

Группоиды с тождеством, определяющим коммутативные лупы Муфанг

Г. Б. БЕЛЯВСКАЯ

Институт математики и информатики АН РМ, Кишинёв
e-mail: gbel1@rambler.ru

А. Х. ТАБАРОВ

Таджикский государственный университет, Душанбе
e-mail: tabarov63@rambler.ru

УДК 512.548

Ключевые слова: группоид, квазигруппа, лупа, изотопия, линейность, эндоморфизм, автоморфизм.

Аннотация

Известно, что в классе луп тождество $xy \cdot xz = x^2 \cdot yz$ определяет коммутативные лупы Муфанг. В данной статье мы рассматриваем группоиды с этим тождеством и устанавливаем свойства некоторых классов таких группоидов.

Abstract

G. B. Belyavskaya, A. Kh. Tabarov, Groupoids with the identity defining the commutative Moufang loops, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 6, pp. 33–39.

It is known that in the class of loops the identity $xy \cdot xz = x^2 \cdot yz$ defines the commutative Moufang loops. In the article, we consider groupoids with this identity and establish properties of some classes of such groupoids.

Лупы с тождествами Муфанг, в частности коммутативные лупы Муфанг, хорошо известны и составляют важный класс луп (см., например, [1,4]). Известно, что квазигруппа с любым из тождеств Муфанг является лупой [5].

В [3] Б. В. Новиков изучает коммутативные группоиды $(Q, \cdot)$ с тождеством Муфанг

$$xy \cdot zx = (x \cdot yz)x. \quad (1)$$

В частности, он доказывает, что рассматриваемые группоиды имеют ассоциативные степени, которые удовлетворяют определённым тождествам относительно степеней двойки, выделяет некоторую конгруэнцию и показывает, что коммутативный группоид с тождеством Муфанг (1) образует архимедову полурешётку. Мультипликативные группоиды альтернативных алгебр удовлетворяют тождеству Муфанг (1).

В настоящей статье рассматриваются группоиды с тождеством

$$xy \cdot xz = x^2 \cdot yz. \quad (2)$$

Напомним, что *бинарный группоид* — это пара $(Q, \cdot)$, где Q — множество, $(\cdot)$ — бинарная операция, определённая на Q , *единица группоида* — такой элемент e , что $x \cdot e = e \cdot x = x$ для любого $x \in Q$. Группоид, в котором каждое из уравнений $ax = b$, $xa = b$ имеет единственное решение для любых $a, b \in Q$, называется *квазигруппой*. *Луна* — это квазигруппа с единицей.

В классе лун тождество (2) определяет коммутативные луны Муфанг (см., например, [1, 4]). Если группоид $(Q, \cdot)$ с тождеством (1) является идемпотентным ($x^2 = x$ для всех $x \in Q$), то он леводистрибутивен: $x(yz) = xy \cdot xz$. Если этот группоид идемпотентный и коммутативный, то он совпадает с коммутативным группоидом, рассмотренным в [3].

Действительно, тождество (1) в коммутативных и идемпотентных группоидах превращается в тождество (2): как доказано в [3], в этом случае, полагая в (1) $y = z$, получим $xy \cdot x = xy$, и правая часть (1) превращается в $x \cdot yz$, совпадая с правой частью (2).

Таким образом, для коммутативных идемпотентных группоидов тождества (1) и (2) эквивалентны и определяют леводистрибутивные группоиды. Эти тождества эквивалентны и для коммутативных группоидов с тождеством левой альтернативности ($x \cdot xy = x^2y$).

Ниже мы рассмотрим группоиды с тождеством (2), имеющие идемпотент, а также группоиды с тождеством (2) и с единицей.

