Группы с условиями минимальности

Н. С. ЧЕРНИКОВ
Институт математики
Национальной академии наук Украины
e-mail: Chern@Imath.Kiev.ua

УДК 512.54

Ключевые слова: условия минимальности, артиновы группы, черниковские группы, шунковские группы, нормальные системы, поддекартовы произведения, локальные классы групп, локально разрешимые группы, локально конечные группы, локально ступенчатые группы, бинарно ступенчатые группы.

Аннотация

Автор устанавливает ряд новых предложений, утверждающих, что группы с различными условиями минимальности являются черниковскими при некоторых дополнительных экстремально-слабых условиях конечности. Эти предложения включают в себя многие известные теоремы о группах с условиями минимальности.

Abstract

N. S. Chernikov, Groups with minimal conditions, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 5, pp. 219—235.

The author establishes a number of new propositions asserting that groups with various minimal conditions are Chernikov under some additional extremely weak finiteness conditions. These propositions include a great many known theorems on groups with minimal conditions.

1. Введение. Основные теоремы

Напомним, что группа удовлетворяет условию минимальности для некоторых подгрупп, если она не имеет бесконечных убывающих цепочек этих подгрупп. Ниже min, min-ab, min-$\overline{\text{ab}}$ — условия минимальности для подгрупп, абелевых подгрупп, неабелевых подгрупп соответственно. Группы, удовлетворяющие условию min, также называются артиновыми. Все артиновы группы и все группы, для которых выполняется условие min-ab, являются периодическими. Напомним, что группа, которая является конечным расширением прямого произведения конечного числа квазициклических подгрупп или конечна, называется черниковской. Все черниковские группы артиновы.

Напомним, что группа удовлетворяет слабому условию минимальности для некоторых подгрупп (или по некоторым подгруппам), если она не имеет бесконечных убывающих цепочек с бесконечными индексами этих подгрупп [1, 31].

Фундаментальная и прикладная математика, 2008, том 14, № 5, с. 219—235.

Ниже wmin, wmin-ab, wmin-$\overline{\text{ab}}$ — слабые условия минимальности для подгрупп, абелевых подгрупп, неабелевых подгрупп соответственно. Периодические абелевы группы, для которых выполняется условие wmin, — это в точности черниковские абелевы группы [1, 31].

Далее, $\mathbf{N}$ и $\mathbf{P}$ — множества всех натуральных и всех простых натуральных чисел соответственно; если G — группа и $\varnothing \neq X, Y \subseteq G$, то X^Y — множество всех элементов $y^{-1}xy$ группы G, где $x \in X$ и $y \in Y$, $J(G)$ — пересечение всех нормальных подгрупп конечного индекса группы G. Вследствие теоремы Пуанкаре (см., например, [5]), $J(G)$ есть в точности пересечение всех нормальных подгрупп конечного индекса группы G. Другие обозначения в настоящей работе взяты из [38] или являются стандартными.

Основные результаты настоящей работы — следующие теоремы A—C.

Теорема A. *Пусть G — периодическая группа, для которой выполняется условие* wmin, *или неабелева периодическая группа, для которой выполняется условие* wmin-$\overline{\text{ab}}$. *Тогда G является черниковской, если и только если для каждых $g, h \in G$ подгруппа $\langle g, g^h \rangle$ конечна всякий раз, когда g — p — элемент для некоторого нечётного простого p и $[g^p, h] = 1$.*

Теорема B. *Пусть G — артинова группа или неабелева группа, для которой выполняется условие* min-$\overline{\text{ab}}$. *Тогда G является черниковской, если и только если выполняется следующее условие*:

для каждых $g, h \in G$ подгруппа $\langle g, g^h \rangle$ обладает подгруппой конечного индекса, отличной от 1, всякий раз, когда g — элемент бесконечного порядка или g — p — элемент, отличный от 1, для некоторого нечётного p, и к тому же $\langle g, h \rangle$ является периодической и $[g^p, h] = 1$. (∗)

Теорема C. *Пусть $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{H}$ — максимальные классы групп, в которых соответственно все артиновы группы и все неабелевы группы, для которых выполняется условие* min-$\overline{\text{ab}}$, *являются черниковскими, и $\mathfrak{L}$ — минимальный локальный класс групп, замкнутый относительно образования нормальных систем, поддекартовых произведений и содержащий любую группу G, для которой выполняется* (∗). *Тогда*

1) *$\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{H}$ локальны и замкнуты относительно образования нормальных систем и поддекартовых произведений*;
2) *произвольная группа H принадлежит к $\mathfrak{K}$ ($\mathfrak{H}$), если для каждых $g, h \in H$ подгруппа $\langle g, g^h \rangle$ обладает некоторым $\mathfrak{K}$- (соответственно $\mathfrak{H}$-) гомоморфным образом $V \neq 1$ всякий раз, когда g — элемент бесконечного порядка или g — p-элемент, отличный от 1, для некоторого нечётного p, и к тому же группа $\langle g, h \rangle$ является периодической и $[g^p, h] = 1$;*
3) *все артиновы $\mathfrak{L}$-группы и все неабелевы $\mathfrak{L}$-группы, для которых выполняется условие* min-$\overline{\text{ab}}$, *черниковские (т. е. $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{K} \cap \mathfrak{H}$).*

Замечание 1. Отметим, что теоремы 1—3 из [33] содержатся соответственно в теоремах B, A, C. Теоремы 1—3 — в точности все результаты [33].

Замечание 2. Группа $G = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$ с бесконечными циклическими подгруппами $\langle a \rangle$ и $\langle b \rangle$, где $a^b = a^{-1}$, неабелева без кручения и удовлетворяет условию wmin. Итак, в теореме A условие периодичности группы G существенно. Отметим в связи с теоремой A, что существует великое множество примеров А. Ю. Ольшанского периодических неартиновых неабелевых групп с собственными абелевыми подгруппами (см., например, [8, теорема 35.1]). Любая такая группа удовлетворяет условию wmin-$\overline{\text{ab}}$ и не удовлетворяет условию wmin.

Замечание 3. Примеры А. Ю. Ольшанского [6, 7] (см. также [8]) бесконечных периодических групп, для которых любая собственная подгруппа имеет простой порядок, показывают, что в теоремах A и B ограничения, налагаемые на $\langle g, g^h \rangle$, существенны.

Теоремы A—C включают в себя многие теоремы, которые положительно решают в различных классах групп проблему С. Н. Черникова о том, является ли произвольная группа, для которой выполняется условие min, непременно черниковской? Среди этих теорем отметим теоремы С. Н. Черникова [19, 20] (см. также [25, теорема 1.1]), О. Ю. Шмидта и С. Н. Черникова [19,20,26], Шункова, Кегеля и Верфица [28, 36], Н. С. Черникова [16], которые устанавливают соответственно, что локально разрешимая, 2-, локально конечная, бинарно конечная группа является артиновой, если и только если она черниковская. Напомним, что проблема была отрицательно решена в целом А. Ю. Ольшанским [6, 7] (см. также [8]).

