

О конечной базирруемости многообразий коммутативных унарных алгебр

В. К. КАРТАШОВ

Волгоградский государственный
педагогический университет
e-mail: kartashovvk@yandex.ru

УДК 512.572

Ключевые слова: тождество, многообразие, базис тождеств, коммутативная унарная алгебра.

Аннотация

В данной заметке доказано, что любое многообразие коммутативных унарных алгебр конечной сигнатуры имеет конечный базис тождеств.

Abstract

V. K. Kartashov, On the finite axiomatizability of varieties of commutative unary algebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 14 (2008), no. 6, pp. 85–89.

In this paper, it is proved that every variety of commutative unary algebras of a finite signature has a finite basis of identities.

Пусть K — произвольный класс алгебраических систем сигнатуры Ω и $T_V(K)$ — множество всех тождеств сигнатуры Ω , истинных на каждой системе класса K . Тогда подмножество $\Sigma \subseteq T_V(K)$ называется *базисом тождеств класса K* , если любое тождество из $T_V(K)$ является следствием совокупности Σ .

Если K состоит из всех систем, изоморфных данной системе A , то базис тождеств для K называется *базисом тождеств системы A* . Аналогичным образом определяется базис квазитожеств.

Проблемы существования и описания базисов тождеств и квазитожеств занимают одно из центральных мест в универсальной алгебре. Эти проблемы привлекали внимание многих крупнейших алгебраистов. Среди них Г. Биркгоф [9, 10], А. И. Мальцев [6, 7], А. Тарский [12], А. Г. Курош [5], Р. Маккензи [11].

В настоящее время в этом направлении получен ряд глубоких, основополагающих результатов. С основными из них можно познакомиться, например, по [1]. Однако в этой области остаётся ещё много нерешённых вопросов для некоторых важных классов алгебраических систем. Это, в частности, касается многообразий и квазимногообразий унарных алгебр.

Фундаментальная и прикладная математика, 2008, том 14, № 6, с. 85–89.

© 2008 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

А. И. Мальцевым в [7] было показано, что любое многообразие унаров (т. е. унарных алгебр с одной операцией) имеет базис, состоящий из одного тождества. В дальнейшем в [2, 3] автором было доказано, что любой конечный унар имеет конечный базис квазитожеств, а любой конечно порождённый унар — независимый базис квазитожеств.

Основным результатом данной заметки является следующая теорема.

Теорема. Любое многообразие коммутативных унарных алгебр конечной сигнатуры имеет конечный базис тождеств.

Унарная алгебра $\mathfrak{A} = \langle A, \Omega \rangle$ называется *коммутативной*, если на ней истинно тождество

$$f(\varphi(x)) = \varphi(f(x)) \quad (1)$$

для любых $f, \varphi \in \Omega$.

Приведём определения, необходимые для доказательства теоремы. В дальнейшем $\mathbb{N}$ означает множество положительных целых чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. По определению полагаем $f^0(a) = \varnothing a = a$, $f^n(a) = f(f^{n-1}(a))$ для произвольных $f \in \Omega$, $a \in A$ и $n \in \mathbb{N}$.

С учётом этих обозначений тождества в теории коммутативных унарных алгебр могут быть лишь следующих двух видов:

- а) $f_1^{k_1} f_2^{k_2} \dots f_n^{k_n}(x) = f_1^{t_1} f_2^{t_2} \dots f_n^{t_n}(x)$,
- б) $f_1^{k_1} f_2^{k_2} \dots f_n^{k_n}(x) = f_1^{t_1} f_2^{t_2} \dots f_n^{t_n}(y)$,

где $k_1, k_2, \dots, k_n, t_1, t_2, \dots, t_n \in \mathbb{N}_0$.

Тождества вида а) называются *регулярными*, а тождества вида б) — *нерегулярными*. Заметим, что тождества вида (1) также являются регулярными.

В частном случае, когда $k_1 = t_1$, $k_2 = t_2, \dots$, $k_n = t_n$, нерегулярное тождество называется *каноническим*.

А. И. Мальцевым [7] и Д. М. Смирновым [8] было установлено взаимно-однозначное соответствие между многообразиями, определяемыми регулярными тождествами, и полугруппами с выделенными порождающими элементами. Идея этого соответствия заключается в следующем.

Пусть V — произвольное многообразие унарных алгебр, заданное непустым множеством $\Omega = \{f_i\}$ ($i \in I$) функциональных символов f_i ($i \in I$) и множеством Σ регулярных тождеств, образованных при помощи символов из Ω и переменного x . Для многообразия V строится полугруппа P_V следующим образом. Каждому функциональному символу f_i из Ω ставится в соответствие порождающий символ v_i , а каждому тождеству из Σ — определяющее соотношение, которое получается «опусканием переменного x » в графической записи тождества. Подробно это соответствие описано в [8]. Там же установлено, что произвольное регулярное тождество истинно в многообразии V тогда и только тогда, когда в полугруппе P_V истинно соотношение, полученное из данного тождества указанным способом. При этом многообразие V конечно аксиоматизируемо тогда и только тогда, когда соответствующая полугруппа P_V является конечно определённой.