Сначала напомним, что группоиды $(Q, \cdot)$ и $(Q, \circ)$ называются *изотопными*, если существует такая тройка подстановок $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ множества Q , что $\gamma(x \circ y) = \alpha x \cdot \beta y$ для всех $x, y \in Q$ [1]. Тройка $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ отображений Q в Q называется *эндотопией* группоида $(Q, \cdot)$, если $\gamma(x \cdot y) = \alpha x \cdot \beta y$. Если в этом случае $\alpha = \beta = \gamma$, то тройка $T = (\gamma, \gamma, \gamma)$ называется *эндоморфизмом* группоида $(Q, \cdot)$, если же γ — подстановка, то это *автоморфизм*.

Квазигруппа $(Q, \cdot)$ называется *линейной слева (справа) над группой $(Q, +)$* , если существуют такие автоморфизм φ (ψ) и подстановка ψ (φ), что $x \cdot y = \varphi x + \psi y$ для всех $x, y \in Q$ (см., например, [2]).

Пусть $(Q, \cdot)$ — группоид с тождеством (2), тогда очевидно, что тройка $T = (L_x, L_x, L_{x^2})$, $L_x y = x \cdot y$, является его эндотопией. Если, кроме этого, группоид идемпотентный, то левая трансляция L_x является эндоморфизмом для любого $x \in Q$.

Пусть $(Q, \cdot)$ — группоид с тождеством (2), в котором некоторый элемент 0 является идемпотентным элементом: $0 \cdot 0 = 0$. Тогда очевидно, что левая трансляция L_0 этого группоида — эндоморфизм, т. е. $L_0 x \cdot L_0 y = L_0(x \cdot y)$ для всех $x, y \in Q$.

По аналогии с линейными слева (справа) квазигруппами над группой назовём группоид $(Q, \circ)$ *линейным слева (справа) над группоидом $(Q, \cdot)$* , если в $(Q, \cdot)$ существуют такие автоморфизм φ (ψ) и подстановка ψ (φ), что $x \circ y = \varphi x \cdot \psi y$ для всех $x, y \in Q$. Если φ и ψ — автоморфизмы группоида $(Q, \cdot)$,

то будем говорить, что группоид $(Q, \circ)$ является *линейным над* $(Q, \cdot)$. В этом случае группоиды $(Q, \cdot)$ и $(Q, \circ)$ изотопны.

Заметим, что группоид, который не является квазигруппой, не может быть линейным (линейным справа или слева) над группой (над лупой или квазигруппой), так как всякий группоид, изотопный квазигруппе, также является квазигруппой [1].

Рассмотрим теперь частный случай группоида с тождеством (2) и с идемпотентом 0, в котором обе трансляции L_0 и R_0 ($R_x y = y \cdot x$) — подстановки. В этом случае трансляция L_0 является автоморфизмом, более того, она коммутирует с R_0 : $L_0 R_0 = R_0 L_0$ (это следует из (2) при $x = z = 0$).

Пусть $(Q, \circ)$ — группоид, изотопный группоиду $(Q, \cdot)$, где $T = (R_0^{-1}, L_0^{-1}, 1)$, а 1 — тождественная подстановка, т. е.

$$x \circ y = R_0^{-1} x \cdot L_0^{-1} y, \quad x \cdot y = R_0 x \circ L_0 y. \quad (3)$$

Тогда $(Q, \circ)$ — группоид с единицей 0 ($0 \circ y = R_0^{-1} 0 \cdot L_0^{-1} y = y$, $x \circ 0 = R_0^{-1} x \cdot L_0^{-1} 0 = x$), линейный справа над группоидом $(Q, \cdot)$.

Покажем, что трансляция L_0 группоида $(Q, \cdot)$ является автоморфизмом и группоида $(Q, \circ)$, т. е. $L_0 \in \text{Aut}(Q, \circ)$. В самом деле, перейдём в (2) к операции $\circ$, используя (3):

$$R_0(R_0 x \circ L_0 y) \circ L_0(R_0 x \circ L_0 z) = R_0(R_0 x \circ L_0 x) \circ L_0(R_0 y \circ L_0 z). \quad (4)$$

Учитывая, что трансляции L_0 и R_0 коммутируют, и полагая в (4) $x = 0$, получим, что $R_0 L_0 y \circ L_0^2 z = L_0(R_0 y \circ L_0 z)$, откуда следует, что $L_0 \in \text{Aut}(Q, \circ)$, а группоид $(Q, \cdot)$, в свою очередь, согласно (3) линеен справа над группоидом $(Q, \circ)$ с единицей 0.