Каждая из теорем B, C включает в себя теорему С. Н. Черникова [22, 24], утверждающую, что неабелева группа, для которой выполняется условие min-$\overline{\text{ab}}$, является черниковской, если она обладает нормальной системой с конечными факторами и, в частности, если она RN-группа, локально разрешимая группа.

Каждая из теорем A—C включает в себя теорему Шункова [29], утверждающую, что неабелева локально конечная группа, для которой выполняется условие min-$\overline{\text{ab}}$, черниковская.

Отметим также, что теорема A включает в себя теорему Шункова—Зайцева [2, 29], утверждающую, что неабелева локально-конечная группа, для которой выполняется условие wmin-$\overline{\text{ab}}$, является черниковской.

Группа G называется группой Шункова (или шунковской группой), если для любой её конечной подгруппы K каждая подгруппа фактор-группы $N_G(K)/K$, порождённая двумя сопряжёнными элементами простого порядка, конечна (В. Д. Мазуров, 1998 г.). Группы Шункова также называют *сопряжённо бипримитивно конечными* (первоначальная терминология В. П. Шункова).

Класс всех шунковских групп широк и содержит, например, все локально конечные, бинарно конечные, 2-группы. Также понятно, что любая группа, являющаяся расширением группы Шункова с помощью группы без кручения, шунковская.

Легко убедиться, что для любых простого p и p-элемента g шунковской группы G и $h \in C_G(g^p)$ группа $\langle g, g^h \rangle$ конечна (см. лемма 1). В частности, произвольная периодическая шунковская группа G удовлетворяет условию $(*)$.

Следовательно, каждая из теорем A—C включает в себя следующую теорему Шункова, Остыловского и Сучковой [13, теорема 4.3.3; 9, 15]: артинова группа является черниковской, если и только если она группа Шункова. Заметим, что доказательство теоремы A (см. ниже) использует эту теорему.

Напомним также, что группа, имеющая нормальную систему с шунковскими факторами, называется *BN-группой* (В. П. Шунков, А. Н. Остыловский [9, с. 33]).

Остановимся на результатах раздела 4. Предложение 2 обобщает теорему Шмидта и Черникова [19, 20, 26], упомянутую выше. Согласно предложению 2 неабелевы 2-группы, для которых выполняется условие $\mathsf{wmin}\text{-}\overline{\mathsf{ab}}$, и 2-группы, для которых выполняется условие wmin, черниковские. По теореме 3 неабелевы группы, удовлетворяющие условию $\mathsf{min}\text{-}\overline{\mathsf{ab}}$ и обладающие нормальной системой с периодическими шунковскими факторами, являются черниковскими. Согласно предложению 3 неабелевы периодические BN-группы, для которых выполняется условие $\mathsf{min}\text{-}\overline{\mathsf{ab}}$, и артиновы BN-группы черниковские.

Группа, в которой любая конечно порождённая подгруппа, отличная от 1, имеет подгруппу конечного индекса, отличную от 1, называется локально ступенчатой (С. Н. Черников, 1969 г.).

Введём новое определение.

Определение (Н. С. Черников). Группа, в которой любая 2-порождённая подгруппа, отличная от 1, имеет подгруппу конечного индекса, отличную от 1, будет называться бинарно ступенчатой.

Класс всех бинарно ступенчатых групп очень широк. Он содержит, например, все локально ступенчатые, бинарно конечные, бинарно разрешимые группы. Вместе с классом всех локально ступенчатых групп он содержит все финитно аппроксимируемые и все линейные группы, все группы всех классов Куроша—Черникова, все RK-, RJ$*$-группы (определения см. в [5]), все радикальные в смысле Б. И. Плоткина группы (см. [5]), все группы, аппроксимируемые разрешимыми группами.

Напомним, что по определению М. И. Каргаполова и Ю. И. Мерзлякова (1969 г.) классы Куроша—Черникова — это классы всех RN-, RN$*$-, $\overline{\mathrm{RN}}$-, RI-, RI$*$-, $\overline{\mathrm{RI}}$-, Z-, ZA-, ZD-, $\overline{\mathrm{Z}}$-, $\tilde{\mathrm{N}}$-, N-групп. Последние 12 классов групп были введены в рассмотрение А. Г. Курошем и С. Н. Черниковым в 1947 г. (см. [5]).

Теорема 4 утверждает, что бинарно ступенчатые группы, для которых выполняется условие $\mathsf{min}\text{-}\overline{\mathsf{ab}}$, являются черниковскими.

Остановимся на результатах раздела 5. Предложение 5 устанавливает, что максимальный класс групп, в котором все группы, для которых выполняется условие $\mathsf{min}\text{-}\mathsf{ab}$, черниковские, локален и замкнут относительно возрастающих нормальных рядов. Предложение 6 устанавливает, что в минимальном локальном классе групп, замкнутом относительно возрастающих нормальных рядов и содержащем все локально разрешимые и все шунковские группы, каждая группа, для которой выполняется условие $\mathsf{min}\text{-}\mathsf{ab}$, черниковская.

В заключение из предварительных результатов (см. раздел 2) отметим теоремы 1 и 2. Теорема 1 показывает, что при некотором слабом дополнительном условии конечности локально ступенчатая группа $G = A \leftthreetimes \langle b \rangle$, где $|\langle b \rangle| \in \mathbf{P}$ и $C_A(\langle b \rangle) = 1$, локально конечная с нильпотентой A. Теорема 2 показывает, что при некотором слабом дополнительном условии конечности финитно аппроксимируемая группа, для которой выполняется условие min-ab, конечна.

Замечание 4. В связи с теоремой B отметим также, что бинарно (в частности, локально) конечная неабелева группа является черниковской, если она удовлетворяет условию минимальности лишь для неабелевых метаабелевых подгрупп (Н. С. Черников [17, 18]).

