Подмодули и прямые слагаемые

А. Н. АБЫЗОВ
Казанский государственный университет
e-mail: Adel.Abyzov@ksu.ru

А. А. ТУГАНБАЕВ
Российский государственный торгово-экономический университет
e-mail: tuganbaev@gmail.com

УДК 512.55

Ключевые слова: I_0-модуль, слабо регулярный модуль, полуартиново кольцо.

Аннотация

Данная работа содержит как известные, так и новые результаты о модулях, в которых подмодули близки к прямым слагаемым. Основные результаты приведены с доказательствами.

Abstract

A. N. Abyzov, A. A. Tuganbaev, Submodules and direct summands, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 6, pp. 3—31.

This paper contains new and known results on modules in which submodules are close to direct summands. The main results are presented with proofs.

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей, а модули — унитарными. Говоря об артиновых кольцах или подобных объектах, мы подразумеваем, что соответствующие условия выполнены справа и слева. Подмодуль X модуля M называется *малым в* M, если $X + P \neq M$ для любого собственного подмодуля P модуля M. Модуль M называется I_0-*модулем* (см. [35]), если каждый его конечно порождённый немалый подмодуль содержит ненулевое прямое слагаемое модуля M. Модуль M называется *слабо регулярным*, если каждый его подмодуль, не лежащий в радикале Джекобсона модуля M, содержит в себе ненулевое прямое слагаемое модуля M. Слабо регулярные модули совпадают с I_0-модулями и изучались в [1—5, 8—10, 13, 31, 35, 47], [46, гл. 3] и других работах. Кольцо называется *обобщённым правым SV-кольцом*, если над ним каждый правый модуль является слабо регулярным.

Пересечение всех максимальных подмодулей модуля M обозначается через $J(M)$ и называется *радикалом Джекобсона* модуля M. Через $E(M)$ обозначается инъективная оболочка модуля M. Кольцо A называется *регулярным* (по фон Нейману), если $a \in aAa$ для любого элемента $a \in A$. Модуль M называется *цепным*, если любые два его подмодуля сравнимы по включению.

Фундаментальная и прикладная математика, 2008, том 14, № 6, с. 3—31.

Прямая сумма цепных модулей называется *полуцепным* модулем. Модуль M называется *полупростым*, если каждый его подмодуль — прямое слагаемое в M. Модуль называется *полуартиновым*, если каждый его фактор-модуль является существенным расширением полупростого модуля. Подмодуль N модуля M называется *существенным*, если для любого подмодуля X модуля M равенство $X \cap N = 0$ влечёт равенство $X = 0$. В этом случае также говорят, что M — *существенное расширение* модуля N. Модуль называется *равномерным*, если любые два его ненулевых подмодуля имеют ненулевое пересечение. Модуль, изоморфный подмодулю гомоморфного образа прямых сумм копий модуля M, называется *M-подпорождённым* модулем. Полная подкатегория всех правых R-модулей, состоящая из всех M-подпорождённых модулей, обозначается через $\sigma(M)$ и называется *категорией Висбауэра* модуля M.

Говорят, что подмодуль N модуля M *лежит над прямым слагаемым* модуля M, если существуют такие подмодули N_1 и N_2, что $N_1 \oplus N_2 = M$, $N_1 \subset N$ и $N_2 \cap N$ мал в N_2. Правый R-модуль M называется *модулем со свойством подъёма*, если каждый его подмодуль лежит над прямым слагаемым модуля M. Если каждый циклический подмодуль модуля M лежит над прямым слагаемым, то модуль M называется *полурегулярным*. Модуль M называется *CS-модулем*, если каждый его подмодуль является существенным подмодулем в некотором прямом слагаемом модуля M.

Рядом Лёви модуля M называется возрастающая цепь

$$0 \subset \mathrm{Soc}_1(M) = \mathrm{Soc}(M) \subset \ldots \subset \mathrm{Soc}_\alpha(M) \subset \mathrm{Soc}_{\alpha+1}(M) \subset \ldots,$$

где

$$\mathrm{Soc}_\alpha(M)/\mathrm{Soc}_{\alpha-1}(M) = \mathrm{Soc}\big(M/\mathrm{Soc}_{\alpha-1}(M)\big)$$

для каждого непредельного ординального числа α и

$$\mathrm{Soc}_\alpha(M) = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathrm{Soc}_\beta(M)$$

для каждого предельного ординального числа α. Обозначим через $L(M)$ подмодуль вида $\mathrm{Soc}_\xi(M)$, где ξ — наименьший ординал, для которого выполнено равенство $\mathrm{Soc}_\xi(M) = \mathrm{Soc}_{\xi+1}(M)$. Модуль M полуартинов в точности тогда, когда $M = L(M)$. В этом случае ξ называется *длиной Лёви* модуля M и обозначается $\mathrm{Loewy}(M)$. Кольцо R называется *полуартиновым справа*, если модуль R_R полуартинов. Для кольца R через $L(R)$ и $\mathrm{Soc}(R)$ обозначаются идеалы $L(R_R)$ и $\mathrm{Soc}(R_R)$ соответственно. Модуль M называется *инъективным*, если для любого модуля X и каждого подмодуля Y в X все гомоморфизмы $Y \to M$ продолжаются до гомоморфизмов $X \to M$. Кольцо A называется *правым V-кольцом* при выполнении следующих эквивалентных условий (см. [12, 7.32A]):

1) все простые правые A-модули инъективны;
2) в A каждый собственный правый идеал — пересечение максимальных правых идеалов.

Полуартиново справа правое V-кольцо называется *правым SV-кольцом*.

В каждом кольце R мы выделим два идеала $\mathrm{SI}(R)$ и $\mathrm{I}(R)$, которые строятся с помощью трансфинитной индукции.

Для любого кольца R определим по трансфинитной индукции для каждого ординального числа α идеал $\mathrm{SI}_\alpha(R)$. При $\alpha = 0$ положим $\mathrm{SI}_\alpha(R) = 0$. Если $\alpha = \beta + 1$, то $\mathrm{SI}_{\beta+1}(R)/\mathrm{SI}_\beta(R)$ — сумма всех простых инъективных правых R-подмодулей модуля $R/\mathrm{SI}_\beta(R)$. Когда α — предельное ординальное число, положим $\mathrm{SI}_\alpha(R) = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \mathrm{SI}_\beta(R)$. Ясно, что для некоторого ординального числа τ имеют место равенства $\mathrm{SI}_\tau(R) = \mathrm{SI}_{\tau+1}(R)$ и $\mathrm{SI}_1\big(R/\mathrm{I}_\tau(R)\big) = 0$. Далее через $\mathrm{SI}(R)$ обозначается идеал $\mathrm{SI}_\tau(R)$.

Определим идеал $\mathrm{I}(R)$. При $\alpha = 0$ положим $\mathrm{I}_\alpha(R) = 0$. Если $\alpha = \beta + 1$, то $\mathrm{I}_{\beta+1}(R)/\mathrm{I}_\beta(R)$ — сумма всех локальных инъективных подмодулей правого R-модуля $R/\mathrm{I}_\beta(R)$ длины не больше двух, у которых фактор-модуль по радикалу Джекобсона является инъективным модулем. Когда α — предельное ординальное число, положим $\mathrm{I}_\alpha(R) = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \mathrm{I}_\beta(R)$. Ясно, что для некоторого ординального числа τ имеет место равенство $\mathrm{I}_\tau(R) = \mathrm{I}_{\tau+1}(R)$. Далее через $\mathrm{I}(R)$ будем обозначать правый идеал $\mathrm{I}_\tau(R)$, который, как легко заметить, является идеалом.

1. ТеоремаОсофской—Смита

Лемма 1.1 [39]. *Пусть $\{e_i \mid i \in I\}$ — бесконечное множество ортогональных ненулевых идемпотентов кольца R. Предположим, что для каждого непустого подмножества $A \subseteq I$ существует такой элемент $f_A \in R$, что $e_i = f_A e_i$ для $i \in A$ и $e_i f_A = 0$ для $i \in I \setminus A$. Положим $S = \{r \in R \mid e_i r = 0,\ i \in I\}$. Тогда модуль $R/\Big(\sum\limits_{i\in I} e_i R + S\Big)$ не инъективен.*

Доказательство. Представим множество I в виде бесконечного дизъюнктного объединения бесконечных подмножеств $I = \bigcup\limits_{A\in\Sigma} A$, где $\Sigma \in 2^I$. Рассмотрим множество T всех тех элементов Ω из 2^I, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) если $A \in \Omega$, то A — бесконечное множество;
2) если $A, B \in \Omega$, $A \neq B$, то $A \cap B$ конечно.

Непосредственно проверяется, что T — индуктивно упорядоченное множество. Поэтому согласно лемме Цорна множество T содержит такой максимальный элемент Δ, что $\Sigma \subset \Delta$.

Если для элемента $r \in R$ выполнено равенство $\{e_i r \mid i \in I \setminus \{i_1, \ldots, i_n\}\} = \{0\}$, то $r - e_{i_1} r - \ldots - e_{i_n} r \in S$. Следовательно, множество

$$L = \sum_{i\in I} e_i R + S$$

состоит в точности из тех элементов кольца R, которые аннулируют слева почти все элементы множества $\{e_i \mid i \in I\}$.

Покажем, что сумма $\sum\limits_{A\in\Delta}(f_AR+L)/L$ является прямой. Пусть $A\in\Delta$, $r\in R$, $A_j\in\Delta\setminus\{A\}$, где $1\leqslant j\leqslant n$. Предположим, что $f_Ar\notin L$. Тогда существует бесконечное число элементов $i\in A$, для которых выполнено неравенство $e_if_Ar\neq 0$. По построению множество $A\cap\Big(\bigcup\limits_{j=1}^{n}A_j\Big)$ конечно. Поэтому если $r_0\in\sum\limits_{j=1}^{n}f_{A_j}R+L$, то для почти всех элементов $i\in A$ имеет место равенство $e_ir_0=0$. Следовательно, $f_Ar\notin\sum\limits_{j=1}^{n}f_{A_j}R+L$.

Определим отображение
$$\varphi\colon \sum_{A\in\Delta}(f_AR+L)/L\to R/L,$$
положив $\varphi(f_A+L)=f_A+L$, если $A\in\Sigma$, и $\varphi(f_A+L)=0$, если $A\in\Delta\setminus\Sigma$. Предположим, что R/L — инъективный модуль. Тогда гомоморфизм φ можно продолжить до гомоморфизма $\psi\colon R/L\to R/L$. Следовательно, существует такой элемент $t\in R$, что для всех $A\in\Sigma$ имеет место равенство $f_A=tf_A+l$, где $l\in L$. Поэтому $e_if_Ae_i=e_itf_Ae_i+e_ile_i$ для каждого элемента $i\in A$. Поскольку для почти всех элементов $i\in A$ имеют место равенства $e_il=0$ и $f_Ae_i=e_i$, то множество $A_0=\{i\in A\mid e_i=e_itf_Ae_i=e_ite_i\}$ является бесконечным. Пусть C — множество, которое с каждым элементом из множества $\{A_0\mid A\in\Sigma\}$ пересекается по одноэлементному подмножеству. Допустим, что $C\in\Delta$. Тогда, очевидно, $C\in\Delta\setminus\Sigma$ и, следовательно, $tf_C\in L$ и $e_ctf_Ce_c=0$ для почти всех $c\in C$. С другой стороны, $e_c=e_cte_c$ для каждого $c\in C$. Полученное противоречие показывает, что $C\notin\Delta$. В силу максимальности Δ для некоторого $D\in\Delta$ пересечение $C\cap D$ является бесконечным и $D\notin\Sigma$. Тогда $tf_D\in L$ и для почти всех элементов $i\in I$ имеет место равенство $e_itf_D=0$. Поэтому для почти всех элементов $d\in C\cap D$ мы имеем $e_dtf_D=0$. С другой стороны, для каждого элемента $d\in C\cap D$ имеет место равенство $e_d=e_dte_d=e_dtf_De_d=0$. Таким образом, для бесконечного множества элементов $d\in C\cap D$ идемпотенты e_d являются нулевыми, что противоречит условию леммы. □

Лемма 1.2. *Пусть R — инъективное справа регулярное кольцо и C — счётно порождённый неконечно порождённый правый идеал. Тогда правый R-модуль R/C не является инъективным.*

Доказательство. Непосредственно проверяется, что $C=\sum\limits_{i\in I}e_iR$, где $\{e_i\mid i\in I\}$ — бесконечное множество ортогональных идемпотентов регулярного кольца R.