Таким образом, верна следующая теорема.

Теорема 1. Любой группоид $(Q, \cdot)$ с тождеством (2) и с идемпотентом 0, в котором трансляции L_0 и R_0 — подстановки, является линейным справа над группоидом $(Q, \circ)$ из (3) с единицей 0, а группоид $(Q, \circ)$ является линейным справа над группоидом $(Q, \cdot)$.

Пусть теперь группоид $(Q, \cdot)$ из теоремы 1 является и коммутативным, тогда $R_0 = L_0$ и $x \circ y = L_0^{-1} x \cdot L_0^{-1} y$, откуда следует, что

$$x \circ y = L_0^{-1} x \cdot L_0^{-1} y = L_0^{-1} y \cdot L_0^{-1} x = y \circ x,$$

т. е. $(Q, \circ)$ также коммутативный группоид. Более того, в этом случае группоид $(Q, \circ)$ также удовлетворяет тождеству (2). В самом деле, из (4) при $R_0 = L_0$, учитывая, что $L_0 \in \text{Aut}(Q, \circ)$, получим тождество (2) в $(Q, \circ)$:

$$(x \circ y) \circ (x \circ z) = (x \circ L_0 L_0^{-1} x) \circ (L_0 L_0^{-1} y \circ z) = (x \circ x) \circ (y \circ z).$$

Таким образом, из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Следствие. Если группоид $(Q, \cdot)$ из теоремы 1 является коммутативным, то группоид $(Q, \circ)$, $x \circ y = R_0^{-1} x \cdot L_0^{-1} y$, — коммутативный группоид с единицей, удовлетворяющий тождеству (2), группоид $(Q, \cdot)$ является линейным над $(Q, \circ)$, а группоид $(Q, \circ)$ является линейным над $(Q, \cdot)$.

Замечание 1. Отметим, что в группоиде с единицей e и с идемпотентом $0 \neq e$ трансляции L_0, R_0 не могут быть подстановками, так как $R_0e = R_00 = 0$ и $L_0e = L_00 = 0$. Если $(Q, \cdot)$ — группоид с единицей e и $0 = e$, то группоиды $(Q, \cdot)$ и $(Q, \circ)$ совпадают.

Пример. В таблице 1 приведена мультипликативная таблица группоида $(Q, \cdot)$ с идемпотентом 0, который удовлетворяет всем условиям теоремы 1. Группоид $(Q, \circ)$ с единицей 0 из таблицы 2 — его изотоп вида (3), в котором трансляция $L_0 (= L_0^{-1})$ также является автоморфизмом.

Таблица 1					Таблица 2				
$\cdot$	0	1	2	3	$\circ$	0	1	2	3
0	0	2	1	3	0	0	1	2	3
1	1	3	2	1	1	1	2	3	1
2	2	1	3	2	2	2	3	1	2
3	3	2	1	3	3	3	1	2	3

Теперь рассмотрим группоид $(Q, \cdot)$ с тождеством (2) и с единицей e . При $y = e$ из (2) следует, что $x \cdot xz = x^2 \cdot z$ для всех $x, z \in Q$, т. е. группоид удовлетворяет тождеству левой альтернативности, а $T = (L_x, L_x, L_{x^2}) = (L_x, L_x, L_x^2)$ является эндотопией для любого $x \in Q$. Если группоид $(Q, \cdot)$ идемпотентный, то трансляция L_x — его эндоморфизм для любого $x \in Q$ (см. примеры из таблиц 4 и 7). Полагая в (2) $z = e$, получим тождество

$$xy \cdot x = x^2y = x \cdot xy, \quad (5)$$

откуда следует, что $x \cdot R_yx = R_yx \cdot x$. Если это группоид с правым делением, т. е. R_y — сюръективное отображение для любого $y \in Q$, то данный группоид коммутативный и удовлетворяет тождеству (1).

