О конгруэнциях группоидов, тесно связанных с квазигруппами

В. А. ЩЕРБАКОВ
Институт математики и информатики
Академии наук Молдовы
e-mail: scerb@math.md

А. Х. ТАБАРОВ
Таджикский национальный государственный университет
e-mail: tabarov63@rambler.ru

Д. И. ПУШКАШУ
Институт математики и информатики
Академии наук Молдовы
e-mail: pushkashu@yandex.ru

УДК 512.548+512.53

Ключевые слова: левая квазигруппа, правая квазигруппа, группоид с делением, группоид с сокращением, конгруэнция, трансляция.

Аннотация

Приведены условия замкнутости («нормальности») конгруэнций левого (правого) группоида с делением, левого (правого) группоида с сокращением. Найдены условия простоты этих группоидов.

Abstract

V. A. Shcherbacov, A. Kh. Tabarov, D. I. Puşcaşu, On congruences of groupoids closely connected with quasigroups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 5, pp. 237—251.

Conditions when a congruence of a left (right) division groupoid and a left (right) cancellation groupoid is closed ("normal") are given. Conditions for the simplicity of the above-mentioned groupoids are obtained.

1. Введение

Первые определения левой и правой бинарной квазигруппы были даны Руфи Муфанг на языке существования решений некоторых уравнений [27] (см. также [10,17]). Эти экзистенциальные определения (см. определение 7) используются и в настоящее время.

После публикации статьи [13] в алгебре достаточно естественно появились понятия левого и правого группоида с сокращением и делением. Позже Т. Ивэнс дал эквациональное определение квазигруппы [1,19,20,33] (см. определение 10).

Фундаментальная и прикладная математика, 2008, том 14, № 5, с. 237—251.

В данной работе приведены условия замкнутости («нормальности») конгруэнций левого (правого) группоида с делением, левого (правого) группоида с сокращением. Найдены условия простоты этих группоидов.

В [32] даны некоторые новые определения квазигруппы и группоидов, тесно связанных с квазигруппами. Другие условия, при выполнении которых группоид является квазигруппой, даны в [8, 15, 25, 28].

Для удобства читателей мы начинаем с определений, которые можно найти в [1, 4, 29, 33].

Бинарная операция — определённое на непустом множестве Q отображение $A\colon Q^2 \to Q$, такое что $D(A) = Q^2$, т. е. это отображение определено для любого элемента множества $Q \times Q$. Часто используются более традиционные обозначения бинарной операции; например, выражение $A(x, y) = z$ может быть записано в форме $x \cdot y = z$.

Определение 1. Бинарный группоид — это пара (Q, A), где Q — множество, A — бинарная операция, определённая на Q.

Как обычно, произведение отображений — это их последовательное выполнение. Мы будем использовать такой порядок умножения отображений: если μ, ν — некоторые отображения, то $(\mu\nu)(x) = \mu\big(\nu(x)\big)$.

Пусть $(Q, \cdot)$ — группоид. Отображение $L_a\colon Q \to Q$, $L_a x = a \cdot x$ для всех $x \in Q$, является левой трансляцией группоида $(Q, \cdot)$ относительно фиксированного элемента $a \in Q$. Отображение $R_a\colon Q \to Q$, $R_a x = x \cdot a$, является правой трансляцией.

Дадим следующие определения (см. [1, 4, 23, 24, 29]).

Определение 2. Группоид $(G, \cdot)$ называют группоидом с левым сокращением, если выполнена импликация $a \cdot x = a \cdot y \Longrightarrow x = y$ для всех $a, x, y \in G$, т. е. трансляция L_a — инъективное отображение для любого $a \in G$.

Пример 1. Пусть $x \circ y = 0 \cdot x + 3 \cdot y$ для всех $x, y \in \mathbb{Z}$, где $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ — кольцо целых чисел. Можно проверить, что $(\mathbb{Z}, \circ)$ — группоид с левым сокращением.

Определение 3. Группоид $(G, \cdot)$ называют группоидом с правым сокращением, если выполнена импликация $x \cdot a = y \cdot a \Longrightarrow x = y$ для всех $a, x, y \in G$, т. е. трансляция R_a — инъективное отображение для любого $a \in G$.

Пример 2. Пусть $x \circ y = 2 \cdot x + 0 \cdot y$ для всех $x, y \in \mathbb{Z}$, где $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ — кольцо целых чисел. Можно проверить, что $(\mathbb{Z}, \circ)$ — группоид с правым сокращением.

Определение 4. Группоид $(G, \cdot)$ называют группоидом с сокращением, если это группоид с левым и правым сокращением.

Пример 3. Пусть $x \circ y = 2 \cdot x + 3 \cdot y$ для всех $x, y \in \mathbb{Z}$, где $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ — кольцо целых чисел. Можно проверить, что $(\mathbb{Z}, \circ)$ — группоид с сокращением.

Определение 5. Группоид $(G, \cdot)$ называется левым (правым) группоидом с делением, если отображение L_x (R_x) сюръективно для каждого $x \in G$.

Пример 4. Пусть $x \circ y = 0 \cdot x + [y/3]$ для всех $x, y \in \mathbb{Z}$, где $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ — кольцо целых чисел, $[3n] = n$, $[(3n + 1)] = n$, $[(3n + 2)] = n$. Можно проверить, что $(\mathbb{Z}, \circ)$ — группоид с левым делением.

Пример 5. Пусть $x \circ y = [x/2] + 0 \cdot y$ для всех $x, y \in \mathbb{Z}$, где $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ — кольцо целых чисел, $[2n] = n$, $[(2n+1)] = n$. Можно проверить, что $(\mathbb{Z}, \circ)$ — группоид с правым делением.

Определение 6. Группоид $(G, \cdot)$ называется группоидом с делением, если он одновременно левый и правый группоид с делением.

Пример 6. Пусть $x \circ y = [x/2] + [y/3]$ для всех $x, y \in \mathbb{Z}$, где $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ — кольцо целых чисел. Можно проверить, что $(\mathbb{Z}, \circ)$ — группоид с делением.

Пример 7. Пусть $x \circ y = x^2 + y^3$ для всех $x, y \in \mathbb{C}$, где $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ — поле комплексных чисел. Можно проверить, что $(\mathbb{C}, \circ)$ — группоид с делением.

