}^T$. *Если* $\lambda(c_\alpha) < \lambda(c_\gamma)$, *то* $\{c_\alpha\}^T \subsetneqq \{c_\gamma\}^T$.
2. *Предположим, что* $\lambda(h_{\alpha,\beta}) < \mu(h_{\alpha,\beta})$ *и* $\lambda(h_{\gamma,\delta}) < \mu(h_{\gamma,\delta})$. *Если* $\lambda(h_{\alpha,\beta}) = \lambda(h_{\gamma,\delta})$, *то* $\{h_{\alpha,\beta}\}^T = \{h_{\gamma,\delta}\}^T$. *Если* $\lambda(h_{\alpha,\beta}) < \lambda(h_{\gamma,\delta})$, *то* $\{h_{\alpha,\beta}\}^T \subsetneqq \{h_{\gamma,\delta}\}^T$.
3. *Предположим, что* $\lambda(h_{\alpha,\beta}) \geqslant \mu(h_{\alpha,\beta})$ *и* $\lambda(h_{\gamma,\delta}) \geqslant \mu(h_{\gamma,\delta})$. *Если* $\mu(h_{\alpha,\beta}) = \mu(h_{\gamma,\delta})$, *то* $\{h_{\alpha,\beta}\}^T = \{h_{\gamma,\delta}\}^T$. *Если* $\mu(h_{\alpha,\beta}) < \mu(h_{\gamma,\delta})$, *то* $\{h_{\gamma,\delta}\}^T \subsetneqq \{h_{\alpha,\beta}\}^T$.

Доказательство. 1. По утверждению 1 первой теоремы о выравнивании имеем $\{c_\alpha\}^T = \left\{C_{p^{\lambda(c_\alpha)}}\right\}^T$ и $\{c_\gamma\}^T = \left\{C_{p^{\lambda(c_\gamma)}}\right\}^T$, и равенство $\{c_\alpha\}^T = \{c_\gamma\}^T$ очевидно. Из $\lambda(c_\alpha) < \lambda(c_\gamma)$ по теореме 1.1 следует $\{c_\alpha\}^T \subsetneqq \{c_\gamma\}^T$.

2. По утверждению 2 первой теоремы о выравнивании имеем $\{h_{\alpha,\beta}\}^T = \left\{C_{p^{\lambda(h_{\alpha,\beta})}}\right\}^T$ и $\{h_{\gamma,\delta}\}^T = \left\{C_{p^{\lambda(h_{\gamma,\delta})}}\right\}^T$, и равенство $\{h_{\alpha,\beta}\}^T = \{h_{\gamma,\delta}\}^T$ очевидно. Из $\lambda(h_{\alpha,\beta}) < \lambda(h_{\gamma,\delta})$ по теореме 1.1 следует $\{h_{\gamma,\delta}\}^T \subsetneqq \{h_{\alpha,\beta}\}^T$.

3. По второй теореме о выравнивании имеем $\{h_{\alpha,\beta}\}^T = \left\{CD_{p^{\mu(h_{\alpha,\beta})}}\right\}^T$ и $\{h_{\gamma,\delta}\}^T = \left\{CD_{p^{\mu(h_{\gamma,\delta})}}\right\}^T$, и равенство $\{h_{\alpha,\beta}\}^T = \{h_{\gamma,\delta}\}^T$ очевидно. Из $\mu(h_{\alpha,\beta}) < \mu(h_{\gamma,\delta})$ по теореме 1.1 следует $\{h_{\gamma,\delta}\}^T \subsetneqq \{h_{\alpha,\beta}\}^T$.

Теорема 2.3 доказана. □

Замечание 2.2. Функция λ задаёт отношение эквивалентности как на множестве многочленов вида c_α, так и на множестве многочленов вида $h_{\alpha,\beta}$ с условием $\lambda(h_{\alpha,\beta}) < \mu(h_{\alpha,\beta})$ и разбивает их на классы эквивалентности. Эти классы совпадают, если значения этой функции от различных многочленов равны, а это означает, что соответствующие Т-пространства совпадают. Классы эквивалентности не пересекаются, если значения этой функции различны, а это означает, что одно из соответствующих Т-пространств строго содержится в другом. Функция μ имеет тот же смысл, что и функция λ, но на множестве многочленов вида $h_{\alpha,\beta}$ с условием $\lambda(h_{\alpha,\beta}) \geqslant \mu(h_{\alpha,\beta})$.

3. Теорема о мономиальности

В этом разделе будет доказано, что по модулю Т-пространств $C_{p^l}^{(m)}$ и $C_{p^{l-1}}^{(m)}$ действие алгебры kT на $g_{m,l}$ и $c_{m,l}$ сводится к мономиальным подстановкам в этих многочленах.

Для доказательства основного результата нам потребуется следующая лемма.