2. Предварительные результаты

Лемма 1. *Пусть G — группа, g — её p-элемент для некоторого простого p и h — её элемент, такой что $[g^p, h] = 1$. Предположим, что G является группой Шункова или $\langle g, g^h \rangle$ периодическая и $p = 2$. Тогда $\langle g, g^h \rangle$ конечна.*

Доказательство. Группа $\langle g, g^h \rangle / \langle g^p \rangle$ порождается двумя сопряжёнными элементами $g\langle g^p \rangle$ и $(g\langle g^p \rangle)^{h\langle g^p \rangle}$ порядка p или 1 фактор-группы $N_G\langle g^p \rangle / \langle g^p \rangle$, и $\langle g^p \rangle$ конечна. Следовательно, в первом случае $\langle g, g^h \rangle / \langle g^p \rangle$ конечна. Во втором случае $\langle g, g^h \rangle / \langle g^p \rangle$ — конечная диэдральная или единичная группа. Поэтому $|\langle g, g^h \rangle| < \infty$. □

Предложение 1. *Пусть G — неабелева периодическая группа, такая что для каждых $g, h \in G$ подгруппа $\langle g, g^h \rangle$ конечна всякий раз, когда g — p-элемент для некоторого нечётного простого p и $[g^p, h] = 1$. Пусть T — подгруппа $Z(G)$ и N — нормальная подгруппа группы G. Тогда имеют место следующие утверждения*:

1) *G содержит некоторую конечную неабелеву подгруппу F*;
2) *в случае когда G удовлетворяет условию* wmin-$\overline{\text{ab}}$ *и N разрешима, N черниковская*;
3) *в случае когда G удовлетворяет условию* wmin-$\overline{\text{ab}}$, *N/N' черниковская*;
4) *любая подгруппа K/T фактор-группы G/T, порождённая двумя её сопряжёнными элементами простого порядка, конечна.*

Доказательство. 1) Понятно, что для некоторого простого q существует q-элемент $a \in G \setminus Z(G)$, такой что $a^q \in Z(G)$. Тогда согласно лемме 1 все подгруппы $\langle a, a^u \rangle$, $u \in G$ конечны. Предположим, что все $\langle a, a^u \rangle$ абелевы. Тогда $A = \langle a^u : u \in \mathrm{G} \rangle$ — абелева нормальная подгруппа группы G. Пусть $b \in G \setminus C_G(a)$. Так как подгруппа $A\langle b \rangle$ разрешимая периодическая, по теореме С. Н. Черникова (см., например, [25, предложение 1.1]) она локально конечна. Следовательно, $\langle a, b \rangle$ конечная неабелева.

2) Вследствие теоремы О. Ю. Шмидта (см., например, [5, с. 337] или [38, теорема 1.45]) FN локально конечна. Тогда, как показано в доказательстве следствия 1 в [2], FN удовлетворяет условию min-$\overline{\text{ab}}$. Поэтому ввиду [24, следствие теоремы 1] и [24, лемма 1] N является черниковской.

3) Если группа N' абелева, то согласно пункту 2) N, и вместе с ней N/N', черниковские. Пусть N' неабелева. Так как N удовлетворяет условию $\mathsf{wmin}\text{-}\overline{\mathsf{ab}}$, она, очевидно, не имеет бесконечных убывающих цепочек с бесконечными индексами подгрупп, содержащих N'. Следовательно, N/N' удовлетворяет условию wmin. Поскольку N/N' периодическая абелева, согласно [1, 31] она черниковская.

4) Легко убедиться, что для некоторых $h \in G$, $p \in \mathbf{P}$ и p-элемента $g \in G$, такого что $g^p \in T$, $K = \langle g, g^h\rangle T$. Тогда согласно лемме 1 (случай $p = 2$) группа $\langle g, g^h\rangle$ конечна. Следовательно, K/T конечна.

Предложение доказано. □

Следующее предложение вытекает из [12, теорема 2.13].

Напомним, что для произвольного $p \in \mathbf{P}$ p'-группы — это в точности периодические группы без нетривиальных p-элементов.

Лемма 2. *Пусть $G = A\lambda\langle b\rangle$ — группа, причём*

$$|\langle b\rangle| = p \in \mathbf{P}, \tag{1}$$

$$C_A(\langle b\rangle) = 1 \tag{2}$$

и $|\langle b, b^a\rangle| < \infty$ для всех $a \in A$. Тогда A — p'-группа и

$$G \setminus A = (\langle b\rangle \setminus \{1\})^A. \tag{3}$$

Доказательство. Ввиду леммы С. Н. Черникова

$$\langle b, b^a\rangle = L \leftthreetimes \langle b\rangle, \quad L = A \cap \langle b, b^a\rangle, \tag{4}$$

и для силовской p-подгруппы $P \supseteq \langle b\rangle$ группы $\langle b, b^a\rangle$ имеем $P = (P \cap L) \leftthreetimes \langle b\rangle$. Так как $C_{p\cap L}(\langle b\rangle) = 1$ (см. (2)), то согласно теореме Силова, принимая во внимание (4), получаем, что $P \nmid |L|$ и для некоторого $u \in L$ справедливо $\langle b^a\rangle^u = \langle b\rangle$. Тогда $[b, au] \in \langle b\rangle \cap L = L$. Таким образом, $au \in C_L(\langle b\rangle)$. Следовательно, с учётом (2) и (4), $au = 1$, т. е. $a = u^{-1} \in L$. Значит, a — p'-элемент. Таким образом, A — p'-группа.

Принимая во внимание (1), (2) и (4), получаем

$$|\langle b, b^a\rangle \setminus L| = (p-1)|L| = |(\langle b\rangle \setminus \{1\})^L|.$$

Поскольку

$$(\langle b\rangle \setminus \{1\})^L \subseteq \langle b, b^a\rangle \setminus L,$$

имеем

$$(\langle b\rangle \setminus \{1\})^L = \langle b, b^a\rangle \setminus L.$$

Вместе с тем для любого $b^* \in \langle b\rangle \setminus L$ имеем

$$b^*a \in (\langle b\rangle \setminus \{1\})^L \subseteq (\langle b\rangle \setminus \{1\})^A.$$

Следовательно,

$$G \setminus A = \{b^*a \colon b^* \in \langle b\rangle \setminus \{1\},\ a \in A\} \subseteq (\langle b\rangle \setminus \{1\})^A.$$

Но $(\langle b\rangle \setminus \{1\})^A \subseteq G \setminus A$. Таким образом, (3) справедливо. □

Теорема 1. *Пусть $G = A\lambda\langle b\rangle$ — группа, A — её локально ступенчатая подгруппа и $\langle b\rangle$ — её подгруппа простого порядка p, такая что $|\langle b, b^a\rangle| < \infty$ для всех $a \in A$. Тогда G — локально конечная группа и A — нильпотентная p'-подгруппа.*

Замечание 5. В теореме 1 A, как хорошо известно, абелева, если $p = 2$. Согласно [3, 4, 35, 37] A нильпотентна класса не выше 2, не выше 6 и не выше $\frac{(p-1)^{2^{p-1}}-1}{p-1}$, когда соответственно $p = 3$, $p = 5$ и $p > 5$.

Доказательство. Ввиду леммы 2 A — p'-группа. Поэтому группа G периодическая. Пусть X — конечное множество элементов G. Очевидно, для некоторого конечного $S \subseteq A$ имеем $X \subseteq H = F \leftthreetimes \langle b\rangle$, где $F = \langle S^{\langle b\rangle}\rangle$. Понятно, что F и H конечно порождённые.

