Полугруппы эндоморфизмов 2-нильпотентных бинарных отношений

Ю. В. ЖУЧОК
Луганский национальный университет
им. Тараса Шевченко
e-mail: zhuchok_y@mail.ru

УДК 512.53

Ключевые слова: полугруппа эндоморфизмов, бинарное отношение, нильпотентное отношение.

Аннотация

В работе построены две полугрупповые конструкции, которые с точностью до изоморфизма описывают строение всех полугрупп эндоморфизмов 2-нильпотентных бинарных отношений.

Abstract

Y. V. Zhuchok, Endomorphism semigroups of 2*-nilpotent binary relations*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 6, pp. 75—83.

We define two constructions of semigroups, which up to isomorphism describe the structure of all endomorphism semigroups of 2-nilpotent binary relations.

1. Введение

Полугруппы эндоморфизмов бинарных отношений изучались многими авторами. Одним из первых результатов об эндоморфизмах бинарных отношений является теорема Л. М. Глускина [2] об определяемости любого нетривиального отношения квазипорядка своей полугруппой эндоморфизмов. Л. Б. Шнеперман в [5] показал, что результат Глускина невозможно перенести на класс всех рефлексивных бинарных отношений, при этом им были найдены абстрактные характеристики полугруппы всех эндоморфизмов квазиупорядоченного множества и квазиупорядоченной полугруппы всех эндоморфизмов отношения квазипорядка. Далее в этом направлении было получено достаточно много результатов для различных классов отношений, а также некоторые обобщения и аналоги ряда классических результатов (см., например, [6, 8, 9]).

Следует отметить, что особенное внимание уделялось изучению полугруппы эндоморфизмов отношения частичного порядка и, в частности, полугруппы эндоморфизмов цепи. Так, для полугруппы эндоморфизмов конечной цепи А. Я. Айзенштат [1] были найдены её образующие и соотношения, а Б. М. Шайном [10]

Фундаментальная и прикладная математика, 2008, том 14, № 6, с. 75—83.

получены условия, при которых элемент полугруппы эндоморфизмов произвольной цепи раскладывается в произведение идемпотентов. Для полугрупп эндоморфизмов частичных порядков также изучались некоторые комбинаторные свойства [7], условия регулярности [4] и другие алгебраические свойства.

Открытым при этом остаётся вопрос о строении с точностью до изоморфизма полугрупп эндоморфизмов для многих содержательных типов бинарных отношений. Для полугруппы эндоморфизмов произвольного отношения эквивалентности этот вопрос был решён в [3]. Основной целью этой работы является описание с точностью до изоморфизма строения всех полугрупп эндоморфизмов 2-нильпотентных отношений.

2. Основные понятия

В этом разделе вводятся необходимые понятия. Показано, как эндоморфизм бинарного отношения определяется через нижний или верхний конус.

2.1. Пусть $\Im(X)$ — симметрическая полугруппа на множестве X. Эндоморфизмом отношения $\rho \subseteq X \times X$ называется преобразование $f \in \Im(X)$, такое что при любых $a, b \in X$ из условия $(a; b) \in \rho$ следует $(af; bf) \in \rho$. Множество $E_\rho(X)$ всех эндоморфизмов отношения ρ относительно обычной операции композиции преобразований является полугруппой.

Нижним (верхним) конусом элемента $u \in X$ реляционной системы (X, ρ), где $\rho \subseteq X \times X$, называется множество

$$u^{\triangledown} = \{v \in X \mid (v; u) \in \rho\} \quad \bigl(u^{\vartriangle} = \{v \in X \mid (u; v) \in \rho\}\bigr).$$

Эндоморфизмы бинарного отношения можно определить в терминах нижнего или верхнего конуса.

Лемма. *Пусть $\rho \subseteq X \times X$ — непустое отношение, $f \in \Im(X)$. Следующие условия эквивалентны*:

1) $f \in E_\rho(X)$;
2) $f(a^{\vartriangle}) \subseteq \bigl(f(a)\bigr)^{\vartriangle}$ *для всех* $a \in \operatorname{Dom}\rho$;
3) $f(a^{\triangledown}) \subseteq \bigl(f(a)\bigr)^{\triangledown}$ *для всех* $a \in \operatorname{Im}\rho$.