Лемма 3.1.

$$(x_1 + x_2)^{p^l-1} y_1^{p^l-1} [x_1 + x_2, y_1] z^{p^l} \equiv$$
$$\equiv x_1^{p^l-1} y_1^{p^l-1} [x_1, y_1] z^{p^l} + x_2^{p^l-1} y_1^{p^l-1} [x_2, y_1] z^{p^l} \pmod{C_{p^{l-1}}^{(1)}}. \quad (14)$$

Доказательство. Согласно соотношению (1) левую часть сравнения (14) запишем следующим образом:

$$\begin{aligned}&(x_1+x_2)^{p^l-1}y_1^{p^l-1}[x_1+x_2,y_1]z^{p^l}=\\&=\left(x_1^{p^l-1}+\binom{p^l-1}{1}x_1^{p^l-2}x_2+\ldots+\binom{p^l-1}{n-1}x_1^{p^l-n}x_2^{n-1}+\right.\\&\left.+\binom{p^l-1}{n}x_1^{p^l-n-1}x_2^{n}+\ldots+\binom{p^l-1}{p^l-2}x_1x_2^{p^l-2}+x_2^{p^l-1}\right)\times\\&\times([x_1,y_1]+[x_2,y_1])y_1^{p^l-1}z^{p^l}.\end{aligned}$$

Отсюда получаем, что однородный многочлен

$$f=(x_1+x_2)^{p^l-1}y_1^{p^l-1}[x_1+x_2,y_1]z^{p^l}$$

представляется в виде суммы

$$f=x_1^{p^l-1}y_1^{p^l-1}[x_1,y_1]z^{p^l}+\sum_n f_nz^{p^l}+x_2^{p^l-1}y_1^{p^l-1}[x_2,y_1]z^{p^l},$$

где

$$f_n=\binom{p^l-1}{n-1}x_1^{p^l-n}x_2^{n-1}y_1^{p^l-1}[x_2,y_1]+\binom{p^l-1}{n}x_1^{p^l-n-1}x_2^{n}y_1^{p^l-1}[x_1,y_1] \tag{15}$$

есть полиоднородный многочлен типа (p^l-n,n,p^l), $n\in\{1,\ldots,p^l-1\}$, выделенный из однородного многочлена $(x_1+x_2)^{p^l-1}y_1^{p^l-1}[x_1+x_2,y_1]$. Для доказательства леммы нужно показать, что $f_nz^{p^l}\in C^{(1)}_{p^{l-1}}$ для любого $n=\overline{1,p^l-1}$.

Заметим, что коэффициенты в правой части равенства (15) связаны соотношением

$$\binom{p^l-1}{n-1}+\binom{p^l-1}{n}=\binom{p^l}{n}$$

при $n=\overline{1,p^l-1}$, причём $\binom{p^l}{n}\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,p)$. Поэтому многочлен f_n примет вид $f_n=\binom{p^l-1}{n}\varphi_n$, где

$$\varphi_n=x_1^{p^l-n-1}x_2^ny_1^{p^l-1}[x_1,y_1]-x_1^{p^l-n}x_2^{n-1}y_1^{p^l-1}[x_2,y_1].$$

Теперь достаточно показать, что $\varphi_nz^{p^l}\in C^{(1)}_{p^{l-1}}$ для любого $n=\overline{1,p^l-1}$.

Рассмотрим произвольное n из множества $\{1,\ldots,p^l-1\}$, тогда n можно представить в виде $p^{l_1}n_1$, где $(n_1,p)=1$, причём $p^{l_1}n_1<p^l$. Отсюда следует, что l_1 — это некоторое число из множества $\{0,\ldots,l-1\}$. Сначала покажем, что φ_n получается некоторыми подстановками из многочлена $x_1^{p^{l_1}-1}y_1^{p^{l_1}-1}[x_1,y_1]\in$ $\in C^{(1)}_{p^{l_1}}$ для указанного n. Действительно, из этого многочлена подстановкой $x_1\mapsto x_1y_1^{p^{l-l_1}-1}$ и применением соотношения (4) получим многочлен $x_1^{p^{l_1}-1}y_1^{p^l-1}[x_1,y_1]$. Такая подстановка возможна, поскольку $l_1<l$. Подставим

теперь x_1x_2 вместо переменной x_1 полученного многочлена. Используя очевидное равенство $[x_1x_2, y_1] = x_1[x_2, y_1] + x_2[x_1, y_1]$, после такой подстановки мы приходим к многочлену

$$x_1^{p^{l_1}} x_2^{p^{l_1}-1} y_1^{p^l-1}[x_2, y_1] + x_2^{p^{l_1}} x_1^{p^{l_1}-1} y_1^{p^l-1}[x_1, y_1].$$

Осуществим подстановки $x_1 \mapsto x_1^{p^{l-l_1}-n_1}$, $x_2 \mapsto x_2^{n_1}$ в последнем многочлене. Они корректны, так как $n_1 > 0$ и $p^{l-l_1} - n_1 = p^l/p^{l_1} - n/p^{l_1} = (p^l - n)/p^{l_1} > 0$ в силу условия $n \in \{1, \ldots, p^l - 1\}$.

В результате указанных подстановок получим

$$(x_1^{p^{l-l_1}-n_1})^{p^{l_1}} (x_2^{n_1})^{p^{l_1}-1} y_1^{p^l-1}[x_2^{n_1}, y_1] + \\ + (x_2^{n_1})^{p^{l_1}} (x_1^{p^{l-l_1}-n_1})^{p^{l_1}-1} y_1^{p^l-1}[x_1^{p^{l-l_1}-n_1}, y_1]. \quad (16)$$

Согласно соотношению (5) многочлен (16) приводится к виду

$$n_1 x_1^{p^l-n} x_2^{n-n_1+n_1-1} y_1^{p^l-1}[x_2, y_1] + \\ + (p^{l-l_1} - n_1) x_2^n x_1^{p^l-n-p^{l-l_1}+n_1+p^{l-l_1}-n_1-1} y_1^{p^l-1}[x_1, y_1]. \quad (17)$$