Определение 7. Группоид $(Q, \circ)$ называют *правой квазигруппой* (*левой квазигруппой*), если для любых фиксированных элементов $a, b \in Q$ существует единственное решение $x \in Q$ уравнения $x \circ a = b$ (соответственно $a \circ x = b$).

В этом случае любая правая (соответственно левая) трансляция группоида $(Q, \circ)$ является биективным отображением множества Q в себя.

Пример 8. Пусть $x \circ y = 0 \cdot x - y$ для всех $x, y \in \mathbb{Z}$, где $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ — кольцо целых чисел. Можно проверить, что $(\mathbb{Z}, \circ)$ — левая квазигруппа.

Определение 8. Квазигруппу, являющуюся одновременно левой и правой, называют *квазигруппой*.

Пример 9. Пусть $x \circ y = x - y$ для всех $x, y \in \mathbb{Z}$, где $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ — кольцо целых чисел. Можно проверить, что $(\mathbb{Z}, \circ)$ — квазигруппа.

Замечание 1. Группоиды из примеров 1, 2, 3, 4, 5, 8 и 9 медиальны, т. е. в этих группоидах выполняется тождество медиальности $(x \circ y) \circ (u \circ v) = (x \circ u) \circ (y \circ v)$ и, в частности, выполняется тождество $(x \circ x) \circ (u \circ v) = (x \circ u) \circ (x \circ v)$.

Определение 9 [3, 27]. Бинарный группоид (Q, A) с такой бинарной операцией A, что в равенстве $A(x_1, x_2) = x_3$ любые два элемента из множества $\{x_1, x_2, x_3\}$ однозначно определяют третий элемент, называют *бинарной квазигруппой*.

Из определения 9 следует, что с любой квазигруппой (Q, A) можно связать ещё $(3! - 1) = 5$ квазигрупп, называемых парастрофами квазигруппы (Q, A):

$$A(x_1, x_2) = x_3 \iff A^{(12)}(x_2, x_1) = x_3 \iff A^{(13)}(x_3, x_2) = x_1 \iff$$
$$\iff A^{(23)}(x_1, x_3) = x_2 \iff A^{(123)}(x_2, x_3) = x_1 \iff A^{(132)}(x_3, x_1) = x_2.$$

Обозначим:

операцию (12)-парастрофа квазигруппы $(Q, \cdot)$ через $*$;
операцию (13)-парастрофа квазигруппы $(Q, \cdot)$ через $/$;
операцию (23)-парастрофа квазигруппы $(Q, \cdot)$ через $\backslash$;
операцию (123)-парастрофа квазигруппы $(Q, \cdot)$ через $//$;
операцию (132)-парастрофа квазигруппы $(Q, \cdot)$ через $\backslash\backslash$.

Мы определили левые и правые трансляции группоида и, следовательно, квазигруппы. Но для квазигрупп можно определить и третий вид трансляций, а именно средние трансляции. Отображение $P_a\colon Q \to Q$, $x \cdot P_x = a$ для всех $x \in Q$ называется средней трансляцией квазигруппы $(Q,\cdot)$ относительно элемента a [2, 32].

В таблице 1 приведены соотношения между различными видами трансляций в различных парастрофах квазигруппы $(Q,\cdot)$ [11, 18]. Фактически эта таблица в неявном виде есть в [2].

Таблица 1

	ε	(12)	(13)	(23)	(123)	(132)
R	R	L	R^{-1}	P	P^{-1}	L^{-1}
L	L	R	P^{-1}	L^{-1}	R^{-1}	P
P	P	P^{-1}	L^{-1}	R	L	R^{-1}
R^{-1}	R^{-1}	L^{-1}	R	P^{-1}	P	L
L^{-1}	L^{-1}	R^{-1}	P	L	R	P^{-1}
P^{-1}	P^{-1}	P	L	R^{-1}	L^{-1}	R

В данной статье под алгеброй (алгебраической структурой) будем понимать множество A с некоторым набором операций, определённых на A.

Т. Ивэнс [20] определил бинарную квазигруппу как алгебру с тремя бинарными операциями и тождествами

$$x \cdot (x \setminus y) = y, \tag{1}$$
$$(y \,/\, x) \cdot x = y, \tag{2}$$
$$x \setminus (x \cdot y) = y, \tag{3}$$
$$(y \cdot x) \,/\, x = y. \tag{4}$$

Определение 10 [1,4,5,15,20,29]. Алгебра $(Q,\cdot,\setminus,/)$ с тождествами (1)—(4) называется *квазигруппой*.

В [5] алгебры $(Q,\cdot,\setminus,/)$ с тождествами (1)—(4) названы *е-квазигруппами* (эквациональными квазигруппами). А. И. Мальцев [8, 9] назвал такие квазигруппы *примитивными квазигруппами*.

Эквивалентность определений 8 и 10 — хорошо известный факт [1, 5, 9, 15].

Используя таблицу 1 легко проверить, что если $(Q,\cdot)$ — квазигруппа, то в алгебре $(Q,\cdot,//)$ выполнены тождества

$$(x \,//\, y) \cdot x = y, \tag{5}$$
$$x \,//\, (y \cdot x) = y; \tag{6}$$

если $(Q,\cdot)$ — квазигруппа, то в алгебре $(Q,\cdot,\setminus\setminus)$ выполнены тождества

$$x \cdot (y \setminus\setminus x) = y, \tag{7}$$
$$(x \cdot y) \setminus\setminus x = y. \tag{8}$$

Действительно, переписав тождества (1)—(8) на языке трансляций, мы получим

$$x \cdot (x \setminus y) = y \iff L^{\cdot}_x L^{\setminus}_x y = y, \tag{9}$$
$$(y \,/\, x) \cdot x = y \iff R^{\cdot}_x R^{/}_x y = y, \tag{10}$$
$$x \setminus (x \cdot y) = y \iff L^{\setminus}_x L^{\cdot}_x y = y, \tag{11}$$
$$(y \cdot x) \,/\, x = y \iff R^{/}_x R^{\cdot}_x y = y, \tag{12}$$
$$(x \,//\, y) \cdot x = y \iff R^{\cdot}_x L^{//}_x y = y, \tag{13}$$
$$x \,//\, (y \cdot x) = y \iff L^{//}_x R^{\cdot}_x y = y, \tag{14}$$
$$x \cdot (y \setminus\setminus x) = y \iff L^{\cdot}_x R^{\setminus\setminus}_x y = y, \tag{15}$$
$$(x \cdot y) \setminus\setminus x = y \iff R^{\setminus\setminus}_x L^{\cdot}_x y = y. \tag{16}$$

Теорема 1 [32].