Доказательство. Докажем импликацию $1) \Longrightarrow 2)$. Пусть $b \in f(a^{\vartriangle})$, где $a \in \operatorname{Dom}\rho$. Тогда существует такой элемент $x \in a^{\vartriangle}$, что $f(x) = b$. Так как $f \in E_\rho(X)$, то из условия $(a; x) \in \rho$ следует, что $\bigl(f(a); f(x)\bigr) = (f(a); b) \in \rho$, т. е. $b \in \bigl(f(a)\bigr)^{\vartriangle}$.

Докажем импликацию $2) \Longrightarrow 3)$. Возьмём $x \in f(b^{\triangledown})$, где $b \in \operatorname{Im}\rho$. Тогда найдётся такой элемент $u \in b^{\triangledown}$, что $f(u) = x$. Из того, что $(u; b) \in \rho$, следует $b \in u^{\vartriangle}$. Так как $f(b) \in f(u^{\vartriangle})$ и $u \in \operatorname{Dom}\rho$, то по условию 2) получаем $f(b) \in \bigl(f(u)\bigr)^{\vartriangle}$, откуда $\bigl(f(u); f(b)\bigr) = \bigl(x; f(b)\bigr) \in \rho$. Следовательно, $x \in \bigl(f(b)\bigr)^{\triangledown}$.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 1). Пусть $(u;v) \in \rho$, тогда $u \in v^{\triangledown}$. Согласно условию 3) $f(v^{\triangledown}) \subseteq \big(f(v)\big)^{\triangledown}$, поэтому $f(u) \in \big(f(v)\big)^{\triangledown}$. Таким образом, $\big(f(u);f(v)\big) \in \rho$, т. е. $f \in E_\rho(X)$.

Лемма доказана. $\square$

2.2. Пусть B_X — полугруппа всех бинарных отношений на множестве X, n — натуральное число. Отношение $\rho \in B_X$ называется нильпотентным отношением степени n (или n-нильпотентным отношением), если $\rho^n = \varnothing$ и не существует натурального $m < n$ с таким свойством.

Если $n = 2$, то условие 2-нильпотентности отношения $\rho \in B_X$ равносильно тому, что $\operatorname{Dom}\rho \cap \operatorname{Im}\rho = \varnothing$.

Множество $\operatorname{Dom}\rho \cup \operatorname{Im}\rho$ будем называть содержанием отношения $\rho \in B_X$ и обозначать через $c(\rho)$.

Если $f\colon A \to B$ — произвольное отображение, $Y \subseteq A$, то через $f|_Y$ будем обозначать ограничение отображения f на подмножество Y, а через f^* — отношение $\big\{\big(a;f(a)\big) \mid a \in A\big\}$.

3. Эндоморфизмы 2-нильпотентных отношений

В этом разделе описываются необходимые и достаточные условия, при которых произвольное преобразование множества, на котором определено нильпотентное отношение второй степени, будет эндоморфизмом этого отношения.

3.1. Подмножество $A \subseteq \operatorname{Dom}\rho$ ($B \subseteq \operatorname{Im}\rho$) назовём множеством связности (косвязности) элемента $u \in \operatorname{Dom}\rho$ ($v \in \operatorname{Im}\rho$), если

$$u \in A, \quad \bigcap_{x\in A} x^{\triangle} \neq \varnothing \quad \Big(v \in B, \quad \bigcap_{x\in B} x^{\triangledown} \neq \varnothing\Big).$$

Обозначим через Q_u (Q'_v) совокупность всех множеств связности (косвязности) элемента $u \in \operatorname{Dom}\rho$ ($v \in \operatorname{Im}\rho$), и пусть

$$\begin{aligned} T &= \{f \in \Im(\operatorname{Dom}\rho) \mid \forall\, x \in \operatorname{Dom}\rho\ A \in Q_x \Rightarrow f(A) \in Q_{f(x)}\}, \quad \lambda \in T,\\ S' &= \{g \in \Im(\operatorname{Im}\rho) \mid \forall\, y \in \operatorname{Im}\rho\ A \in Q'_y \Rightarrow g(A) \in Q'_{g(y)}\}, \quad \mu \in S'. \end{aligned}$$