Учитывая, что $p^{l-l_1} - n_1 \equiv -n_1 \pmod p$ при $l_1 < l$, получаем, что многочлен (17) после упрощения станет равным многочлену $n_1\varphi_n$. Так как $(n_1, p) = 1$, то $\varphi_n \in \{c_{m,l_1}\}^T$. Отсюда следует, что $\varphi_n z^{p^l} \in \{c_{m,l_1} z^{p^l}\}^T$. Из утверждения 2 первой теоремы о выравнивании получаем, что $c_{m,l_1} z^{p^l} \in \{c_{m,l_1}\}^T$, поэтому $\varphi_n z^{p^l} \in \{c_{m,l_1}\}^T = C^{(1)}_{p^{l_1}}$. Из $l_1 \leqslant l - 1$ согласно утверждению 1 теоремы 1.1 следует, что $C^{(1)}_{p^{l_1}} \subseteq C^{(1)}_{p^{l-1}}$. Значит, $\varphi_n z^{p^l} \in C^{(1)}_{p^{l-1}}$. Последнее утверждение верно для любого $n = \overline{1, p^l - 1}$, и лемма доказана. □

Итак, имеет место следующая теорема.

Теорема 3.1 (о мономиальности). *По модулю T-пространства $C^{(m)}_{p^l}$ (по модулю T-пространства $C^{(m)}_{p^{l-1}}$) для произвольного $\tau \in kT$ многочлен $(g_{m,l})^\tau$ (многочлен $(c_{m,l})^\tau$) есть линейная комбинация многочленов, полученных мономиальными подстановками из многочлена $g_{m,l}$ (из многочлена $c_{m,l}$).*

Доказательство. Согласно соотношениям Фробениуса действие алгебры kT на сомножитель z^{p^l} многочлена $g_{m,l} = c_{m,l} z^{p^l}$ сводится к мономиальным подстановкам, поэтому рассмотрим действие kT на сомножитель $c_{m,l}$. Легко убедиться, что для доказательства теоремы достаточно показать выполнение следующих соотношений:

$$g_{m,l}(z_1 + z_2, y_1, \ldots, x_m, y_m, z) \equiv \\ \equiv g_{m,l}(z_1, y_1, \ldots, x_m, y_m, z) + g_{m,l}(z_2, y_1, \ldots, x_m, y_m, z) \pmod{C^{(m)}_{p^l}}, \quad (18)$$

$$c_{m,l}(z_1 + z_2, y_1, \ldots, x_m, y_m) \equiv \\ \equiv c_{m,l}(z_1, y_1, \ldots, x_m, y_m) + c_{m,l}(z_2, y_1, \ldots, x_m, y_m) \pmod{C^{(m)}_{p^{l-1}}}. \quad (19)$$

Итак, рассмотрим многочлен $g_{m,l}(z_1+z_2, y_1, \ldots, x_m, y_m, z)$, т. е. многочлен

$$(z_1+z_2)^{p^l-1} y_1^{p^l-1} [z_1+z_2, y_1] x_2^{p^l-1} y_2^{p^l-1} [x_2, y_2] \cdots x_m^{p^l-1} y_m^{p^l-1} [x_m, y_m] z^{p^l}.$$

Этот многочлен, как нетрудно проверить, представляется в виде суммы

$$g_{m,l}(z_1, y_1, \ldots, x_m, y_m, z) + g_{m,l}(z_2, y_1, \ldots, x_m, y_m, z) + \\ + \sum_{n=1}^{p^l-1} f_n x_2^{p^l-1} y_2^{p^l-1} [x_2, y_2] \cdots x_m^{p^l-1} y_m^{p^l-1} [x_m, y_m] z^{p^l}, \quad (20)$$

где f_n — полиоднородный многочлен типа (p^l-n, n, p^l), $n \in \{1, \ldots, p^l-1\}$, выделенный из однородного многочлена $(z_1+z_2)^{p^l-1} y_1^{p^l-1} [z_1+z_2, y_1]$ (см. формулу (15)). Остаётся лишь показать, что для любого $n = \overline{1, p^l-1}$ многочлен

$$f_n x_2^{p^l-1} y_2^{p^l-1} [x_2, y_2] \cdots x_m^{p^l-1} y_m^{p^l-1} [x_m, y_m] z^{p^l} \quad (21)$$

принадлежит Т-пространству $C_{p^l}^{(m)}$. Действительно, по лемме 3.1 $f_n z^{p^l} \in C_{p^{l-1}}^{(1)}$. В свою очередь, согласно утверждению 1 теоремы 1.1 $C_{p^{l-1}}^{(1)} \subset C_{p^l}^{(1)}$, значит, $f_n z^{p^l} \in C_{p^l}^{(1)}$. По определению

$$x_2^{p^l-1} y_2^{p^l-1} [x_2, y_2] \cdots x_m^{p^l-1} y_m^{p^l-1} [x_m, y_m] \in C_{p^l}^{(m-1)}.$$

Тогда для любого $n = \overline{1, p^l-1}$ многочлен (21) лежит в $C_{p^l}^{(m)}$. Следовательно, выполняется соотношение (18).