1. *Группоид $(Q, \cdot)$ является левым группоидом с делением, если и только если существует такой левый группоид с сокращением $(Q, \setminus)$, что в алгебре $(Q, \cdot, \setminus)$ выполнено тождество* (1).
2. *Группоид $(Q, \cdot)$ является правым группоидом с делением, если и только если существует такой правый группоид с сокращением $(Q, /)$, что в алгебре $(Q, \cdot, /)$ выполнено тождество* (2).
3. *Группоид $(Q, \cdot)$ является левым группоидом с сокращением, если и только если существует такой левый группоида с делением $(Q, \setminus)$, что в алгебре $(Q, \cdot, \setminus)$ выполнено тождество* (3).
4. *Группоид $(Q, \cdot)$ является правым группоидом с сокращением, если и только если существует такой правый группоид с делением $(Q, /)$, что в алгебре $(Q, \cdot, /)$ выполнено тождество* (4).
5. *Группоид $(Q, \cdot)$ является левой квазигруппой, если и только если существует такой группоид $(Q, \setminus)$, что в алгебре $(Q, \cdot, \setminus)$ выполнены тождества* (1) *и* (3).
6. *Группоид $(Q, \cdot)$ является правой квазигруппой, если и только если существует такой группоид $(Q, /)$, что в алгебре $(Q, \cdot, /)$ выполнены тождества* (2) *и* (4).
7. *Группоид $(Q, \cdot)$ является группоидом с делением, если и только если существуют такой правый группоида с сокращением $(Q, /)$ и такой левый группоид с сокращением $(Q, \setminus)$, что в алгебре $(Q, \cdot, /, \setminus)$ выполнены тождества* (1) *и* (2).
8. *Группоид $(Q, \cdot)$ является группоидом с сокращением, если и только если существуют такой правый группоид с делением $(Q, /)$ и такой левый группоид с делением $(Q, \setminus)$, что в алгебре $(Q, \cdot, /, \setminus)$ выполнены тождества* (3) *и* (4).

9. *Группоид* $(Q,\cdot)$ *является правым группоидом с делением, если и только если существует такой левый группоид с сокращением* $(Q,//)$*, что в алгебре* $(Q,\cdot,//)$ *выполнено тождество* (5).
10. *Группоид* $(Q,\cdot)$ *является правым группоидом с сокращением, если и только если существует такой левый группоид с делением* $(Q,//)$*, что в алгебре* $(Q,\cdot,//)$ *выполнено тождество* (6).
11. *Группоид* $(Q,\cdot)$ *является левым группоидом с сокращением, если и только если существует такой левый группоид с делением* $(Q,\backslash\backslash)$*, что в алгебре* $(Q,\cdot,\backslash\backslash)$ *выполнено тождество* (7).
12. *Группоид* $(Q,\cdot)$ *является левым группоидом с делением, если и только если существует такой правый группоид с сокращением* $(Q,\backslash\backslash)$*, что в алгебре* $(Q,\cdot,\backslash\backslash)$ *выполнено тождество* (8).
13. *Группоид* $(Q,\cdot)$ *является правой квазигруппой, если и только если существует такой группоид* $(Q,//)$*, что в алгебре* $(Q,\cdot,//)$ *выполнены тождества* (5) *и* (6).
14. *Группоид* $(Q,\cdot)$ *является левой квазигруппой, если и только если существует такой группоид* $(Q,\backslash\backslash)$*, что в алгебре* $(Q,\cdot,\backslash\backslash)$ *выполнены тождества* (7) *и* (8).
15. *Группоид* $(Q,\cdot)$ *является группоидом с делением, если и только если существуют такой левый группоид с сокращением* $(Q,//)$ *и такой правый группоид с сокращением* $(Q,\backslash\backslash)$*, что в алгебре* $(Q,\cdot,//,\backslash\backslash)$ *выполнены тождества* (5) *и* (8).
16. *Группоид* $(Q,\cdot)$ *является группоидом с сокращением, если и только если существуют такой правый группоид с делением* $(Q,//)$ *и такой левый группоид с делением* $(Q,\backslash\backslash)$*, что в алгебре* $(Q,\cdot,//,\backslash\backslash)$ *выполнены тождества* (6) *и* (7).

Некоторые случаи теоремы 1, например 5—7, хорошо известны (случай 5 — см. [30], случай 7 — см. [6]).

2. Конгруэнции некоторых классов группоидов

Известно, что гомоморфным образом квазигруппы $(Q,\cdot)$ является группоид с делением [13]. Поэтому в квазигруппе $(Q,\cdot)$ была определена «обычная» с точки зрения универсальной алгебры [15] конгруэнция и так называемая нормальная конгруэнция. Нормальная конгруэнция квазигруппы $(Q,\cdot)$ является «обычной» конгруэнцией квазигруппы $(Q,\cdot,/,\backslash)$ [1, 4].

Одним из самых важных свойств е-квазигруппы $(Q,\cdot,\backslash,/)$ (примитивной квазигруппы) является следующее: любая конгруэнция е-квазигруппы $(Q,\cdot,\backslash,/)$ — нормальная конгруэнция квазигруппы $(Q,\cdot)$; любая нормальная конгруэнция квазигруппы $(Q,\cdot)$ — конгруэнция примитивной квазигруппы $(Q,\cdot,\backslash,/)$ [1,4,5,9].

Аналогично случаю квазигрупп мы изучаем связи между конгруэнциями некоторых группоидов, которые определены экзистенциально и эквационально.

Обратим внимание на следующую проблему Брака—Белоусова: какие лупы G обладают свойством, что при любом мультипликативном гомоморфизме их гомоморфный образ является лупой [14, с. 92]? Каковы квазигруппы или лупы, в которых все конгруэнции являются нормальными [1, проблема 20, с. 221]?

Определение 11 [15]. Предположим, что $(Q,\circ)$ и $(G,*)$ — два бинарных группоида. Отображение $h\colon Q \to G$ называется гомоморфным отображением из $(Q,\circ)$ в $(G,*)$, если $h(a_1 \circ a_2) = ha_1 * ha_2$ для каждого a_1, a_2 из Q.