Пусть M — любая подгруппа конечного индекса F, $N = \bigcap\limits_{h\in H} M^h$ и φ — естественный гомоморфизм H на H/N. Тогда $H^\varphi = F^\varphi \leftthreetimes \langle b^\varphi\rangle$. Вследствие теоремы Пуанкаре H^φ конечна.

Понятно, что $|(H \setminus F)^\varphi| = |F^\varphi|(p-1)$. Ввиду леммы 2 $H \setminus F = (\langle b\rangle \setminus \{1\})^F$. Поэтому, очевидно,

$$(H \setminus F)^\varphi = (\langle b^\varphi\rangle \setminus \{1\})^{F^\varphi}.$$

Понятно также, что

$$|(\langle b^\varphi\rangle \setminus \{1\})^{F^\varphi}| = |F^\varphi : C_{F^\varphi}(\langle b^\varphi\rangle)|(p-1).$$

Таким образом,

$$|F^\varphi|(p-1) = |F^\varphi : C_{F^\varphi}(\langle b^\varphi\rangle)|(p-1).$$

Итак, $|F^\varphi| = |F^\varphi : C_{F^\varphi}(\langle b^\varphi\rangle)|$, т. е. $C_{F^\varphi}(\langle b^\varphi\rangle) = 1$. Поэтому ввиду теоремы Томпсона [39] F^φ нильпотентна, и ввиду теоремы Хигмана [35] класс нильпотентности F^φ не превосходит некоторого $k(p) \in \mathbb{N}$ (зависящего только от p).

Следовательно, с учётом произвольности M получаем, что группа $F/J(F)$ нильпотентна класса не выше $k(p)$. Поскольку $F/J(G)$ является также периодической конечно порождённой, по теореме С. Н. Черникова (см., например, [25, предложение 1.1]) она конечна. Поэтому $J(F)$ не имеет подгрупп конечного индекса, отличных от 1. Вследствие теоремы Шрейера (см., например, [5, с. 228]) группа $J(F)$ конечно порождённая. Значит, вследствие того что $J(F)$ локально ступенчатая, $J(F) = 1$. Таким образом, группа F конечна и нильпотентна класса не выше $k(p)$. Вместе с тем H конечна. Итак, $\langle X\rangle$ конечна, и, в случае когда $X \subseteq A$, $\langle X\rangle$ нильпотентна класса не выше $k(p)$.

Следовательно, с учётом произвольности X настоящая теорема верна. □

Теорема 2. *Пусть G — финитно аппроксимируемая группа, для которой выполняется условие* min-ab*, такая что для каждых $g, h \in G$ подгруппа $\langle g, g^h\rangle$ конечна всякий раз, когда g — элемент нечётного простого порядка. Тогда G конечна.*

Доказательство. Очевидно, группа G периодическая. Мы можем предполагать, что $G \neq 1$. Очевидно, G содержит абелеву подгруппу A со следующими свойствами: для произвольного простого p подгруппа A не имеет элементов порядка p^2; для произвольной абелевой подгруппы $B \supseteq A$ группы G либо $B = A$, либо для некоторого простого p в B есть элемент порядка p^2.

Так как A удовлетворяет условию min, она конечна (см., например, [25, пункт 1.1]). Поскольку G финитно аппроксимируема, существует её нормальная подгруппа N конечного индекса, такая что $A \cap N = 1$.

Пусть $g \in C_N(A)$. Так как $A \cap C_N(A) = 1$, $A\langle g\rangle = A \times \langle g\rangle$. Значит, $|\langle g\rangle| \notin \mathbf{P}$. Поэтому, учитывая произвольность g, получаем, что $C_N(A) = 1$. Тогда, поскольку $|G : N| < \infty$, $C_G(A)$ конечен.

Предположим, что G бесконечна. Тогда A содержит подгруппу B, такую что $C_G(B)$ конечен и для некоторой максимальной подгруппы D группы B $C_G(D)$ бесконечен. Очевидно, для некоторого элемента $b \in B$ простого порядка $B = \langle b\rangle \times D$ и для некоторой нормальной подгруппы M конечного индекса группы G $C_G(B) \cap M = 1$ (т. е. $C_M(B) = 1$). Положим $L = C_M(D)$. Тогда группа L бесконечна. Так как $C_M(B) = 1$, то $C_L(\langle B\rangle) = 1$. Тогда ввиду теоремы 1 группа L нильпотентна. Поскольку к тому же L удовлетворяет условию min-ab, ввиду теоремы С. Н. Черникова (см., например, [25, следствие 4.2]) L является черниковской. Тогда, вследствие того что L также финитно аппроксимируема, она конечна. Противоречие. Теорема доказана. □

3. Доказательства основных теорем

Доказательство теоремы A. Необходимость очевидна.

Достаточность сводится к случаю wmin-ab. Действительно, справедливость wmin влечёт выполнение wmin-$\overline{\text{ab}}$, и периодические абелевы группы, для которых справедливо условие wmin, черниковские [1, 31].

Пусть G не является черниковской. Тогда она содержит нечерниковскую неабелеву подгруппу H, такую что любая подгруппа бесконечного индекса группы H черниковская или абелева. Без ограничения общности мы можем считать, что $G = H$.

1. Покажем, что G удовлетворяет условию min-ab.

Предположим, что G не удовлетворяет условию min-ab. Тогда некоторая её максимальная абелева подгруппа A нечерниковская. Вследствие [24, предложение 1 (ii), лемма 1] $A = N_G(A)$ и индекс $|G : A|$ бесконечен.

Для $g \in G \setminus A$ группа $\langle A, A^g\rangle$ нечерниковская неабелева. Поэтому $|G : \langle A, A^g\rangle| < \infty$. Тогда, очевидно, для $a \in A \cap A^g$ имеем $|G : C_G(a)| < \infty$. Значит, a^G конечно. Поэтому по лемме Дицмана (см., например, [5, 38]) $\langle a^G\rangle$ конечна.

Пусть $u \in G \setminus A$. Так как индекс $|G : A^u|$ бесконечен и $|\langle a^G\rangle| < \infty$, индекс $|G : A^u\langle a^G\rangle|$ бесконечен. Следовательно, $A^u\langle a^G\rangle$ абелева. Поскольку A^u — максимальная абелева подгруппа группы G, $a \in A^u$. Таким образом, $A \cap A^g \subseteq A \cap A^u$, и значит, с учётом произвольности элементов $g, u \in G \setminus A$ имеем $A \cap A^g = A \cap A^u$.