Многочлен $c_{m,l}(z_1+z_2, y_1, \ldots, x_m, y_m)$ представляется в виде суммы

$$c_{m,l}(z_1, y_1, \ldots, x_m, y_m) + c_{m,l}(z_2, y_1, \ldots, x_m, y_m) + \\ + \sum_{n=1}^{p^l-1} f_n x_2^{p^l-1} y_2^{p^l-1} [x_2, y_2] \cdots x_m^{p^l-1} y_m^{p^l-1} [x_m, y_m],$$

где f_n — многочлен, определённый так же, как в предыдущей части доказательства. Согласно лемме 3.1 для любого $n = \overline{1, p^l-1}$ имеем $f_n \in \{c_{1,l-1}\}^T$. Тогда

$$f_n x_2^{p^l-1} y_2^{p^l-1} [x_2, y_2] \cdots x_m^{p^l-1} y_m^{p^l-1} [x_m, y_m] \in \\ \in \{c_{1,l-1} x_2^{p^l-1} y_2^{p^l-1} [x_2, y_2] \cdots x_m^{p^l-1} y_m^{p^l-1} [x_m, y_m]\}^T.$$

Из утверждения 1 первой теоремы о выравнивании получаем, что Т-пространство $\{c_{1,l-1} x_2^{p^l-1} y_2^{p^l-1} [x_2, y_2] \cdots x_m^{p^l-1} y_m^{p^l-1} [x_m, y_m]\}^T$ совпадает с $C_{p^{l-1}}^{(m)}$. Следовательно,

$$f_n x_2^{p^l-1} y_2^{p^l-1} [x_2, y_2] \cdots x_m^{p^l-1} y_m^{p^l-1} [x_m, y_m] \in C_{p^{l-1}}^{(m)}$$

для любого $n = \overline{1, p^l-1}$. Значит, выполняется соотношение (19).

Теорема 3.1 доказана. □

Напомним, что коммутаторный многочлен кратности m уровня 0 имеет вид $c_{m,0} = [x_1, y_1] \cdots [x_m, y_m]$. Из теоремы 3.1 вытекает следствие.

Следствие 3.1. *Любой многочлен из Т-пространства $C_{p^l}^{(m)}$ (из Т-пространства $CD_{p^l}^{(m)}$) есть линейная комбинация многочленов, полученных мономиальными подстановками из $c_{m,l}, \ldots, c_{m,1}, c_{m,0}$ (из $g_{m,l}, c_{m,l}, \ldots, c_{m,1}, c_{m,0}$).*

Доказательство. Рассмотрим многочлен $f \in C_{p^l}^{(m)}$. По теореме 3.1 он представляется в виде линейной комбинации многочленов, полученных мономиальными подстановками из $c_{m,l}$, и некоторого многочлена $f_1 \in C_{p^{l-1}}^{(m)}$. В свою очередь, по этой же теореме f_1 также представляется в виде линейной комбинации многочленов, полученных мономиальными подстановками из $c_{m,l-1}$, и некоторого многочлена $f_2 \in C_{p^{l-2}}^{(m)}$. Продолжая таким образом представлять на каждом шаге получающиеся $f_i \in C_{p^{l-i}}^{(m)}$ с помощью теоремы 3.1 в виде линейной комбинации многочленов, полученных мономиальными подстановками из $c_{m,l-i}$, и некоторого многочлена $f_{i+1} \in C_{p^{l-(i+1)}}^{(m)}$, $i = \overline{3, l-1}$, в конце концов многочлен f предста́вим в виде линейной комбинации многочленов, полученных мономиальными подстановками из $c_{m,l}, \ldots, c_{m,1}$, и некоторого многочлена f_l, принадлежащего Т-пространству $C_1^{(m)} = \{c_{m,0}\}^T$. Из полилинейности $c_{m,0}$ следует, что f_l есть линейная комбинация многочленов, полученных мономиальными подстановками из $c_{m,0}$. Таким образом, f есть линейная комбинация многочленов, полученных мономиальными подстановками из $c_{m,l}, \ldots, c_{m,1}, c_{m,0}$.

Рассмотрим теперь многочлен $f \in CD_{p^l}^{(m)}$. По теореме 2.1 он представляется в виде линейной комбинации многочленов, полученных мономиальными подстановками из $g_{m,l}$, и некоторого многочлена $f_1 \in C_{p^l}^{(m)}$. Согласно доказанному выше f_1 есть линейная комбинация многочленов, полученных мономиальными подстановками из $c_{m,l}, \ldots, c_{m,1}, c_{m,0}$. Значит, f представляется в виде линейной комбинации многочленов, полученных мономиальными подстановками из $g_{m,l}, c_{m,l}, \ldots, c_{m,1}, c_{m,0}$, и следствие доказано. □

Докажем следующее весьма полезное и интересное утверждение.

Теорема 3.2. *Если к p-многочлену кратности m применить мономиальную подстановку, то получится линейная комбинация p-многочленов кратности m.*

Доказательство. Согласно определению p-многочлен кратности m можно записать в виде

$$x_1^{pn_1-1} y_1^{pn'_1-1} [x_1, y_1] \cdots x_m^{pn_m-1} y_m^{pn'_m-1} [x_m, y_m] z_1^{pq_1} \cdots z_s^{pq_s},$$

где $n_i, n'_i \in \mathbb{N}$, $q_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, s}$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ и $s \in \mathbb{N}$. Применим мономиальную подстановку к этому многочлену. Согласно соотношению (8) мономиальная подстановка в p-одночлен $z_1^{pq_1} \cdots z_s^{pq_s}$ переводит его снова в некоторый p-одночлен. Поэтому рассмотрим действие мономиальной подстановки на

$$x_1^{pn_1-1} y_1^{pn'_1-1} [x_1, y_1] \cdots x_m^{pn_m-1} y_m^{pn'_m-1} [x_m, y_m].$$

Достаточно понять, как мономиальная подстановка действует на один из блоков этого многочлена, например, на первый блок $x_1^{pn_1-1}y_1^{pn_1'-1}[x_1,y_1]$. Итак, рассмотрим многочлен $u^{pn_1-1}v^{pn_1'-1}[u,v]$, где u, v — произвольные одночлены из алгебры $F^{(3)}$. Одночлены u и v представим в виде $u = x_1\cdots x_r$, $v = y_1\cdots y_n$, $r,n\in\mathbb{N}$. При этом будем считать, что все переменные x_α, $\alpha=\overline{1,r}$, в u, а также все y_β, $\beta=\overline{1,n}$, в v попарно различны.