Если, кроме того, отображение h — сюръекция, то тогда $(G,*)$ является гомоморфным образом $(Q,\circ)$.

Определение 12 [16]. Эквивалентность θ является конгруэнцией группоида $(Q,\circ)$, если следующие импликации верны для всех $x,y,z \in Q$:

$$x\,\theta\,y \implies (z\circ x)\,\theta\,(z\circ y), \quad x\,\theta\,y \implies (x\circ z)\,\theta\,(y\circ z).$$

По аналогии эквивалентность θ — конгруэнция алгебры $(Q,\circ,/)$, где $\circ$, $/$ — бинарные операции, если θ допустима относительно любой левой и правой трансляции любой операции из сигнатуры этой алгебры, т. е. следующие импликации верны для всех $x,y,z \in Q$ [5,16]:

$$x\,\theta\,y \implies (z\circ x)\,\theta\,(z\circ y), \quad x\,\theta\,y \implies (x\circ z)\,\theta\,(y\circ z),$$
$$x\,\theta\,y \implies (z/x)\,\theta\,(z/y), \quad x\,\theta\,y \implies (x/z)\,\theta\,(y/z).$$

Определение 13 [1,4]. Конгруэнция θ квазигруппы $(Q,\circ)$ называется нормальной, если для всех $x,y,z \in Q$ верны импликации

$$(z\circ x)\,\theta\,(z\circ y) \implies x\,\theta\,y, \quad (x\circ z)\,\theta\,(y\circ z) \implies x\,\theta\,y.$$

Определения различных бинарных отношений в некоторых классах группоидов можно найти в [23, 24]. Например, на группоиды обобщено понятие нормальной конгруэнции квазигруппы: конгруэнция θ — нормальная конгруэнция группоида $(Q,\circ)$, если для всех $x,y,z \in Q$ верны импликации

$$(z\circ x)\,\theta\,(z\circ y) \implies x\,\theta\,y, \quad (x\circ z)\,\theta\,(y\circ z) \implies x\,\theta\,y.$$

Понятия конгруэнции, фактор-алгебры и гомоморфизма тесно связаны (см. подробнее [15,16]). Напомним, что любой гомоморфизм h группоида $(Q,\cdot)$ определяет конгруэнцию θ по следующему правилу: $a\,\theta\,b \iff h(a)=h(b)$ для всех $a,b \in Q$. Конгруэнцию θ называют ядром гомоморфизма h и обозначают $\ker(h)$.

Теорема 2 [1, 9, 15]. *Пусть $h\colon A \to B$ — гомоморфизм алгебры A на всю алгебру B. Тогда существует изоморфизм β из $A/\ker(h)$ в B, определённый по правилу $h = \beta\circ\nu$, где ν — естественный гомоморфизм из A в $A/\ker(h)$.*

Пусть h — гомоморфизм квазигруппы $(Q,\cdot)$ на группоид $(H,\circ)$. Если $(H,\circ)$ — квазигруппа, то $\ker(h)$ — нормальная конгруэнция [1, 29].

С другой стороны, если θ — нормальная конгруэнция квазигруппы $(Q,\cdot)$, то θ определяет гомоморфизм h квазигруппы $(Q,\cdot)$ на некоторую квазигруппу $(Q',\circ)$ в соответствии с правилом $\theta(x)\circ\theta(y) = \theta(x\cdot y)$, где $\theta(x), \theta(y), \theta(x\cdot y) \in Q/\theta$ [1,29].

Определение 14. Пусть h — гомоморфизм некоторого группоида $(Q,\cdot)$ со свойством T, $\theta = \ker(h)$. Мы будем называть θ и h *T-замкнутыми* (часто просто «замкнутыми»), если $h(Q,\cdot)$ обладает свойством T.

Например, мы назовём конгруэнцию $\theta = \ker(h)$ левого группоида с сокращением $(Q,\cdot)$ *замкнутой относительно сокращения слева*, если $h(Q,\cdot)$ — левый группоид с сокращением.

Приведём условия замкнутости конгруэнций в классах группоидов, которые связаны с квазигруппами. Иными словами, приведём условия, когда конгруэнция левого (правого) группоида с делением (с сокращением) $(Q,\cdot)$ является «нормальной».

Следствие 1.

1. *Конгруэнция θ левого группоида с делением $(Q,\cdot)$ замкнута, если и только если θ — конгруэнция соответствующей алгебры $(Q,\cdot,\backslash)$ с тождеством* (1).

Доказательство. Случай 1. Легко видеть, если θ — конгруэнция алгебры $(Q,\cdot,\backslash)$, то θ — конгруэнция левого группоида с делением $(Q,\cdot)$.

Докажем, что если θ — конгруэнция алгебры $(Q,\cdot,\backslash)$, то θ — замкнутая конгруэнция в $(Q,\cdot)$. Пусть h — гомоморфизм, который соответствует конгруэнции θ. Алгебра $(Q,\cdot,\backslash)$ лежит в многообразии алгебр $\mathfrak{V}$, которое состоит из алгебр с такими двумя бинарными операциями в сигнатуре $(\cdot,\backslash)$, что эти алгебры удовлетворяют тождеству (1). Так как $\mathfrak{V}$ является многообразием [5], то $h(Q,\cdot,\backslash) \in \mathfrak{V}$. По теореме 1 $h(Q,\cdot)$ является левым группоидом с делением. Таким образом, θ — замкнутая конгруэнция в $(Q,\cdot)$.

Обратно. Предположим, что θ — замкнутая конгруэнция группоида $(Q,\cdot)$. Тогда любой соответствующий конгруэнции θ гомоморфизм h обладает свойством, что $h(Q,\odot)$ — левый группоид с делением. Определим операцию $\oslash$ на множестве hQ следующим способом: $h(x)\oslash h(y) \overset{\text{опр.}}{=} h(x\backslash y)$ для всех $x,y\in Q$. Тогда мы имеем следующие равенства:

$$h(y) = h\big(x\cdot(x\setminus y)\big) = h(x)\odot h(x\setminus y) = h(x)\odot\big(h(x)\oslash h(y)\big).$$

Поэтому в алгебре $(hQ,\odot,\oslash)$ верно тождество (1). Таким образом, h — гомоморфное отображение алгебры $(Q,\cdot,\backslash)$ на всю алгебру $(hQ,\odot,\oslash)$. Следовательно, гомоморфизм h определяет конгруэнцию θ на алгебре $(Q,\cdot,\backslash)$, т. е. θ — конгруэнция алгебры $(Q,\cdot,\backslash)$. □

Случаи 2—16 формулируются и доказываются аналогично.