Отсюда следует, что для $R = \langle A^G \rangle$ выполняется $Z(R) \subset A$ и

$$A/Z(R) \cap \big(A/Z(R)\big)^x = 1 \quad \text{для всех} \quad x \in G/Z(R) \setminus A/Z(R). \tag{5}$$

Ввиду утверждения 2) предложения 1 группа $Z(R)$ черниковская. Так как A не является черниковской по теореме С. Н. Черникова (см., например, [25, теорема 1.4]), $A/Z(R)$ нечерниковская.

Предположим, что $A/Z(R)$ содержит некоторый элемент v нечётного простого порядка. Ввиду утверждения 4) предложения 1 для любого $x \in R/Z(R)$ подгруппа $\langle v, v^x \rangle$ конечна. Поэтому, учитывая (5), по теореме Шункова—Созутова [14] получаем, что для некоторой нормальной подгруппы $N/Z(R)$ группы $R/Z(R)$ выполнено $R/Z(R) = \big(A/Z(R)\big)\big(N/Z(R)\big)$ и $A/Z(R) \cap N/Z(R) = 1$. Значит, $R = AN$ и $A \cap N = Z(R)$. Следовательно, $R/N \cong A/Z(R)$ и вместе с тем группа R/R' нечерниковская (см. утверждение 3) предложения 1, где $N = G$) Противоречие. Следовательно, $A/Z(R)$ — 2-группа. Тогда, вследствие того что группа $A/Z(R)$ абелева нечерниковская, $A/Z(R)$ содержит некоторые элементы b и $c \neq b$ порядка 2.

Для $h \in R/Z(R) \setminus A/Z(R)$

$$\langle b, c^h \rangle = \langle bc^h \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle = \langle bc^h \rangle \leftthreetimes \langle c^h \rangle. \tag{6}$$

Предположим, что bc^h — элемент нечётного порядка. Тогда, учитывая (6), по теореме Силова получаем, что $b = c^{hs}$ для некоторого $s \in \langle bc^h \rangle$. Так как $A/Z(R)$ абелева, $hs \notin A/Z(R)$. Поэтому $A/Z(R) \cap \big(A/Z(R)\big)^{hs} = 1$ (см. (5)). Но $1 \neq b \in A/Z(R) \cap \big(A/Z(R)\big)^{hs}$. Противоречие. Таким образом, $\langle bc^h \rangle$ содержит некоторый элемент w порядка 2.

Очевидно, $[w, b] = [w, c^h] = 1$. Значит, $1 \neq b \in A/Z(R) \cap \big(A/Z(R)\big)^w$ и $1 \neq c^h \in \big(A/Z(R)\big)^h \cap \big(A/Z(R)\big)^{hw}$. Поэтому, учитывая (6), получаем, что $1 \neq w \in \big(A/Z(R)\big)^h$. Противоречие (см. снова (5)). Таким образом, G удовлетворяет условию min-ab.

Так как G удовлетворяет условиям wmin-$\overline{\text{ab}}$ и min-ab, она удовлетворяет условию wmin.

2. Покажем, что

$$|G : I(G)| < \infty. \tag{7}$$

Предположим, что индекс $|G : J(G)|$ бесконечен. Тогда группа $J(G)$ черниковская или абелева. Во втором случае $J(G)$ удовлетворяет условию min (см. пункт 1) и является черниковской. Так как $J(G)$ черниковская и G периодическая, то ввиду теоремы Бэра, Половицкого и С. Н. Черникова [11, 23, 30] группа $G/C_G\big(J(G)\big)$ черниковская. Группа $Z(G)$ также черниковская (см. пункт 1). Поскольку G не является черниковской, ввиду [25, теорема 1.4] $C_G\big(J(G)\big)/Z\big(J(G)\big)$ — нечерниковская группа.

Поскольку группа $G/J(G)$ финитно аппроксимируема и

$$C_G\big(J(G)\big)/Z\big(J(G)\big) = C_G\big(J(G)\big)/\big(C_G\big(J(G)\big) \cap J(G)\big) \cong J(G)C_G\big(J(G)\big)/J(G),$$

группа $C_G\big(J(G)\big)/Z\big(J(G)\big)$ финитно аппроксимируема. Так как группа G периодическая и удовлетворяет условию wmin (см. выше), группа $C_G\big(J(G)\big)/Z\big(J(G)\big)$ также периодическая и удовлетворяет условию wmin. Поэтому ввиду [1, 31] группа $C_G\big(J(G)\big)/Z\big(J(G)\big)$ удовлетворяет условию min-ab. Согласно утверждению 4) предложения 1 любые два сопряжённых элемента простого порядка этой фактор-группы порождают конечную подгруппу. Следовательно, по теореме 2 $C_G\big(J(G)\big)/Z\big(J(G)\big)$ конечна. Противоречие.

Отметим, что согласно (7) $J(G)$ не имеет подгрупп конечного индекса, отличных от 1.

3. Покажем, что группа $J(G)$ артинова и шунковская.

Так как $J(G)$ не имеет собственных подгрупп конечного индекса и каждая собственная подгруппа группы G черниковская или абелева, с учётом пункта 1 получаем, что любая собственная подгруппа группы $J(G)$ артинова. Отсюда, очевидно, следует, что $J(G)$ артинова.

Пусть F — любая конечная подгруппа группы $J(G)$. Если $F \subseteq Z\big(J(G)\big)$, то по утверждению 4) предложения 1 любые два сопряжённых элемента простого порядка фактор-группы $N_{J(G)}(F)/F$ порождают конечную подгруппу.

Предположим, что $F \nsubseteq Z\big(J(G)\big)$. Тогда индекс $|J(G) : C_{J(G)}(F)|$ бесконечен. Так как группа F конечна, то $|N_{J(G)}(F) : C_{J(G)}(F)| < \infty$. Следовательно, индекс $|J(G) : N_{J(G)}(F)|$ бесконечен. Поэтому $N_{J(G)}(F)$ черниковская или абелева. Значит, $N_{J(G)}(F)/F$ также черниковская или абелева. Следовательно, любые два сопряжённых элемента простого порядка группы $N_{J(G)}(F)/F$ порождают конечную подгруппу.

Таким образом, группа $J(G)$ шунковская.

4. Заключительное противоречие.

Согласно теореме Шункова, Остыловского и Сучковой, упомянутой выше, с учётом пункта 3 получаем, что группа $J(G)$ черниковская. Поэтому согласно (7) группа G черниковская. Противоречие.

Теорема A доказана. □

Доказательство теоремы B. Необходимость очевидна.

Достаточность сводится к случаю min-$\overline{\text{ab}}$. Действительно, артиновы группы удовлетворяют условию min-$\overline{\text{ab}}$ и абелевы артиновы группы являются черниковскими.

Пусть G не является черниковской, Тогда она содержит нечерниковскую неабелеву подгруппу H, такую что любая собственная подгруппа группы H является черниковской или абелевой. Без потери общности мы можем считать, что $G = H$.