Для каждого непустого подмножества A множества I найдётся такой идемпотент f кольца R, что модуль $\bigoplus\limits_{i\in A}e_iR$ существен в fR. Непосредственно проверяется, что для каждого $i\in A$ $fe_i=e_i$ и $e_jf=0$ для каждого $j\in I\setminus A$. По лемме 1.1 модуль $R/\Big(\sum\limits_{i\in I}e_iR+S\Big)$, где $S=\{r\in R\mid e_ir=0,\ i\in I\}$, не является инъективным.

Существует такое прямое слагаемое L модуля R_R, что S существен в L. Тогда $L = gR$, где g — идемпотент R. Правый идеал $N = \{r \mid gr \in S\}$ является существенным в R_R. Поскольку R несингулярно справа и для каждого $i \in I$ $e_i gN = 0$, то $e_i g = 0$ для всех $i \in I$. Тогда $g \in S$ и $S = gR$. Модуль $\bigoplus\limits_{i\in I} e_i R$ является существенным в некотором прямом слагаемом T модуля R_R. Поскольку $S \cap T = 0$ и R_R — инъективный модуль, то $R_R = S \oplus T \oplus U$, где U — подмодуль R_R.

Предположим, что $R/\bigoplus\limits_{i\in I} e_i R$ — инъективный модуль. Тогда модуль $\Bigl(R/\bigoplus\limits_{i\in I} e_i R\Bigr) \oplus U$ инъективен. С другой стороны, из изоморфизма

$$R \,/\, \Bigl(\sum_{i\in I} e_i R + S\Bigr) \cong \Bigl(R \,/\, \bigoplus_{i\in I} e_i R\Bigr) \oplus U$$

следует, что этот модуль не является инъективным. Полученное противоречие показывает, что модуль $R/\bigoplus\limits_{i\in I} e_i R$ неинъективен. □

Лемма 1.3. *Пусть R — инъективное справа регулярное кольцо, A — счётно порождённый неконечно порождённый правый идеал и для некоторого идемпотента e модуль eR является существенным расширением A_R. Тогда модуль $R/(A \oplus (1-e)R)$ не содержит ненулевых инъективных подмодулей.*

Доказательство. Допустим, что $B = A \oplus (1-e)R$. Предположим, что модуль R/B содержит ненулевой инъективный подмодуль C/B. Тогда $R/B = C/B \oplus D/B$. Поскольку $R/D \cong C/B$, то R/D — инъективный модуль. Так как модуль B счётно порождён и D/B цикличен, то D счётно порождён. По лемме 1.2 D конечно порождён. Тогда D — циклическое прямое слагаемое в R_R. Поскольку модуль B существен в R_R, то $D = R$, следовательно, $C/B = 0$, что противоречит нашему предположению. □

Теорема 1.4 [38]. *Для кольца R следующие условия равносильны*:

1) *R — полупростое кольцо*;
2) *над кольцом R каждый циклический правый модуль является инъективным.*

Теорема 1.4 следует из леммы 1.3.

Лемма 1.5. *Для правого R-модуля M имеют место следующие утверждения*:

1) *если $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ — бесконечная строго возрастающая цепь прямых слагаемых в M, то существует такая бесконечная строго убывающая цепь прямых слагаемых $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$ модуля M, что $M = A_i \oplus B_i$ для каждого i;*
2) *если $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$ — бесконечная строго убывающая цепь прямых слагаемых модуля M, то существуют такие ненулевые подмодули $C_1, C_2, \ldots$ модуля M, что $M = C_1 \oplus \ldots \oplus C_n \oplus B_n$ и $\bigoplus\limits_{i=n+1}^{\infty} C_i \subset B_n$ для каждого n.*

Доказательство. Докажем утверждение 1). Существует такой подмодуль B_1 модуля M, что $M = A_1 \oplus B_1$. Из закона модулярности следует равенство $A_2 = A_1 \oplus (A_2 \cap B_1)$. Поскольку A_2 — прямое слагаемое модуля M, то для некоторого подмодуля B_2 модуля M имеем $B_1 = (A_2 \cap B_1) \oplus B_2$. Тогда $M = A_1 \oplus B_1 = A_1 \oplus (A_2 \cap B_1) \oplus B_2 = A_2 \oplus B_2$ и $B_2 \supset B_1$. Повторяя эти рассуждения, мы получим бесконечную строго убывающую цепь $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$ прямых слагаемых модуля M, причём для каждого i имеют место равенства $M = A_i \oplus B_i$.

Докажем утверждение 2). Для каждого $i \geqslant 1$ имеем $B_i = B_{i+1} \oplus C_{i+1}$, где C_{i+1} — подмодуль M, и $M = B_1 \oplus C_1$, где C_1 — подмодуль M. Тогда очевидно, что для каждого n верны равенства $M = C_1 \oplus \ldots \oplus C_n \oplus B_n$ и $\bigoplus\limits_{i=n+1}^{\infty} C_i \subset B_n$. □

Теорема 1.6. *Для правого R-модуля M следующие условия равносильны*:

1) *каждая убывающая цепь прямых слагаемых модуля M стабилизируется*;
2) *каждая возрастающая цепь прямых слагаемых модуля M стабилизируется*;
3) *кольцо $\mathrm{End}(M)$ не содержит бесконечного числа ортогональных ненулевых идемпотентов.*

Доказательство. Эквивалентность 1) $\Longleftrightarrow$ 2) следует из леммы 1.5.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 3). Пусть $e_1, e_2, \ldots$ — ортогональные идемпотенты кольца $\mathrm{End}(M)$. Тогда $e_1M \subseteq (e_1 + e_2)M \subseteq \ldots$ — возрастающая цепь прямых слагаемых модуля M. Следовательно, найдётся такое натуральное число n, что $(e_1 + \ldots + e_k)M = (e_1 + \ldots + e_n)M$ для каждого $k \geqslant n$. Таким образом, $e_k = 0$ для каждого $k \geqslant n$.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 1). Предположим противное. Тогда в модуле M существует бесконечная строго убывающая цепь прямых слагаемых $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$. Без ограничения общности можно считать, что $B_1 \neq M$. Согласно лемме 1.5 в модуле M существуют такие подмодули $C_1, C_2, \ldots$, что $M = C_1 \oplus \ldots \oplus C_i \oplus B_i$ и $\bigoplus\limits_{k=i+1}^{\infty} C_i \subset B_i$ для каждого натурального числа i. Пусть π_i — проекция модуля M на подмодуль C_i относительно разложения $M = C_1 \oplus \ldots \oplus C_i \oplus B_i$. Тогда $\pi_1, \pi_2, \ldots$ — бесконечная система ортогональных ненулевых идемпотентов. Получили противоречие с предположением пункта. □

Модуль называется *I-конечным*, если он удовлетворяет одному из эквивалентных условий теоремы 1.6.

Теорема 1.7 [24, 7.12]. *Пусть M — циклический правый R-модуль и в каждом циклическом подфакторе модуля M каждый замкнутый подмодуль является существенным расширением циклического подмодуля. Тогда M — I-конечный модуль.*

Доказательство. Допустим противное. Тогда согласно лемме 1.5 и теореме 1.6 существуют такие семейства ненулевых подмодулей $N_1, N_2, \ldots$ и $L_1, L_2, \ldots$ модуля M, что $M = N_1 \oplus \ldots \oplus N_n \oplus L_n$ и $\bigoplus\limits_{i=n+1}^{\infty} N_i \subset L_n$ для каждого n.

Для каждого i подмодуль N_i является циклическим и, следовательно, содержит в себе максимальный подмодуль A_i. Пусть

$$\bar{M} = M \,/\, \left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} A_i\right), \quad S = \left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} N_i\right) \,/\, \left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} A_i\right).$$

Тогда S — полупростой подмодуль модуля $\bar{M}$ и для каждого n подмодуль

$$\left(\bigoplus_{i=1}^{n} N_i + \bigoplus_{i=1}^{\infty} A_i\right) \,/\, \left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} A_i\right) -$$

прямое слагаемое в $\bar{M}$.

Пусть P — максимальное существенное расширение подмодуля S в модуле $\bar{M}$. Поскольку P — замкнутый подмодуль модуля $\bar{M}$, то согласно нашему предположению P содержит циклический существенный подмодуль T. Очевидно, что $S = \mathrm{Soc}(T)$. Представим S в виде $S = \bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} S_i$, где S_i — неконечно порождённые подмодули для каждого i. Пусть для каждого i B_i — максимальное существенное расширение подмодуля S_i в модуле T. Тогда по предположению для каждого i в модуле B_i существует существенный циклический подмодуль. Следовательно, $B_i \neq S_i$ и $\bar{B}_i = (B_i + S)/S \neq 0$ для каждого i.

Пусть $\bar{T} = T/S$ и W — максимальное существенное расширение подмодуля $\bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} \bar{B}_i$ в $\bar{T}$. Тогда W содержит циклический существенный подмодуль $\bar{E}$. Пусть E — циклический подмодуль T, для которого $(E+S)/S = \bar{E}$. Положим $\bar{F}_i = \bar{E} \cap \bar{B}_i$. Очевидно, что $\bar{F}_i \neq 0$ для каждого i. Обозначим через F_i обратный прообраз подмодуля $\bar{F}_i$ в B_i относительно канонического гомоморфизма. Тогда $S_i \subset F_i \subset B_i$.

Если для некоторого i имеет место равенство $S_i \cap E = 0$, то из существенности S_i в F_i следует, что $F_i \cap E = 0$. Поскольку $F_i \subset E + S = E \oplus S_0$, где $S_0 \subset S$, то F_i вложи́м в S_0 и, следовательно, является полупростым. Тогда $F_i \subset S$ и $\bar{F}_i = 0$, что невозможно. Таким образом, для каждого i существует такой простой подмодуль V_i модуля $\bar{M}$, что $V_i \subset S_i \cap E$.

Положим $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} V_i$. Тогда по предположению найдётся такой циклический подмодуль K модуля E, что K является существенном подмодулем в некотором замыкании V в E. Очевидно, что $V \neq K$ и $\bar{K} = (K+S)/S \neq 0$.

Покажем, что $K \cap \bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} B_i \subset S$. Для каждого $n \geqslant 1$ имеем

$$\left(K \cap \bigoplus_{i=1}^{n} B_i\right) \cap S = K \cap \left(\bigoplus_{i=1}^{n} B_i \cap S\right) = K \cap \bigoplus_{i=1}^{n} S_i \subset$$
$$\subset \mathrm{Soc}(K) \cap \bigoplus_{i=1}^{n} S_i = \left(\bigoplus_{i=1}^{\infty} V_i\right) \cap \bigoplus_{i=1}^{n} S_i = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i.$$

Поскольку $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} V_i$ — прямое слагаемое модуля T, то для некоторого подмодуля $T' \subset T$ имеем $T = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} V_i \oplus T'$. Если $\left(K \cap \bigoplus\limits_{i=1}^{n} B_i\right) \cap T' \neq 0$, то ввиду существенности S в T найдётся такой простой подмодуль N_0 модуля S, что $N_0 \subset \subset \left(K \cap \bigoplus\limits_{i=1}^{n} B_i\right) \cap T'$. Тогда $N_0 \subset \left(K \cap \bigoplus\limits_{i=1}^{n} B_i\right) \cap S \subset \bigoplus\limits_{i=1}^{n} V_i$, что невозможно. Полученное противоречие показывает, что $\left(K \cap \bigoplus\limits_{i=1}^{n} B_i\right) \cap T' = 0$, следовательно, модуль $K \cap \bigoplus\limits_{i=1}^{n} B_i$ вложи́м в $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} V_i$ и является полупростым. Таким образом, $K \cap \bigoplus\limits_{i=1}^{n} B_i \subset S$. Поскольку последнее включение выполняется для произвольного $n \geqslant 1$, то $K \cap \bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} B_i \subset S$.