3. Простые группоиды

Пусть $(Q,\cdot)$ — группоид, $\mathbb{T}(Q,\cdot) = \{L_a, R_b \mid a,b\in Q\}$. Полугруппу, порождённую произведениями всех левых и правых трансляций группоида $(Q,\cdot)$, будем называть *полугруппой умножений группоида* $(Q,\cdot)$ или *мультипликативной полугруппой группоида* $(Q,\cdot)$. Обозначим эту полугруппу через $\Pi(Q,\cdot)$.

Элементы полугруппы Π — слова вида $T_1^{\alpha_1}T_2^{\alpha_2}\dots T_n^{\alpha_n}$, где $T_i\in\mathbb{T}$, $\alpha_i\in\mathbb{N}$.

Определение 15. Группу, порождённую всеми левыми и правыми трансляциями квазигруппы $(Q, \cdot)$, будем обозначать $M(Q, \cdot)$ или M для краткости.

Элементы группы M — слова вида $T_1^{\alpha_1} T_2^{\alpha_2} \dots T_n^{\alpha_n}$, где $T_i \in \mathbb{T}$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ [1].

Определение 16 [1, 31]. Если θ — бинарное отношение на множестве Q, α — отображение множества Q и из условия $x\,\theta\,y$ следует $\alpha x\,\theta\,\alpha y$ для всех $(x, y) \in \theta$, то мы будем говорить, что отображение α *допустимо* относительно бинарного отношения θ.

Более того, мы будем говорить, что отображение θ допустимо относительно отображения α. Используя эту терминологию, можно сказать, что любая конгруэнция квазигруппы $(Q, \cdot)$ допустима относительно любого элемента полугруппы $\Pi(Q, \cdot)$, любая нормальная конгруэнция квазигруппы $(Q, \cdot)$ допустима относительно любого элемента группы $M(Q, \cdot)$.

Определение 17. Группоид $(Q, \cdot)$ назовём *строго простым*, если его единственными конгруэнциями являются диагональная $\hat{Q} = \{(x, x) \mid x \in Q\}$ и универсальная $Q \times Q$.

Определение 18. Группоид $(Q, \cdot)$ назовём *простым*, если его единственными замкнутыми (нормальными) конгруэнциями являются диагональная $\hat{Q} = \{(x, x) \mid x \in Q\}$ и универсальная $Q \times Q$.

Приведём следствие теоремы 1.

Следствие 2.

1. *Эквивалентность θ — замкнутая конгруэнция группоида с левым делением $(Q, \cdot)$, если и только если θ допустима относительно любого элемента полугруппы*
$$\Pi_1(Q, \cdot, \backslash) = \langle L_x^{\cdot}, R_x^{\cdot}, L_x^{\backslash}, R_x^{\backslash} \mid x \in Q\rangle,$$
где $L_x^{\cdot} L_x^{\backslash} = \varepsilon$ для всех $x \in Q$.
2. *Эквивалентность θ — замкнутая конгруэнция группоида с правым делением $(Q, \cdot)$, если и только если θ допустима относительно любого элемента полугруппы*
$$\Pi_2(Q, \cdot, /) = \langle L_x^{\cdot}, R_x^{\cdot}, L_x^{/}, R_x^{/} \mid x \in Q\rangle,$$
где $R_x^{\cdot} R_x^{/} = \varepsilon$ для всех $x \in Q$.
3. *Эквивалентность θ — замкнутая конгруэнция группоида с левым сокращением $(Q, \cdot)$, если и только если θ допустима относительно любого элемента полугруппы*
$$\Pi_3(Q, \cdot, \backslash) = \langle L_x^{\cdot}, R_x^{\cdot}, L_x^{\backslash}, R_x^{\backslash} \mid x \in Q\rangle,$$
где $L_x^{\backslash} L_x^{\cdot} = \varepsilon$ для всех $x \in Q$.
4. *Эквивалентность θ — замкнутая конгруэнция группоида с правым сокращением $(Q, \cdot)$, если и только если θ допустима относительно любого элемента полугруппы*
$$\Pi_4(Q, \cdot, /) = \langle L_x^{\cdot}, R_x^{\cdot}, L_x^{/}, R_x^{/} \mid x \in Q\rangle,$$
где $R_x^{/} R_x^{\cdot} = \varepsilon$ для всех $x \in Q$.

5. *Эквивалентность θ — замкнутая конгруэнция левой квазигруппы $(Q, \cdot)$, если и только если θ допустима относительно любого элемента полугруппы*

$$\Pi_5(Q, \cdot, \backslash) = \langle L^{\cdot}_x, R^{\cdot}_x, L^{\backslash}_x, R^{\backslash}_x \mid x \in Q\rangle,$$

где $L^{\backslash}_x = (L^{\cdot}_x)^{-1}$ для всех $x \in Q$.

6. *Эквивалентность θ — замкнутая конгруэнция правой квазигруппы $(Q, \cdot)$, если и только если θ допустима относительно любого элемента полугруппы*

$$\Pi_6(Q, \cdot, /) = \langle L^{\cdot}_x, R^{\cdot}_x, L^{/}_x, R^{/}_x \mid x \in Q\rangle,$$

где $R^{/}_x = (R^{\cdot}_x)^{-1}$ для всех $x \in Q$.

7. *Эквивалентность θ — замкнутая конгруэнция группоида с делением $(Q, \cdot)$, если и только если θ допустима относительно любого элемента полугруппы*

$$\Pi_7(Q, \cdot, \backslash) = \langle L^{\cdot}_x, R^{\cdot}_x, L^{\backslash}_x, R^{\backslash}_x, L^{/}_x, R^{/}_x \mid x \in Q\rangle,$$

где $L^{\cdot}_x L^{\backslash}_x = \varepsilon$ и $R^{\cdot}_x R^{/}_x = \varepsilon$ для всех $x \in Q$.