Сначала покажем, что многочлен

$$(x_1\cdots x_r)^{pn_1-1}v^{pn_1'-1}[x_1\cdots x_r, v]. \tag{22}$$

можно представить в виде

$$\begin{aligned} &x_1^{pn_1-1}v^{pn_1'-1}[x_1,v]x_2^{pn_1}\cdots x_r^{pn_1} +\\ &\quad + x_2^{pn_1-1}v^{pn_1'-1}[x_2,v]x_1^{pn_1}x_3^{pn_1}\cdots x_r^{pn_1} + \ldots +\\ &\quad + x_{r-1}^{pn_1-1}v^{pn_1'-1}[x_{r-1},v]x_1^{pn_1}\cdots x_{r-2}^{pn_1}x_r^{pn_1} +\\ &\quad + x_r^{pn_1-1}v^{pn_1'-1}[x_r,v]x_1^{pn_1}\cdots x_{r-1}^{pn_1}. \end{aligned} \tag{23}$$

Используя соотношение (3), многочлен (22) запишем в виде

$$\begin{aligned} &(x_2\cdots x_r)^{pn_1-1}v^{pn_1'-1}x_1^{pn_1-1}[x_1,v]x_2\cdots x_r +\\ &\quad + (x_1x_3\cdots x_r)^{pn_1-1}v^{pn_1'-1}x_2^{pn_1-1}[x_2,v]x_1x_3\cdots x_r + \ldots +\\ &\quad + (x_1\cdots x_{r-2}x_r)^{pn_1-1}v^{pn_1'-1}x_{r-1}^{pn_1-1}[x_{r-1},v]x_1\cdots x_{r-2}x_r +\\ &\quad + (x_1\cdots x_{r-1})^{pn_1-1}v^{pn_1'-1}x_r^{pn_1-1}[x_r,v]x_1\cdots x_{r-1}. \end{aligned}$$

С помощью соотношения (1) эта сумма преобразуется к виду

$$\begin{aligned} &x_1^{pn_1-1}v^{pn_1'-1}[x_1,v](x_2\cdots x_r)^{pn_1} +\\ &\quad + x_2^{pn_1-1}v^{pn_1'-1}[x_2,v](x_1x_3\cdots x_r)^{pn_1} + \ldots +\\ &\quad + x_{r-1}^{pn_1-1}v^{pn_1'-1}[x_{r-1},v](x_1\cdots x_{r-2}x_r)^{pn_1} +\\ &\quad + x_r^{pn_1-1}v^{pn_1'-1}[x_r,v](x_1\cdots x_{r-1})^{pn_1}. \end{aligned}$$

С помощью второго соотношения Фробениуса последнее выражение приводится к требуемому виду (23).

В каждом из слагаемых выражения (23) содержится в качестве сомножителя многочлен вида $v^{pn_1'-1}[x_\alpha,v]$, $\alpha=\overline{1,r}$. Этот многочлен аналогично тому, как это было проделано для многочлена (22), представим в виде

$$\begin{aligned} &y_1^{pn_1'-1}[x_\alpha,y_1]y_2^{pn_1'}\cdots y_n^{pn_1'} + y_2^{pn_1'-1}[x_\alpha,y_2]y_1^{pn_1'}y_3^{pn_1'}\cdots y_n^{pn_1'} +\\ &\quad + y_{n-1}^{pn_1'-1}[x_\alpha,y_{n-1}]y_1^{pn_1'}\cdots y_{n-2}^{pn_1'}y_n^{pn_1'} + y_n^{pn_1'-1}[x_\alpha,y_n]y_1^{pn_1'}\cdots y_{n-1}^{pn_1'}. \end{aligned} \tag{24}$$

Подставляя (24) в соответствующее слагаемое выражения (23) и используя соотношения (1) и (6), мы представим многочлен $u^{pn_1-1}v^{pn_1'-1}[u,v]$ в виде линейной комбинации p-многочленов, причём их кратность равна 1. Отсюда следует, что остальные блоки $u_i^{pn_i-1}v_i^{pn'_i-1}[u_i, v_i]$, где u_i, v_i — произвольные одночлены из $F^{(3)}$, $i = \overline{2, m}$, также являются линейными комбинациями p-многочленов кратности 1, а значит, произведение всех блоков является линейной комбинацией p-многочленов кратности m.