Так как $S \subset \bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} B_i$, то $\bar{K} \cap \bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} \bar{B}_i = 0$. Получили противоречие с тем фактом, что $\bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} \bar{B}_i$ существен в W. □

Теорема 1.8 [42]. *Пусть M — циклический правый R-модуль. Предположим, что каждый циклический подфактор модуля M является CS-модулем. Тогда модуль M является прямой суммой равномерных подмодулей.*

Доказательство. Из предыдущей теоремы следует, что модуль M I-конечен. Тогда M — конечная прямая сумма неразложимых подмодулей. Поскольку каждый неразложимый CS-модуль равномерен, M — конечная прямая сумма равномерных модулей. □

Следующее утверждение является модульным аналогом теоремы 1.4.

Следствие 1.9. *Для правого R-модуля M следующие условия равносильны*:
1) *M — полупростой модуль*;
2) *каждый циклический модуль в $\sigma(M)$ является M-инъективным*;
3) *каждый циклический подфактор модуля M является M-инъективным.*

Доказательство. Импликации 1) $\Longrightarrow$ 2) и 2) $\Longrightarrow$ 3) очевидны.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 1). Пусть N — циклический подмодуль в M. Тогда из теоремы 1.8 следует, что N является конечной прямой суммой равномерных подмодулей. Пусть P — равномерное прямое слагаемое N. Поскольку в P каждый циклический подмодуль M-инъективен и, следовательно, выделяется в виде прямого слагаемого в P, то P — простой модуль. Таким образом, каждый циклический подмодуль модуля M является полупростым, и следовательно, модуль M сам является полупростым. □

2. Полуартиновы кольца и Max-кольца

Лемма 2.1. *Пусть R — кольцо и $e = e^2 \in R$. Если eR — простой правый R-модуль и Re не содержит нильпотентных левых идеалов, то Re — простой левый R-модуль.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный ненулевой элемент re из Re. Поскольку Re не содержит нильпотентных левых идеалов, то для некоторого элемента $s \in R$ имеет место неравенство $esre \neq 0$. Так как eRe — тело, то для некоторого элемента $t \in R$ имеем $(ete)(esre) = e$. Следовательно, $Rre = Re$. $\square$

Лемма 2.2. *Пусть R — полупервичное кольцо.*

1. $\mathrm{Soc}({}_RR) = \mathrm{Soc}(R_R)$.
2. *Если $r \in \mathrm{Soc}(R_R)$, то rR — прямое слагаемое модуля R_R.*
3. *Если $r \in \mathrm{Soc}(R_R)$, то $r\,\mathrm{Soc}(R_R) = rR$.*
4. $\mathrm{Soc}(R_R)$ *— регулярный идеал.*

Доказательство. Утверждение 1 непосредственно следует из леммы 2.1.

Для доказательства утверждения 2 используем индукцию по композиционной длине $\lg(rR)$. Если $\lg(rR) = 1$, то rR — минимальный правый идеал полупервичного кольца R, следовательно, rR выделяется в виде прямого слагаемого в R_R. Допустим, что $\lg(rR) = n$ и $rR = A \oplus B$, где A, B — правые идеалы кольца R и $\lg(A) = n-1$. По предположению индукции $R_R = A \oplus C$, где C — правый идеал. Пусть π — проекция модуля R_R на модуль C относительно разложения $R_R = A \oplus C$. Тогда $\pi(rR)$ — минимальный правый идеал и $C = \pi(rR) \oplus D$. Поскольку $\pi(B) = \pi(rR)$, то

$$R_R = A \oplus \pi(rR) \oplus D = A \oplus \pi(B) \oplus D = A \oplus B \oplus D = rR \oplus D.$$

Докажем утверждение 3. По пункту 2 $Rr = Re$, где $e = e^2$. Тогда $rR = reR \subset r\,\mathrm{Soc}(R_R)$.

Докажем утверждение 4. Пусть $r \in \mathrm{Soc}(R_R)$. Согласно пункту 2 для некоторого идемпотента e кольца R имеем $rR = eR$. Из пункта 3) следует, что $e = rs$, где $s \in \mathrm{Soc}(R_R)$. Тогда $r = er = rsr$. $\square$

Теорема 2.3 [20]. *Пусть R — полуартиново справа кольцо и $\mathrm{Loewy}(R_R) = n < \infty$. Тогда R — полуартиново слева кольцо и $\mathrm{Loewy}({}_RR) \leqslant 2^n - 1$.*

Доказательство. Доказательство будем проводить, используя математическую индукцию по правой длине Лёви кольца. Случай $\mathrm{Loewy}(R_R) = 1$ следует из теоремы Веддербарна—Артина. Допустим, что $\mathrm{Loewy}(R_R) = n$ и $M = J(R) \cap \mathrm{Soc}(R_R)$. Поскольку $\mathrm{Soc}(R_R)M = 0$, то модуль ${}_RM$ мы можем рассматривать как левый $\bar{R} = R/\mathrm{Soc}(R_R)$-модуль, следовательно, по предположению индукции

$$\mathrm{Loewy}({}_RM) \leqslant \mathrm{Loewy}({}_{\bar{R}}\bar{R}) \leqslant 2^{n-1} - 1.$$

Покажем, что $\mathrm{Soc}(R_R)/M$ является полупростым левым R-модулем. Пусть e — примитивный идемпотент из $\mathrm{Soc}(R_R)$. Если левый R/M-модуль $(R/M)(e+M)$ содержит нильпотентный идеал $(A+M)/M$, где A — подмодуль Re, то из равенства $M^2 = 0$ следует, что левый идеал A является нильпотентным. Тогда $A \subset J(R) \cap \mathrm{Soc}(R_R) = M$, и по лемме 2.1 $(R/M)(e+M)$ — простой модуль. Поскольку $\operatorname{Soc}(R_R) = \bigoplus\limits_{i\in I} e_iR \oplus M$, где e_i — примитивные идемпотенты, то из равенства $\operatorname{Soc}(R_R)/M = \Big(\sum\limits_{i\in I} Re_iR + M\Big)/M$ следует, что $\operatorname{Soc}(R_R)/M$ является полупростым левым R-модулем. Тогда

$$\begin{aligned}\operatorname{Loewy}({}_RR) \leqslant \operatorname{Loewy}\big(R/\operatorname{Soc}(R_R)\big) + \operatorname{Loewy}(\operatorname{Soc}(R_R)/M) + \operatorname{Loewy}(M) \leqslant \\ \leqslant (2^{n-1}-1) + 1 + (2^{n-1}-1) = 2^n - 1. \quad \square\end{aligned}$$

Далее через $\operatorname{CFM}_{\mathbb{N}}(R)$ будем обозначать множество всех конечностолбцовых матриц из $R^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, где R — некоторое кольцо.

Пример 2.4 [20]. Существует полуартиново справа кольцо R, у которого $\operatorname{Loewy}(R_R) = 2$ и $\operatorname{Loewy}({}_RR) = 3$.

Доказательство. Пусть D — некоторое тело и $T = \operatorname{CFM}_{\mathbb{N}}(D)$. Пусть $S = \operatorname{Soc}(T)$. Пусть $\phi\colon S \to S$ — отображение, при котором $\phi(A)_{ij} = A_{i+1,j}$, где $A \in S$ и $i,j \in \mathbb{N}$. Непосредственно проверяется, что ϕ — D-T-гомоморфизм и $\operatorname{Ker}(\phi) = \{A \in S \mid A_{i,j} = 0 \text{ для каждого } i > 1\}$. На множестве $R = D \times S$ определяется естественное сложение. Умножение определяется правилом

$$(d,s)(d',s') = \big(dd', sd' + ds' + s\phi(s')\big).$$

Непосредственно проверяется, что R — кольцо с единицей $(1,0)$ и $(0,S)$, $\big(0,\operatorname{Ker}(\phi)\big)$ — его идеалы, причём $(0,S)\big(0,\operatorname{Ker}(\phi)\big) = 0$. Так как $(0,s)(d',s') = \Big(0, s\big(d' + \phi(s')\big)\Big)$ и ϕ — эпиморфизм, то из утверждения 3 леммы 2.2 следует, что $\operatorname{Lat}\big((0,S)_R\big) = \operatorname{Lat}(S_T)$. Таким образом, правый идеал $(0,S)$ кольца R полупрост и, поскольку $R/(0,S) \cong D$, R — полуартиново кольцо и $\operatorname{Loewy}(R_R) = 2$.

Так как $(0,S)\big(0,\operatorname{Ker}(\phi)\big) = 0$, то левый идеал $\big(0,\operatorname{Ker}(\phi)\big)$ можно рассматривать как левый модуль над кольцом $R/(0,S) \cong D$. Тогда $\big(0,\operatorname{Ker}(\phi)\big)$ — полупростой левый R-модуль. Непосредственная проверка показывает, что N — точный правый T-модуль. Пусть (d,s) — произвольный элемент кольца R, не лежащий в $(0,N)$. В этом случае либо $d \neq 0$, либо $s \notin N$. Поскольку в кольце $\operatorname{CFM}_{\mathbb{N}}(D)$ имеет место равенство $D \cap S = 0$, то $d + \phi(s) \neq 0$. Тогда найдётся такой ненулевой элемент $(0,n) \in (0,N)$, что $(0,n)(d,s) = \Big(0, n\big(d + \phi(s)\big)\Big) \neq 0$. Таким образом, левый идеал N является существенным в ${}_RR$ и, следовательно, $\operatorname{Soc}({}_RR) = N$. Поскольку $R/(0,N)$, очевидно, не является полупростым, по теореме 2.3 $\operatorname{Loewy}({}_RR) = 3$. $\square$

Открытый вопрос 1 [20]. Пусть R — полуартиново справа кольцо и $\operatorname{Loewy}(R_R) = n < \infty$. Какие значения может принимать левая длина Лёви кольца R?

В [18] для произвольного натурального числа n построен пример полуартинова справа и слева кольца, у которого $\operatorname{Loewy}(R_R) = n$ и $\operatorname{Loewy}({}_RR) = 2n-1$.

В [41] Ософская показала, что для каждых двух бесконечных ординалов α и β существует такое совершенное кольцо, что его левая длина Лёви равна $\alpha + 1$, а правая длина Лёви равна $\beta + 1$.

Лемма 2.5. *Для идеала J полуартинова слева кольца R следующие условия равносильны*:

1) J — *примитивный слева идеал*;
2) J — *примитивный справа идеал.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Поскольку кольцо R/J является первичным, то из леммы 2.1 следует, что $\operatorname{Soc}\big((R/J)_R\big) \neq 0$. Пусть M — минимальный правый идеал кольца R/J. Из первичности кольца R/J следует равенство $\operatorname{Ann}_{R/J}(M) = 0$, и следовательно, J — примитивный справа идеал.