Если $K = \{k^{\triangle} \mid k \in \operatorname{Dom}\rho\}$ ($K' = \{k^{\triangledown} \mid k \in \operatorname{Im}\rho\}$), то для каждого $x \in \operatorname{Im}\rho$ (соответственно $a \in \operatorname{Dom}\rho$) положим

$$[x] = \{y^{\triangle} \in K \mid x \in y^{\triangle}\}, \quad [x]^* = \{y \in \operatorname{Dom}\rho \mid y^{\triangle} \in [x]\}, \quad P_\lambda(x) = \bigcap_{y\in\lambda([x]^*)} y^{\triangle},$$

$$\Big([a]' = \{b^{\triangledown} \in K' \mid a \in b^{\triangledown}\}, \quad [a]_* = \{b \in \operatorname{Im}\rho \mid b^{\triangledown} \in [a]'\}, \quad P'_\mu(a) = \bigcap_{b\in\mu([a]_*)} b^{\triangledown}\Big).$$

Обозначим через M_x^λ ($M_a'^\mu$), где $x \in \operatorname{Im}\rho$ ($a \in \operatorname{Dom}\rho$), множество всех отображений из одноэлементного множества $\{x\}$ (соответственно $\{a\}$) в множество

$P_\lambda(x)$ (соответственно $P'_\mu(a)$), т. е.

$$M_x^\lambda = \mathrm{Map}\big(\{x\}; P_\lambda(x)\big) \quad \Big(M_a'^\mu = \mathrm{Map}\big(\{a\}; P'_\mu(a)\big)\Big).$$

Пусть

$$S_\lambda = \{f \in \Im(\mathrm{Im}\,\rho) \mid \forall\, x \in \mathrm{Im}\,\rho\ f|_{\{x\}} \in M_x^\lambda\}, \quad S = \bigcup_{\eta\in T} S_\eta,$$

$$T'_\mu = \{g \in \Im(\mathrm{Dom}\,\rho) \mid \forall\, a \in \mathrm{Dom}\,\rho\ g|_{\{a\}} \in M_a'^\mu\}, \quad T' = \bigcup_{\eta\in S'} T'_\eta.$$

Если $f \in \Im(X)$ и $\rho \subseteq X \times X$, то будем использовать (в этом разделе) обозначения $f|_{\mathrm{Dom}\,\rho} = \varphi$, $f|_{\mathrm{Im}\,\rho} = \psi$.

3.2. Эндоморфизмы нильпотентных отношений второй степени, содержание которых совпадает с множеством, на котором определено это отношение, описывает следующая лемма.

Лемма. *Пусть ρ — 2-нильпотентное отношение на множестве X, такое что $c(\rho) = X$. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) $f \in E_\rho(X)$;
2) $\psi \in S_\varphi$, где $\varphi \in T$;
3) $\varphi \in T'_\psi$, где $\psi \in S'$.

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Предположим, что $\varphi \notin \Im(\mathrm{Dom}\,\rho)$. Тогда найдётся такой элемент $x \in \mathrm{Dom}\,\rho$, что $\varphi(x) \notin \mathrm{Dom}\,\rho$ и при любом $y \in x^\triangle$ из условия $(x; y) \in \rho$ следует, что $\big(f(x); f(y)\big) \notin \rho$, т. е. $f \notin E_\rho(X)$. Следовательно, $\varphi \in \Im(\mathrm{Dom}\,\rho)$.

Допустим, что $\varphi \notin T$. Это означает, что существуют такие $u \in \mathrm{Dom}\,\rho$ и $A \in Q_u$, что $\varphi(A) \notin Q_{\varphi(u)}$. Отсюда получаем, что $u \in A$, $\bigcap\limits_{x\in A} x^\triangle \neq \varnothing$, при этом, так как $\varphi(u) \in \varphi(A)$, $\bigcap\limits_{y\in\varphi(A)} y^\triangle = \varnothing$.