Из этих соображений вытекает следующая лемма.

Лемма 1. *Любое многообразие коммутативных унарных алгебр конечной сигнатуры, определяемое произвольной совокупностью регулярных тождеств, имеет конечный базис тождеств.*

Доказательство. Действительно, пусть многообразие V удовлетворяет условию леммы 1. Тождества (1) коммутативности также являются регулярными, поэтому можно говорить о полугруппе P_V . Согласно условию эта полугруппа является конечно порождённой и коммутативной. По теореме Редери [4, с. 172] она является конечно определённой. Это означает, что многообразие V конечно аксиоматизируемо. $\square$

В дальнейшем нам потребуется следующая лемма.

Лемма 2. *Совокупность, состоящая из одного нерегулярного тождества, эквивалентна совокупности, состоящей из двух тождеств, одно из которых регулярное, а другое нерегулярное каноническое.*

Доказательство. Пусть

$$f_1^{k_1} f_2^{k_2} \dots f_n^{k_n}(x) = f_1^{t_1} f_2^{t_2} \dots f_n^{t_n}(y) \quad (2)$$

произвольное нерегулярное тождество. Подставляя в него x вместо y , получим тождество

$$f_1^{k_1} f_2^{k_2} \dots f_n^{k_n}(x) = f_1^{t_1} f_2^{t_2} \dots f_n^{t_n}(x), \quad (3)$$

которое, очевидно, является следствием тождества (2).

Теперь, поскольку левые части тождеств (2) и (3) совпадают, в качестве очевидного следствия из совокупности (2) и (3), получим тождество

$$f_1^{t_1} f_2^{t_2} \dots f_n^{t_n}(x) = f_1^{t_1} f_2^{t_2} \dots f_n^{t_n}(y). \quad (4)$$

Аналогичным образом убеждаемся, что тождество (2) является следствием совокупности тождеств (3) и (4). $\square$

Вернёмся теперь к доказательству основной теоремы.

Зафиксируем произвольное многообразие V коммутативных унарных алгебр конечной сигнатуры $\Omega = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$.

Из лемм 1 и 2 следует, что для многообразия V существует такая совокупность Σ определяющих тождеств, что $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, где Σ_1 — некоторое конечное множество регулярных тождеств, а Σ_2 — некоторое множество канонических нерегулярных тождеств.

Для завершения доказательства теоремы достаточно доказать, что многообразие, определяемое совокупностью тождеств Σ_2 , имеет конечный базис. В действительности ниже будет показано, что конечный базис можно выбрать даже как подмножество в Σ_2 .

Введём некоторые дополнительные определения и обозначения.

Заметим, что каждое каноническое нерегулярное тождество (4) однозначно определяется упорядоченным набором $\bar{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ целых неотрицательных чисел. Будем обозначать это тождество через $i_{\bar{t}}$.

В связи с этим возникает необходимость рассмотреть частично упорядоченное множество $\langle \mathbb{N}_0^n, \leq \rangle$. Элементы $\bar{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ этого множества будем называть для краткости *векторами*. Порядок на этом множестве определяется естественным образом:

$$\bar{t} \leq \bar{k} \stackrel{\text{def}}{\iff} (t_i \leq k_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

для любых векторов $\bar{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ и $\bar{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n)$.

Отсюда непосредственно вытекает следующая лемма.

Лемма 3. Если $\bar{t} \leq \bar{k}$ для некоторых $\bar{t}, \bar{k} \in \mathbb{N}_0^n$, то тождество $i_{\bar{k}}$ является следствием тождества $i_{\bar{t}}$.

Доказательство. Действительно, при $\bar{t} \leq \bar{k}$ тождество $i_{\bar{k}}$ получается из $i_{\bar{t}}$ подстановкой

$$x \mapsto f_1^{k_1-t_1} f_2^{k_2-t_2} \dots f_n^{k_n-t_n}(x), \quad y \mapsto f_1^{k_1-t_1} \dots f_n^{k_n-t_n}(y). \quad \square$$

Далее для любого непустого подмножества $S \subseteq \mathbb{N}_0^n$ положим

$$\tilde{S} = \{\bar{a} \mid (\exists \bar{b} \in S) \bar{b} \leq \bar{a}\}.$$

Лемма 4. Для любого непустого подмножества $T \subseteq \mathbb{N}_0^n$ найдётся такое конечное подмножество $S \subseteq T$, что $T \subseteq \tilde{S}$.

Доказательство. Проведём индукцию по числу n . При $n = 1$ утверждение очевидно, поскольку в этом случае S состоит из наименьшего вектора из T .

Предположим, что утверждение верно для случая, когда T состоит из n -мерных векторов.