Импликация 2) $\Longrightarrow$ 1) доказывается аналогично. □

Лемма 2.6. *Пусть M — ненулевой правый модуль над полуартиновым слева кольцом R. Тогда существует такой примитивный идеал P в кольце R, что $MP \neq M$.*

Доказательство. Пусть $A = \operatorname{Ann}(M)$ и T — такой левый идеал кольца R, что T/A — минимальный левый идеал кольца R/A. Если P — левый аннулятор левого R-модуля T/A, то $MPT \subset MA = 0 \neq MT$. □

Теорема 2.7 [21]. *Если каждая возрастающая цепь примитивных идеалов полуартинова слева кольца R стабилизируется, то R — правое* Max-*кольцо.*

Доказательство. Пусть M — ненулевой правый R-модуль. По лемме 2.6 существует такой примитивный идеал P кольца R, что P — максимальный примитивный идеал со свойством $MP \neq M$. Пусть $S/P = \operatorname{Soc}\big((R/P)_R\big)$. Если $MS \neq M$, то по лемме 2.6 существует такой примитивный идеал Q/S кольца R/S, что $(M/MS)(Q/S) \neq M/MS$. Тогда Q — примитивный идеал кольца R, для которого имеет место неравенство $MQ \neq M$. Так как Q строго содержит идеал P, то получаем противоречие с максимальностью P. Таким образом, $MS = M$ и $M/MP = MS/MP = (M/MP)(S/P)$. Таким образом, M/MP — ненулевой полупростой модуль, и следовательно, модуль M содержит максимальный подмодуль. □

В [21] было выдвинуто предположение, что в полуартиновых слева правых Max-кольцах выполнено условие предыдущей теоремы. Там же было показано, что существует регулярное полуартиново справа и слева кольцо, которое не является правым Max-кольцом.

3. Кольца, над которыми каждый модуль слабо регулярен

Лемма 3.1. *Следующие условия для циклического правого R-модуля M равносильны*:

1) *M полупрост*;
2) *в M никакой максимальный подмодуль не является существенным.*

Доказательство. Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) следует из того, что в M каждый подмодуль — прямое слагаемое.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть N — произвольный подмодуль M. В силу леммы Цорна в модуле M мы можем выбрать максимальный подмодуль T с условием $T \cap N = 0$. Тогда $T \oplus N$ является существенным в M. Допустим, что $T \oplus N \neq M$. По лемме Цорна в любом ненулевом циклическом модуле существует максимальный подмодуль, следовательно, в модуле M найдётся такой максимальный подмодуль M_0, что $T \oplus N \subset M_0 \subset M$. Очевидно, M_0 является существенным подмодулем в M, что противоречит нашему исходному предположению. Таким образом, каждый подмодуль модуля M выделяется в M в виде прямого слагаемого, и следовательно, M является полупростым. □

Лемма 3.2. *Пусть M — правый R-модуль, N — ненулевой подмодуль модуля M, который содержится в $J(M)$, и N_0 — максимальный подмодуль модуля N. Если модуль $M \oplus (N/N_0)$ слабо регулярен, то N_0 — прямое слагаемое в N.*

Доказательство. Пусть ϕ — естественный гомоморфизм модуля N на модуль N/N_0. Поскольку модуль $M \oplus (N/N_0)$ слабо регулярен, то для некоторого ненулевого элемента $n \in N$ и подмодуля T имеет место равенство $M \oplus (N/N_0) = \bigl(n, \phi(n)\bigr)R \oplus T$. Пусть π — проекция модуля $M \oplus (N/N_0)$ на первое прямое слагаемое. Тогда $M = nR + \pi(T) = \pi(T)$. Если $\operatorname{Ker} \pi|_T \neq 0$, то $T = M \oplus (N/N_0)$, что невозможно. Таким образом, $M \oplus (N/N_0) = T \oplus (N/N_0)$, и следовательно, $J(M) = J\bigl(M \oplus (N/N_0)\bigr) = J\bigl(T \oplus (N/N_0)\bigr) = J(T)$. Тогда $nR \cap \operatorname{Ker} \phi = 0$. С другой стороны, $nR + \operatorname{Ker} \phi = N$, и следовательно, $N = nR \oplus N_0$. □

Лемма 3.3. *Если в категории $\sigma(M)$ каждый модуль является слабо регулярным, то радикал Джекобсона каждого модуля из $\sigma(M)$ является полупростым.*

Доказательство. Пусть $N \in \sigma(M)$. Из леммы 3.1 следует, что в каждом циклическом подмодуле модуля $J(N)$ каждый максимальный подмодуль выделяется в виде прямого слагаемого. Тогда из леммы 3.2 следует, что в $J(N)$ каждый циклический подмодуль является полупростым, и следовательно, $J(N)$ — полупростой модуль. □

Лемма 3.4. *Если в категории $\sigma(M)$ прямая сумма двух равномерных модулей является CS-модулем, то каждый равномерный модуль в категории $\sigma(M)$ имеет длину не большую двух.*

Доказательство. Пусть $N \in \sigma(M)$ — M-инъективный непростой равномерный модуль. Сначала покажем, что $J(N) \neq 0$. Для этого, очевидно, достаточно показать, что модуль N содержит не более одного максимального подмодуля. Допустим противное. Тогда в N найдутся два различных максимальных подмодуля N_1 и N_2. Пусть $\phi\colon N_1 \to N_2$ — мономорфизм. Поскольку N — равномерный квазиинъективный модуль, то ϕ продолжается до автоморфизма N, следовательно, ϕ — изоморфизм. Таким образом, каждый мономорфизм всякого максимального подмодуля модуля N является автоморфизмом, и, поскольку

N_1 и N_2 — равномерные модули, $\mathrm{End}(N_1)$ и $\mathrm{End}(N_2)$ — локальные кольца. Покажем, что N_j — N_i-инъективен, где $i, j \in \{1, 2\}$. Пусть N_0 — подмодуль N_i и $f\colon N_0 \to N_j$ — некоторый гомоморфизм. Рассмотрим в модуле $N_i \oplus N_j$ подмодуль $S = \{n - f(n) \mid n \in N_0\}$. Согласно условию для некоторого существенного расширения T подмодуля S имеет место равенство $N_i \oplus N_j = T \oplus H$, где H — некоторый подмодуль модуля $N_i \oplus N_j$. Непосредственно проверяется, что $T \cap N_j = 0$. Поскольку модуль T неразложим, то из теоремы Крулля—Шмидта—Адзумая следует, что либо $N_i \oplus N_j = T \oplus N_i$, либо $N_i \oplus N_j = T \oplus N_j$. Допустим, что $N_i \oplus N_j = T \oplus N_i$ и $\pi\colon T \oplus N_i \to N_i$ — проекция. Тогда $\pi|_{N_j}$ — мономорфизм и, следовательно, изоморфизм. Таким образом, $N_i \oplus N_j = T \oplus N_j$. Пусть $\pi'\colon T \oplus N_j \to N_j$ — проекция. Непосредственная проверка показывает, что $\pi'|_{N_0} = \phi$. Следовательно, N_j N_i-инъективен. Тогда N_1 N-инъективен, и, поскольку $N = N_1 + N_2$, N_1 — прямое слагаемое в N, что невозможно.

Допустим, что $J(N)$ не является простым. Тогда найдётся такой элемент $n \in J(N)$, что модуль nR содержит ненулевой максимальный подмодуль N_0. Пусть $\bar{n} = n + N_0$. Поскольку модуль N квазиинъективен, то $\mathrm{End}(N)$ — локальное кольцо. Рассмотрим модуль $N \oplus \bar{n}R$. Поскольку $N \oplus \bar{n}R$ является CS-модулем и $(n - \bar{n})R \cap N \neq 0$, то из теоремы Крулля—Шмидта—Адзумая следует, что $N \oplus \bar{n}R = U \oplus \bar{n}R$, где U — существенное расширение $(n - \bar{n})R$. Пусть $\pi\colon U \oplus \bar{n}R \to \bar{n}R$ — проекция. Тогда $\pi(n) = \bar{n}$ и $\pi\big(J(N)\big) = 0$. Так как $n \in J(N)$, то получаем противоречие. □

Теорема 3.5 [4]. *Для произвольного правого R-модуля M следующие условия равносильны*:

1) *в категории $\sigma(M)$ каждый модуль является слабо регулярным*;
2) *в категории $\sigma(M)$ каждый модуль либо является полупростым, либо содержит в себе ненулевой M-инъективный подмодуль.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Рассмотрим произвольный модуль N из категории $\sigma(M)$. Если он не является полупростым, то ввиду леммы 3.3 имеем $N \not\subset J\big(E_M(N)\big)$. Тогда из слабой регулярности модуля $E_M(N)$ следует, что модуль N содержит в себе ненулевой M-инъективный подмодуль.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть N — произвольный модуль из категории $\sigma(M)$. Если подмодуль N_0 модуля N не содержится в $J(M)$, то согласно нашему предположению он содержит в себе либо ненулевой M-инъективный подмодуль, либо малый простой подмодуль. Таким образом, в любом случае подмодуль N_0 будет содержать в себе ненулевое прямое слагаемое модуля N. □

Следствие 3.6. *Если в категории $\sigma(M)$ каждый модуль является слабо регулярным, то каждый неразложимый модуль из $\sigma(M)$ является либо простым, либо инъективным локальным длины два.*

Доказательство. Пусть $N \in \sigma(M)$ — неразложимый модуль. Если $N \subset J\big(E_M(N)\big)$, то из леммы 3.3 следует, что N — простой модуль. Если

$N \nsubseteq J\big(E_M(N)\big)$, то N — циклический инъективный неразложимый модуль. Тогда N — локальный равномерный модуль, и по лемме 3.3 $J(N)$ является простым модулем. □

Следствие 3.7. *Пусть в категории $\sigma(M)$ каждый модуль является слабо регулярным. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Каждый ненулевой модуль из $\sigma(M)$ содержит максимальный подмодуль.*
2. *Если $N \in \sigma(M)$, то $J(N) \ll N$.*

Доказательство. Докажем утверждение 1. Пусть $N \in \sigma(M)$ — ненулевой модуль. Если $J(N) = N$, то по лемме 3.3 N — полупростой модуль, и следовательно, $N = J(N) = 0$. Полученное противоречие показывает, что модуль N содержит максимальный подмодуль. Таким образом, каждый ненулевой модуль из $\sigma(M)$ содержит максимальный подмодуль и для каждого $N \in \sigma(M)$ имеем $J(N) \ll N$.

Утверждение 2 непосредственно следует из утверждения 1. □

Лемма 3.8. *Пусть M — слабо регулярный правый R-модуль и N — такой подмодуль модуля M, что $\big(N + J(M)\big)/J(M)$ — простой подмодуль модуля $M/J(M)$. Тогда модуль N содержит такое локальное прямое слагаемое mR модуля M, что $\big(N + J(M)\big)/J(M) = \big(m + J(M)\big)R$.*

Доказательство. Пусть n — такой элемент подмодуля N, что

$$\big(N + J(M)\big)/J(M) = \big(n + J(M)\big)R.$$

Из слабой регулярности модуля M следует существования такого циклического подмодуля mR, что $mR \not\subset J(M)$, $mR \subset nR$ и mR — прямое слагаемое модуля M. Тогда

$$\big(N + J(M)\big)/J(M) = \big(m + J(M)\big)R \cong mR/(J(M) \cap mR) \cong mR/J(mR)$$

и модуль mR локален. □

Лемма 3.9. *Если M — полуартинов модуль и в категории $\sigma(M)$ каждый модуль является слабо регулярным, то каждый неполупростой модуль N из $\sigma(M)$ будет содержать инъективный локальный подмодуль длины не больше двух.*

Доказательство. Поскольку N является неполупростым, то из теоремы 3.5 следует, что он будет содержать ненулевой инъективный подмодуль N_0. Так как M — полуартинов модуль, то по [24, 3.12] подмодуль N_0 также является полуартиновым, и следовательно, $N_0/J(N_0)$ будет содержать простой подмодуль. Тогда из следствия 3.6 и леммы 3.8 следует, что модуль N_0 будет содержать прямое слагаемое, которое является инъективным и локальным и имеет длину не больше двух. □

Теорема 3.10 [37]. *Пусть M — правый R-модуль. Тогда следующие условия равносильны:*

1) *в категории $\sigma(M)$ каждый модуль является модулем со свойством подъёма*;
2) *в категории $\sigma(M)$ каждый модуль является CS-модулем*;
3) *M — полулокальный модуль и каждый модуль в $\sigma(M)$ является слабо регулярным*;
4) *M — локально нётеров и каждый модуль в $\sigma(M)$ является слабо регулярным*;
5) *в категории $\sigma(M)$ каждый модуль является прямой суммой локальных модулей длины не больше двух.*

Доказательство. Импликация 1) $\Longrightarrow$ 3) проверяется непосредственно.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 5). Из леммы 3.4 и следствия 1.9 следует, что каждый модуль в $\sigma(M)$ — прямая сумма локальных модулей длины не больше двух, причём в категории $\sigma(M)$ каждый локальный модуль длины два является M-инъективным. Ясно, что M локально нётеров. Тогда из [49, 27.3] непосредственно следует, что каждый модуль из $\sigma(M)$ является прямой суммой локальных модулей длины не больше двух.