Пусть $a \in \bigcap\limits_{x\in A} x^\triangle$. Так как $f \in E_\rho(X)$, то для всех $t \in A$ из условия $(t; a) \in \rho$ следует, что $\big(f(t); f(a)\big) = \big(\varphi(t); \psi(a)\big) \in \rho$, и значит, $\psi(a) \in \big(\varphi(t)\big)^\triangle$ при любом $t \in A$. Таким образом, $\psi(a) \in \bigcap\limits_{t\in A} \big(\varphi(t)\big)^\triangle$, или, что то же самое, $\psi(a) \in \bigcap\limits_{v\in\varphi(A)} v^\triangle = \varnothing$. Следовательно, начальное предположение неверно и $\varphi \in T$. Покажем, что $\psi \in S_\varphi$.

Понятно, что $\psi \in \Im(\mathrm{Im}\,\rho)$, в противном случае нашелся бы элемент $x \in \mathrm{Im}\,\rho$, такой что $\psi(x) \notin \mathrm{Im}\,\rho$, и тогда из условия $(y; x) \in \rho$ при любом $y \in x^\nabla$ следовало бы, что $\big(f(y); f(x)\big) = \big(\varphi(y); \psi(x)\big) \notin \rho$.

Предположим, что $\psi \notin S_\varphi$, т. е. существует элемент $x \in \mathrm{Im}\,\rho$, для которого $\psi|_{\{x\}} \notin M_x^\varphi$, и пусть $\psi(x) = y$. Поскольку $M_x^\varphi = \mathrm{Map}\big(\{x\}; P_\varphi(x)\big)$, то $y \notin P_\varphi(x)$, где $P_\varphi(x) = \bigcap\limits_{z\in\varphi([x]^*)} z^\triangle$.

Очевидно, $[x] \neq \varnothing$. Тогда для всех $t \in [x]^*$ имеем $x \in t^{\triangle}$, откуда $(t;x) \in \rho$. Так как f — эндоморфизм, то $\big(f(t);f(x)\big) = (\varphi(t);y) \in \rho$, т. е. $y \in \big(\varphi(t)\big)^{\triangle}$ для всех $\varphi(t) \in \varphi([x]^*)$. Это означает, что $y \in \bigcap\limits_{\varphi(t)\in\varphi([x]^*)} \big(\varphi(t)\big)^{\triangle}$, или, что то же самое, $y \in P_\varphi(x)$. Итак, $\psi \in S_\varphi$.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 3). Предположим, что $\varphi \notin T'_\psi$. Тогда найдётся элемент $u \in \operatorname{Dom}\rho$, такой что $\varphi|_{\{u\}} \notin M'^{\psi}_u$. Отсюда следует, что $v = \varphi(u) \notin$ $\notin P'_\psi(u)$. Если $\operatorname{Dom}\rho = P'_\psi(u)$, то $v \notin \operatorname{Dom}\rho$, что противоречит условию $\varphi \in T$. В случае когда $\operatorname{Dom}\rho \neq P'_\psi(u)$, из условия $v \notin P'_\psi(u)$ получаем, что найдётся элемент $t \in \psi([u]_*)$, для которого $v \notin t^{\triangledown}$, откуда следует, что

$$t \notin v^{\triangle}. \tag{$*$}$$

Так как $t \in \psi([u]_*)$, то существует такой элемент $a \in [u]_*$, что $\psi(a) = t$. Отсюда следует, что $a^{\triangledown} \in [u]'$, $u \in a^{\triangledown}$. Тогда $(u;a) \in \rho$, т. е. $a \in u^{\triangle}$.

Поскольку $\psi \in S_\varphi$, то $\psi(a) \in P_\varphi(a)$. Учитывая, что $u \in [a]^*$, получаем $\varphi(u) \in \varphi([a]^*)$, следовательно, $P_\varphi(a) \subseteq \varphi(u)^{\triangle}$. Тогда $t \in v^{\triangle}$, что противоречит условию $(*)$.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 1). Пусть $f \in \Im(X)$ — такое преобразование, что $\varphi \in T'_\psi$, где $\psi \in S'$. Покажем, что $\varphi(t^{\triangledown}) \subseteq \big(\psi(t)\big)^{\triangledown}$ для всех $t \in \operatorname{Im}\rho$. Возьмём произвольный элемент $v \in \varphi(a^{\triangledown})$, где $a \in \operatorname{Im}\rho$. Тогда найдётся элемент $u \in a^{\triangledown}$, такой что $\varphi(u) = v$.