Пусть $T \subseteq \mathbb{N}_0^{n+1}$. Для любого вектора $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$ будем обозначать через $\bar{x}'$ вектор $(x_2, x_3, \dots, x_n, x_{n+1})$.

Зафиксируем произвольный вектор $\bar{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n, k_{n+1}) \in T$. Пусть l — некоторое целое число, такое что $0 \leq l \leq k_1$. Обозначим через T_l множество всех векторов из T , у которых первая координата равна l . Полагая $T'_l = \{\bar{x}' \mid \bar{x} \in T_l\}$, получим, что $T'_l \subseteq \mathbb{N}_0^n$, откуда по индуктивному предположению следует, что существует конечное подмножество C'_l , такое что $T'_l \subseteq \widetilde{C'_l}$. Добавляя ко всем векторам, входящим в C'_l и T'_l , первую координату l , получим соответственно множества C_l и T_l , для которых $T_l \subseteq \widetilde{C_l}$.

Положим

$$S_{k_1} = \bigcup_{0 \leq l \leq k_1} C_l.$$

Точно таким же образом определим множества $S_{k_2}, S_{k_3}, \dots, S_{k_{n+1}}$. Затем положим $S = S_{k_1} \cup S_{k_2} \cup \dots \cup S_{k_{n+1}}$. Очевидно, что множество S конечно и $\bar{k} \in \tilde{S}$ по построению. Проверим теперь, что множество S является искомым, т. е. $T \subseteq \tilde{S}$.

Пусть $\bar{t} = (t_1, t_2, \dots, t_{n+1}) \in T$. Тогда если $\bar{t} \geq \bar{k}$, то $\bar{t} \in \tilde{S}$, поскольку $\bar{k} \in \tilde{S}$. Допустим, что $t_j < k_j$ для некоторого $j \in \{1, 2, \dots, n+1\}$. Тогда $\bar{t} \in T_{t_j} \subseteq \widetilde{C_{t_j}} \subseteq \widetilde{S_{k_j}} \subseteq \tilde{S}$. $\square$

Продолжим теперь доказательство основной теоремы. Пусть Σ_2 состоит из канонических нерегулярных тождеств (т. е. тождеств вида (4)). Положим $v(\Sigma_2) = \{\bar{t} \in \mathbb{N}_0^n \mid i_{\bar{t}} \in \Sigma_2\}$.

Согласно лемме 4 найдётся конечное подмножество $S \subseteq T(\Sigma_2)$, такое что

$$v(\Sigma_2) \subseteq \tilde{S}. \quad (5)$$

Положим $I(S) = \{i_{\bar{a}} \mid \bar{a} \in S\}$. Возьмём произвольное тождество $i_{\bar{c}} \in \Sigma_2$. Тогда $\bar{c} \in v(\Sigma_2)$, откуда в силу (5) получаем $\bar{c} \in \tilde{S}$. Это означает, что $\bar{c} \geq \bar{a}$ для некоторого вектора $\bar{a} \in S$. Отсюда по лемме 3 получаем, что тождество $i_{\bar{c}}$ является следствием тождества $i_{\bar{a}} \in I(S)$.

Таким образом, любое тождество из Σ_2 является следствием некоторого тождества, принадлежащего множеству $I(S)$. Поэтому $I(S)$ — искомый конечный базис тождеств многообразия, определяемого совокупностью Σ_2 . Теорема доказана.

Литература

- [1] Горбунов В. А. Алгебраическая теория квазимногообразий. — Новосибирск: Научная книга, 1999.
- [2] Карташов В. К. Квазимногообразия унарных // Мат. заметки. — 1980. — Т. 27, № 1. — С. 7—20.
- [3] Карташов В. К. Квазимногообразия унарных с конечным числом циклов // Алгебра и логика. — 1980. — Т. 19, № 2. — С. 173—193.
- [4] Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. Т. 2. — М.: Мир, 1972.
- [5] Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. — М.: Физматлит, 1962.
- [6] Мальцев А. И. О некоторых вопросах алгебры и математической логики // Междунар. конгр. математиков (Москва, 1966). — М.: Мир, 1968. — С. 217—231.
- [7] Мальцев А. И. Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970.
- [8] Смирнов Д. М. О регулярно определяемых многообразиях алгебр // Алгебра и логика. — 1976. — Т. 15, № 3. — С. 331—342.
- [9] Birkhoff G. On the structure of abstract algebras // Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1935. — Vol. 31, no. 4. — P. 433—454.
- [10] Birkhoff G. Universal algebra // Proc. First Canadian Math. Congress (Montreal, 1945). — Toronto: Univ. Toronto Press. — P. 310—326.
- [11] McKenzie R. Equational bases for lattice theories // Math. Scand. — 1970. — Vol. 27, no. 1. — P. 24—38.
- [12] Tarski A. Equational logic and equational theories of algebras // Contrib. Math. Logic (Proc. Logic Colloq., Hannover, 1966). — Amsterdam: North-Holland, 1968. — P. 275—288.