Докажем импликацию 5) $\Longrightarrow$ 2). Непосредственно проверяется, что модуль M локально нётеров и каждый локальный модуль длины два в категории $\sigma(M)$ является M-инъективным. Пусть $N \in \sigma(M)$ и N_0 — подмодуль N. Тогда $N_0 = N_1 \oplus N_2$, где N_1 — полупростой модуль, не содержащий ненулевых M-инъективных подмодулей, и N_2 — M-инъективный модуль. Модуль N имеет вид $N = H_1 \oplus H_2 \oplus N_2$, где H_1 — полупростой подмодуль, не содержащий ненулевых M-инъективных подмодулей, а H_2 — M-инъективный подмодуль. Пусть $\pi\colon H_1 \oplus H_2 \oplus N_2 \to H_1$ — проекция, $N_1 = \mathrm{Ker}(\pi|_{N_1}) \oplus S$ и $H_1 = \mathrm{Im}(\pi|_{N_1}) \oplus T$, где S и T — подмодули модуля N. Тогда $H_1 \oplus H_2 \oplus N_2 = S \oplus T \oplus H_2 \oplus N_2$. Поскольку модуль $H_2 \oplus N_2$ является M-инъективным и $\mathrm{Ker}(\pi|_{N_1}) \cap N_2 = 0$, то $H_2 \oplus N_2 = E_1 \oplus E_2 \oplus N_2$, где E_1 и E_2 — подмодули модуля N, причём E_1 — существенное расширение модуля $\mathrm{Ker}(\pi|_{N_1})$. Тогда

$$N = S \oplus T \oplus E_1 \oplus E_2 \oplus N_2, \quad N_0 = S \oplus \mathrm{Ker}(\pi|_{N_1}) \oplus N_2$$

и $S \oplus E_1 \oplus N_2$ — существенное расширение N_0.

Убедимся в справедливости импликации 3) $\Longrightarrow$ 4). Покажем, что модуль M является локально нётеровым. Пусть N — конечно порождённый подмодуль модуля M. Ясно, что модуль $N/\big(N \cap J(M)\big)$ является полупростым модулем конечной длины. Используя индукцию по длине модуля $N/\big(N \cap J(M)\big)$, покажем, что N — модуль конечной длины. Если $\mathrm{Loewy}\Big(N/\big(N \cap J(M)\big)\Big) = 1$, то из леммы 3.8 следует существование такого локального подмодуля N_0 модуля N, что $\big(N_0 + J(M)\big)/J(M) \cong \big(N + J(M)\big)/J(M)$ и $M = N_0 \oplus L$, где L — подмодуль M. Тогда $N = N_0 \oplus (N \cap L)$, где $N \cap L \subset J(M)$ и $J(M) \subset \mathrm{Soc}(M)$ по лемме 3.3. Поскольку $N \cap L$ — конечно порождённый полупростой модуль, а по следствию 3.6 N_0 — локальный модуль конечной длины, то N — модуль конечной длины. Пусть наше утверждение доказано для конечно порождённых подмодулей S модуля M, у которых $\mathrm{Loewy}\Big(S/\big(S \cap J(M)\big)\Big) < n$ и N — конечно порождённый подмодуль модуля M, у которого $\mathrm{Loewy}\Big(N/\big(N \cap J(M)\big)\Big) = n$. Выберем в модуле N такой подмодуль N_0, что $N_0/\big(N_0 \cap J(M)\big)$ — простой модуль. Из леммы 3.8 следует существование такого локального подмодуля mR модуля N_0, что $M = mR \oplus L$, где L — подмодуль в M. Тогда $N = mR \oplus (N \cap L)$ и $\mathrm{Loewy}\Big(N/\big(N \cap J(M)\big)\Big) = 1 + \mathrm{Loewy}\Big((N \cap L)/\big((N \cap L) \cap J(M)\big)\Big)$. Модули mR и $N \cap L$ в силу предположения индукции имеют конечную длину, следовательно, модуль N также имеет конечную длину. Таким образом, модуль M является локально нётеровым.

Докажем импликацию 4) $\Longrightarrow$ 5). Покажем, что каждый модуль в категории $\sigma(M)$ полуартинов. Для этого согласно [24, 3.12] достаточно показать полуартиновость M. Пусть M/N — фактор-модуль модуля M и N_0 — ненулевой конечно порождённый подмодуль в M/N. Тогда N_0 — нётеров модуль и по [14, утверждение 10.14] $N_0 = N_1 \oplus \ldots \oplus N_k$, где для каждого i модуль N_i неразложим. По следствию 3.6 $\mathrm{Soc}(N_0) \neq 0$. Таким образом, каждый фактор-модуль модуля M имеет ненулевой цоколь, что и доказывает полуартиновость модуля M.

Пусть N — неполупростой модуль из $\sigma(M)$. Обозначим через A множество всех подмодулей N, которые являются локальными и инъективными длины не больше двух. Из леммы Цорна следует, что мы можем выбрать максимальное подмножество A_0 множества A со свойством $\sum\limits_{U \in A_0} U = \bigoplus\limits_{U \in A_0} U$. Пусть $N_0 = \bigoplus\limits_{U \in A_0} U$. Поскольку по предположению M локально нётеров, то из [49, 27.3] следует равенство $N = N_0 \oplus L$, где L — подмодуль модуля N. Если L — неполупростой модуль, то по лемме 3.9 L содержит инъективный локальный подмодуль длины не больше двух. А это противоречит выбору модуля N_0. Таким образом, каждый модуль из категории $\sigma(M)$ является прямой суммой локальных модулей длины не больше двух.

Докажем импликацию 5) $\Longrightarrow$ 1). Пусть N — ненулевой модуль из $\sigma(M)$ и N_0 — его подмодуль. Непосредственно проверяется, что каждый локальный модуль длины два в категории $\sigma(M)$ является M-инъективным. Пусть $N_0 = N_1 \oplus N_2$, где N_1 — полупростой модуль и N_2 — прямая сумма локальных модулей длины два. Тогда из [49, 27.3] следует, что $N = N_2 \oplus S$. Модуль $N_0 \cap S$ является полупростым. Допустим, что $S = S_1 \oplus S_2$, где S_1 — полупростой модуль и S_2 — прямая сумма локальных модулей длины два, и π — проекция модуля S на первое прямое слагаемое. Если $N_0 \cap S = T \oplus \mathrm{Ker}(\pi|_{N_0 \cap S})$, то $\mathrm{Ker}(\pi|_{N_0 \cap S}) \subset J(S)$ и $S_1 = \pi(T) \oplus T_0$. Тогда, как легко убедиться, $S = \pi(T) \oplus T_0 \oplus S_2 = T \oplus T_0 \oplus S_2$ и $N_0 \cap (T_0 \oplus S_2) \subset J(S_2)$. Таким образом, $N = N_2 \oplus T \oplus T_0 \oplus S_2$, $N_2 \oplus T \subset N_0$ и по следствию 3.7 $N_0 \cap (T_0 \oplus S_2) \ll N$. Следовательно, подмодуль N_0 лежит над прямым слагаемым. $\square$

Следствие 3.11 [48]. *Для кольца R равносильны следующие условия:*

1) *над кольцом R каждый правый модуль является модулем со свойством подъёма;*
2) *над кольцом R каждый правый модуль является CS-модулем;*

3) R — *полусовершенное обобщённое правое SV-кольцо*;
4) R — *артиново полуцепное кольцо и* $J^2(R) = 0$;
5) R — *полулокальное обобщённое правое SV-кольцо.*

Теорема 3.12 [5]. *Для кольца R следующие условия равносильны*:
1) R — *обобщённое SV-кольцо*;
2) $R/\operatorname{I}(R)$ — *артиново полуцепное и* $J^2\big(R/\operatorname{I}(R)\big) = 0$;
3) *каждый правый модуль над кольцом $R/\operatorname{I}(R)$ является модулем со свойством подъёма.*

Открытый вопрос 2. Пусть M — правый R-модуль и в категории $\sigma(M)$ каждый модуль слабо регулярен. Верно ли, что в этом случае модуль M является полуартиновым?

Частным случаем предыдущей проблемы является следующий открытый вопрос.

Открытый вопрос 3 [25]. Пусть M — правый R-модуль и в категории $\sigma(M)$ каждый ненулевой модуль содержит ненулевой M-инъективный подмодуль. Верно ли, что в этом случае модуль M является полуартиновым?

Пусть $\mathcal{C}$ — локально конечно порождённая категория Гротендика. Хорошо известно [45, утверждение 6.7], что каждый объект в $\mathcal{C}$ инъективен тогда и только тогда, когда каждый объект в $\mathcal{C}$ полупрост. В [25] была поставлена следующая проблема.

Открытый вопрос 4 [25]. Изучить локально конечно порождённые категории Гротендика, в которых каждый ненулевой объект содержит ненулевой инъективный подобъект.

4. SV-кольца и их характеризации

Теорема 4.1 [17]. *Пусть R — полуартиново справа кольцо. Если для каждого ординального числа α фактор-кольцо $R/\big(\operatorname{Soc}_\alpha(R_R)\big)$ является полупервичным, то R — регулярное кольцо.*

Доказательство. Используя трансфинитную индукцию, покажем, что для каждого ординального числа α идеал $\operatorname{Soc}_\alpha(R_R)$ является регулярным. Если $\alpha = 0$, то утверждение очевидно. Допустим, что для каждого $\beta < \alpha$ идеал $\operatorname{Soc}_\alpha(R_R)$ регулярен. Если β — предельное ординальное число, то регулярность идеала $\operatorname{Soc}_\beta(R_R)$ проверяется непосредственно. Пусть $\alpha = \gamma + 1$. По лемме 2.2 $\operatorname{Soc}_\alpha(R_R)/\operatorname{Soc}_\gamma(R_R)$ — регулярный идеал. Идеал $\operatorname{Soc}_\gamma(R_R)$ регулярен по предположению индукции. Тогда регулярность идеала $\operatorname{Soc}_\alpha(R_R)$ следует из [29, лемма 1.3]. $\square$

Следствие 4.2. *Каждое правое SV-кольцо является регулярным кольцом.*

Пример 4.3 [17]. Существует полуартиново регулярное кольцо R, которое не является ни правым, ни левым V-кольцом.