Теорема 3.2 доказана. □

Следствие 3.1 и теорема 3.2 оказываются полезными для исследования многочленов, которые можно получить произвольными подстановками и k-линейными действиями из порождающих T-пространства W_p. Напомним, что $W_p = D_p \oplus CD_p$, где $D_p = \{z_1^p\}^T$,

$$CD_p = \{g_{m,1} \mid m \in \mathbb{N}\}^T = \{x_1^{p-1}y_1^{p-1}[x_1, y_1] \cdots x_m^{p-1}y_m^{p-1}[x_m, y_m]z_1^p \mid m \in \mathbb{N}\}^T.$$

Рассмотрим следующие многочлены:

$$x_{j_1}^{n_{j_1}-1}x_{j_2}^{n_{j_2}-1} \cdots x_{j_{2r-1}}^{n_{j_{2r-1}}-1}x_{j_{2r}}^{n_{j_{2r}}-1}[x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2r-1}}, x_{j_{2r}}]x_{i_1}^{m_{i_1}} \cdots x_{i_s}^{m_{i_s}}, \tag{25}$$

где $j_1 < \ldots < j_{2r}$, $i_1 < \ldots < i_s$, n_{j_β}, m_{i_α} — произвольные натуральные числа, множества индексов $\{i_\alpha \in \mathbb{N} \mid \alpha = \overline{1, s}\}$, $\{j_\beta \in \mathbb{N} \mid \beta = \overline{1, 2r}\}$ не пересекаются, $r, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, причём может отсутствовать как *коммутаторная часть* (т. е. $r = 0$), так и *чисто степенная часть* (т. е. $s = 0$) При $r = s = 0$ многочлен (25) по определению равен 1.

Для алгебры $F^{(3)}$ имеет место следующая теорема (см. [13]).

Теорема 3.3. *Многочлены* (25) *образуют базис k-алгебры $F^{(3)}$.*

Всякий p-многочлен с помощью коммутаторных соотношений можно представить в виде

$$x_{j_1}^{pn_{j_1}-1}x_{j_2}^{pn_{j_2}-1} \cdots x_{j_{2r-1}}^{pn_{j_{2r-1}}-1}x_{j_{2r}}^{pn_{j_{2r}}-1}[x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2r-1}}, x_{j_{2r}}] \times \\ \times x_{i_1}^{pq_{i_1}} \cdots x_{i_s}^{pq_{i_s}}, \tag{26}$$

где $j_1 < \ldots < j_{2r}$, $i_1 < \ldots < i_s$, $n_{j_\beta}, q_{i_\alpha} \in \mathbb{N}$, множества индексов $\{i_\alpha \in \mathbb{N} \mid \alpha = \overline{1, s}\}$, $\{j_\beta \in \mathbb{N} \mid \beta = \overline{1, 2r}\}$ не пересекаются, $r, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Очевидно, множество p-многочленов (26) является подмножеством множества многочленов (25), являющегося по теореме 3.2 линейно независимой системой. Следовательно, система многочленов (26) также линейно независима.

Линейную структуру T-пространства W_p описывает следующее утверждение.

Предложение 3.1. *Любой многочлен из T-пространства W_p есть линейная комбинация p-многочленов вида* (26) *и некоторого многочлена из T-пространства $C_1 = \{c_{1,0}\}^T$.*

Доказательство. Если $f \in W_p$, то $f = f_1 + f_2$, где $f_1 \in D_p$, $f_2 \in CD_p$. Тогда из соотношений Фробениуса следует, что f_1 есть линейная комбинация одночленов вида

$$x_{i_1}^{pq_{i_1}} \cdots x_{i_s}^{pq_{i_s}}, \tag{27}$$

где $q_{i_\alpha} \in \mathbb{N}$, $i_\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha = \overline{1, s}$, $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Многочлен $f_2 \in CD_p$ согласно следствию 3.1 есть сумма $f_3 + f_4$, где f_3 является линейной комбинацией многочленов, полученных мономиальными подстановками из $g_{m,1}$ и $c_{m,1}$, а f_4 — линейная комбинация многочленов, полученных мономиальными подстановками из $c_{m,0}$ при некоторых $m \in \mathbb{N}$. По лемме 1.2 $c_{m,0} \in \{c_{1,0}\}^T$ для любого m, значит, $f_4 \in \{c_{1,0}\}^T$. Из теоремы 3.2 следует, что f_3 есть линейная комбинация p-многочленов (26), и предложение доказано. $\square$

Замечание 3.1. По лемме 1.2 для любого $r \in \mathbb{N}$ произведение r коммутаторов $[x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2r-1}}, x_{j_{2r}}]$ лежит в Т-пространстве $C_1 = \{c_{1,0}\}^T$. Применим к этому произведению подстановку

$$x_{j_1} \mapsto x_{j_1} x_{i_1}^{pq_{i_1}} \cdots x_{i_s}^{pq_{i_s}},$$

где q_{i_α} — произвольные натуральные числа, $\alpha = \overline{1,s}$, и воспользуемся соотношением (6). В результате получим многочлен

$$[x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2r-1}}, x_{j_{2r}}] x_{i_1}^{pq_{i_1}} \cdots x_{i_s}^{pq_{i_s}}.$$

Будем считать, что множества индексов $\{i_\alpha \in \mathbb{N} \mid \alpha = \overline{1,s}\}$, $\{j_\beta \in \mathbb{N} \mid \beta = \overline{1,2r}\}$, $r, s \in \mathbb{N}$, не пересекаются и упорядочены следующим образом: $j_1 < \ldots < j_{2r}$, $i_1 < \ldots < i_s$. Осуществляя в последнем многочлене подстановки $x_{j_\beta} \mapsto x_{j_\beta}^{n_{j_\beta}}$, где $(n_{j_\beta}, p) = 1$ для любого $\beta = \overline{1,2r}$, получим многочлен

$$[x_{j_1}^{n_{j_1}}, x_{j_2}^{n_{j_2}}] \cdots [x_{j_{2r-1}}^{n_{j_{2r-1}}}, x_{j_{2r}}^{n_{j_{2r}}}] x_{i_1}^{pq_{i_1}} \cdots x_{i_s}^{pq_{i_s}}.$$