Теорема 2. Если группоид $(Q, \cdot)$ с тождеством (2) имеет единицу e , то он является группоидом с ассоциативными степенями и в нём выполняются тождества

$$(xy)^{2^n} = x^{2^n} y^{2^n}, \quad (6)$$

$$(a_1(a_2 \dots (a_{k-1}a_k) \dots))^{2^n} = a_1^{2^n}(a_2^{2^n} \dots (a_{k-1}^{2^n}a_k^{2^n}) \dots), \quad (7)$$

$$a^{2^n}(bx) = a^n b \cdot a^n x \quad (8)$$

для любых целых $n \geq 1, k \geq 2$.

Доказательство. Пусть $a^{(n)}$ — терм длины $n \geq 3$ с некоторой расстановкой скобок, все буквы которого a . Если все значения таких термов совпадают в $(Q, \cdot)$, будем записывать такой терм как a^n . Нужно доказать, что значения терма $a^{(n)}$ не зависят от расстановки скобок. Пусть $a^{(n)}$ — некоторый терм, тогда его можно представить в виде $a^{(n)} = a^{(k)}a^{(l)}$, $k, l \geq 1, k + l = n$.

Если $n = 3$, то $a \cdot aa = aa \cdot a$ в силу левой альтернативности группоида. При $n = 4$ имеем

$$\begin{aligned} a^{(4)} &= a \cdot a^3, \\ a^{(4)} &= a^2 \cdot a^2 = a \cdot a^3 \end{aligned}$$

или

$$a^{(4)} = a^3 \cdot a = (a \cdot a^2) \cdot a = a^2 \cdot a^2 = a \cdot a^3$$

согласно (5) и левой альтернативности.

Пусть $n > 4$. Используем индукцию по длине терма. При $k = 1$ имеем

$$a^{(n)} = a \cdot a^{n-1},$$

если $l = 1$, то, используя (5), получим

$$a^{(n)} = a^{n-1} \cdot a = (a \cdot a^{n-2}) \cdot a = a^2 \cdot a^{n-2} = a \cdot a^{n-1}.$$

Пусть $k, l \geq 2$. По предположению индукции

$$a^{(n)} = a^k \cdot a^l = (a \cdot a^{k-1})(a \cdot a^{l-1}) = a^2 \cdot a^{k-1} a^{l-1} = a^2 \cdot a^{n-2} = a \cdot a^{n-1}$$

(в этих равенствах мы использовали тождество (2) и левую альтернативность группоида), так как по предположению меньшие степени ассоциативны.

Таким образом, во всех случаях значение $a^{(n)}$ не зависит от расстановки скобок. Учитывая этот факт, можно доказать тождества (6)–(8).

Докажем тождество (6). При $n = 1$ и $y = z$ из (2) следует $(xy)^2 = x^2 y^2$. Если $n = 2$, то

$$(xy)^{2^2} = ((xy)^2)^2 = (x^2 \cdot y^2)^2 = x^{2^2} \cdot y^{2^2}.$$

Далее по индукции предположим, что тождество (5) верно для $n - 1$, тогда

$$(xy)^{2^n} = ((xy)^2)^{2^{n-1}} = (x^2 \cdot y^2)^{2^{n-1}} = x^{2^n} \cdot y^{2^n}.$$

Тождество (7) есть простое обобщение тождества (6): при $k = 3$

$$(a_1(a_2b))^{2^n} = a_1^{2^n}(a_2b)^{2^n} = a_1^{2^n}(a_2^{2^n}b^{2^n}),$$

затем используем индукцию по k .