Доказательство. Пусть P — некоторое поле. Рассмотрим в кольце $\mathrm{CFM}_{\mathbb{N}}(P)$ подкольцо R вида $PE+N$, где E — единичная матрица,

$$N = \{A \in \mathrm{CFM}_{\mathbb{N}}(P) \mid A_{ij} = 0 \text{ для почти всех пар } (i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}.$$

Непосредственно проверяется, что R — регулярное кольцо. Рассмотрим абелеву группу $M = P^{\mathbb{N}}$, элементы которой можно считать бесконечными строками. Ясно, что абелева группа M имеет естественную структуру правого R-модуля. Непосредственная проверка показывает, что

$$M_0 = \{(p_i)_{i=1}^{\infty} \in M \mid p_i = 0 \text{ для почти всех } i \in \mathbb{N}\} \text{ —}$$

простой существенный подмодуль правого R-модуля M, и следовательно, M_0 не является инъективным модулем. Таким образом, кольцо R не является правым V-кольцом. Аналогично можно показать, что R не является левым V-кольцом. $\square$

Лемма 4.4. *Пусть e — ненулевой идемпотент кольца R и M — правый R-модуль. Справедливы следующие утверждения.*

1. *Если N — подмодуль модуля M, то имеет место изоморфизм правых eRe-модулей $(M/N)e \cong Me/Ne$.*
2. *Если $(M_\alpha)_{\alpha \in A}$ — семейство подмодулей модуля M, то*
$$\bigcap_{\alpha\in A}(M_\alpha e) = \Big(\bigcap_{\alpha\in A} M_\alpha\Big)e, \quad \sum_{\alpha\in A}(M_\alpha e) = \Big(\sum_{\alpha\in A} M_\alpha\Big)e.$$
3. *Если $M = \bigoplus\limits_{\alpha\in A} M_\alpha$, то $Me = \bigoplus\limits_{\alpha\in A}(M_\alpha e)$.*
4. *Правило $\varphi(N) = Ne$ определяет сюръективный гомоморфизм решёток $\varphi\colon \mathrm{Lat}(M_R) \to \mathrm{Lat}(Me_{eRe})$.*
5. *Если R-модуль M полупрост, то и eRe-модуль Me полупрост.*

Следующая лемма непосредственно следует из [12, 11.35].

Лемма 4.5. *Пусть P — правый R-модуль и кольцо $S = \mathrm{End}_R(P)$ регулярно. Тогда из инъективности правого R-модуля M следует инъективность правого S-модуля $\mathrm{Hom}_R(P,M)$.*

Следствие 4.6. *Если e — ненулевой идемпотент кольца R и eRe — регулярное кольцо, то из инъективности правого R-модуля M следует инъективность правого eRe-модуля Me.*

Доказательство. Поскольку $eRe \cong \mathrm{Hom}_R(eR,eR)$, то утверждение следует из предыдущей леммы и eRe-изоморфизма $\mathrm{Hom}_R(eR,M) \cong Me$. $\square$

Лемма 4.7. *Если e — ненулевой идемпотент кольца R, eRe — регулярное кольцо и R — обобщённое правое SV-кольцо, то eRe — обобщённое правое SV-кольцо.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда из теоремы 3.5 следует, что над кольцом eRe найдётся неполупростой правый модуль N, который не содержит ненулевых инъективных подмодулей. Рассмотрим правый R-модуль $M = N \otimes_{eRe} eR$. Ясно, что $Me \cong N$.

Определим в модуле M по трансфинитной индукции для каждого ординального числа α подмодуль M_α следующим образом. При $\alpha = 0$ положим $M_\alpha = 0$. Если $\alpha = \beta + 1$, то $M_{\beta+1}/M_\beta$ — сумма всех инъективных подмодулей модуля M/M_β. Когда α — предельное ординальное число, положим $M_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} M_\beta$. Обозначим через M_0 объединение всех таких модулей. Покажем с помощью трансфинитной индукции, что для каждого ординального числа α имеет место равенство $M_\alpha e = 0$. Если $\alpha = 0$, то утверждение тривиально. Пусть α — некоторое ординальное число и $M_\beta e = 0$ для каждого $\beta < \alpha$. Если α — предельное ординальное число, то равенство $M_\alpha e = 0$ тривиально. Предположим, что α — непредельное ординальное число и $\alpha = \alpha_0 + 1$. По предположению индукции $M_{\alpha_0} e = 0$. По лемме 4.4

$$(M_\alpha/M_{\alpha_0})e \cong (M_\alpha e)/(M_{\alpha_0} e) \cong M_\alpha e.$$

Если $M_\alpha e \neq 0$, то в модуле M_α/M_{α_0} найдётся инъективный подмодуль L, для которого имеет место неравенство $Le \neq 0$. Поскольку по следствию 4.6 Le — инъективный eRe-модуль, то $M_\alpha e$ и, следовательно, Me будут содержать в себе ненулевые инъективные подмодули, что противоречит исходному предположению. Таким образом, для каждого ординального числа α имеет место равенство $M_\alpha e = 0$, и следовательно, $M_0 e = 0$.

Поскольку M/M_0 не содержит инъективных подмодулей, то из теоремы 3.5 следует, что модуль M/M_0 полупрост. Тогда по лемме 4.4 $(M/M_0)e$ — полупростой модуль, и следовательно, поскольку $(M/M_0)e \cong Me$, модуль Me также является полупростым, что противоречит выбору модуля N. $\square$

Лемма 4.8 [5]. *Пусть R — кольцо. Справедливы следующие утверждения.*

1. *Для каждого ординального числа α всякий инъективный простой правый $R/\operatorname{SI}_\alpha(R)$-модуль M — инъективный правый R-модуль.*
2. *R — правое SV-кольцо в точности тогда, когда $R = \operatorname{SI}(R)$.*

Теорема 4.9 [4, 5]. *Для кольца R равносильны следующие условия*:

1) *R — правое SV-кольцо;*
2) *R — регулярное кольцо и каждый правый R-модуль является слабо регулярным.*

Доказательство. Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) проверяется непосредственно.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть R — регулярное кольцо, над которым каждый правый модуль слабо регулярен. Предположим, что $R \neq \operatorname{SI}(R)$, и обозначим через S кольцо $R/\operatorname{SI}(R)$. Из леммы 4.7 следует, что модуль S_S не содержит простых инъективных S-подмодулей и, в частности, не является полупростым. Поскольку над кольцом S каждый модуль является слабо регулярным, то из теоремы 3.5 следует, что S_S содержит ненулевой инъективный подмодуль вида eS, где e — некоторый идемпотент в S. Так как S регулярно, то по [49, 22.1] кольцо eSe также является регулярным и инъективным справа. Тогда из леммы 4.7 следует, что eSe — обобщённое правое SV-кольцо. Поскольку eS не содержит простых подмодулей, то регулярное кольцо eSe не содержит примитивных идемпотентов, т. е. $\mathrm{Soc}(eSe) = 0$. Тогда в кольце eSe мы можем выделить бесконечное семейство ортогональных ненулевых идемпотентов вида $\{e_{ij}\}_{i,j=1}^{\infty}$. Для каждого i модуль $\bigoplus\limits_{j=1}^{\infty} e_{ij}eSe$ является существенным подмодулем в f_ieSe, где f_i — некоторый идемпотент кольца eSe. Семейство правых идеалов $\{f_ieSe\}_{i=1}^{\infty}$ является, очевидно, независимым, и для некоторого идемпотента f кольца eSe правый идеал $\bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} f_ieSe$ является существенным в $feSe$. Правый идеал $\bigoplus\limits_{i,j=1}^{\infty} e_{ij}eSe$ является существенным подмодулем в $feSe$, и правый eSe-модуль $eSe/\Big(\bigoplus\limits_{i,j=1}^{\infty} e_{ij}eSe \oplus (e-f)eSe\Big)$ содержит подмодуль, изоморфный модулю $\bigoplus\limits_{i=1}^{\infty}\bigg(f_ieSe/\Big(\bigoplus\limits_{j=1}^{\infty} e_{ij}eSe\Big)\bigg)$. Тогда модуль $eSe/\Big(\bigoplus\limits_{i,j=1}^{\infty} e_{ij}eSe \oplus (e-f)eSe\Big)$ не является полупростым и, следовательно, согласно теореме 3.5 содержит ненулевой инъективный подмодуль, что противоречит лемме 1.3. □

Следствие 4.10. *Для полуартинова регулярного кольца R следующие условия равносильны*:

1) *R — правое SV-кольцо;*
2) *каждый правый R-модуль является слабо регулярным.*

Теорема 4.11. *Если R — обобщённое справа SV-кольцо, то R — полуартиново справа кольцо.*

Доказательство. Пусть R — обобщённое SV-кольцо. Предположим, что $R \neq L(R)$, и обозначим через S кольцо $R/L(R)$, которое также является обобщённым SV-кольцом. Ясно, что $\mathrm{Soc}(S_S) = 0$, и следовательно, по лемме 3.3 $J(S) = 0$. Поскольку модуль S_S не является полупростым, то из теоремы 3.5 следует, что S_S содержит ненулевой инъективный подмодуль вида eS, где e — некоторый идемпотент кольца S. Согласно [49, 22.1] eSe является регулярным кольцом. Тогда из леммы 4.7 и теоремы 4.9 следует, что eSe — правое SV-кольцо, следовательно, оно содержит некоторый примитивный идемпотент f. Модуль feS является простым, что противоречит равенству $\mathrm{Soc}(S_S) = 0$. □

Теорема 4.12. *Для кольца R равносильны следующие условия*:

1) *R — правое SV-кольцо;*
2) *каждый ненулевой правый R-модуль содержит ненулевой инъективный подмодуль.*

Доказательство. Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) проверяется непосредственно.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Непосредственно проверяется, что R — правое V-кольцо. Поскольку каждый правый R-модуль является слабо регулярным, то из теоремы 4.11 следует, что кольцо R является полуартиновым справа. $\square$

Следствие 4.13. *Для правого SV-кольца R равносильны следующие условия*:

1) *R — левое SV-кольцо;*
2) *каждый левый R-модуль слабо регулярен.*

Следует отметить, что предыдущая теорема в коммутативном случае была получена в [36]. Модульным аналогом предыдущей теоремы является следующее утверждение.

Теорема 4.14 [25]. *Для квазипроективного правого R-модуля P следующие условия равносильны*:

1) *P — SV-модуль;*
2) *каждый ненулевой модуль в категории $\sigma(P)$ содержит ненулевой P-инъективный подмодуль;*
3) *каждый ненулевой циклический подфактор модуля P содержит ненулевой P-инъективный подмодуль.*

Модуль M называется QF-3$'$-модулем, если M копорождает свою инъективную оболочку $E(M)$. Согласно [33] кольцо R называется *правым c-QF-3-кольцом*, где c — некоторое ненулевой кардинальное число, если R содержит точный правый идеал, который является прямой суммой c попарно неизоморфных инъективных оболочек простых правых R-модулей. Имеет место следующая характеризация полупервичных правых c-QF-3-колец.

Теорема 4.15 [15]. *Для кольца R следующие условия равносильны*:

1) *для некоторого ненулевого кардинального числа c R — полупервичное правое c-QF-3-кольцо;*
2) *R — полупервичное кольцо, у которого цоколь существен справа и каждый простой проективный правый R-модуль инъективен.*

Теорема 4.16 [17]. *Для кольца R следующие условия равносильны*:

1) *R — правое SV-кольцо;*
2) *каждое фактор-кольцо кольца R является полупервичным и правым c-QF-3-кольцом для некоторого кардинального числа c.*

Доказательство. Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) следует из теоремы 4.15 и из того факта, что каждое фактор-кольцо правого SV-кольца является правым SV-кольцом.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Из теоремы 4.1 и теоремы 4.15 следует, что R — полуартиново регулярное кольцо. Если $R \neq \mathrm{SI}(R)$, то из теоремы 4.15 и леммы 4.8 следует, что правый R-модуль $R/\mathrm{SI}(R)$ содержит инъективный простой правый R-модуль, что, очевидно, невозможно. Таким образом, $R = \mathrm{SI}(R)$, и по лемме 4.8 R — правое SV-кольцо. $\square$

Теорема 4.17 [17]. *Для кольца R следующие условия равносильны*:

1) *R — правое SV-кольцо, у которого каждый примитивный образ артинов*;
2) *R — правое и левое SV-кольцо*;
3) *R — регулярное полуартиново кольцо, у которого каждый примитивный образ артинов*;
4) *R — полуартиново кольцо и для каждого ординального числа $\alpha < \operatorname{Loewy}(R_R)$ фактор $\operatorname{Soc}_{\alpha+1}(R)/\operatorname{Soc}_{\alpha}(R)$ изоморфен как кольцо без единицы прямой сумме полных матричных колец конечного порядка над телами.*

Следствие 4.18. *Для правого SV-кольца R следующие условия равносильны*:

1) *R — левое SV-кольцо*;
2) *каждый левый R-модуль является слабо регулярным*;
3) *каждый примитивный образ кольца R артинов.*

Модуль M называется *QFD-модулем*, если каждый его фактор-модуль имеет конечную размерность Голди.