8. *Эквивалентность θ — замкнутая конгруэнция группоида с сокращением $(Q, \cdot)$, если и только если θ допустима относительно любого элемента полугруппы*

$$\Pi_8(Q, \cdot, \backslash) = \langle L^{\cdot}_x, R^{\cdot}_x, L^{\backslash}_x, R^{\backslash}_x, L^{/}_x, R^{/}_x \mid x \in Q\rangle,$$

где $L^{\backslash}_x L^{\cdot}_x = \varepsilon$ и $R^{/}_x R^{\cdot}_x = \varepsilon$ для всех $x \in Q$.

9. *Эквивалентность θ — замкнутая конгруэнция группоида с правым делением $(Q, \cdot)$, если и только если θ допустима относительно любого элемента полугруппы*

$$\Pi_9(Q, \cdot, //) = \langle L^{\cdot}_x, R^{\cdot}_x, L^{//}_x, R^{//}_x \mid x \in Q\rangle,$$

где $R^{\cdot}_x L^{//}_x = \varepsilon$ для всех $x \in Q$.

10. *Эквивалентность θ — замкнутая конгруэнция группоида с правым сокращением $(Q, \cdot)$, если и только если θ допустима относительно любого элемента полугруппы*

$$\Pi_{10}(Q, \cdot, //) = \langle L^{\cdot}_x, R^{\cdot}_x, L^{//}_x, R^{//}_x \mid x \in Q\rangle,$$

где $L^{//}_x R^{\cdot}_x = \varepsilon$ для всех $x \in Q$.

11. *Эквивалентность θ — замкнутая конгруэнция группоида с левым сокращением $(Q, \cdot)$, если и только если θ допустима относительно любого элемента полугруппы*

$$\Pi_{11}(Q, \cdot, \backslash\backslash) = \langle L^{\cdot}_x, R^{\cdot}_x, L^{\backslash\backslash}_x, R^{\backslash\backslash}_x \mid x \in Q\rangle,$$

где $R^{\backslash\backslash}_x L^{\cdot}_x = \varepsilon$ для всех $x \in Q$.

12. *Эквивалентность θ — замкнутая конгруэнция группоида с левым делением $(Q, \cdot)$, если и только если θ допустима относительно любого элемента*

полугруппы

$$\Pi_{12}(Q, \cdot, \backslash\backslash) = \langle L^{\cdot}_x, R^{\cdot}_x, L^{\backslash\backslash}_x, R^{\backslash\backslash}_x \mid x \in Q \rangle,$$

где $L^{\cdot}_x R^{\backslash\backslash}_x = \varepsilon$ *для всех* $x \in Q$.

13. *Эквивалентность* θ — *замкнутая конгруэнция правой квазигруппы* $(Q, \cdot)$, *если и только если* θ *допустима относительно любого элемента полугруппы*

$$\Pi_{13}(Q, \cdot, //) = \langle L^{\cdot}_x, R^{\cdot}_x, L^{//}_x, R^{//}_x \mid x \in Q \rangle,$$

где $L^{//}_x = (R^{\cdot}_x)^{-1}$ *для всех* $x \in Q$.

14. *Эквивалентность* θ — *замкнутая конгруэнция левой квазигруппы* $(Q, \cdot)$, *если и только если* θ *допустима относительно любого элемента полугруппы*

$$\Pi_{14}(Q, \cdot, \backslash\backslash) = \langle L^{\cdot}_x, R^{\cdot}_x, L^{\backslash\backslash}_x, R^{\backslash\backslash}_x \mid x \in Q \rangle,$$

где $R^{\backslash\backslash}_x = (L^{\cdot}_x)^{-1}$ *для всех* $x \in Q$.

15. *Эквивалентность* θ — *замкнутая конгруэнция группоида с делением* $(Q, \cdot)$, *если и только если* θ *допустима относительно любого элемента полугруппы*

$$\Pi_{15}(Q, \cdot, //, \backslash\backslash) = \langle L^{\cdot}_x, R^{\cdot}_x, L^{\backslash\backslash}_x, R^{\backslash\backslash}_x, L^{//}_x, R^{//}_x \mid x \in Q \rangle,$$

где $R^{\cdot}_x L^{//}_x = \varepsilon$ *и* $L^{\cdot}_x R^{\backslash\backslash}_x = \varepsilon$ *для всех* $x \in Q$.

16. *Эквивалентность* θ — *замкнутая конгруэнция группоида с сокращением* $(Q, \cdot)$, *если и только если* θ *допустима относительно любого элемента полугруппы*

$$\Pi_{16}(Q, \cdot, //, \backslash\backslash) = \langle L^{\cdot}_x, R^{\cdot}_x, L^{\backslash\backslash}_x, R^{\backslash\backslash}_x, L^{//}_x, R^{//}_x \mid x \in Q \rangle,$$

где $L^{//}_x R^{\cdot}_x = \varepsilon$ *и* $R^{\backslash\backslash}_x L^{\cdot}_x = \varepsilon$ *для всех* $x \in Q$.

17. *Эквивалентность* θ — *нормальная конгруэнция квазигруппы* $(Q, \cdot)$, *если и только если* θ *допустима относительно любого элемента группы* $M(Q, \cdot)$.

Доказательство. Случай 1. Если эквивалентность θ допустима относительно любого элемента полугруппы $\Pi_1(Q, \cdot, \backslash)$, то она допустима относительно любого элемента множества

$$\mathbb{T}(Q, \cdot, \backslash) = \{L^{(\cdot)}_x, R^{(\cdot)}_x, L^{(\backslash)}_x, R^{(\backslash)}_x \mid x \in Q\}.$$

Тогда по теореме 1 эта эквивалентность — замкнутая конгруэнция группоида $(Q, \cdot)$.

Если θ — замкнутая конгруэнция группоида $(Q, \cdot)$, то по теореме 1 эта конгруэнция допустима относительно любого элемента множества $\mathbb{T}(Q, \cdot, \backslash)$ и относительно любой конечной композиции элементов из этого множества, поэтому θ допустима относительно любого элемента полугруппы $\Pi_1(Q, \cdot, \backslash)$.

Случаи 2—16 доказываются аналогично.