Допустим, что G содержит некоторый элемент g бесконечного порядка. Пусть h — произвольный элемент группы G. Подгруппа $\langle g, g^h\rangle$ содержит собственную подгруппу конечного индекса. Последняя является черниковской или абелевой и, значит, почти абелевой. Следовательно, $\langle g, g^h\rangle$ также почти абелева. Поскольку к тому же группа $\langle g, g^h\rangle$ удовлетворяет условию min-$\overline{\text{ab}}$ и не является периодической, по [24, лемма 2] она абелева. Поэтому с учётом произвольности h получаем, что подгруппа $\langle g^G \rangle$ абелева.

Далее, очевидно, $h \in \langle g^G \rangle$ или подгруппа $\langle h \rangle \langle g^G \rangle$ содержит собственную подгруппу конечного индекса. Поэтому $\langle h \rangle \langle g^G \rangle$ абелева, как выше, т. е. $[h, g] = 1$. Следовательно, с учётом произвольности h получаем, что $g \in Z(G)$.

Если порядок элемента h бесконечен, то h (как g) принадлежит $Z(G)$. Если элемент h конечного порядка, то, очевидно, порядок gh бесконечен и $gh \in Z(G)$. Поэтому $h = g^{-1}(gh) \in Z(G)$. Следовательно, с учётом произвольности h получаем, что группа G абелева. Противоречие.

Таким образом, группа G периодическая.

Пусть $[g^p, h] = 1$, где p нечётное и g — неединичный элемент G. Так как группа $\langle g, h \rangle$ периодическая, $\langle g, g^h \rangle$ содержит подгруппу конечного индекса, отличную от 1. Поэтому $\langle g, g^h \rangle$ почти абелева. Ввиду теоремы О. Ю. Шмидта периодическая почти абелева группа $\langle g, g^h \rangle$ конечна. Следовательно, по теореме A группа G черниковская.

Теорема B доказана. $\square$

Доказательство теоремы C.

1) Ввиду теоремы Шункова—Кегеля—Верфица, упомянутой выше, артинова группа, обладающая локальной системой $\mathfrak{K}$-подгрупп, является локально черниковской и вместе с тем локально конечна. Следовательно, снова ввиду этой теоремы, такая группа черниковская. Таким образом, класс $\mathfrak{K}$ локален.

Локальная система $\mathfrak{H}$-подгрупп неабелевой группы включает в себя локальную систему неабелевых $\mathfrak{H}$-подгрупп этой группы. Следовательно, в случае когда $\mathfrak{H}$-группа удовлетворяет условию $\mathsf{min}\text{-}\overline{\mathsf{ab}}$, она локально черниковская и, значит, локально конечная. Поэтому по теореме Шункова [29], упомянутой выше, она является черниковской. Таким образом, класс $\mathfrak{H}$ локален.

Нормальная система с $\mathfrak{K}$-факторами артиновой группы является, очевидно, возрастающим нормальным рядом с черниковскими факторами. Поэтому согласно теореме Шмидта артиновы группы, имеющие такую систему, локально конечны. Так как, очевидно, любая черниковская группа обладает возрастающим нормальным рядом с конечными факторами, отмеченные группы имеют возрастающий нормальный ряд с конечными факторами. Поэтому вследствие [21, теорема 3.1] рассматриваемые группы являются черниковскими. Таким образом, класс $\mathfrak{K}$ замкнут относительно образования нормальных систем.

Пусть G — неабелева группа, для которой выполнено условие $\mathsf{min}\text{-}\overline{\mathsf{ab}}$ и которая имеет некоторую нормальную систему с $\mathfrak{H}$-факторами. Понятно, что каждый её фактор черниковский или абелев. Поэтому G, очевидно, имеет нормальную систему с конечными факторами. Следовательно, ввиду [24, теоремы 1, 2] группа G черниковская. Таким образом, класс $\mathfrak{H}$ замкнут относительно образования нормальных систем.

Пусть G — артинова группа, аппроксимируемая $\mathfrak{K}$-группами, или неабелева группа, для которой выполнено условие $\mathsf{min}\text{-}\overline{\mathsf{ab}}$, аппроксимируемая $\mathfrak{H}$-группами.

Тогда G аппроксимируется группами, каждая из которых черниковская или абелева. Вместе с тем для класса $\mathfrak{X}$ всех групп, обладающих нормальной системой с конечными факторами, группа G аппроксимируется $\mathfrak{X}$-группами. Поэтому согласно [38, с. 24] $G \in \mathfrak{X}$. Итак, G черниковская (см. выше). Таким образом, оба класса $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{H}$ замкнуты относительно образования поддекартовых произведений.

2) Если H — артинова или неабелева группа, для которой выполняется условие $\mathsf{min}\text{-}\overline{\mathsf{ab}}$, то V черниковская или абелева. Поскольку V также конечно порождённая, она имеет конечный гомоморфный образ, отличный от 1. Поэтому и $\langle g, g^h \rangle$ имеет такой образ. Значит, по теореме B H является черниковской.

3) Согласно теореме B любая группа, удовлетворяющая условию $(*)$, принадлежит $\mathfrak{K} \cap \mathfrak{H}$. Поэтому с учётом утверждения 1) получаем, что $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{K} \cap \mathfrak{H}$.

Теорема доказана. □

4. Некоторые следствия

Следующие два предложения — непосредственные следствия теоремы A.

Предложение 2. *Пусть G — неабелева 2-группа, для которой выполнено условие* $\mathsf{wmin}\text{-}\overline{\mathsf{ab}}$*, или 2-группа, для которой выполнено условие* wmin*. Тогда группа G черниковская.*

Следствие 1 (В. П. Шунков, А. Н. Остыловский [9; 13, теорема 4.2.2]). *Для периодической группы Шункова условия* wmin *и* min *равносильны.*

Напомним, что инволюция группы — это её элемент порядка 2.

Следующее предложение — непосредственное следствие теоремы A и теоремы Фейта—Томпсона [34], утверждающей, что конечная группа нечётного порядка разрешима.

Следствие 2 (В. П. Шунков, А. Н. Остыловский [9; 13, теорема 4.2.3]). *Периодическая шунковская группа без инволюций, для которой выполнено условие* $\mathsf{min}\text{-}\overline{\mathsf{ab}}$*, является локально конечной и разрешимой черниковской.*

Следующее предложение — непосредственное следствие теоремы B и утверждения 3) теоремы C.

Теорема 3. *Пусть G — неабелева группа, обладающая нормальной системой с периодическими шунковскими факторами, для которой справедливо условие* $\mathsf{min}\text{-}\overline{\mathsf{ab}}$*. Тогда группа G черниковская.*

Следующее предложение содержится в теореме 3.