Так как $\varphi \in T'_\psi$, то $\varphi|_{\{u\}} \in M'^{\psi}_u$, где $M'^{\psi}_u = \operatorname{Map}\big(\{u\};P'_\psi(u)\big)$. Очевидно, что $[u]_* \neq \varnothing$. Тогда для всех $c \in [u]_*$ имеем $c^{\triangledown} \in [u]'$, откуда $u \in c^{\triangledown}$ и, значит, $u \in \bigcap\limits_{c\in[u]_*} c^{\triangledown}$. Это означает, что $[u]_*$ является множеством косвязности для любого своего элемента. Учитывая, что $\psi \in S'$, получаем, что $\psi([u]_*)$ также множество косвязности для каждого элемента из $\psi([u]_*)$. Следовательно, $P'_\psi(u) = \bigcap\limits_{s\in\psi([u]_*)} s^{\triangledown} \neq \varnothing$, и значит, множество M'^{ψ}_u непусто.

По построению множества M'^{ψ}_u имеем $v = \varphi(u) \in P'_\psi(u)$. Из того, что $u \in a^{\triangledown}$, следует $a \in [u]_*$, тогда $\psi(a) \in \psi([u]_*)$. Отсюда для всех $u \in a^{\triangledown}$ имеем, что $\bigcap\limits_{s\in\psi([u]_*)} s^{\triangledown} = P'_\psi(u) \subseteq \big(\psi(a)\big)^{\triangledown}$.

Таким образом, $v \in \big(\psi(a)\big)^{\triangledown}$, или, что то же самое, $\varphi(a^{\triangledown}) \subseteq \big(\psi(a)\big)^{\triangledown}$. Отсюда по лемме пункта 2.1 получаем, что $f \in E_\rho(X)$.

Лемма доказана. □

3.3. Пусть $\alpha \subseteq X \times X$ — произвольное отношение, $f \in \Im(X)$. Положим $G = X \setminus c(\alpha)$, $f|_G = \eta$, $M = \operatorname{Map}(G;X)$ — множество всех отображений из множества G в множество X.

Описание эндоморфизмов нильпотентных отношений второй степени, содержание которых не совпадает с множеством, на котором определено это отношение, даёт следующая лемма.

Лемма. *Пусть ρ — 2-нильпотентное отношение на множестве X, такое что $c(\rho) \neq X$. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) $f \in E_\rho(X)$;
2) $\psi \in S_\varphi$, где $\varphi \in T$, *и* $\eta \in M$;
3) $\varphi \in T'_\psi$, где $\psi \in S'$, *и* $\eta \in M$.

Доказательство данной леммы аналогично доказательству леммы пункта 3.2.

4. Полугруппы эндоморфизмов 2-нильпотентов

В этом разделе строятся две полугрупповые конструкции, каждая из которых изоморфна полугруппе эндоморфизмов 2-нильпотентного отношения, в зависимости от его содержания.

4.1. Пусть $\rho \in B_X$ — такое 2-нильпотентное отношение, что $c(\rho) = X$. Если $\mu \in S_\lambda$, где $\lambda \in T$ (см. пункт 3.1), то определим преобразование $f_{\lambda,\mu} \in \Im(X)$, положив для всех $x \in X$

$$f_{\lambda,\mu}(x) = \begin{cases} \lambda(x), & x \in \operatorname{Dom}\rho, \\ \mu(x), & x \in \operatorname{Im}\rho. \end{cases}$$

Имеет место следующая лемма.

Лемма.

1. *Множество T является подполугруппой $\Im(\operatorname{Dom}\rho)$.*
2. *Множество S является подполугруппой $\Im(\operatorname{Im}\rho)$.*

Доказательство.