Для произвольного модуля M определим по трансфинитной индукции для каждого ординального числа α подмодуль $S_\alpha(M)$ следующим образом. При $\alpha = 0$ положим $S_\alpha(M) = 0$. Если $\alpha = \beta + 1$, то $S_{\beta+1}(M)/S_\beta(M)$ — сумма всех QFD-подмодулей модуля $M/S_\beta(M)$. Когда α — предельное ординальное число, положим $S_\alpha(M) = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} S_\beta(M)$. Для некоторого ординального числа τ имеют место равенства $S_\tau(M) = S_{\tau+1}(M)$ и $S_1\big(M/S_\tau(M)\big) = 0$. Далее через $S(M)$ будем обозначать подмодуль $S_\tau(M)$. Наименьшее τ с таким свойством мы будем называть QFD-длиной модуля M.

Следующая лемма проверяется непосредственно.

Лемма 4.19. *Пусть M — модуль и α — ординал. Справедливы следующие утверждения.*

1. *Подмодуль $S_\alpha(M)$ вполне инвариантен в M.*
2. *Если $M = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} M_i$, то $S_\alpha(M) = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} S_\alpha(M_i)$.*

Лемма 4.20. *Пусть M — конечно порождённый CS-модуль, у которого для каждого собственного подмодуля N фактор-модуль M/N содержит ненулевой QFD-модуль. Тогда M является конечной прямой суммой равномерных подмодулей.*

Доказательство. По предположению $M = S(M)$. Пусть τ — QFD-длина модуля M. Докажем лемму индукцией по τ. Если $\tau = 1$, то M является конечной суммой QFD-подмодулей, и следовательно, M имеет конечную размерность Голди. Поскольку модуль M — CS-модуль, он является конечной прямой суммой равномерных подмодулей. Допустим, что наше утверждение доказано для всех ординалов, которые не превосходят τ. Предположим, что M имеет бесконечную размерность Голди. Поскольку модуль M конечно порождён, τ — непредельный ординал. Тогда $M/S_{\tau-1}(M)$ является конечной суммой QFD-подмодулей, и следовательно, M имеет конечную размерность Голди. Пусть n — размерность Голди модуля $M/S_{\tau-1}(M)$ и m — некоторое натуральное число, превосходящее n. Так как M — CS-модуль бесконечной размерности Голди, то $M = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} M_i$, где для каждого i модуль M_i имеет бесконечную размерность Голди. По лемме 4.19

$$M/S_{\tau-1}(M) = \left(\bigoplus_{i=1}^{m} M_i\right) \Big/ \left(\bigoplus_{i=1}^{m} S_{\tau-1}(M_i)\right) \cong \bigoplus_{i=1}^{m} M_i/S_{\tau-1}(M_i).$$

Поскольку $M/S_{\tau-1}(M)$ имеет размерность Голди n, то для некоторого i имеет место равенство $M_i = S_{\tau-1}(M_i)$. Очевидно, что модуль M_i удовлетворяет условию леммы. Тогда по предположению индукции M_i имеет конечную размерность Голди. Полученное противоречие показывает, что модуль M имеет бесконечную размерность Голди и, следовательно, является конечной прямой суммой равномерных подмодулей. $\square$

Из леммы 4.20 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 4.21 [23]. *Над полуартиновым кольцом каждый конечно порождённый CS-модуль имеет конечную размерность Голди.*

Поскольку каждое полуартиново справа кольцо, которое имеет конечную размерность Голди, является, очевидно, артиновым справа, то из следствия 4.21 получаем следующее утверждение.

Следствие 4.22 [17, следствие 4.6]. *Каждое полуартиново справа самоинъективное справа регулярное кольцо является классически полупростым.*

Модуль M называется *квазинепрерывным*, если каждый идемпотентный эндоморфизм любого подмодуля в M продолжается до эндоморфизма модуля M. Ясно, что все инъективные модули квазинепрерывны и любое прямое слагаемое квазинепрерывного модуля квазинепрерывно. Любой циклический $\mathbb{Z}$-модуль квазинепрерывен, но прямая сумма $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ квазинепрерывных $\mathbb{Z}$-модулей не квазинепрерывна.

Теорема 4.23 [23]. *Для кольца R следующие условия равносильны*:

1) *R — правое SV-кольцо*;
2) *R — полуартиново справа кольцо и каждый конечно порождённый правый CS-модуль над кольцом R является инъективным*;
3) *R — полуартиново справа кольцо и каждый конечно порождённый правый CS-модуль над кольцом R является квазинепрерывным*;
4) *R — полуартиново справа кольцо и каждый конечно порождённый непрерывный правый R-модуль является инъективным.*

Доказательство. Импликации $2) \Longrightarrow 4) \Longrightarrow 1)$ и $2) \Longrightarrow 3)$ проверяются непосредственно.

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть M — конечно порождённый правый CS-модуль. Тогда согласно следствию 4.21 модуль M является прямой суммой равномерных подмодулей, и следовательно, $\mathrm{Soc}(M) = M$.

Убедимся в справедливости импликации 3) $\Longrightarrow$ 1). Пусть N — произвольный простой правый R-модуль. Предположим, что $E(N) \neq N$. Поскольку модуль $E(N)$ является полуартиновым, то для некоторого подмодуля L модуля $E(N)$ модуль L/N прост. Тогда очевидно, что L — локальный модуль длины два. Рассмотрим внешнюю прямую сумму модулей $T = N \oplus L$. Непосредственно проверяется, что T — CS-модуль, и следовательно, согласно предположению T — квазинепрерывный модуль. Поскольку $(S, 0) \cong (0, S)$, то $(0, S)$ — прямое слагаемое T, что противоречит его малости в T. Полученное противоречие показывает, что $N = E(N)$. □

Следуя [30], назовём кольцо R *левым AI-кольцом*, если в R каждый ненулевой правый аннулятор содержит ненулевой идемпотент.

Лемма 4.24 [30]. *Пусть R — кольцо, A, B, C — ненулевые правые R-модули, $C' = C^{(\mathbb{N})}$ (или $C' = C^{\mathbb{N}}$) и u, v — эндоморфизмы модуля C', которые действуют по следующим правилам*:

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots),$$
$$v(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots).$$

Справедливы следующие утверждения.

1. *Пусть $f\colon B \to C$ — гомоморфизм правых R-модулей и $g\colon B \to C'$ — такой гомоморфизм, что $g(x) = (f(x), 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$. Рассмотрим эндоморфизм ϕ модуля $C' \oplus B \oplus A$, заданный матрицей*

$$\begin{pmatrix} u & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_A \end{pmatrix}.$$

Тогда если существует ненулевая проекция π модуля $C' \oplus B \oplus A$, для которой $\phi\pi = 0$, то существует такая ненулевая проекция p модуля B, что $fp = 0$.

2. *Пусть $f'\colon C \to B$ — гомоморфизм правых R-модулей и $g\colon C' \to B$ — такой гомоморфизм, что $g'\big((x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)\big) = f'(x_1)$. Рассмотрим эндоморфизм ϕ' модуля $C' \oplus B \oplus A$, заданный матрицей*

$$\begin{pmatrix} v & 0 & 0 \\ g' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_A \end{pmatrix}.$$

Тогда если существует ненулевая проекция π' модуля $C' \oplus B \oplus A$, для которой $\pi'\phi' = 0$, то существует такая ненулевая проекция p' модуля B, что $p'f' = 0$.

Доказательство. Докажем только утверждение 1, поскольку доказательство утверждения 2 проводится двойственно. Допустим, что гомоморфизм π задан матрицей

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Из равенства $\pi\phi = 0$ для каждого $i = 1, 2, 3$ получаем $c_i = 0$, $ua_i + fb_i = 0$. Так как $vu = 1_{C'}$ и $vf = 0$, то для каждого $i = 1, 2, 3$ имеем $a_i = 0$. Поскольку $\pi^2 = \pi$, то $b_2^2 = b_2$. Если $b_2 = 0$, то $\pi = \pi^2 = 0$, что невозможно. Таким образом, b_2 — ненулевая проекция модуля B и $fb_2 = 0$. □

Теорема 4.25 [30]. *Для кольца R следующие условия равносильны:*

1) *R — правое SV-кольцо;*
2) *кольцо эндоморфизмов каждого правого R-модуля M является левым AI-кольцом;*
3) *для каждого правого R-модуля M и для каждого ненулевого подмодуля N модуля M существует такая ненулевая проекция p модуля M, что $p(M) \subset N$;*
4) *правый аннулятор каждого собственного главного левого идеала кольца эндоморфизмов каждого инъективного правого R-модуля содержит ненулевой идемпотент.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть M — правый R-модуль и $S \subset \mathrm{End}_R(M)$. Если $r(S) \neq 0$, то $Sf = 0$ для некоторого ненулевого элемента $f \in \mathrm{End}_R(M)$, следовательно, $\bigcap\limits_{s\in S} \mathrm{Ker}(s) \neq 0$. Поскольку R — правое SV-кольцо, то $\bigcap\limits_{s\in S} \mathrm{Ker}(s)$ содержит инъективный простой подмодуль N, который выделяется прямым слагаемым в M. Пусть $\pi \in \mathrm{End}_R(M)$ — такой идемпотент, что $\pi(M) = N$. Тогда очевидно, что $S\pi = 0$.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 3). Пусть M — правый R-модуль и N — его ненулевой подмодуль. В лемме 4.24 положим $M = B$, $M/N = C$, $N = A$, $f\colon M \to M/N$ — естественный гомоморфизм. Рассмотрим гомоморфизм

$$\psi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $i\colon N \to M$ — вложение. Непосредственно проверяется, что $\psi \neq 0$ и $\phi\psi = 0$. Из нашего предположения следует, что существует такая ненулевая проекция $\pi \in \mathrm{End}(C' \oplus B \oplus A)$, что $\phi\pi = 0$. Тогда из леммы 4.24 следует, что существует ненулевая проекция модуля M, для которой $fp = 0$. Следовательно, $p(M) \subset N$.

Импликация 3) $\Longrightarrow$ 4) проверяется непосредственно.

Докажем импликацию 4) $\Longrightarrow$ 1). Пусть M — правый R-модуль и N — его ненулевой подмодуль. Положим в лемме 4.24 $B = A = M$, $C = E(M/N)$, $C' = C^{\mathbb{N}}$, $f\colon M \to E(M/N)$ — естественный гомоморфизм. Модуль $C' \oplus B \oplus A$

является инъективным, и $\operatorname{Ker}\phi \neq 0$. Тогда по нашему предположению существует такая ненулевая проекция π, что $\phi\pi = 0$. Из леммы 4.24 следует существование такой ненулевой проекции p, что $fp = 0$. Таким образом, p — ненулевая проекция модуля $E(M)$ и $p\big(E(M)\big) \subset N$. Следовательно, подмодуль N модуля M содержит ненулевой инъективный подмодуль, и импликация следует из теоремы 4.12. □

Теорема 4.26 [30]. *Для кольца R следующие условия равносильны*:

1) *R — полупростое кольцо*;
2) *кольцо эндоморфизмов каждого правого R-модуля M является правым AI-кольцом.*

Пусть A — некоторая алгебра над полем K и $A_n = A$ для каждого натурального n. Обозначим через A_0 подалгебру алгебры $R = \prod\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, которая имеет вид $A_0 = K1_R + \bigoplus\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

Следующие два утверждения проверяются непосредственно.