С помощью соотношения (5) этот многочлен приводится к виду

$$n_{j_1} n_{j_2} \cdots n_{j_{2r-1}} n_{j_{2r}} x_{j_1}^{n_{j_1}-1} x_{j_2}^{n_{j_2}-1} \cdots x_{j_{2r-1}}^{n_{j_{2r-1}}-1} x_{j_{2r}}^{n_{j_{2r}}-1} \times \\ \times [x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2r-1}}, x_{j_{2r}}] x_{i_1}^{pq_{i_1}} \cdots x_{i_s}^{pq_{i_s}}.$$

Из условия следует, что $n_{j_1} n_{j_2} \cdots n_{j_{2r-1}} n_{j_{2r}}$ не делится на p, следовательно, многочлены вида

$$x_{j_1}^{n_{j_1}-1} x_{j_2}^{n_{j_2}-1} \cdots x_{j_{2r-1}}^{n_{j_{2r-1}}-1} x_{j_{2r}}^{n_{j_{2r}}-1} [x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2r-1}}, x_{j_{2r}}] x_{i_1}^{pq_{i_1}} \cdots x_{i_s}^{pq_{i_s}} \qquad (28)$$

принадлежат C_1.

Объединяя (26), (27) и (28), получим многочлены вида

$$x_{j_1}^{n_{j_1}-1} x_{j_2}^{n_{j_2}-1} \cdots x_{j_{2r-1}-1}^{n_{j_{2r-1}}-1} x_{j_{2r}}^{n_{j_{2r}}-1} [x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2r-1}}, x_{j_{2r}}] x_{i_1}^{pq_{i_1}} \cdots x_{i_s}^{pq_{i_s}}, \qquad (29)$$

где n_{j_β}, q_{i_α} — произвольные натуральные числа, $r, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. По теореме 3.2 множество этих многочленов является, очевидно, линейно независимой подсистемой системы многочленов (25). Значит, многочлены (29) линейны независимы.

Замечание 3.2. Среди многочленов вида (29) нет, например, многочленов $x_1[x_2, x_3]$ и $x_2[x_1, x_3]$, но их сумма равна многочлену $[x_1 x_2, x_3]$, который получается из $c_{1,0} = [x_1, x_2]$ мономиальной подстановкой $x_1 \mapsto x_1 x_2$, следовательно, $[x_1 x_2, x_3]$ лежит в C_1. Поиск хорошего базиса Т-пространства C_1 — отдельная задача, которая здесь не рассматривается.

4. Случай $p = 2$

Как уже отмечалось выше, соотношения Фробениуса выполняются в $F^{(3)}$ только начиная со степени 4, т. е. когда $p = 2$, $l \geqslant 2$. Поэтому все результаты, полученные в предыдущих разделах, без труда переносятся на элементарные составляющие $C_{2^l}^{(m)}$ и $CD_{2^l}^{(m)}$ T-пространств C_{2^l} и CD_{2^l} соответственно для всех $m \in \mathbb{N}$, $l \geqslant 2$.

В случае же $p = 2$, $l = 1$ выполняются следующие соотношения, объясняющие его специфику:

$$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + [x_1, x_2], \tag{30}$$

$$(x_1 x_2)^2 = x_1^2 x_2^2 + x_1 x_2 [x_1, x_2]. \tag{31}$$

В [4] было показано, что D_2 — бесконечно базируемое T-пространство, в то время как T-пространство D_{2^l} при $l \geqslant 2$ является нётеровым kT-модулем (см. [8]). В [8] показано, что $D_2 = W_2$ и $C_1 \subsetneqq C_2 \subsetneqq CD_2 \subsetneqq D_2$. Напомним, что бесконечная неприводимая система порождающих T-пространства D_2 имеет следующий вид:

$$\{x_1^2, x_1^2 x_2^2, \ldots, x_1^2 x_2^2 \cdots x_i^2, \ldots\}. \tag{32}$$

В свою очередь, T-пространство C_2 порождается всеми коммутаторными многочленами $c_{m,1}$ кратности m уровня 1, поэтому можно говорить о разложении этого T-пространства в бесконечную сумму элементарных составляющих $C_2^{(m)} = \{c_{m,1}\}^T$, $m \in \mathbb{N}$. Для T-пространства CD_2, как было показано в [8], бесконечная неприводимая система порождающих имеет вид

$$\{x_1 y_1 [x_1, y_1] z_1^2,\ x_1 y_1 [x_1, y_1] z_1^2 z_2^2, \ldots,\ x_1 y_1 [x_1, y_1] z_1^2 z_2^2 \cdots z_s^2, \ldots\}. \tag{33}$$

С помощью соотношения (31) нетрудно показать, что через элементы этой системы можно выразить (с помощью некоторых подстановок и k-линейных действий) все многочлены $g_{m,1}$, т. е. $\{g_{m,1} \mid m \in \mathbb{N}\}^T \subset CD_2$. Отметим, что бесконечная система многочленов $\{g_{m,1} \mid m \in \mathbb{N}\}$ неприводима. Но, как показывает следующее предложение, она не порождает всё T-пространство CD_2.

Предложение 4.1. $\{g_{m,1} \mid m \in \mathbb{N}\}^T \subsetneqq CD_2$.