1. Пусть $\lambda, \mu \in T$. Очевидно, $\lambda\mu \in \Im(\operatorname{Dom}\rho)$. Тогда для всех $u \in \operatorname{Dom}\rho$ из условия $A \in Q_u$ следует, что $\lambda(A) \in Q_{\lambda(u)}$ и $\mu(A) \in Q_{\mu(u)}$. Таким образом, при любом $v \in \operatorname{Dom}\rho$ имеем

$$A \in Q_v \Longrightarrow \lambda(A) \in Q_{\lambda(u)} \Longrightarrow \mu\bigl(\lambda(A)\bigr) \in Q_{\mu(\lambda(u))} \Longrightarrow \lambda\mu(A) \in Q_{\lambda\mu(u)}.$$

Следовательно, $\lambda\mu \in T$.

2. Пусть $\varphi, \psi \in S$. Тогда $\varphi \in S_\lambda$, $\psi \in S_\mu$ для некоторых $\lambda, \mu \in T$. Очевидно, $\varphi\psi \in \Im(\operatorname{Im}\rho)$. Из леммы пункта 3.2 следует, что $f_{\lambda,\varphi} \in E_\rho(X)$ и $f_{\mu,\psi} \in E_\rho(X)$. Понятно, что $f_{\lambda,\varphi} \cdot f_{\mu,\psi} \in E_\rho(X)$. Отсюда по лемме пункта 3.2 получаем, что $f_{\lambda,\varphi} \cdot f_{\mu,\psi}|_{\operatorname{Im}\rho} \in S_{f_{\lambda,\varphi} \cdot f_{\mu,\psi}|_{\operatorname{Dom}\rho}}$. При этом $f_{\lambda,\varphi} \cdot f_{\mu,\psi}|_{\operatorname{Dom}\rho} = \lambda\mu$, $f_{\lambda,\varphi} \cdot f_{\mu,\psi}|_{\operatorname{Im}\rho} = \varphi\psi$. Таким образом, $\varphi\psi \in S$.

Лемма доказана. □

4.2. Для каждого $\eta \in T$ пусть $H_\eta = \{(\eta;\mu) \mid \mu \in S_\eta\}$, $H_{T,S} = \bigcup\limits_{\eta \in T} H_\eta$. Понятно, что $H_{T,S}$ — подполугруппа прямого произведения $T \times S$.

Теорема. *Полугруппы $E_\rho(X)$, где $\rho^2 = \varnothing$, $c(\rho) = X$, и $H_{T,S}$ являются изоморфными.*

Доказательство. Изоморфизм между полугруппами $E_\rho(X)$, где $\rho^2 = \varnothing$, $c(\rho) = Xc$, и $H_{T,S}$ устанавливает отображение

$$g\colon E_\rho(X) \to H_{T,S}, \quad f \mapsto (f|_{\operatorname{Dom}\rho}; f|_{\operatorname{Im}\rho}).$$

Действительно, для любого $(\eta;\mu) \in H_{T,S}$ преобразование $f_{\eta,\mu} \in \Im(X)$, определённое как в пункте 4.1, будет по лемме пункта 3.2 эндоморфизмом отношения ρ, для которого $g(f_{\eta,\mu}) = (\eta;\mu)$, поэтому g сюръективно. Инъективность отображения g очевидна.

Кроме того, для всех $f_1, f_2 \in E_\rho(X)$, пользуясь леммой пункта 3.2, имеем

$$\begin{aligned} g(f_1f_2) = \big((f_1f_2)|_{\operatorname{Dom}\rho}; (f_1f_2)|_{\operatorname{Im}\rho}\big) = (f_1|_{\operatorname{Dom}\rho}f_2|_{\operatorname{Dom}\rho}; f_1|_{\operatorname{Im}\rho}f_2|_{\operatorname{Im}\rho}) = \\ = (f_1|_{\operatorname{Dom}\rho}; f_1|_{\operatorname{Im}\rho})(f_2|_{\operatorname{Dom}\rho}; f_2|_{\operatorname{Im}\rho}) = g(f_1)g(f_2). \end{aligned}$$

Теорема доказана. □

4.3. Пусть $\{A, B\}$ — произвольное разбиение множества X, T — подполугруппа полугруппы B_X (см. пункт 2.2), такая что $T \subseteq B_A$ и каждое отношение из T функционально на множестве A, $F = \operatorname{Fun}(B; X)$ — множество всех функциональных отношений на множествах B и X.