Случай 17. Доказательство можно найти в [1, 2, 4]. Если θ — нормальная конгруэнция квазигруппы $(Q, \cdot)$, то, учитывая случаи 5, 6, мы имеем, что θ

допустима относительно любого элемента полугруппы

$$\Pi_{17}(Q,\cdot,\backslash,/) = \langle L^{\cdot}_x, R^{\cdot}_x, (L^{\cdot}_x)^{-1}, R^{\backslash}_x, L^{/}_x, (R^{\cdot}_x)^{-1} \mid x \in Q\rangle.$$

Легко убедиться, что $M \subseteq \Pi_{17}$.

Из определения 13 следует, что если эквивалентность θ множества Q допустима относительно любого элемента группы $M(Q,\cdot)$, то θ — нормальная конгруэнция квазигруппы $(Q,\cdot)$. □

Замечание 2. Случай 17 следствия 2 показывает, что, вообще говоря, условия этого следствия можно ослабить. Конгруэнции группоидов с делением изучались в [6].

Следствие 3.

1. *Если в группоиде с левым делением* $(Q,\cdot)$ *выполняется условие* $\mathbb{T}(Q,\cdot,\backslash) \subseteq \Pi(Q,\cdot)$*, то в группоиде* $(Q,\cdot)$ *все конгруэнции замкнуты.*

Доказательство. Доказательство следует из следствия 2. □

Случаи 2—17 формулируются и доказываются аналогично.

Лемма 1. *Эквивалентность* θ *является конгруэнцией группоида* $(Q,\cdot)$*, если и только если*

$$\omega\theta(x) \subseteq \theta(\omega x) \tag{17}$$

для всех $\omega \in \mathbb{T}(Q,\cdot) = \{L_a, R_b \mid a,b \in Q\}$*,* $x \in Q$*.*

Доказательство. Пусть θ — отношение эквивалентности и для всех $\omega \in \mathbb{T}$ выполнено $\omega\theta(x) \subseteq \theta(\omega x)$. Докажем, что из $a\,\theta\,b$ для всех $c \in Q$ следует $ca\,\theta\,cb$ и $ac\,\theta\,bc$.

По определению эквивалентности θ имеем, что $a\,\theta\,b$ эквивалентно $a \in \theta(b)$. Тогда $ca \in c\theta(b) \subseteq \theta(cb)$, $ca\,\theta\,cb$. Аналогично из $a\,\theta\,b$ следует $ac\,\theta\,bc$.

Докажем обратное утверждение. Пусть θ — конгруэнция. Докажем что $c\theta(a) \subseteq \theta(ca)$ для всех $c, a \in Q$. Пусть $x \in c\theta(a)$. Тогда $x = cy$, где $y \in \theta(a)$, т. е. $y\,\theta\,a$. Тогда, так как θ — конгруэнция, мы получаем $cy\,\theta\,ca$. Следовательно, $x = cy \in \theta(ca)$. Таким образом, $L_c\theta \subseteq \theta(ca)$.

Аналогично доказывается, что $R_c\theta(a) \subseteq \theta(ac)$. □

Замечание 3. Для квазигрупп лемма 1 доказана в [31] (см. также [34]).

Следствие 4. *Эквивалентность* θ *является конгруэнцией группоида* $(Q,\cdot)$*, если и только если* $\omega\theta(x) \subseteq \theta(\omega x)$ *для всех* $x \in Q$*,* $\omega \in \Pi(Q,\cdot)$*.*

Доказательство. Доказательство следует из леммы 1 и факта, что полугруппа Π порождается множеством $\mathbb{T}$. □

Следствие 5. *Группоид* $(Q,\cdot)$ *строго прост, если и только если только эквивалентности* $\hat{Q} = \{(x,x) \mid x \in Q\}$ *и* $Q \times Q$ *удовлетворяют условию* (17).

Простота группоидов используется, например, в [26].

Следствие 6.

1. *Конгруэнция θ левого группоида с делением $(Q,\cdot)$ замкнута (нормальна), если и только если θ обладает свойством $\omega\theta(x) \subseteq \theta(\omega x)$ для всех*
$$\omega \in \Pi_1(Q,\cdot) = \langle L^{\cdot}_x, R^{\cdot}_x, L^{\backslash}_x, R^{\backslash}_x \mid x \in Q\rangle,$$
где $L^{\cdot}_x L^{\backslash}_x = \varepsilon$.

Доказательство. Доказательство следует из следствий 2 и 4. □

Случаи 2—17 формулируются и доказываются аналогично.

Сформулируем некоторые определения из [7, 21].

Определение 19. Будем говорить, что полугруппа G действует на множестве M, если для любой пары элементов (g,m), $g \in G$, $m \in M$, элемент $(gm) \in M$ определён и, кроме того, $g_1\big(g_2(m)\big) = (g_1g_2)(m)$ и $e(m) = m$ для всех $m \in M$, $g_1, g_2 \in G$. Здесь e — единичный элемент полугруппы G.

Множество $Gm = \{gm \mid g \in G\}$ называют орбитой элемента m.

Разбиение множества M на непересекающиеся подмножества M_α называют разбиением на блоки относительно полугруппы G, если для любого M_α и любого $g \in G$ существует такое подмножество M_β, что $gM_\alpha \subseteq M_\beta$.

Очевидно, существуют тривиальные разбиения множества M, а именно разбиение в одноэлементные блоки и разбиение в один блок.

Если не существует разбиения множества M в нетривиальные блоки, то полугруппа G будет называться примитивной. Иными словами, полугруппа G действует на множестве M примитивно.

В [22] доказано, что квазигруппа $(Q,\cdot)$ проста, если и только если группа $M(Q,\cdot)$ действует на множестве Q как примитивная группа подстановок.

Повторяя часть доказательства теоремы D из [12], мы можем доказать следующую теорему.

Теорема 3. *Группоид $(Q,\cdot)$ строго прост, если и только если мультипликативная полугруппа $\Pi(Q,\cdot)$ примитивна.*

Доказательство. Предположим, что полугруппа $\Pi(Q,\cdot)$ непримитивна, т. е. на множестве Q существует некоторое нетривиальное разбиение $\mathcal{P}$, $Q = \bigcup Q_b$, $b \in Q$, которое является системой импримитивности полугруппы $\Pi(Q,\cdot)$. Определим эквивалентность θ на множестве Q следующим образом: $\theta(b) = Q_b$, если и только если $b \in Q_b$.