Лемма 4.27. *Для каждого ординала $\alpha \leqslant \operatorname{Loewy}(A)$ имеет место равенство*

$$\operatorname{Soc}_\alpha(A_0) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \operatorname{Soc}_\alpha(A).$$

Лемма 4.28. *Если A — полуартинова справа алгебра, то A_0 — полуартинова справа алгебра и* $\operatorname{Loewy}(A_0) = \operatorname{Loewy}(A) + 1$.

Лемма 4.29. *Если A — правое SV-кольцо, то A_0 — правое SV-кольцо.*

Доказательство. Пусть M — простой правый A_0-модуль и $E(M)$ — его инъективная оболочка. Непосредственно проверяется, что $\operatorname{Soc}_{\operatorname{Loewy}(A)}(A_0) = \bigoplus\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Для каждого натурального числа i через e_i обозначим такой элемент кольца A_0, что $e_i(i) = 1$ и $e_i(j) = 0$, если $i \neq j$.

Допустим, что $M \operatorname{Soc}_{\operatorname{Loewy}(A)}(A_0) = 0$. Если $E(M) \operatorname{Soc}_{\operatorname{Loewy}(A)}(A_0) \neq 0$, то для некоторого натурального числа i имеем $E(M)e_i \neq 0$. Тогда для некоторого элемента $m \in E(M)$ имеем $M = me_iR = me_iRe_i = Me_i = 0$. Полученное противоречие показывает, что $E(M) \operatorname{Soc}_{\operatorname{Loewy}(A)}(A_0) = 0$. Следовательно, модуль $E(M)$ мы можем рассматривать как векторное пространство над K и $E(M) = M$.

Допустим, что $M \operatorname{Soc}_{\operatorname{Loewy}(A)}(A_0) \neq 0$. Тогда для некоторого натурального числа i имеем $Me_i \neq 0$ и $M(1 - e_i) = 0$. Рассуждения, проведённые выше, показывают, что $E(M)(1 - e_i) = 0$. Следовательно, $E(M)$ является модулем над кольцом $A_0/(1 - e_i)A_0 \cong A$. Поскольку A — правое SV-кольцо, то $M = E(M)$. Таким образом, кольцо A_0 является правым SV-кольцом. □

Теорема 4.30. *Для каждого ординального числа α существует такая полуартинова справа K-алгебра A, что* $\operatorname{Loewy}(A) = \alpha + 1$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует наименьшее ординальное число α, для которого не существует полуартиновой K-алгебры длины Лёви $\alpha+1$. Если α — непредельное ординальное число, то найдётся полуартинова K-алгебра длины Лёви α. Тогда из леммы 4.28 следует, что R_0 — полуартинова K-алгебра, у которой $\mathrm{Loewy}(R_0)=\alpha$.

Предположим, что α — предельное ординальное число. Тогда для каждого ординала $\beta<\alpha$ существует полуартинова алгебра R_β длины Лёви β. Пусть R^* — подалгебра алгебры $R=\prod\limits_{\beta<\alpha} R_\beta$ вида $R^*=K1_R+\bigoplus\limits_{\beta<\alpha} R_\beta$. Непосредственно проверяется, что $\mathrm{Soc}_\alpha(R^*)=\bigoplus\limits_{\beta<\alpha} R_\beta$. Поскольку $R^*/\bigoplus\limits_{\beta<\alpha} R_\beta\cong K$, то $l(R^*)=\alpha$. □

Из вышеизложенного выводим следующее утверждение.

Теорема 4.31 [25]. *Для каждого ординального числа α существует такая правая SV-алгебра A, что* $\mathrm{Loewy}(A)=\alpha+1$.

Открытый вопрос 5 [17]. Описать правые R-модули M, у которых кольца $\mathrm{End}_R(M)$ являются правыми SV-кольцами.

Открытый вопрос 6 [17]. Рассмотрим следующие два условия для произвольного кольца R:

1) R — правое SV-кольцо;
2) над кольцом R каждый правый R-модуль M является QF-3′-модулем.

Несложно показать, что всегда верна импликация 1) $\Longrightarrow$ 2). Верно ли, что эти два условия эквивалентны? Как показал Бачелла в [17], эти два условия эквивалентны для колец, у которых каждый примитивный образ артинов.

Открытый вопрос 7. Описать кольца R, у которых кольца эндоморфизмов всех правых R-модулей являются I_0-кольцами.

Литература

[1] Абызов А. Н. Замкнутость слабо регулярных модулей относительно прямых сумм // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 2003. — № 9. — С. 3—5.

[2] Абызов А. Н. Слабо регулярные модули над полусовершенными кольцами // Чебышёвский сб. — 2003. — Т. 4, № 1. — С. 4—9.

[3] Абызов А. Н. Слабо регулярные модули // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 2004. — № 3. — С. 3—6.

[4] Абызов А. Н. Слабо регулярные модули над нормальными кольцами // Сиб. мат. журн. — 2008. — Т. 49, № 4. — С. 721—738.

[5] Абызов А. Н., Туганбаев А. А. Кольца, над которыми все модули являются I_0-модулями. II // Фундамент. и прикл. мат. — 2008. — Т. 14, вып. 2. — С. 3—12.

[6] Каш Ф. Модули и кольца. — М.: Мир, 1981.

[7] Сахаев И. И., Хакми Х. И. О сильно регулярных модулях и кольцах // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1998. — № 2. — С. 60—63.

[8] Туганбаев А. А. Модули с большим числом прямых слагаемых // Фундамент. и прикл. мат. — 2006. — Т. 12, вып. 8. — С. 233—241.

[9] Туганбаев А. А. Кольца, над которыми все модули полурегулярны // Фундамент. и прикл. мат. — 2007. — Т. 13, вып. 2. — С. 185—194.

[10] Туганбаев А. А. Кольца, над которыми все модули являются I_0-модулями // Фундамент. и прикл. мат. — 2007. — Т. 13, вып. 5. — С. 193—200.

[11] Туганбаев А. А. Кольца без бесконечных множеств нецентральных ортогональных идемпотентов // Фундамент. и прикл. мат. — 2008. — Т. 14, вып. 2. — С. 207—221.

[12] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 1. — М.: Мир, 1977.

[13] Хакми Х. И. Сильно регулярные и слабо регулярные кольца и модули // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1994. — № 5. — С. 60—65.

[14] Anderson F. W., Fuller K. R. Rings and Categories of Modules. — New York: Springer, 1991.

[15] Baccella G. Semiprime χ-QF-3 rings // Pacific J. Math. — 1985. — Vol. 120, no. 2. — P. 269—278.

[16] Baccella G. Von Neumann regularity of V-rings with Artinian primitive factor rings // Proc. Amer. Math. Soc. — 1988. — Vol. 103, no. 3. — P. 747—749.

[17] Baccella G. Semi-Artinian V-rings and semi-Artinian von Neumann regular rings // J. Algebra. — 1995. — Vol. 173. — P. 587—612.

[18] Baccella G., Di Campli G. Semi-Artinian rings whose Loewy factors are nonsingular // Commun. Algebra. — 1997. — Vol. 25. — P. 2743—2764.

[19] Burgess W. D., Stephenson W. An analogue of the Pierce sheaf for noncommutative rings // Commun. Algebra. — 1978. — Vol. 6, no. 9. — P. 863—886.

[20] Camillo V. P., Fuller K. R. On Loewy length of rings // Pacific J. Math. — 1974. — Vol. 53. — P. 347—354.

[21] Camillo V. P., Fuller K. R. A note on Loewy rings and chain conditions on primitive ideals // Module Theory. Pap. Probl. Spec. Sess. AMS, Univ. Washington, Proc., Seattle 1977. — (Lect. Notes Math.; Vol. 700). — Springer, 1979. — P. 75—86.

[22] Clark J., Lomp C., Vanaja N., Wisbauer R. Lifting Modules. Supplements and Projectivity in Module Theory. — Boston: Birkhäuser, 2006. — (Frontiers Math.).

[23] Dinh H. Q., Smith P. F. A result on semi-Artinian rings // Proc. Edinburgh Math. Soc. — 2003. — Vol. 46. — P. 63—66.

[24] Dung N. V., Huynh D. V., Smith P. F., Wisbauer R. Extending Modules. — London: Pitman, 1994.

[25] Dung N. V., Smith P. F. On semi-Artinian V-modules // J. Pure Appl. Algebra. — 1992. — Vol. 82, no. 1. — P. 27—37.

[26] Facchini A. Loewy and Artinian modules over commutative rings // Ann. Mat. Pura Appl. — 1981. — Vol. 128. — P. 359—374.

[27] Faith C. Rings whose modules have maximal submodules // Publ. Mat. — 1995. — Vol. 39, no. 1. — P. 201—214.

[28] Fisher J. W., Snider R. L. On the von Neumann regularitiy of rings with regular prime factor rings // Pacific J. Math. — 1974. — Vol. 54. — P. 138—147.

[29] Goodearl K. R. Von Neumann Regular Rings. — Malabar: Krieger, 1991.

[30] Haily A., Rahnaoui H. Some external characterizations of SV rings and hereditary rings // Internat. J. Math. Math. Sci. — 2007. — P. 1—6.

[31] Hamza H. I_0-rings and I_0-modules // Math. J. Okayama Univ. — 1998. — Vol. 40. — P. 91—97.

[32] Hirano Y. On injective hulls of simple modules // J. Algebra. — 2000. — Vol. 225. — P. 299—308.

[33] Kawada Y. On dominant modules and dominant rings // J. Algebra. — 1979. — Vol. 56. — P. 409—435.

[34] Năstăsescu C., Popescu N. Anneaux semi-Artiniens // Bull. Soc. Math. France. — 1968. — Vol. 96. — P. 357—368.

[35] Nicholson W. K. I-rings // Trans. Amer. Math. Soc. — 1975. — Vol. 207. — P. 361—373.

[36] Ohtake K. Commutative rings of which all radicals are left exact // Commun. Algebra. — 1980. — Vol. 8, no. 16. — P. 1505—1512.

[37] Oshiro K., Wisbauer R. Modules with every subgenerated module lifting // Osaka J. Math. — 1995. — Vol. 32. — P. 513—519.

[38] Osofsky B. L. Rings all of whose finitely generated modules are injective // Pacific J. Math. — 1964. — Vol. 14. — P. 645—650.

[39] Osofsky B. L. Noninjective cyclic modules // Proc. Amer. Math. Soc. — 1968. — Vol. 19. — P. 1383—1384.

[40] Osofsky B. L. A remarks on the Krull—Schmidt—Azumaya theorem // Can. Math. Bull. — 1970. — Vol. 13. — P. 501—505.

[41] Osofsky B. L. Loewy length of perfect rings // Proc. Amer. Math. Soc. — 1971. — Vol. 28, no. 2. — P. 352—354.

[42] Osofsky B. L., Smith P. F. Cyclic modules whose quotients have all complement submodules direct summands // J. Algebra. — 1991. — Vol. 139. — P. 342—354.

[43] Shores T. The structure of Loewy modules // J. Reine Angew. Math. — 1972. — Vol. 254. — P. 204—220.

[44] Shores T. Loewy series of modules // J. Reine Angew. Math. — 1974. — Vol. 265. — P. 183—200.

[45] Stenström B. Rings of Quotients. — Berlin: Springer, 1975.

[46] Tuganbaev A. A. Rings Close to Regular. — Dordrecht: Kluwer Academic, 2002.

[47] Tuganbaev A. A. Semiregular, weakly regular, and π-regular rings // J. Math. Sci. — 2002. — Vol. 109, no. 3. — P. 1509—1588.

[48] Vanaja N., Purav V. M. Characterization of generalized uniserial rings in terms of factor rings // Commun. Algebra. — 1992. — Vol. 20. — P. 2253—2270.

[49] Wisbauer R. Foundations of Module and Ring Theory. — Philadelphia: Gordon and Breach, 1991.