Определим на множестве $P = T \times F$ операцию по правилу

$$(\varphi_1;\psi_1)(\varphi_2;\psi_2) = (\varphi_1 \circ \varphi_2; \psi_1 \circ \varphi_2 \cup \psi_1 \circ \psi_2),$$

где $\circ$ — операция композиции отношений на множестве X.

Поскольку для всех $(\varphi_1;\psi_1), (\varphi_2;\psi_2), (\varphi_3;\psi_3) \in P$ имеем

$$\begin{aligned} &\big((\varphi_1;\psi_1)(\varphi_2;\psi_2)\big)(\varphi_3;\psi_3) = (\varphi_1 \circ \varphi_2; \psi_1 \circ \varphi_2 \cup \psi_1 \circ \psi_2)(\varphi_3;\psi_3) = \\ &\quad = (\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \varphi_3; \psi_1 \circ \varphi_2 \circ \varphi_3 \cup \psi_1 \circ \psi_2 \circ \varphi_3 \cup \psi_1 \circ \varphi_2 \circ \psi_3 \cup \psi_1 \circ \psi_2 \circ \psi_3) = \\ &\quad = (\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \varphi_3; \psi_1 \circ \varphi_2 \circ \varphi_3 \cup \psi_1 \circ \psi_2 \circ \varphi_3 \cup \psi_1 \circ \psi_2 \circ \psi_3) = \\ &\quad = \big(\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \varphi_3; \psi_1 \circ (\varphi_2 \circ \varphi_3) \cup \psi_1 \circ (\psi_2 \circ \varphi_3 \cup \psi_2 \circ \psi_3)\big) = \\ &\quad = (\varphi_1;\psi_1)\big((\varphi_2;\psi_2)(\varphi_3;\psi_3)\big), \end{aligned}$$

то множество P является полугруппой относительно такой операции. Обозначим полученную полугруппу через $P_{A,B}[T]$.

Например, если $\alpha \subseteq i_X$, $\alpha \neq i_X$, где $i_X = \{(a;a) \mid a \in X\}$, то, положив $c(\alpha) = A$, $B = X \setminus A$, получим, что полугруппа $E_\alpha(X)$ изоморфна полугруппе $P_{A,B}[\Im(A)]$.

4.4. Пусть ρ — 2-нильпотентное отношение на множестве X, такое что $c(\rho) \neq X$. Положим $A = c(\rho)$, $B = X \setminus c(\rho)$.

Описание строения полугруппы эндоморфизмов отношения ρ даёт следующая теорема.

Теорема. *Полугруппы $E_\rho(X)$, где $\rho^2 = \varnothing$, $c(\rho) \neq X$, и $P_{A,B}[E_\rho(A)]$ являются изоморфными.*

Доказательство. Отображение

$$g\colon E_\rho(X) \to P_{A,B}[E_\rho(A)], \quad f \mapsto \big((f|_A)^*; (f|_B)^*\big),$$

очевидно, задаёт инъекцию из полугруппы $E_\rho(X)$ в $P_{A,B}[E_\rho(A)]$. Более того, для любого $(\alpha;\beta)\in P_{A,B}[E_\rho(A)]$ преобразование $f_{\alpha,\beta}\in\Im(X)$, определённое по правилу

$$f_{\alpha,\beta}(x)=\begin{cases}\alpha(x), & x\in A,\\ \beta(x), & x\in B,\end{cases}$$

будет согласно леммам пунктов 3.2 и 3.3 эндоморфизмом отношения ρ, причём таким, что $g(f_{\alpha,\beta})=(\alpha;\beta)$. Таким образом, g — биекция.