Из определения действия полугруппы $\Pi(Q,\cdot)$ на множестве Q и определения системы импримитивности мы имеем, что $T(Q_b) \subseteq Q_{T(b)}$ для всех $T \in \Pi(Q,\cdot)$, $Q_b \in \mathcal{P}$. Переходя к смежным классам эквивалентности θ, мы получаем следующее свойство этой эквивалентности: $T\theta(b) \subseteq \theta(Tb)$ для всех $b \in Q$, $T \in \Pi(Q,\cdot)$. Отсюда и из леммы 1 следует, что θ — нетривиальная конгруэнция группоида $(Q,\cdot)$.

Если мы предполагаем, что группоид $(Q, \cdot)$ не является простым группоидом, т. е. на множестве Q существует нетривиальная конгруэнция θ, то классы смежности эквивалентности $\theta(a)$, $a \in Q$, дают нам разбиение множества Q, которое является системой импримитивности полугруппы $\Pi(Q, \cdot)$. □

Замечание 4. Теорема 3 верна для любой квазигруппы $(Q, \cdot)$.

Следствие 7.

1. *Левый группоид с делением $(Q, \cdot)$ является простым, если и только если мультипликативная полугруппа $\Pi_1(Q, \cdot, \backslash)$ действует примитивно на множестве Q.*

Доказательство. Утверждение вытекает из следствия 2 и теоремы 3. □

Случаи 2—17 формулируются и доказываются аналогично.

Литература

[1] Белоусов В. Д. Основы теории квазигрупп и луп. — М.: Наука, 1967.

[2] Белоусов В. Д. О группе, ассоциированной квазигруппе // Мат. исслед. — 1969. — Т. 4, № 3. — С. 21—39.

[3] Белоусов В. Д. n-арные квазигруппы. — Кишинёв: Штиинца, 1971.

[4] Белоусов В. Д. Элементы теории квазигрупп: спецкурс. — Кишинёв: Изд-во Кишинёвского гос. ун-та, 1981.

[5] Биркгоф Г. Теория решёток. — М.: Наука, 1984.

[6] Валуцэ И. И., Продан Н. И. Решётки конгруэнций на группоидах с делением и на их полугруппах элементарных трансляций // Общая алгебра и дискретная геометрия. — 1980. — Т. 159. — С. 18—21.

[7] Каргаполов М. И., Мерзляков М. Ю. Основы теории групп. — М.: Наука, 1977.

[8] Мальцев А. И. Тождественные отношения на многообразиях квазигрупп // Мат. сб. — 1966. — Т. 69, № 1. — С. 3—12.

[9] Мальцев А. И. Алгебраические системы. — М.: Наука, 1976.

[10] Сушкевич А. К. Теория обобщённых групп. — Киев, ДНТВУ, 1937.

[11] Щербаков В. А. Об автоморфизмах и конгруэнциях квазигрупп: Дис.... канд. физ.-мат. наук. — ИМ АН МССР, 1991.

[12] Щукин К. К. О простых медиальных квазигруппах // Мат. исслед. — 1991. — Т. 120. — С. 114—117.

[13] Bates G. E., Kiokemeister F. A note on homomorphic mappings of quasigroups into multiplicative systems // Bull. Amer. Math. Soc. — 1948. — Vol. 54. — P. 1180—1185.

[14] Bruck R. H. A Survey of Binary Systems. — New York: Springer, 1971.

[15] Burris S., Sankappanavar H. P. A Course in Universal Algebra. — Berlin: Springer, 1981.

[16] Cohn P. M. Universal Algebra. — New York: Harper & Row, 1965.

[17] Dörnte W. Untersuchungen über einen veralgemeinerten Gruppenbegriff // Math. Z. — 1928. — B. 29. — S. 1—19.

[18] Duplak J. A parastrophic equivalence in quasigroups // Quasigroups Related Systems. — 2000. — Vol. 7. — P. 7—14.

[19] Evans T. Homomorphisms of non-associative systems // J. London Math. Soc. — 1949. — Vol. 24. — P. 254—260.

[20] Evans T. On multiplicative systems defined by generators and relations // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1951. — Vol. 47. — P. 637—649.

[21] Fraleigh J. B. A First Course in Abstract Algebra. — London: Addison-Wesley, 1982.

[22] Ihringer T. On multiplication groups of quasigroups // European J. Combin. — 1984. — Vol. 5, No. 2. — P. 137—141.

[23] Ježek J., Kepka T. Medial Groupoids. — Praha: Academia, 1983. — (Rozpr. Cesl. Akad. Ved; 93, no. 2).

[24] Ježek J., Kepka T., Nemec P. Distributive Groupoids. — Praha: Academia, 1981. — (Rozpr. Cesl. Akad. Ved; 91, no. 3).

[25] Keedwell A. D., Shcherbacov V. A. Quasigroups with an inverse property and generalized parastrophic identities // Quasigroups Related Systems. — 2005. — Vol. 13. — P. 109—124.

[26] Lee S.-M. On finite-element simple extensions of a countable collection of countable groupoids // Publ. Inst. Math., Nouv. Sér. — 1985. — Vol. 38. — P. 65—68.

[27] Moufang R. Zur Structur von alternativ Körpern // Math. Ann. — 1935. — B. 110. — S. 416—430.

[28] Mullen G. L., Shcherbacov V. A. On orthogonality of binary operations and squares // Bul. Acad. Şti. Rep. Moldova, Mat. — 2005. — No. 2. — P. 3—42.

[29] Pflugfelder H. O. Quasigroups and Loops: Introduction. — Berlin: Heldermann, 1990.

[30] Sabinin L. V. Smooth Quasigroups and Loops. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1999. — (Math. Appl.; Vol. 492).

[31] Shcherbacov V. A. On Bruck—Belousov problem // Bul. Acad. Şti. Rep. Moldova, Mat. — 2005. — No. 3. — P. 123—140.

[32] Shcherbacov V. A. On definitions of groupoids closely connected with quasigroups // Bul. Acad. Şti. Rep. Moldova, Mat. — 2007. — No. 2. — P. 43—54.

[33] Smith J. D. H. An Introduction to Quasigroups and Their Representation. — London: Chapman and Hall; CRC, 2007. — (Stud. Adv. Math.).

[34] Thurston H. A. Equivalences and mappings // Proc. London Math. Soc. — 1952. — Vol. 3, No. 2. — P. 175—182.