Предложение 3. *Пусть G — периодическая неабелева BN-группа, для которой выполняется условие* $\mathsf{min}\text{-}\overline{\mathsf{ab}}$*, или артинова BN-группа. Тогда группа G черниковская.*

Следующее предложение — непосредственное следствие предложения 3 и теоремы Фейта—Томпсона [34].

Следствие 3 (В. П. Шунков, А. Н. Остыловский [9; 13, теорема 4.2.4]). *BN-группа без инволюций, для которой выполняется условие* min, *локально конечна и является разрешимой черниковской.*

Следующее предложение — непосредственное следствие теоремы B.

Теорема 4. *Пусть G — бинарно ступенчатая или периодическая шунковская группа. Тогда G удовлетворяет условию* $\mathsf{min}\text{-}\overline{\mathsf{ab}}$, *если и только если она черниковская или абелева.*

Следующее предложение — непосредственное следствие теоремы 4.

Следствие 4 (Н. С. Черников [32, предложение 1]). *Пусть G — неабелева группа. Предположим, что G является локально ступенчатой или периодической шунковской. Тогда G удовлетворяет условию* $\mathsf{min}\text{-}\overline{\mathsf{ab}}$, *если и только если она является черниковской.*

Заметим также, что теорема из [32] — следствие утверждения 3) теоремы C.

Предложение 3 из [32] — следствие следующего предложения, которое, в свою очередь, является следствием теоремы C.

Предложение 4. *Пусть G — артинова группа или неабелева группа, для которой выполняется условие* $\mathsf{min}\text{-}\overline{\mathsf{ab}}$. *Тогда G является черниковской, если для каждых $g, h \in G$ подгруппа $\langle g, g^h \rangle$ обладает некоторым $\mathfrak{L}$-гомоморфным образом, отличным от 1, всякий раз, когда g — элемент бесконечного порядка или g — p-элемент для некоторого нечётного p, к тому же $\langle g, h \rangle$ периодическая и $[g^p, h] = 1$.*

Заметим, что теорема и предложения 1—3 — в точности все результаты статьи [32]. Напомним важное предложение 2 из [32].

Утверждение. *Пусть R — коммутативное и ассоциативное кольцо с 1, M — конечно порождённый модуль над R и $n \in \mathbb{N}$. Пусть $G \leqslant \mathrm{GL}_n(R)$ или $G \leqslant \mathrm{Aut}_R(M)$. Тогда группа G удовлетворяет условию* $\mathsf{min}\text{-}\overline{\mathsf{ab}}$, *если и только если она является черниковской или абелевой.*

Следующее предложение — следствие теоремы 4 и утверждения 1) теоремы C.

Следствие 5. *В минимальном локальном классе групп, замкнутом относительно нормальных систем и поддекартовых произведений и содержащем все бинарно ступенчатые группы и все периодические шунковские группы, любая артинова группа черниковская и любая неабелева группа, для которой выполняется условие* $\mathsf{min}\text{-}\overline{\mathsf{ab}}$, *черниковская.*

5. О группах, в которых выполняется условие min-ab

Предложение 5. *Пусть $\mathfrak{V}$ — максимальный класс групп, в котором произвольная группа, для которой выполняется условие* min-ab*, является черниковской. Тогда он локален и замкнут относительно образования возрастающих нормальных рядов.*

Доказательство. Согласно теореме Шункова [27], утверждающей, что локально конечная группа, для которой выполняется условие min-ab, является черниковской, имеем, что локально $\mathfrak{V}$-группы, для которых выполняется условие min-ab, черниковские. Таким образом, класс локален.

Пусть G — группа, для которой выполняется условие min-ab, обладающая некоторым возрастающим нормальным рядом с $\mathfrak{V}$-факторами, K — максимальный локально конечный член этого ряда, H — минимальный не локально конечный член ряда или же $H = G$, если $K = G$. Тогда K нормален в H.

Пусть A/K — произвольная абелева подгруппа группы H/K. Так как группа G периодическая, A/K локально конечна. Значит, согласно теореме Шмидта A локально конечна. Поэтому согласно теореме Шункова [27] A черниковская. Тогда A/K черниковская. Таким образом, H/K — $\mathfrak{V}$-группа, для которой выполняется условие min-ab. Значит, H/K черниковская и локально конечная.

Согласно теореме Шмидта H локально конечна. Следовательно, $H = G$.

Так как G — локально конечная группа, для которой выполняется условие min-ab, она является черниковской (снова теорема Шункова [27]). Таким образом, класс $\mathfrak{V}$ замкнут относительно образования возрастающих нормальных рядов. □

Следствие 6. *Пусть $\mathfrak{W}$ — минимальный локальный класс групп, замкнутый относительно образования возрастающих нормальных рядов и содержащий все локально разрешимые и все локально конечные группы. Тогда произвольная $\mathfrak{W}$-группа, для которой выполняется условие* min-ab*, является черниковской.*

Доказательство. Нетрудно убедиться, что класс $\mathfrak{L}$ совпадает с минимальным локальным классом групп, замкнутым относительно образования возрастающих нормальных рядов и содержащим бесконечную циклическую группу и все конечные группы. Так как циклические и конечные группы принадлежат к $\mathfrak{W}$, то вследствие предложения 5 $\mathfrak{W} \subseteq \mathfrak{V}$. Поэтому настоящее следствие верно. □

Предложение 6. *Пусть $\mathfrak{T}$ — минимальный локальный класс групп, замкнутый относительно образования возрастающих нормальных рядов и содержащий все локально разрешимые и все шунковские группы. Тогда произвольная $\mathfrak{T}$-группа, для которой выполняется условие* min-ab*, является черниковской.*

Доказательство. Нетрудно убедиться, что класс $\mathfrak{L}$ совпадает с минимальным локальным классом групп, замкнутым относительно образования возрастающих нормальных рядов и содержащим все шунковские группы. Согласно теореме Шункова—Сучковой [15] любая шунковская группа принадлежит классу $\mathfrak{V}$. Поэтому вследствие предложения 5 $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{V}$. Таким образом, настоящее предложение справедливо. □

Замечание 6. Класс $\mathfrak{V}$ конечно экстремально широк. Класс $\mathfrak{W}$ также широк и включает в себя все радикальные в смысле Б. И. Плоткина группы, все W_0-группы Б. И. Плоткина (см. [10]), все локально радикальные группы и др. Понятно, что $\mathfrak{W}$ — подкласс класса $\mathfrak{V}$.

Замечание 7. По теореме Шункова [27], упомянутой выше, и результату Б. А. Ф. Верфица [40, 13.5] группа G из утверждения выше удовлетворяет условию min-ab, если и только если она является черниковской.