Тождество (8) следует из ассоциативности степеней и тождества (2):

$$a^{2^n}(bx) = (a^n)^2(bx) = a^n b \cdot a^n x.$$

Теорема доказана. $\square$

Замечание 2. Теорема 2 справедлива и для группоидов только с правой единицей e ($x \cdot e = x$), а тождества (6)–(8) проще, чем соответствующие тождества, доказанные в [3] для коммутативных группоидов с тождеством Муфанг (1).

Из (6) следует, что если $(Q, \cdot)$ — группоид с тождеством (2), имеющий единицу, то множество $Q^{2^k} = \{x^{2^k} \mid x \in Q\}$, $k \geq 1$, является подгруппоидом с единицей, так как в соответствии с (6) оно замкнуто относительно произведения элементов, а отображение $\alpha_k: x \rightarrow x^{2^k}$ — эндоморфизм $(Q, \cdot)$ для каждого $k \geq 1$. Таким образом, получаем цепочку вложенных подгруппоидов

$$Q \supseteq Q^2 \supseteq Q^{2^2} \supseteq \dots \supseteq Q^{2^k} \supseteq \dots$$

Если в таком группоиде отображение $x \rightarrow x^2$ является подстановкой (таковы, например, коммутативные лупы Муфанг нечётного порядка и идемпотентные группоиды), то $Q^{2^k} = Q$ и все α_k являются автоморфизмами. Если рассматриваемый группоид является унипотентным, то в нём $x^2 = e$ и $x^{2^k} = e$ для каждого $x \in Q$, $k \geq 1$.

Приведём несколько примеров конечных коммутативных группоидов четвёртого порядка (таблицы 3–6) и пример некоммутативного идемпотентного группоида третьего порядка (таблица 7) с тождеством (2) и с единицей.

Таблица 3					Таблица 4					Таблица 5				
$\cdot$	0	1	2	3	$\cdot$	0	1	2	3	$\cdot$	0	1	2	3
0	0	1	2	3	0	0	1	2	3	0	0	1	2	3
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	1	2	3	2	2	1	2	2	2	2	1	3	1
3	3	1	3	1	3	3	1	2	3	3	3	1	1	1

Таблица 6					Таблица 7			
$\cdot$	0	1	2	3	$\cdot$	0	1	2
0	0	1	2	3	0	0	1	2
1	1	0	3	2	1	1	1	1
2	2	3	1	0	2	2	2	2
3	3	2	0	1				

Можно непосредственно проверить, что этим примерам соответствуют следующие цепочки:

Таблица 3: $Q^2 = \{0, 1, 2\} = Q^4 = Q^8 = \dots$

Таблица 4: $Q^2 = \{0, 1, 2, 3\} = Q^4 = Q^8 = \dots$ (идемпотентный группоид).

Таблица 5: $Q^2 = \{0, 1, 3\}$, $Q^4 = \{0, 1\} = Q^8 = \dots$

Таблица 6: $Q^2 = \{0, 1\}$, $Q^4 = \{0\} = Q^8 = \dots$

Таблица 7: $Q^2 = \{0, 1, 2\} = Q^4 = Q^8 = \dots$ (идемпотентный группоид).

Таким образом, возможны разные случаи цепочек.

Авторы благодарят В. А. Щербакова за компьютерное построение примеров группоидов, приведённых в этой статье.

Литература

- [1] Белоусов В. Д. Основы теории квазигрупп и луп. — М.: Наука, 1967.
- [2] Белявская Г. Б., Табаров А. Х. Ядра и центр линейных квазигрупп // *Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat.* — 1991. — No. 3 (6). — P. 37—42.
- [3] Novikov B. V. On decomposition of Moufang groupoids // *Quasigroups Related Systems*. — 2008. — Vol. 16, no. 1. — P. 97—101.
- [4] Pflugfelder H. O. *Quasigroups and Loops: Introduction*. — Berlin: Heldermann, 1990. — (Sigma Ser. Pure Math.; Vol. 8).
- [5] Shcherbacov V. A., Izbash V. I. On quasigroups with Moufang identity // *Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold. Mat.* — 1998. — No. 2. — P. 109—116.