Доказательство. Для доказательства достаточно показать, что многочлен $x_1 y_1 [x_1, y_1] z_1^2 z_2^2$ из системы (33) не лежит в T-пространстве $\{g_{m,1} \mid m \in \mathbb{N}\}^T$. Предположим, что это не так. Отметим, что коммутатор $[u, v]$ любых двух одночленов есть линейная комбинация коммутаторов от переменных вида $[x_i, x_j]$, умноженных на одночлены. Тогда многочлены линейной комбинации, дающие $x_1 y_1 [x_1, y_1] z_1^2 z_2^2$ и получающиеся из $g_{m,1}$ некоторыми подстановками и k-линейными действиями, являются линейными комбинациями произведений m коммутаторов, умноженных на одночлены. Так как многочлен $x_1 y_1 [x_1, y_1] z_1^2 z_2^2$ зависит от четырёх переменных, то многочлены линейной комбинации, дающие $x_1 y_1 [x_1, y_1] z_1^2 z_2^2$ и являющиеся произведениями больше чем двух коммутаторов, умноженных на одночлены, содержат произведение вида $[x, y][x, z]$. Значит, все такие многочлены равны нулю. Отсюда следует, что многочлен $x_1y_1[x_1,y_1]z_1^2z_2^2$ является линейной комбинацией многочленов, полученных некоторыми подстановками и k-линейными действиями из многочлена $g_{1,1}$. Последнее утверждение противоречит неприводимости системы (33), и предложение доказано. □

Таким образом, CD_2 раскладывается в бесконечную сумму T-пространств $CD_2^{(1,s)}$, порождённых многочленами $c_{1,1}z_1^2\cdots z_s^2$, $s\in\mathbb{N}$. Циклические kT-модули $CD_2^{(1,s)}$ мы и называем *элементарными составляющими* T-пространства CD_2. Вопрос об их строении здесь не рассматривается. Тем не менее можно изучить T-пространства $CD_2^{(m)}$. Отметим, что первая теорема о выравнивании (теорема 2.1) имеет место для $C_2^{(m)}$ и $CD_2^{(m)}$. Для доказательства второй теоремы о выравнивании (теоремы 2.2) используются соотношения Фробениуса, поэтому вопрос о справедливости этой теоремы для $CD_2^{(m)}$ открыт. Нетрудно проверить, что теорема о мономиальности (теорема 3.1) справедлива для элементов $c_{m,1}$. Остаётся под вопросом справедливость этой теоремы для $g_{m,1}$, а также линейная структура W_2. Для ответа на эти вопросы нужно исследовать структуру элементарных составляющих $CD_2^{(1,s)}$, $s\in\mathbb{N}$, и связанных с ними конструкций. Этим и другим вопросам о строении относительно свободной алгебры Грассмана при $p=2$ автор планирует посвятить свои дальнейшие исследования.

Литература

[1] Белов А. Я. О нешпехтовых многообразиях // Фундамент. и прикл. мат. — 1999. — Т. 5, вып. 1. — С. 47—66.

[2] Гришин А. В. О конечной базируемости систем обобщённых многочленов // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1990. — Т. 54, № 5. — С. 899—927.

[3] Гришин А. В. О конечной базируемости абстрактных T-пространств // Фундамент. и прикл. мат. — 1995. — Т. 1, вып. 3. — С. 669—700.

[4] Гришин А. В. Примеры не конечной базируемости T-пространств и T-идеалов в характеристике 2 // Фундамент. и прикл. мат. — 1999. — Т. 5, вып. 1. — С. 101—118.

[5] Гришин А. В., Сурмина Л. М. О T-алгебре n-слов // Междунар. конф. по алгебре и теории чисел, посвящённая 80-летию В. Е. Воскресенского. Самара, 21—25 мая 2007 г. Тезисы докладов. — С. 15—16.

[6] Гришин А. В., Сурмина Л. М. О T-пространствах n-слов над полем характеристики $p>0$ // Успехи мат. наук. — 2007. — Т. 62, № 4. — С. 145—146.

[7] Гришин А. В., Урбаханов С. В. О коразмерностях в пространствах 2-слов над полем характеристики 2 и свойствах экстремальности // Чебышёвский сб. — 2002. — Т. 3, № 2. — С. 34—42.

[8] Гришин А. В., Цыбуля Л. М. О (p,n)-проблеме // Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. Мат. — 2007. — Т. 57, № 7. — С. 35—55.

[9] Гришин А. В., Цыбуля Л. М. Две теоремы о строении относительно свободной алгебры Грассмана // Успехи мат. наук. — 2008. — Т. 63, № 4. — С. 186—187.

[10] Чирипов П. Ж., Сидеров П. Н. О базисах тождеств некоторых многообразий ассоциативных алгебр // Плиска. — 1981. — № 2. — С. 103—115.

[11] Щиголев В. В. Конечная базируемость T-пространств над полями нулевой характеристики // Изв. РАН. Сер. мат. — 2001. — Т. 65, № 5. — С. 191—224.

[12] Щиголев В. В. Примеры бесконечно базируемых T-идеалов // Фундамент. и прикл. мат. — 1999. — Т. 5, вып. 1. — С. 307—312.

[13] Grishin A. V., Shchigolev V. V. On T-spaces and their applications // J. Math. Sci. — 2006. — Vol. 134, no. 1. — P. 1799—1878.

[14] Gupta C. K., Krasilnikov A. N. A non-finitely based system of polinomial identities which contains the identity $x^6 = 0$ // Quart. J. Math. — 2002. — Vol. 53. — P. 173—183.

[15] Specht W. Gesetze in Ringen // Math. Z. — 1950. — Vol. 52. — P. 557—589.