Литература

[1] Зайцев Д. И. Группы, удовлетворяющие слабому условию минимальности // Укр. мат. журн. — 1968. — Т. 20, № 4. — С. 472—482.

[2] Зайцев Д. И. Группы, удовлетворяющие слабому условию минимальности для неабелевых групп // Укр. мат. журн. — 1971. — Т. 23, № 5. — С. 661—665.

[3] Крекнин В. А. О разрешимости алгебр Ли с регулярным автоморфизмом простого периода // ДАН СССР. — 1963. — Т. 150, № 3. — С. 467—469.

[4] Крекнин В. А., Кострикин А. И. Об алгебрах Ли с регулярным автоморфизмом // ДАН СССР. — 1963. — Т. 149, № 2. — С. 249—251.

[5] Курош А. Г. Теория групп. — М.: Наука, 1967.

[6] Ольшанский А. Ю. Бесконечные группы с циклическими подгруппами // ДАН СССР. — 1979. — Т. 245, № 4. — С. 785—787.

[7] Ольшанский А. Ю. Бесконечная группа с подгруппами простых порядков // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — Т. 44, № 3. — С. 309—321.

[8] Ольшанский А. Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах. — М.: Наука, 1989.

[9] Остыловский А. Н., Шунков В. П. О локальной конечности одного класса групп с условием минимальности // Исследования по теории групп. — Красноярск: Ин-т физ. им. Л. В. Киренского СО АН СССР, 1975. — С. 32—48.

[10] Плоткин Б. И. Группы автоморфизмов алгебраических систем. — М.: Наука, 1966.

[11] Половицкий Я. Д. Слойно экстремальные группы // ДАН СССР. — 1960. — Т. 143, № 3. — С. 533—535.

[12] Попов А. М., Созутов А. И., Шунков В. П. Группы с системами фробениусовых подгрупп. — Красноярск: Красноярский гос. техн. ун-т, 2004.

[13] Сенашов В. И., Шунков В. П. Группы с условиями конечности. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2001.

[14] Созутов А. И., Шунков В. П. Об одном обобщении теоремы Фробениуса на бесконечные группы // Мат. сб. — 1976. — Т. 100, № 4. — С. 495—506.

[15] Сучкова Н. Г., Шунков В. П. О группах с условием минимальности до абелевых подгрупп // Алгебра и логика. — 1986. — Т. 25, № 4. — С. 445—469.

[16] Черников Н. С. Локально конечные $w\sigma A$-факторизуемые группы // Исследования по теории групп. — Киев: Ин-т мат. АН УССР, 1979. — С. 63—110.

[17] Черников Н. С. О группах с условиями минимальности для неабелевых разрешимых подгрупп // Группы, определяемые свойствами системы подгрупп. — Киев: Ин-т мат. АН УССР, 1979. — С. 57—82.

[18] Черников Н. С. О локально конечных подгруппах бинарно конечных групп // VI-й Всесоюз. симп. по теории групп. Сб. науч. трудов. — Киев: Наукова думка, 1980. — С. 115—125.

[19] Черников С. Н. Бесконечные локально разрешимые группы // Мат. сб. — 1940. — Т. 7, № 1. — С. 35—64.

[20] Черников С. Н. К теории бесконечных специальных групп // Мат. сб. — 1940. — Т. 7, № 3. — С. 539—548.

[21] Черников С. Н. Условия конечности в общей теории групп // Успехи мат. наук. — 1959. — Т. 14, № 5. — С. 45—96.

[22] Черников С. Н. Бесконечные группы с некоторыми заданными свойствами систем их бесконечных подгрупп // ДАН СССР. — 1964. — Т. 159, № 4. — С. 759—760.

[23] Черников С. Н. О периодических группах автоморфизмов экстремальных групп // Мат. заметки. — 1968. — Т. 4, № 1. — С. 94—95.

[24] Черников С. Н. Группы с условием минимальности для неабелевых подгрупп // Группы с ограничениями для подгрупп. — Киев: Наукова думка, 1972. — С. 96—106.

[25] Черников С. Н. Группы с заданными свойствами системы подгрупп. — М.: Наука, 1980.

[26] Шмидт О. Ю. Локальная конечность одного класса бесконечных периодических групп // Шмидт О. Ю. Избранные труды. Математика. — М.: Изд-во АН СССР, 1959. — С. 298—300.

[27] Шунков В. П. О локально конечных группах с условием минимальности для абелевых подгрупп // Алгебра и логика. — 1970. — Т. 9, № 5. — С. 575—611.

[28] Шунков В. П. О проблеме минимальности для локально конечных групп // Алгебра и логика. — 1970. — Т. 9, № 2. — С. 220—248.

[29] Шунков В. П. Об абстрактных характеризациях некоторых линейных групп // Алгебра. Матрицы и матричные группы. — Красноярск: Ин-т физ. им. Л. В. Киренского СО АН СССР, 1970. — С. 5—54.

[30] Baer R. Finite extentions of Abelian groups with minimum conditions // Trans. Amer. Math. Soc. — 1955. — Vol. 79, no. 2. — P. 521—540.

[31] Baer R. Polimininimaxgruppen // Math. Ann. — 1968. — Bd. 175, No. 1. — S. 1—43.

[32] Chernikov N. S. Groups with the minimal conditions for nonabelian subgroups // Збірник праць Інст. мат. НАН України. — 2006. — Т. 3, № 3. — С. 423—430.

[33] Chernikov N. S. Artinian and Chernikov groups and groups with minimal conditions for nonabelian subgroups // Междунар. алгебр. конф., посв. 100-летию рожд. А. Г. Куроша (Москва, 28 мая—3 июня 2008 г.). Тезисы докладов. — М.: МГУ, 2008. — С. 282—283.

[34] Feit W., Thompson I. G. Solvability of groups of odd order // Pacific J. Math. — 1963. — Vol. 13, no. 3. — P. 755—1029.

[35] Higman G. Groups and rings having automorphisms without nontrivial fixed elements // J. London Math. Soc. — 1957. — Vol. 32, no. 2. — P. 321—334.

[36] Kegel O. H., Wehrfritz B. A. F. Strong finiteness conditions in locally finite groups // Math. Z. — 1970. — Vol. 117, no. 1—4. — P. 309—324.

[37] Neumann B. H. Groups with automorphisms that leave only the neutral element fixed // Arch. Math. (Basel). — Vol. 7, no. 1. — P. 1—5.

[38] Robinson D. J. S. Finiteness Conditions and Generalized Soluble Groups. Pt. 1 — Berlin: Springer, 1972.

[39] Thompson J. G. Finite groups with fixed point-free automorphisms of prime order // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. — 1959. — Vol. 45, no. 4. — P. 578—582.

[40] Wehrfritz B. A. F. Infinite Linear Groups. — Berlin: Springer, 1973.