Пусть $\eta,\theta\in E_\rho(X)$. Если $\eta(B)\subseteq A$ или $\eta(B)\subseteq B$, то $(\eta\theta)|_A=\eta|_A\theta|_A$ и либо

$$(\eta|_B)^*(\theta|_A)^*\cup(\eta|_B)^*(\theta|_B)^*=(\eta|_B)^*(\theta|_A)^*=(\eta\theta|_B)^*,$$

либо соответственно

$$(\eta|_B)^*(\theta|_A)^*\cup(\eta|_B)^*(\theta|_B)^*=(\eta|_B)^*(\theta|_B)^*=(\eta\theta|_B)^*.$$

В остальных случаях, т. е. когда существуют $K,L\subseteq B$, такие что $\{K,L\}$ — разбиение множества B и $\eta(K)\subseteq A$, $\theta(L)\subseteq B$, получаем

$$\begin{aligned}(\eta|_B)^*(\theta|_A)^*\cup(\eta|_B)^*(\theta|_B)^* &= (\eta|_K)^*(\theta|_{\eta(K)})^*\cup(\eta|_L)^*(\theta|_{\eta(L)})^*=\\ &=(\eta\theta)^*|_K\cup(\eta\theta)^*|_L=(\eta\theta)^*|_{K\cup L}=(\eta\theta|_B)^*.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что для всех $\eta,\theta\in E_\rho(X)$

$$\begin{aligned}g(\eta\theta)&=\big((\eta\theta)^*|_A;(\eta\theta)^*|_B\big)=\big((\eta|_A)^*(\theta|_A)^*;(\eta|_B)^*(\theta|_A)^*\cup(\eta|_B)^*(\theta|_B)^*\big)=\\ &=\big((\eta|_A)^*;(\eta|_B)^*\big)\big((\theta|_A)^*;(\theta|_B)^*\big)=g(\eta)g(\theta).\end{aligned}$$

Теорема доказана. □

4.5. Одной из актуальных проблем теории бинарных отношений является проблема определяемости отношений своими полугруппами эндоморфизмов. В данном случае 2-нильпотентные отношения не определяются своими полугруппами эндоморфизмов.

Действительно, если, например, $X=\{1,2,3\}$, $\alpha=\{(1;2),(1;3)\}$, а $Y=\{1,2,3,4\}$, $\beta=\{(1;2),(3;4)\}$, то полугруппы $E_\alpha(X)$ и $E_\beta(Y)$ изоморфны. Однако соответствующие реляционные системы (X,α) и (Y,β) не являются изоморфными.

Работа является частью научного исследования, которое поддерживается Министерством образования и науки Украины в рамках гранта Президента для молодых ученых на 2009 г.

Литература

[1] Айзенштат А. Я. Определяющие соотношения полугруппы эндоморфизмов конечного линейно упорядоченного множества // Сиб. мат. журн. — 1962. — Т. 3, № 2. — С. 161—169.

[2] Глускин Л. М. Полугруппы изотонных преобразований // Успехи мат. наук. — 1961. — Т. 16, № 5 (101). — С. 157—162.

[3] Жучок Ю. В. Ендоморфізми відношень еквівалентності // Вісн. Київ. унів. Сер. Фіз.-мат. науки. — 2007. — Вип. 3. — С. 22—26.

[4] Ким В. И., Кожухов И. Б. Условия регулярности полугрупп изотонных преобразований счётных цепей // Фундамент. и прикл. мат. — 2006. — Т. 12, вып. 8. — С. 97—104.

[5] Шнеперман Л. Б. Полугруппы эндоморфизмов квазиупорядоченных множеств // Учёные записки ЛГПУ им. А. И. Герцена. — 1962. — Т. 238. — С. 21—37.

[6] Araujo J., Konieczny J. Dense relations are determined by their endomorphisms monoids // Semigroup Forum. — 2005. — Vol. 70. — P. 302—306.

[7] Laradji A., Umar A. Combinatorial results for semigroups of order-preserving partial transformations // J. Algebra. — 2004. — Vol. 278, no. 1. — P. 342—359.

[8] Molchanov V. A. Semigroups of mappings on graphs // Semigroup Forum. — 1983. — Vol. 27. — P. 155—199.

[9] Popov B. V., Kovaleva O. V. On a characterization of monounary algebras by their endomorphism semigroups // Semigroup Forum. — 2006. — Vol. 73. — P. 444—456.

[10] Schein B. M. Products of idempotent order-preserving transformations of arbitrary chains // Semigroup Forum. — 1975. — Vol. 11, no. 1. — P. 297—309.